EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN EN LAS CÓNICAS

Daniel Ramírez Balandra, Jorge Hernández Márquez
Tecnológico de Monterrey Campus Hidalgo. (México), Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo UAEH. (México)
danielramirez@itesm.mx, jhmpren@yahoo.com.mx

RESUMEN: El manuscrito tiene por objetivo analizar el desarrollo de las habilidades de pensamiento que intervienen en los procesos de demostración matemática empleadas por los estudiantes al abordar los contenidos de aprendizaje de las secciones cónicas. Con los primeros resultados se construyó el Estado del Conocimiento, se definió el Objeto de Estudio y la Perspectiva Teórica. La perspectiva teórica recupera los postulados de la Semiótica (Godino, 2003) y haciendo uso de ellos se pudo elaborar un Esquema Semiótico de Instrucción Matemática (ESIM) que involucra procesos semióticos y relacionarlo con el Esquema de Demostración Personal (EDePe) que involucra procesos de demostración.

Palabras clave: procesos de pensamiento, semiótica, argumentación

ABSTRACT: The paper is aimed at analyzing the development of thinking skills, which take part of math demonstration processes used by students to affront the learning contents of conic sections. Taking into account the first results, it was possible to establish the state of knowledge, the object of study and the theoretical perspective of this investigation. The theoretical perspective recovers the Semiotic postulates (Godino, 2003). The use of these postulates allowed elaborating a Math Training Semiotic Schedule that involves semiotic processes, and relating them to the Personal Demonstration Schedule that involves demonstration processes.

Key words: thinking processes, semiotics, argument

Introducción

Las habilidades de pensamiento involucradas en el proceso de una demostración matemática pueden aportar información sobre cómo éstas se logran articular. Desafortunadamente la poca, o casi nula, presencia de la demostración en las prácticas de los profesores es una constante en todos los niveles educativos; esto como posible consecuencia del currículo, creencias de los profesores, formación inicial de los mismos, falta de interés de los estudiantes, errores y deficiencias de los mismos, entre otras. La forma en cómo los estudiantes procesan los significados, signos, símbolos y el sentido que se les dé a ellos puede indagarse mediante sus prácticas argumentativas involucradas en una actividad demostrativa. La naturaleza matemática, histórica y epistemológica de las secciones cónicas es rica en significados, representaciones y sintaxis del lenguaje matemático que ayuda en el proceso de investigación de estas habilidades de pensamiento.

Alcances del Estado del Conocimiento

Este escrito es parte de un proyecto de investigación que se desarrolla como tesis doctoral, en donde inicialmente se tienen avances en relación al estado del conocimiento que da cuenta del periodo 1993 – 2014. Para su elaboración se revisaron 46 documentos que se obtuvieron de fuentes de investigación diversas tales como incluyen artículos de revistas, libros, tesis doctorales, actas de congresos, etcétera. Con la información categorizada y analizada se construyeron cinco categorías analíticas: i) Historia de la demostración matemática, ii) Epistemología de la demostración matemática, iii) La demostración matemática en el entorno curricular, iv) Procesos de enseñanza de la demostración matemática y v) Procesos de aprendizaje de la demostración matemática; en cada una se logran identificar las ausencias del conocimiento que está en relación con la demostración matemática.

Uno de los alcances que presenta la investigación emana desde este estado del conocimiento, en donde se explicitan los huecos o vacíos de conocimiento encontrados del objeto de estudio, los investigadores de donde se encontraron los trabajos más significativos para esta investigación son Larios (2006) Crespo (2007) y Recio (2001) los principales hallazgos son: a) La demostración matemática, está en constante evolución. Tal evolución dependerá del contexto tecnológico, cultural y social de los involucrados en su tratamiento.

b) La mayoría de las veces no existe un método único para demostrar algo, ello dependerá de la correcta aplicación de cada método demostrativo.

c) Debería existir una apertura a la definición, uso y significado de la demostración matemática para los matemáticos básicos y redescubrirla didácticamente para los docentes. d) El Software por sí sólo no hace demostraciones, obedece al que lo manipula que es este último el que las logra hacer. El software facilita la medición, graficación y los cálculos, pero el usuario es el que se auxilia de estos, los interpreta y logra demostrar.

e) Trabajar a la demostración en la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas podría proveer a las nuevas generaciones de herramientas y habilidades matemáticas valiosas para la demostración.

f) Es importante indagar sobre las creencias, afinidades y actitudes del profesorado en relación a la demostración desde las matemáticas como desde la didáctica.

