EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES: DOS ELEMENTOS IMPORTANTES EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS SOBRE LOS NÚMEROS REALES

EDITH TATIANA PONGUTÁ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2014

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES: DOS ELEMENTOS IMPORTANTES EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS SOBRE LOS NÚMEROS REALES

EDITH TATIANA PONGUTÁ
2014182026

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar al título de Especialista en Educación Matemática

Asesor
WILLIAM ALBERTO JIMÉNEZ GÓMEZ
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2014

Nota de aceptación:

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, 20 de noviembre de 2014.

Quiero dedicar este trabajo de grado a mi familia, mi hijo Tomás, mi esposo Wilfredo y mi madre Reinalda, quienes toleraron los muchos días de ausencia y aquellos de presencia que no pude compartir completamente, por haber hecho su mayor y mejor esfuerzo por ayudarme y apoyarme en alcanzar este objetivo.

En primer lugar quiero agradecer a Dios por permitirme alcanzar un logro más en mi vida profesional y personal, de igual manera agradecer a mi familia por su apoyo a lo largo de este proceso.

Igualmente agradecer a la Universidad Pedagógica Nacional por crear y mantener programas de formación docente, los cuales buscan enaltecer la profesión docente para que esta redunde en la formación integral de nuestros niños, niñas y jóvenes.

También un agradecimiento muy especial a mis docentes, Edgar Alberto Guacaneme, Yeison Alexander Sánchez, William Alberto Jiménez y José Leonardo Ángel; quienes fueron parte fundamental en la adquisición de nuevos conocimientos y el cuestionamiento de aquellos que creía tener. Muchísimas gracias por compartir sus saberes y permitirme tomar mayor conciencia del profesionalismo que debe envestir a todo docente. No he olvidado esa primera pregunta, a la cual seguiré buscándole su mejor respuesta.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Existencia y unicidad: dos elementos importantes en el estudio de ecuaciones algebraicas sobre los números reales."*** Presentado por la estudiante:

Edith Tatiana Pongutá - 2014182026

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **45** puntos.

Observaciones:

____

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2014.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) ______________________ *WILLIAM JIMÉNEZ*

Jurado:

Profesor(a) Edgar A. Guacaneme S. *EDGAR GUACANEME*

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de especialización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Existencia y unicidad de soluciones: Dos elementos importantes en el estudio de las ecuaciones algebraicas sobre los números reales.
Autor(es)	Pongutá, Edith Tatiana
Director	Jiménez Gómez, William Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 66 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Existencia; Unicidad; Ecuación; Teorema del valor medio; Teorema del valor intermedio.

2. Descripción
El trabajo de grado que se propone en el marco de la Especialización en Educación Matemática, aborda la necesidad de estudiar la ecuación como objeto matemático fijando la atención en los elementos de existencia y unicidad de soluciones. Para este propósito se realizó una indagación del desarrollo histórico de los elementos de existencia y unicidad de soluciones en diferentes civilizaciones, hasta llegar al estudio de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para posteriormente analizar la propuesta curricular del estudio de las ecuaciones algebraicas en Colombia y una Institución Educativa del municipio de Yopal – Casanare.

3. Fuentes

Algunas de las fuentes utilizadas son:

Apostol, T. (1988). *Calculus.* Santafé de Bogotá: Reverté Colombiana S.A.

Boyer, C. B. (1969). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Hofmann, J. E. (2002). *Historia de la Matemática: Desde el comienzo hasta la revolución francesa* (1 ed.). México: Limusa S.A.

Leithold, L. (1994). *El cálculo.* México: Oxford University Press.

Miniterio de Eduación Nacional. (2006). *Documento N° 3. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciecias y Ciudadanas* (1 ed.). Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas.* México: Critica.

4. Contenidos

El presente trabajo de grado se ha ordenado en seis capítulos como se muestra a continuación:

En el **capítulo uno** y **dos** se encuentran la justificación y los objetivos del trabajo de grado.

En el **capítulo tres** se presenta los resultados de la indagación histórica realizada sobre el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones.

El **capítulo cuatro** contiene el análisis sobre la propuesta curricular hecha por el Ministerio de Educación Nacional y una Institución Educativa de Yopal para la enseñanza de las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones.

El **capítulo cinco** presenta los teoremas que garantizan la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación a partir de algunos libros de Cálculo, para identificar similitudes, diferencias y el trato dado a la existencia y unicidad de soluciones.

El **capítulo seis** muestra las conclusiones relacionadas con los objetivos del trabajo de grado y los capítulos desarrollados.

Finalmente se presenta la bibliografía que contribuyó en la realización del presente trabajo.

5. Metodología

La metodología de este trabajo de grado partió de la consulta de documentos que permitieron indagar en la historia de civilizaciones como la egipcia, babilónica, china y griega, y la matemática del siglo XVII, el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones. Luego se analizó los derroteros curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para la enseñanza de las ecuaciones en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias; y la revisión de la propuesta curricular trabajada por una Institución Educativa de carácter oficial del municipio de Yopal – Casanare, la cual se llevó a cabo por medio de una encuesta y de diálogos informales con los docentes de Matemáticas. Posteriormente se estudian algunos textos escolares de Educación Básica secundaria, Media y libros de cálculo de Educación Superior, los teoremas que garantizan la existencia y unicidad de soluciones, realizando reflexiones y conclusiones sobre la importancia y pertinencia del estudio de estos dos elementos al abordar las ecuaciones.