g) Existe la necesidad de introducir en todo el currículo de todos los niveles educativos, conceptos y procedimientos para favorecer en los estudiantes el logro de habilidades para demostrar, conjeturar y argumentar; obviamente, en cada nivel educativo en donde se esté trabajando se debe exigir un rigor matemático adecuado.

h) El tema de las secciones cónicas de bachillerato es relevante debido a los significados y al sentido que se les pueda dar en la vida cotidiana ya que estos conceptos poseen diferentes representaciones y aplicaciones.

i) No considerar a la demostración dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje podría privar a los estudiantes de un instrumento matemático de validación dentro de las matemáticas.

j) El uso correcto de los símbolos y signos matemáticos en las actividades demostrativas de los estudiantes es necesario para que el lenguaje matemático en el aula sea comprendido por todos.

k) Proveer a los estudiantes de un lenguaje matemático suficiente en todos los niveles educativos les podría permitir leer y comprender los libros de matemáticas que se utilizan y las demostraciones que en ellos se realicen.

l) Los cambios curriculares que ha tenido la educación mexicana, particularmente en el Nivel Medio Superior, probablemente hacen a la matemática más cercana a los estudiantes, pero no necesariamente los fortalecen en relación a la demostración.

m) El guiar a los estudiantes con el método heurístico a experimentar, descubrir, conjeturar, analizar, tal vez sea necesario y probablemente suficiente; pero el que se entrelacen todas estas habilidades y lleguen a la demostración del objeto analizado podría ayudar a construir o reconstruir nuevos significados.

n) Existen diversos errores y dificultades que presentan los estudiantes cuando se les propone una demostración que van desde falta de conocimientos previos, significados incorrectos atribuidos a ciertos conceptos matemáticos, mal uso del lenguaje matemático, reconocimiento de lo que es demostrar y la falta de métodos de demostración principalmente.

La revisión de la literatura anterior permitió plantear la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo las habilidades de observar, conjeturar, validar y argumentar permiten en los estudiantes construir procesos de demostración matemática en el tema de las cónicas? Asimismo, dentro de estas habilidades es posible analizar las argumentaciones que se suscitan en el aula como otro factor clave en el proceso de demostración y generar interpretaciones al respecto sobre los procesos involucrados en el aprendizaje de la demostración en las secciones cónicas.

Delimitación del objeto de estudio

El concepto de demostración ha tenido numerosas evoluciones a lo largo de su recorrido histórico, desde sus inicios en las culturas de oriente medio su uso obedecía a la validación y la justificación de la aseveración realizada, era un uso más como para convencer a los demás que como una forma de enseñanza. Junto con la demostración, la educación escolar también ha estado en constante evolución, vista desde las Ciencias de la Educación, impactando esto en algunos de sus elementos como el currículum, la evaluación, las políticas educativas junto con sus reformas y demás. Todas estas transformaciones han tenido consecuencias en la educación de los jóvenes mexicanos, en especial atención se volteará la mirada a los estudiantes del Nivel Medio Superior y particularmente a los que cursen la materia de Geometría Analítica en el tema de las Secciones Cónicas.

Se considera el tema de las secciones cónicas debido a la naturaleza de los significados del tema, los contenidos que anteceden a las cónicas son el álgebra y la geometría plana, estos dos son necesarios para que puedan trabajarse las secciones cónicas con sus respectivos significados y manejo de símbolos y signos. Como una consecuencia de la revisión anterior, el poco tratamiento de la demostración en el aula en todos los niveles educativos, la casi nula presencia de la demostración en el currículo particularmente en bachillerato, la formación inicial del profesor de matemáticas, los malos resultados de la educación mexicana reflejados en las pruebas estandarizadas internacionales derivados tal vez de la poca actividad de reflexión y el pensamiento analítico de los estudiantes y la ausencia de atención a la construcción de significados por parte de los mismos son parte del problema de investigación.

Perspectiva teórica

Una postura que se emplea para la investigación de la cognición matemática es la Didáctica de las Matemáticas que "*se interesa por identificar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción*" (Godino, 2003, p.28). La relevancia del signo, de las representaciones, de la comprensión o conocimiento y del sentido que se les asignen a los conceptos en las clases de matemáticas es relevante para el aprendizaje de las mismas y para que todas estas interactúen en armonía. En el aula debe de hablarse un mismo lenguaje por todos los participantes, ya que, si esto no se tiene difícilmente podrán dar significados a conceptos que no se entienden. Un enfoque, como consecuencia de la pregunta de investigación que se pretende emplear para analizar estos significados, signos, símbolos, lenguajes y representaciones es la Semiótica.