6. Conclusiones
Al revisar la historia de las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones, se puede comprender que el estudio de este objeto matemático no consiste únicamente en aplicar métodos de solución para dar respuesta a un problema o ejercicio propuesto. El estudio de las ecuaciones va más allá, como lo demuestran civilizaciones antiguas como la egipcia, babilónica, griega y china; donde el estudio de las ecuaciones permitió avances en la escritura y simbología de la época, que posteriormente se convirtió en nuestro lenguaje aritmético y algebraico. Las ecuaciones también aportaron en la identificación de tipos de ecuaciones con los cuales, cada civilización antigua, pudo conocer y trabajar problemas en los cuales tenían la certeza de obtener una única solución; en el caso de los griegos, al menos una solución; de igual manera, las ecuaciones, tuvieron participación en el descubrimiento de nuevos conjuntos numéricos. Razón por la cual, las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones no pueden ser tratados como simples herramientas algorítmicas, necesarias y útiles para hallar valores numéricos de variables o incógnitas; el estudio de la existencia y unicidad de soluciones en una ecuación algebraica debe ser visto y estudiado desde una perspectiva analítica, donde se debe analizar el tipo de ecuación que se está proponiendo, el conjunto numérico en el cual se encuentra la ecuación y desde el contexto de donde es propuesta, razonar sobre la existencia de soluciones y el número de soluciones que puede llegar a tener. Para lograr estudiar las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad en la Educación Básica y Media, es necesario que los docentes conozcan y se apropien de los derroteros curriculares propuestos por el MEN, para mejorar o reformular las propuestas curriculares de las instituciones educativas del país; buscando pasar de una ecuación como herramienta algorítmica o una ecuación como objeto matemático que ayude a desarrollar y potenciar los procesos de razonamiento, modelación, comunicación y resolución de problemas de los niños y niñas que están siendo formados en nuestras escuelas y de los cuales se espera la adquisición de un pensamiento matemático ciudadano.

Elaborado por:	Edith Tatiana Pongutá
Revisado por:	William Alberto Jiménez Gómez

Fecha de elaboración del Resumen:	28	10	2014

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

pág.

LISTA DE GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

En el surgimiento y desarrollo de las primeras culturas, las Matemáticas aparecieron debido a la necesidad que tenía el hombre por establecer y registrar cantidades, tiempos y, en sí, comportamientos como la duración de las estaciones, el crecimiento de la población, el tiempo de almacenamiento de los alimentos, entre otros; es decir, las Matemáticas hacían parte de la vida diaria y poco a poco se convirtieron en la herramienta que permitió representar cantidades ya fuesen grandes o pequeñas, realizar operaciones y solucionar problemas de la cotidianidad.

Pero el hombre observa que las Matemáticas pueden ser estudiadas de manera independiente del contexto concreto, es decir, se pueden estudiar de forma abstracta; este estudio abstracto de las Matemática tuvo como base un sistema de lenguaje, escritura y conteo que permitieron la incorporación de procesos aritméticos, que posteriormente llevaron al desarrollo y establecimiento de generalidades que llegaron a ser teoremas y axiomas matemáticos. Como ejemplo de esta matemática abstracta, en civilizaciones antiguas se encuentran obras como la *Aritmética* de Diofanto y *Elementos* de Euclides. Aunque el estudiar y ver la matemática de forma abstracta no implicó que esta se desligara de forma definitiva de la cotidianidad del hombre; por el contrario, la continua búsqueda de explicaciones matemáticas a fenómenos del mundo físico ha llevado a un desarrollo continuo y avanzado de la matemática.

De manera específica las ecuaciones, elemento estudiado comúnmente en las Matemáticas, tienen un desarrollo similar, en un principio son abordadas como elementos útiles para resolver un problema práctico, es decir, la ecuación es vista y utilizada como la herramienta matemática que permite hallar la respuesta (raíz[1]) al problema pero no es considerada como objeto de las Matemáticas, esto de acuerdo con algunos documentos consultados sobre Historia de la Matemática como *Historia de la Matemática* de Carl Boyer (1969), *Historia de la Matemática: Desde el comienzo hasta la revolución francesa* de Joseph Hofman (2002), *Historia de las Matemáticas* de Ian Stewart (2008), entre otros.

En su etapa inicial, las ecuaciones son una herramienta de las Matemáticas que, aparentemente, no se problematiza ni estudia dentro del contexto mismo de las Matemáticas y tampoco fuera de él, lo único que se hace es tratar de abordar distintos ejemplos de problemas y ejercicios de la cotidianidad que requieren el uso de ecuaciones para hallar la solución; de los ejemplos encontrados, se pueden identificar algunos patrones de ecuaciones y algoritmos de solución, lo que en la actualidad pueden ser reconocidos como punto de partida o primer

[1] Valor numérico que satisface la igualdad en una ecuación.

acercamiento a la formalización de los tipos de ecuaciones y sus métodos de solución.

Continuando con la consideración de la ecuación como una herramienta que ayuda en la solución de problemas, se hace necesario e importante estudiar con detenimiento si todas las ecuaciones propuestas, dentro o fuera de un contexto matemático, tienen solución, es decir, conocer si existe solución a la ecuación planteada; y sí es así, poder identificar si la solución es única o por el contrario, la ecuación tiene varias o infinitas soluciones; esto conlleva a conocer y estudiar las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación algebraica, en otras palabras, considerar la ecuación como objeto matemático y no solo como herramienta.

Para conocer las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones algebraicas, se realiza un rastreo del estudio y evolución de la matemática abstracta, fijando la atención en la concepción de la ecuación a través de las evidencias encontradas de civilizaciones antiguas y tres representantes de la matemática del siglo XVII; lo que permite conocer el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad a través de la historia y poder comparar estas concepciones con el estudio de las ecuaciones en el contexto escolar actual, es decir, comparar e identificar si en las instituciones educativas el estudio de las ecuaciones se hace desde una perspectiva algorítmica donde lo que importa es aplicar un método para hallar una solución sin preguntarse con anterioridad si tiene solución y cuántas soluciones puede tener; o desde una perspectiva analítica donde se prioriza la necesidad de estudiar la estructura en la que se plantea la ecuación y las condiciones que garantizan la existencia de soluciones y su unicidad.

1. JUSTIFICACIÓN

Desde una perspectiva histórica, el estudio de las ecuaciones se caracteriza por analizar y cuestionar la existencia y unicidad de soluciones en los problemas que se modelan con ecuaciones, para luego identificar tipos de ecuaciones e intentar construir métodos que permitan hallar la solución o soluciones al problema. Sin embargo, en la actualidad los matemáticos y estudiosos de las ecuaciones han logrado construir teorías que les han llevado a dejar de preguntarse si la ecuación a resolver tiene solución o no, es decir, no se dedica tiempo a razonar sobre la existencia y unicidad de soluciones en la ecuación, sino que se pasa directamente a utilizar un método que permita hallar la solución; a diferencia de lo que ocurría con las ecuaciones en la antigüedad.

Esto lleva a cuestionarnos e indagar en la Educación Básica y Media lo que sucede con el estudio de las ecuaciones, pretendiendo identificar si el trato dado a las ecuaciones en estos niveles de enseñanza está basado en fórmulas y métodos de solución, o si por el contrario se cuestiona la existencia y unicidad de soluciones. Es decir, se intenta conocer si en el ámbito escolar la ecuación es tratada como herramienta o como objeto matemático, lo cual va a permitir fortalecer el conocimiento y saber disciplinar sobre la ecuaciones, de docentes y estudiantes, permitiendo mejorar y potenciar el quehacer del docente de matemáticas.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Realizar una reflexión sobre el estudio de las ecuaciones algebraicas y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones y la forma como son abordados en la Educación.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones, a través de un recorrido por las Matemáticas antiguas y del siglo XVII.

- Realizar una reflexión sobre la forma como la existencia y unicidad de soluciones en una ecuación son abordados en el currículo colombiano, teniendo como base de esta reflexión la manera como estos elementos de las ecuaciones son concebidos en la Institución Educativa Lucila Piragauta.

- Estudiar las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia y unicidad de soluciones (Teoremas del valor medio e intermedio) en una ecuación algebraica en los números reales.

- Identificar el uso de software para la solución de ecuaciones algebraicas en la Educación Básica y Media

3. RECORRIDO HISTÓRICO

Para conocer el trato dado a las ecuaciones, a continuación se realiza un breve recorrido histórico que permite conocer el estudio y evolución de las ecuaciones algebraicas y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones. Este recorrido por la historia se inicia en cuatro civilizaciones que tuvieron presencia alrededor del siglo VI a.C. y finaliza con los aportes realizados por tres representantes de la matemática del siglo XVII. La finalidad de esta revisión histórica es conocer el desarrollo y transformación que en cada una de estas etapas propuestas, ha tenido la ecuación y como a través de ellas se ha garantizado la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones algebraicas.

3.1. MATEMÁTICAS ANTIGUAS

En esta etapa, se presenta la información recogida del avance histórico en Matemáticas realizado por las civilizaciones egipcia, babilónica, china y griega, donde se fijó la atención en la forma como eran abordadas las ecuaciones y como los matemáticos de estas civilizaciones garantizaban la existencia de soluciones en las ecuaciones que trabajaban y si consideraban únicas estas soluciones.

3.1.1. Una mirada en la civilización egipcia. Esta civilización se desarrolló en el noreste de África a lo largo del río Nilo hace aproximadamente 5.000 años. Los egipcios hicieron grandes construcciones, se preocuparon por preservar los cuerpos de sus faraones por medio de la momificación, crearon un artístico método de escritura y desarrollaron grandes avances en Astronomía, Geometría, Aritmética y Matemáticas.

De ellos quedaron manuales prácticos de las Matemáticas como los papiros Kahun (perteneciente a la XII dinastía), Ajmin (escrito hacia el 400 a.C.), el rollo de cuero y, los más conocidos, el papiro de Rhind o Ahmes y el de Moscú (datan del año 1650 a.C. – 1800 a.C. Pero los conocimientos que allí aparecen pueden ser fechados del año 3000 a.C., y son en la actualidad la principal fuente de conocimiento acerca de cómo contaban, calculaban, medían y operaban con números, particularmente naturales; “ellos tenían dos sistemas de escritura, uno hierático y uno demótico, desarrollaron el primer sistema de numeración en base 10 y no tenían símbolo para el cero” (Pérez, 2009, p. 15).

Figura 1. Fragmento de un papiro egipcio.

Fuente: Recuperado de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm el 23 de noviembre de 2014.

Los egipcios consignaron en sus papiros problemas relacionados con la vida cotidiana que se refieren al reparto de granos, animales u hogazas[2], fermentación del pan y la cerveza, almacenamiento de productos alimenticios, entre otros. La mayoría de estos problemas se resuelven haciendo uso de las ecuaciones lineales, que en lenguaje algebraico de hoy serían ecuaciones de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$. Representaban lo desconocido (variable) con la palabra "aha" o "montón", que significa cantidad. Al solucionar problemas que involucraban este tipo de ecuaciones aplicaban el algoritmo de la *regula falsa* o de la falsa posición; este algoritmo utilizado por los egipcios consistía en proponer una solución falsa al problema, con la solución falsa se obtenía un resultado falso de la ecuación el cual era ajustado por medio de lo que se conoce hoy como proporción, y se hallaba la solución correcta. El siguiente ejemplo, en notación actual, muestra la interpretación del algoritmo:

Halla un número tal que si le sumamos su quíntuplo da 36.

Para hallar la solución, tomamos $x = 2$ como *solución falsa,* se sustituye en el problema y se obtiene $2 + 5 \cdot 2 = 12$, donde 12 es un *resultado falso*; ahora se propone la proporción

$$\frac{\text{Solución falsa} \longrightarrow 2}{\text{Resultado falso} \longrightarrow 12} = \frac{x \longleftarrow \text{Solución correcta}}{36 \longleftarrow \text{Resultado inicial}}$$

de donde,

$$\frac{2 \cdot 36}{12} = x$$

obteniendo como solución al problema, el número 6.

[2] Pan grande de forma redondeada

El planteamiento del problema anterior es similar a algunos de los problemas encontrados en los papiros, de los cuales se percibe, en el desarrollo de los problemas, la falta de un método general para solucionar ecuaciones; aunque en los ejemplos que aparecen en los papiros se evidencian reglas para solucionar ciertos tipos ecuaciones expuestos en un lenguaje natural y específico para los datos del ejemplo, buscando a través del desarrollo continuo de ejemplos, muy seguramente, la generalización de algunos tipos de ecuaciones y su método de solución.

De las evidencias encontradas en los papiros, se puede suponer que los egipcios lograron conocer cuándo el planteamiento de un problema los llevaba a la construcción de una ecuación y cuándo esa ecuación tenía solución en el conjunto de números que trabajaban, ya que no se encuentra en los papiros, ningún problema modelado con ecuaciones sin solución; en estas evidencias también se encuentra que la solución de los problemas resueltos con ecuaciones están asociados a una única solución. Como lo muestra el replanteamiento del enunciado y solución del problema 24 del papiro de Rhind, que se presenta a continuación;

Calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19.