La perspectiva teórica que orienta el trabajo está basada en la semiótica y su relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre las herramientas semióticas que propone Godino (2003) incluidas en los procesos cognitivos, son el significado del símbolo y de los signos relacionadas en los procesos del discurso matemático en el aula en donde entran en juego estas interacciones entre la instrucción del profesor y el proceso cognitivo del estudiante que recibe la instrucción para su posterior análisis y comprensión a través de los signos y símbolos que ambos actores utilizan para comunicarse convirtiéndola entonces en un lenguaje matemático en el que ambos personajes deben de entenderlo de la misma manera. En el apartado del Marco Teórico se elaboran dos esquemas, inicialmente el Esquema de Demostración Personal (EDePe) que aborda los estadios que se pueden tener en el proceso de demostración por parte de un estudiante y relacionado con este se tiene al Esquema Semiótico de Instrucción Matemática (ESIM).

Una posible manera en la que un estudiante pueda desarrollar prácticas demostrativas en entornos favorables es que éste tenga un esquema de prueba adecuado que le ayude en el proceso de la demostración (Ibañes y Ortega, 2003). Un esquema de prueba se puede considerar como el proceso que se lleva a cabo para llegar a la demostración. Este esquema contiene varias actividades relacionadas íntimamente y secuenciadas de tal manera que el último eslabón de la cadena sea la demostración. El alumno en cada momento del proceso tiene un esquema de prueba que, con una instrucción apropiada, va evolucionando y paralelamente evoluciona también el conocimiento del alumno respecto a la demostración, como lo mencionan Ibañes y Ortega (2003). Cañadas, Castro y Castro (2007) se basan en Polya para identificar unos pasos del proceso de razonamiento, estos son i) Trabajo con casos particulares. ii) Organización de casos particulares. iii) Identificación de un patrón. iv) Formulación de conjetura. v) Justificación de conjetura (basada en casos particulares). vi) Generalización. vii) Demostración.

Estos pasos se pueden encontrar en el Esquema de Demostración Personal (EDePe) que se va a tomar en esta investigación. También contiene elementos del propuesto por Álvarez, Ángel, Carranza y Soler (2014), algunos otros de Alvarado y González (2010) y elementos del modelo de Toulmim, que al momento de adecuarlos se obtiene este esquema de prueba que se puede expresar gráficamente de la siguiente forma.

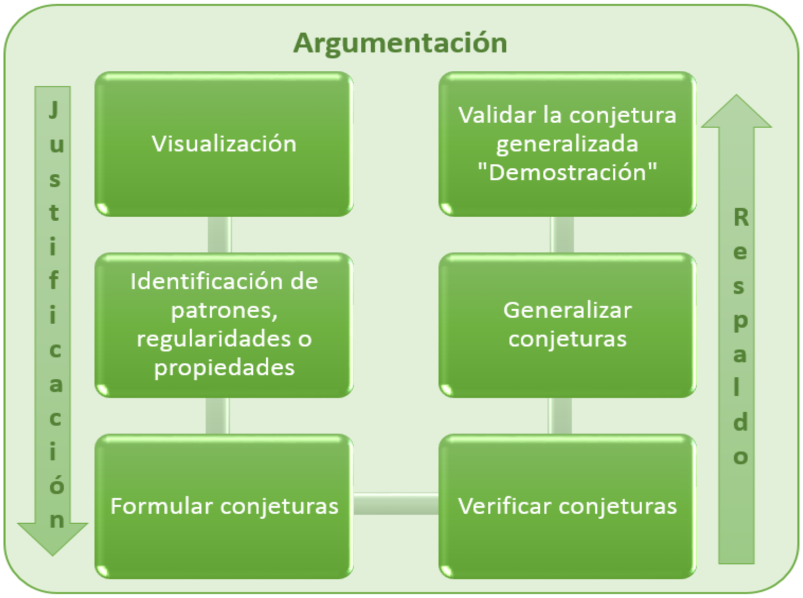

Figura 1. Esquema de Demostración Personal (EDePe)

El Esquema de Demostración Personal (EDePe) anterior se explica de la siguiente manera. Básicamente, la visualización consiste en observar el objeto matemático e identificar sus principales características, de las cuales se crean imágenes mentales, todo esto surge debido a que el ser humano tiene ya construidos datos o bases que al observar algo le permite describirlo, se encuentran también en este estadio a la visualización y el análisis visual.

Posteriormente, la identificación de patrones, relaciones, regularidades o propiedades provee de cierta información de lo observado que permite tipificar aquello que es relevante y común. Seguido de esta identificación está el poder formular conjeturas, consecuencia de la observación y la identificación. Paralelo a este proceso de observar, explorar y formular una conjetura, se encuentra la Justificación, esta justificación establece una relación entre los datos y la formulación de conjeturas, dándole solidez a la conjetura.