En notación actual tenemos la ecuación $x + \frac{1}{7}x = 19$ y la solución se hallaba como sigue:

> El escriba Ahmes emplea el método de "regula falsi" o regla de la falsa posición, que como se mencionó anteriormente, consiste en calcular el valor de la incógnita a partir de un valor estimado. En este caso en particular el autor comienza con un valor estimado de 7 y calcula $7 + 7 \cdot \frac{1}{7}$ y obtiene 8. Entonces, para averiguar el valor de la incógnita debe encontrar un número, que llamaremos m, tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado, de 19; es decir hay que calcular $\frac{19}{8}$. El valor de la incógnita será $7m$. Utilizando el algoritmo de la multiplicación utilizado por los egipcios, se busca el valor de m.

Como se deben calcular —, se inicia con −. Luego se calcula el doble del número y se ubica en la casilla siguiente.

m	La suma de 19
$\frac{1}{8}$	*1*
$\frac{1}{4}$	*2*
$\frac{1}{2}$	*4*
1	*8*
2	*16*

Se inicia con la unidad. Luego se calcula el doble del número y se ubica en la casilla siguiente

Como $19 = 16 + 2 + 1$ entonces $\mathrm{m} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, al simplificar $\mathrm{m} = \frac{19}{8}$. Este es el valor que hay que multiplicar por 7 para obtener el valor de la incógnita.

La suma de 7	Valor de la incógnita
1	$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
2	$4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
4	$9 + \frac{1}{2}$

Como $7 = 4 + 2 + 1$ entonces el valor de la incógnita es

$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \; + \; 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \; + \; 9 + \frac{1}{2} \; = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (Simondi & González, 2010, p.13)

Este caso, al igual que muchos otros, evidencia el uso y aplicación de un algoritmo para hallar la solución al problema y, como se mencionó anteriormente, permite identificar y corroborar que los problemas propuestos, al igual que el planteado por el escriba Ahmes, tenían solución y era única. También permiten reconocer la forma como los egipcios trabajaban las ecuaciones; la cual consistía en plantear situaciones, aplicarles procesos algorítmicos y obtener siempre una solución, una única solución; por lo que es posible suponer que los escribas egipcios lograron identificar tipos de problemas que al modelarlos con ecuaciones siempre iban a tener solución y esta sería única.

3.1.2. Una mirada en la civilización babilónica. Esta civilización hizo parte de los pueblos que ocuparon la región de Mesopotamia ubicada entre los ríos Tigris, Éufrates y sus alrededores hacía el año 2500 a.C. Los babilonios hicieron grandes monumentos y construcciones sólidas que se caracterizaron por el uso del ladrillo que se unía con mortero, arcilla o cal. Hicieron grandes avances en Matemáticas y Astronomía siendo esta última la ciencia de mayor fascinación; fueron los primeros en distinguir los planetas de las estrellas, en hacer cartas astronómicas y dividieron el año en doce meses lunares.

Los babilónicos heredaron de los sumerios la escritura de símbolos con forma de cuña o cuneiforme; estos símbolos se escribían con un punzón sobre tablas de arcilla húmeda. Les bastaban dos símbolos el 1  y el 10  para representar cualquier número natural; tenían un sistema de numeración posicional en base 60 y no tenían símbolo para el cero.

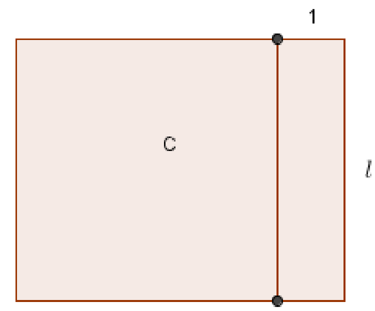
Figura 2. Tablillas babilónicas.
Fuente: Recuperado de http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/babilonia/tablillasbabilonicas.htm el 24 de noviembre de 2014.

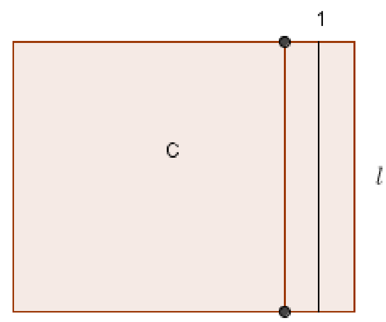
Dejaron miles de tablillas de arcilla que se encuentran en museos de todo el mundo y de las cuales unas quinientas son de interés para las Matemáticas (Jiménez & Moreno, 2011). En ellas se evidencia la forma como contaban, calculaban, medían y operaban con números naturales y fracciones. Allí se encuentran problemas relacionados con la vida cotidiana que se refieren al reparto de granos, animales, almacenamiento de alimentos, entre otros. Algunos de estos problemas se resuelven haciendo uso de ecuaciones lineales, al traducir a lenguaje algebraico de hoy nos llevaría a ecuaciones de la forma $ax = b$ o $ax + b = x$, también se encuentra la solución de ejercicios cuya solución mostrada en las tablillas nos permite hoy en día resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$ y ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + x^2 = a$, $ax^3 + bx^2 = c$.

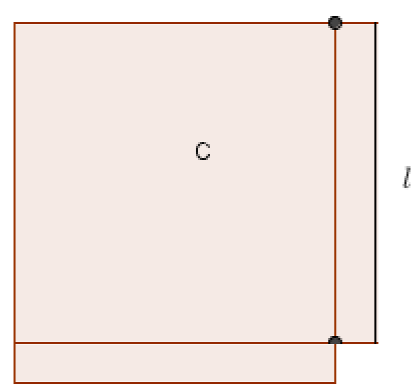
Las tablillas también muestran que los escribas babilónicos representaban lo desconocido con la palabra “cantidad” (Simondi & González, 2010, p. 17) y aplicaban el algoritmo de la *regula falsa* o de la falsa posición para solucionar problemas o ejercicios que involucraban ecuaciones de primer orden. En cuanto a las de segundo orden, utilizaban otros mecanismos de solución como completar cuadrados llamado por los babilonios “método akadio”, pues tenían tablas de cuadrados que les ayudaban a encontrar valores por medio del uso de cuadrados. Cuando solucionaban ecuaciones cuadráticas tomaban como solución de la ecuación la raíz positiva, seguramente porque era la solución que tenía sentido en los problemas propuestos, o porque no conocían los números negativos, o “eran ignorados sistemáticamente, cuando no cuidadosamente evitados” (Pérez de Laborda, 1984, p. 58).

En la Tabla 1., se presentan tres problemas con ecuaciones cuadráticas encontrados en tablillas babilónicas para ilustrar los algoritmos de solución; se presentan con lenguaje y simbología actual conservando el planteamiento original del problema y el proceso algorítmico para hallar la solución.

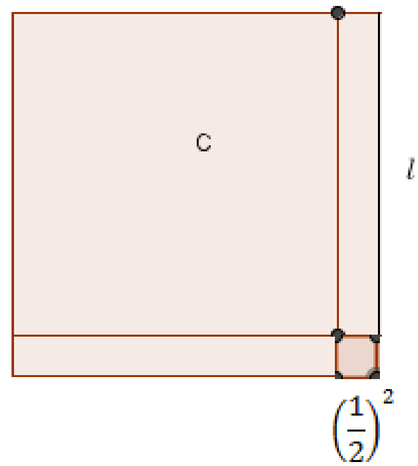
Tabla 1. Solución a ecuaciones de segundo grado, en tablillas babilónicas.

<table>
<tr><th>Tipo de ecuación cuadrática</th><th>Ejemplo</th><th>Solución
(En notación algebraica actual)</th></tr>
<tr><td>$x^2 + px = q$</td><td>Lado y cuadrado acumulados, 110.</td><td>Se representa literalmente el enunciado del problema mediante un cuadrado con un rectángulo de anchura 1 pegado a él[3].


Se corta el rectángulo por el medio.


Luego se pega el medio rectángulo en otro lado.

</td></tr>
</table>

[3] En las tablillas babilónicas no hay dibujos, en la Tabla 1. se presenta una representación de los cálculos que se encuentran escritos en las tablillas como solución a cada problema.

		En la figura transformada aparece un nuevo cuadrado (más pequeño) que completa el nuevo cuadrado y al cual se le conoce su área.  Se conoce el área del nuevo cuadrado y el área del cuadrado más pequeño que se ha añadido; se puede ahora calcular el lado del cuadrado nuevo y, por tanto, también calcular el lado del cuadrado original. (Puig, 2006, p. 6)
$x^2 = px + q$	Hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14,30[4]	Toma la mitad de 1, que es 0;30, y multiplica 0;30 por 0;30, que es 0;15; suma este número a 14,30, lo que da 14,30;15. Este es el cuadrado de 29;30; ahora suma 0;30 a 29;30, cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado. (Boyer, 1969, p. 56)
$x^2 + q = px$	Resolver el sistema[5] $x + y = 6; 30$ $x \cdot y = 7; 30^6$	Hállese primero $\frac{x+y}{2} = 3; 15$ y a continuación $\frac{x+y}{2}^{2} = 10; 33{,}45$ Entonces $\frac{x+y}{2}^{2} - xy = 3; 3{,}45$ Y $\frac{x+y}{2}^{2} - xy = 1; 45$ Por lo tanto $\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} = 3; 15 + 1; 45$

[4] Escritura en base 60, con numeración actual.
[5] Encontrado en una tablilla cuneiforme de la colección de Yale.
[6] Escritura en base 60, con numeración actual.

		Y $$\frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{2} = 3;15 - 1;45$$ Y de las dos últimas ecuaciones se obtiene que $x = 5$ e $y = 1\frac{1}{2}$. Es posible interpretar sus valores x e y como las dos raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 7;30 = 6;30x$. (Boyer, 1969, p. 57)

Del primer problema la solución se obtiene de completar el cuadrado geométrico (paso 3) con el nuevo cuadrado (paso 4); hoy en día se sabe que la situación presentada en este problema tiene dos soluciones pero el procedimiento utilizado por los babilonios sólo permitía hallar la solución positiva, la cual se consideraba era la única que satisfacía las condiciones del problema planteado, por lo mencionado en líneas anteriores sobre los números negativos. En el segundo problema se observa, por el algoritmo utilizado, una solución equivalente a la que se obtiene hoy aplicando la *fórmula cuadrática*; nuevamente se desprecia la solución negativa. En el tercer problema se pide hallar dos números dado su producto y su suma; este tipo de problemas conducía, como se observa en la Tabla 1., a una ecuación cuadrática con dos soluciones que representaban dos incógnitas y siendo dichas soluciones siempre positivas.

En estos ejemplos de problemas se halló la solución a la situación planteada, sin importar el algoritmo utilizado en la ecuación la solución siempre existió y fue positiva; lo que permite pensar que los babilonios no contemplaron la posibilidad de tener problemas sin solución o que las soluciones fueran negativas. De acuerdo a las evidencias encontradas, las tablillas no dan cuenta que los babilonios tuviesen un método general o formal para la solución de ecuaciones pese a la cantidad de ejercicios y problemas matemáticos que plantearon y solucionaron. No obstante, las evidencias sí permiten entender que esta civilización no solucionaba cada problema de manera individual, sino que trataban de transformar cada nuevo problema en uno ya conocido, que sabían resolver y que con seguridad siempre tendría solución; lo que lleva a pensar que las tablillas babilónicas eran una especie de catálogos con problemas resueltos donde se registraban modelos de problemas con solución que permitían la transformación de los nuevos problemas y garantizaban la existencia de la solución (una solución positiva), teniendo en cuenta el conjunto de números en el que trabajaban.

También se pude entender que los babilónicos lograron identificar cuando una ecuación tenía solución, es decir, conocían que tipos de ecuaciones se podían transformar en ecuaciones ya resueltas en su conjunto numérico, ya que en las tablillas encontradas todas las ecuaciones propuestas tienen solución y están asociadas a soluciones únicas.

3.1.3. Una mirada desde la civilización china. El origen de esta civilización se remonta hacía el año 3000 a.C., su ubicación se dio en la llanura fértil de los ríos Amarillo (Hoang Ho) y Azul (Yang - Tse Kiang). En esta civilización hubo dos grandes pensadores, Lao Tse quien fundó un sistema filosófico y religioso llamado taoísmo, y Confucio, quien creó un sistema moral. Los chinos hicieron grandes construcciones, invenciones y avances tecnológicos.