La verificación de las conjeturas sirve para poder llegar a convencerse de que la conjetura planteada sea verdadera, particularmente en el contexto particular en el que fue planteada. Una vez que la conjetura fue verificada se sigue a generalizar conjeturas, en esta parte, se pretende que se puedan cumplir las conjeturas ya no en ese contexto en particular donde fue planteada, sino que se pueda cumplir en cualquier contexto en general. Una vez hecho esto y por último se tiene que validar la conjetura generalizada, es decir, llegar a una demostración matemática, este es el último eslabón del esquema de prueba.

Paralelo al proceso de verificar conjeturas, generalizar conjeturas y verificar las conjeturas ya generalizadas, está desarrollándose un Respaldo que sirve de base a la justificación y su función es la de presentar una mayor evidencia, es decir, se está gestando algo ya mucho más sólido y construido matemáticamente hablando. Cabe mencionar que el proceso de argumentación está presente en todos los eslabones del esquema de prueba, ya que no es exclusivo de alguno de ellos, en cada eslabón se tiene que argumentar lo que está aconteciendo

Particularmente se está hablando de las Matemáticas por la naturaleza de la investigación. Siguiendo esta línea se hablará de la demostración, de todos los procesos cognitivos, significados, sentido, símbolos y signos, del lenguaje entre otros conceptos que permitirán al estudiante conjeturar, observar, validar, generalizar y demás habilidades.

En su libro Demostrar es un problema o el problema es demostrar, Víctor Larios da su concepción de demostración, citando "*se puede decir, de una manera breve, que una demostración matemática está constituida por una serie de argumentos que tienen, tanto en su contenido como en su estructura, particularidades muy específicas*" (Larios, 2006, p.22). Hace hincapié que lo relevante del proceso de demostración; no es en sí el llegar a demostrar, sino el estudiar las posibles justificaciones que los alumnos proporcionan para revisar lo que ellos están entendiendo por demostrar. Desde la perspectiva teórica se pretende dar ese sustento al Esquema de Demostración Personal con el Esquema Semiótico de Instrucción Matemática, el ESIM provee de información sobre las concepciones teóricas que tiene un estudiante hacia sus procesos de pensamiento, las relaciones entre concepto, representaciones, comprensión, signo, significado, sentido y lenguaje podrían relacionarse con las de observación, identificación de patrones, regularidades o propiedades, formular conjeturas, validar conjeturas, generalizar conjeturas y argumentación.

El Esquema Semiótico de Instrucción Matemática se explicita a continuación.

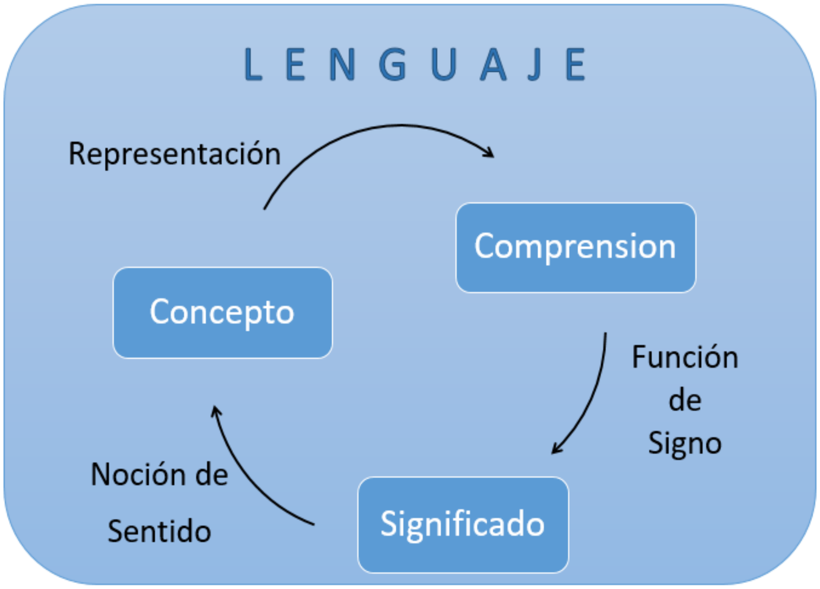

Figura 2. Esquema Semiótico de Instrucción Matemática (ESIM)