La escritura de los números en ideogramas[7], se empezó a usar en China aproximadamente en el año 1500 a.C., teniendo como elemento importante los radicales o claves que son la base de la escritura china, cada caracter (hànzí) es o un radical o un compuesto de dos a cuatro radicales. Tenían un sistema posicional de numeración en base 10 y para realizar cálculos de forma rápida utilizaban el ábaco[8], también realizaban operaciones con fracciones decimales y no tenían un símbolo para el cero pero lo representaban con espacios en blanco.

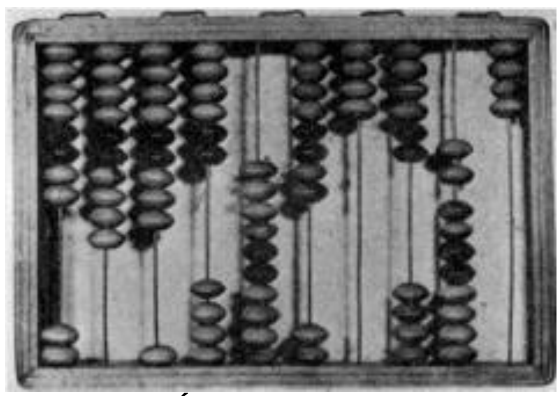


Figura 3. Ábaco chino o suan-pan.
Fuente: Recuperado en http://timerime.com/es/evento/1225050/El+antiguo+Abaco/ el 25 de noviembre de 2014.

Los chinos coleccionaron conjuntos de problemas concretos, de estas recopilaciones se destaca el *Chou Pei Suan Ching*[9] considerado el documento más antiguo; en él hay consignados cálculos astronómicos, una introducción a las propiedades del triángulo rectángulo y usos de las fracciones. Otro documento importante es el *Chui–chang suan–shu* conocido como “Los nueve capítulos sobre el arte matemático”[10], obra de gran influencia sobre las matemáticas chinas que incluye 246 problemas resueltos con regla de tres, raíces cuadradas y cúbicas, triángulos rectángulos, y ecuaciones.

---

[7] Imagen o símbolo que significa una palabra o frase determinada, sin representar cada una de sus sílabas o fonemas.
[8] Usaban barras de color rojo (números positivos) y negro (números negativos).
[9] No se conoce una fecha aproximada de su origen, algunos historiadores lo ubican alrededor del 1200 a.C., otros lo sitúan alrededor del 300 a.C.
[10] Formado por pergaminos independientes; escrito hacia el año 300 a.C., de autor anónimo.

En el capítulo ocho de “Los nueve capítulos sobre el arte matemático” se encuentra la solución de problemas que llevan a la utilización de sistemas de ecuaciones con números positivos y negativos; allí se encuentra el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales como el siguiente;

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Con el cual se construía una matriz para hallar la solución;

$$3x + 2y + z = 39 \quad 1$$

$$2x + 3y + z = 34 \quad 2$$

$$x + 2y + 3z = 26 \quad 3$$

Se ubicaban los coeficientes de las ecuaciones en las columnas de la matriz, iniciando en la primera columna con los coeficientes de la última ecuación, coo se muestra a continuación;

3	2	1
1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

La solución se hallaba mediante operaciones sobre las columnas de la matriz

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Para reducirla a la forma

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

> Donde esta segunda forma representa el sistema de ecuaciones
>
> $$36z = 99, \ \ 5y + z = 24 \ \ y \ \ 3x + 2y + z = 39$$
>
> Del cual pueden obtenerse fácilmente y de una manera sucesiva, los valores de z, y, x. (Boyer, 1969, p. 259)

Al solucionar problemas que requerían el uso de ecuaciones utilizaban el método de la *falsa posición* y al solucionar sistemas de ecuaciones lineales, como en el ejemplo, realizaban un procedimiento algorítmico parecido a lo que conocemos como el método de Gauss. Esto les permitió realizar cálculos con los números negativos aunque no los aceptaron como solución de una ecuación.

De las evidencias encontradas en los pergaminos se puede suponer que los chinos, al igual que los egipcios, lograron modelar situaciones con ecuaciones, identificando aquellas que siempre tenían solución y aquellas que no; dicho de otra forma, los matemáticos chinos adquirieron destreza en el reconocimiento de tipos de ecuaciones que siempre tenían solución, es decir, su solución era positiva y única; también lograron reconocer aquellas ecuaciones o tipos de ecuaciones que los conducían a soluciones negativas, las cuales no eran aceptadas como solución de un problema, al igual que identificaron siluetas de ecuaciones que no tenían solución, en su conjunto numérico.

3.1.4. Una mirada desde la civilización griega. Los orígenes de esta civilización estarían en la isla de Creta, al sureste del Peloponeso, hacia el año 2100 a. C. aproximadamente. La agricultura y la ganadería eran la base de su economía; conocían la metalurgia, eran excelentes orfebres y fabricantes de armas. Sus guerras fueron relatadas por Homero en obras literarias como la Ilíada y la Odisea.

El sistema de numeración más usado por los antiguos griegos fue el sistema jónico[11] lo que obligó a utilizar gran número de signos: las cantidades venían presentadas por letras del alfabeto a las que se le añadía un ápice, por ejemplo $\alpha = 1, \ \ \beta = 2$ ... $\theta = 9, \ \upsilon = 10, \ \lambda = 30$. Para los millares se colocaba el ápice delante de la letra ($'\upsilon = 1000, \ \ '\beta = 2000 \ \ \ldots \ \ '\theta = 9000$); para la escritura de números compuestos, se alineaban sus componentes de izquierda a derecha en orden decreciente y se coloca una raya encima, por ejemplo el número 1329 se escribía $\alpha\tau\kappa\theta$.

Para las operaciones aritméticas utilizaban un tipo de ábaco o tablero de piedrecillas; no usaban el cero como número pero utilizaron un símbolo para representarlo en cálculos astronómicos. Al igual que los chinos, no aceptaron las

[11] Sistema decimal y sumatorio pero no posicional, cada signo valía lo mismo sin importar la posición que ocupara.

cantidades negativas como solución de un problema; el mismo trato le dieron, en un principio, a las soluciones irracionales las cuales les causaban "un intrigante temor a las cantidades irracionales que surgían al abordar ciertos problemas" (Blanco Pérez, 2014, p. 28).

Los matemáticos griegos se ocuparon, en un alto porcentaje, a estudiar la Geometría, la cual les permitió solucionar problemas modelados con ecuaciones, pero el método utilizado para hallar la solución era diferente al de los babilonio; los griegos obtenían la solución por medio de construcciones geométricas que realizaban a partir de los datos que disponía el problema, posteriormente transformaban la construcción geométrica y hallaban la solución al problema propuesto, como se evidencia en el trabajo realizado por Euclides; esto conlleva a indagar sobre el trabajo realizado por los matemáticos Euclides y Diofanto, quienes vivieron alrededor del siglo III a.C., para conocer de cerca el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones en esta civilización, ya que ellos representa dos formas distintas de abordar las ecuaciones.

3.1.4.1. Euclides de Alejandría (325 – 265 a.C.). El faraón helenista Tolomeo I Soter le encomendó a Euclides, escribir una compilación de los tratados de geometría y aritmética existentes; el resultado fue los *Elementos*, el cual ofrece un tratamiento definitivo de la Geometría de dos y tres dimensiones; y recopila casi todo el saber matemático de la época. Su gran importancia se debe a la forma en que se organizan y exponen los contenidos (método hipotético deductivo); partiendo de una serie de definiciones, nociones y postulados, va demostrando paso a paso todas y cada una de las proposiciones. Los seis primeros libros corresponden a lo que todavía se entiende como Geometría plana; en esta obra Euclides recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver lo que hoy se conocen como ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas, al igual que incluye la teoría general de la proporción.

En el segundo libro presenta soluciones geométricas a ecuaciones de segundo grado; enuncia y demuestra proposiciones, siendo una de ellas conocida hoy como el teorema o ley del coseno, el cual manifiesta que en un triángulo cualquiera de lados A, B, C se cumple que: $\mathrm{C}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\cos(\mathrm{AB})$. Euclides también formula geométricamente leyes de aritmética como la propiedad distributiva de la multiplicación y la suma, al igual que el valor del cuadrado de una suma, la cual menciona de la siguiente manera:

Si una recta se corta arbitrariamente entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a la suma de los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo cuyos lados son ambos segmentos. (Pérez, 2009, p. 124)

Euclides utiliza en el enunciado como en la demostración, un lenguaje natural, pero al representar esta proposición en lenguaje algebraico de hoy se tendría:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Para demostrar esta proposición Euclides utilizó una gráfica (Figura 4.) de la que obtiene el hoy llamado teorema o ley del coseno, en el que se relacionan las áreas de los cuadrados y rectángulos que allí se forman.

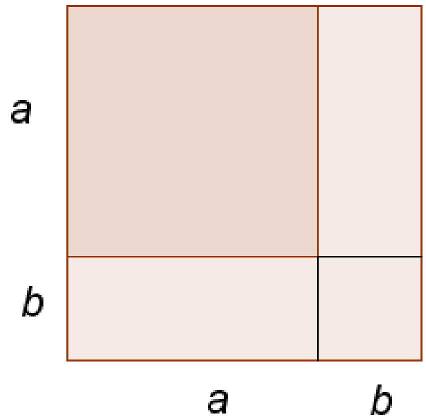


Figura 4. Construcción geométrica similar a la realizada por Euclides para demostrar las proposiciones 12 y 13 del libro II.

Con métodos parecidos demuestra igualdades como:

- $ab + \frac{a+b}{2} - b^{\;2} = \frac{a+b}{2}^{\;2}$
- $2a + b\;\; b + a^2 = \;a + b^{\;2}$
- $4\;\; a + b\;\; a + b^2 = \;\; a + b\;\; + a^{\;2}$

Euclides halla los resultados por medio del análisis aunque solo presenta la síntesis, es decir, no muestra el proceso analítico que utilizó para hallar la solución. En el libro II, también está la proposición:

Dividir una recta dada de manera que el rectángulo formado por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante. (Pérez, 2009, p. 125)

La cual usando notación algebraica, representa la expresión: $ax = (a - x)^2$.

En el libro VI se encuentra el estudio de la proporcionalidad entre segmentos y la semejanza entre figuras planas; la *proposición 28* de este libro establece que,

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario *que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.* (Ruíz Felipe, 2009, p. 9).

Al plantear esta proposición como un problema algebraico, se puede resolver de manera geométrica una ecuación de segundo grado. Al escribir la proposición en el lenguaje algebraico actual sería: $ax - x^2 = c;\ x\ x - a\ = c;$ Euclides lo resuelve de la siguiente forma (Figura 5.):

1. Divide el segmento a = **AB** en dos partes iguales y construye un cuadrado **EBFG.** El área de este cuadrado debe ser mayor que c o *no habría solución.*
2. Si el área **AEGH** es c entonces x = AH y el problema está resuelto.
3. Si el área del cuadrado **AEGH** es mayor que c construye el cuadrado **OQPG** de superficie igual a la diferencia de las áreas. El cuadrado **OQPG** y **SBRQ** están dispuestos sobre la diagonal. Ahora traza la diagonal y completa la figura.
4. El área de la figura ***OEBFPQ*** *es igual a* c. Se observa que el área del rectángulo **TASQ** es igual al área de **OEBFPQ,** por tanto igual a c**.** Por tanto x = **TA**

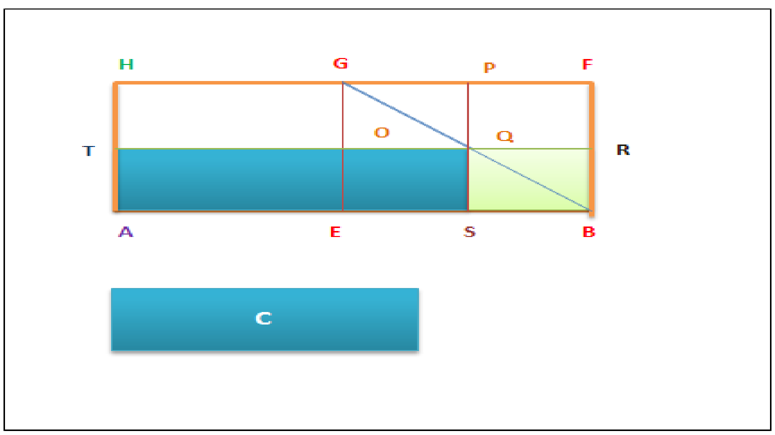


Figura 5. Construcción geométrica de una ecuación de segundo grado, similar a la realizada por Euclides para demostrar la proposición 28 de libro VI.