En este ESIM, se observan las interacciones que se tienen cuando dentro de las Matemáticas un concepto es presentado a un estudiante. Al momento de presentarle el concepto éste se puede representar, en primera instancia interna y luego se puede hacer externo en diversas maneras. Cuando estas representaciones externas, ubicadas en cierto contexto y bajo la institución antes mencionada, son explicitadas por el estudiante de forma correcta, entonces el estudiante las comprende, existen dos tipos de comprensión, comprensión instrumental y relacional; la comprensión instrumental se entiende como algo fácil de elaborar o de comprender ya que básicamente lo que hace es aplicar algún algoritmo o regla o "ley" que cumple bajo ciertas condiciones en matemáticas; este nivel de conocimiento es básico y sólo se queda en lo operacional, en saber utilizar un instrumento para obtener algún resultado. Mientras que la comprensión relacional logra movilizar estos saberes hacia nuevos campos, no necesariamente específicos de las matemáticas, en donde se le pueda dar solución a algún problema en cierto contexto y bajo ciertas condiciones naturales. Cuando un estudiante logra una comprensión correcta, se le aplica una función de signo para que este concepto cobre un cierto significado al momento. Cuando el estudiante le da significado al concepto y lo logra utilizar para elaborar algo en general entonces le está brindando una noción de sentido (el uso que se le otorga al significado), la cual le permitirá tener una nueva conceptualización y así ad infinitum, sin olvidar que dentro de todas estas interacciones el lenguaje que se hable entre los sujetos permitirá el poder transitar en cada uno de estos momentos del esquema. El leguaje denota expresión, comunicación, utilizar signos y símbolos para interactuar con el otro. El lenguaje entonces se puede categorizar en, al menos, dos tipos importantes. El lenguaje ordinario que es el que cotidianamente se utiliza, tiene la función de comunicar. No existe una diferencia de lenguaje ordinario bueno ni malo ya que el objetivo de comunicar se cumple. El lenguaje especializado es el que conjuga ciertas reglas gramaticales asociadas a una institución (como las matemáticas). Este lenguaje se emplea en un contexto particular socialmente consensuado y aceptado. En este tipo de lenguaje sí existe una diferencia entre el lenguaje especializado básico y el lenguaje especializado avanzado. En el lenguaje especializado básico, particularmente en el aula de matemáticas, se tienen como referencias las frases "ley, regla, fórmula, así está en el libro" entre otras. En el lenguaje especializado avanzado, igualmente desde las matemáticas, se tienen a la argumentación, justificación, deducción, validez, rigor, sustento, entre otras; en este nivel se espera que todas las conjeturas que se generen se intenten validar mediante un pensamiento matemático analítico y se emplee un lenguaje matemático con el rigor que el nivel exige.

Reflexiones y conclusiones

Para que la demostración matemática en el bachillerato se pueda suscitar tienen que converger al menos el currículo, la evaluación, los profesores y los alumnos, con la finalidad de favorecer el desarrollo de habilidades como observar, conjeturar, validar y argumentar. En diversos documentos revisados en el estado del conocimiento se da evidencia de las deficiencias que tienen los estudiantes de bachillerato al ingresar a la educación superior, por ejemplo, cuando se les solicita que hagan demostraciones matemáticas. Pero esas carencias, en algunos casos, las padecen los profesores que imparten las clases de matemáticas. Si el profesor no concibe a la demostración como algo que pueda favorecer el aprendizaje no desarrollará los sentidos y significados propios del lenguaje matemático en sus estudiantes. Lo que permite identificar estos sentidos y significados es todo el proceso que el estudiante siguió para llegar a una demostración; en el camino tuvo que observar, analizar, categorizar, plantear una conjetura y probarla de manera general. La demostración no es un proceso acabado o repetitivo; al contrario, es un proceso en constante evolución y bien utilizado permite analizar procesos cognitivos de los estudiantes, el análisis de estos procesos desde la semiótica da indicios de la forma en cómo se perciben estos significados, representaciones, sentido. El Esquema de Demostración Personal puede servir de guía para la identificación del proceso de demostración, mientras que el Esquema Semiótico de Instrucción Matemática podría ayudar en el sustento teórico desde la semiótica para el Esquema de Demostración Personal.

Referencias bibliográficas

Alvarado, A. y González, M. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: Estudio de un caso. *Enseñanza de las ciencias, 28 (1),* 73-84.

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, M. N. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números, 85,* 75-90.

Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de la ESO en el problema de las baldosas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, (pp. 283-294). San Cristóbal de la Laguna: SEIEM.

Crespo, C. R. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada.

Ibañes, M. J. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 21 (1)*, 49-63.

Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar.* Querétaro: Escuela de Bachilleres, U.A.Q.

Recio, A. (2001). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M.F. Moreno (Ed.), *Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática*, (pp. 29-43). Almería: Universidad de Almería Servicio de Publicaciones.