En el diagrama se observa que $\frac{a}{2}^{2} = \frac{a}{2-x}^{2} + c$. También se hace evidente que al resolver problemas de superficies de cuadrados y calcular el lado, se busca transformar la ecuación inicial en una ecuación de primer grado.

3.1.4.2. Diofanto (170 - 255). Conocido como el padre del Álgebra. Su principal obra, "Aritmética", es una colección de trece libros, donde aparecen 189 problemas algebraicos resueltos. Utiliza en la resolución de problemas las primeras abreviaturas de símbolos para las incógnitas, potencias, sumas y restas, lo que le permite escribir las primeras expresiones polinómicas. Si bien los griegos designaban a los números con letras del alfabeto, Diofanto utilizó para la incógnita el símbolo ς´ (sigma) llamado “aritmo”, de ahí el nombre de su libro. Para la potencia utilizaba siempre el símbolo υ, ya que para él, la base era la que indicaba el valor. Para la potencia dos utilizaba el símbolo δ^{υ} que sería equivalente a lo que hoy se representa como x^2, la potencia tres la simbolizaba con κ^{υ}, la cuarta potencia la simbolizaba con $\delta\delta^{\upsilon}$ y los símbolos $\delta\kappa^{\upsilon}$ y $k\kappa^{\upsilon}$ representaban la quinta y sexta potencia, ya que Diofanto no utilizó potencias mayores a seis.

También asigna símbolos para representar operaciones (suma, resta, producto y división) entre constantes e incógnitas; la suma la representa utilizando el símbolo μ^{υ} cuando hay constantes o deja un espacio en blanco cuando no las hay, la resta es simbolizada con $\phi\mu^{\upsilon}$, para representar el producto de incógnita y constante las colocaba una al lado de la otra, el símbolo de la división son las letras $\mu o\rho\iota o\upsilon$; la igualdad era representada con la τ.

Este tipo de “lenguaje algebraico” le permitió a Diofanto escribir cualquier expresión matemática y representar de manera simbólica todo tipo de ecuaciones; en la escritura algebraica actual se tiene la ecuación $\frac{x^5+3x-10}{5x-2} = 24x^6 + 18$, que en la escritura de Diofanto sería:

$$\begin{array}{ccccc} \delta\kappa^{\upsilon} & \varsigma'\gamma\, \phi\mu^{\upsilon}\tau & \mu\sigma\rho\iota\sigma\upsilon & \varsigma'\varepsilon\, \phi\mu^{\upsilon}\beta \;\; \tau & \kappa\kappa^{\upsilon}\kappa\delta\, \mu^{\upsilon}\;\; \iota\eta \\ x^5 \;+ & x\cdot 3 - 10 & dividido & x\cdot 5 - 2 \;= & x^6\cdot 24 + 18 \end{array}$$

Una de las contribuciones más importantes de Diofanto es precisamente esta notación algebraica, recordando que son tres las etapas de desarrollo del Álgebra: la primera de ellas las palabras, la etapa intermedia o sincopada (en la cual se utilizan algunas abreviaturas) y la etapa final o simbólica.

En cuanto a la solución de problemas, Diofanto no se preocupaba por el número de soluciones, es decir, el problema propuesto podía tener varias o infinitas soluciones pero él quedaba conforme al encontrar una solución al problema, pues su objetivo principal era dar solución al problema; pero solo le interesaban aquellas soluciones que eran racionales y además positivas; Diofanto no aceptaba las cantidades negativas e irracionales como solución de una ecuación.

En su obra “Aritmética”, el problema ocho del libro II plantea la descomposición de un cuadrado de área 16, en dos cuadrados; para hallar la solución propone un razonamiento similar al siguiente:

Supone que se quiere descomponer el número 16 en dos cuadrados; siendo x^2 el primer cuadrado y $16 - x^2$ el segundo cuadrado, y se puede decir que $16 - x^2 = y^2$. Luego, Diofanto transforma el cuadrado y^2 en una expresión de la forma $\left(mx - \sqrt{16}\right)^2$, donde *m* es un número racional mayor que uno, por tanto:

$$y^2 = 16 - x^2 = \left(mx - \sqrt{16}\right)^2$$
$$\Rightarrow 16 - x^2 = (mx - 4)^2$$

De lo que se obtiene

$$\Rightarrow 16 - x^2 = m^2x^2 - 8mx + 16$$
$$\Rightarrow 8mx = m^2x^2 + x^2$$
$$\Rightarrow 8mx = x^2\left(m^2 + 1\right)$$

Como $x > 0$ se tiene

$$\frac{8m}{m^2+1} = x$$
$$\Rightarrow y^2 = 16 - \left(\frac{8m}{m^2+1}\right)^2$$
$$\Rightarrow y^2 = \frac{16\left(m^2-1\right)^2}{\left(m^2+1\right)^2}$$

Como $y > 0$ y $m > 1$ se tiene

$$y = \frac{4\left(m^2-1\right)}{m^2+1}$$

Con los valores de x e y, se puede descomponer el cuadrado de área 16 en:

$$16 = x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow 16 = \left(\frac{8m}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{4\left(m^2-1\right)}{m^2+1}\right)^2$$

Con lo cual se halla una fórmula general que permite dar solución al problema inicial con tan solo asignar valores a m; por ejemplo para $m = 2$, se obtiene:

$$16 = \left(\frac{8(2)}{2^2+1}\right)^2 + \left(\frac{4\left(2^2-1\right)}{2^2+1}\right)^2$$
$$16 = \left(\frac{16}{4+1}\right)^2 + \left(\frac{4(4-1)}{4+1}\right)^2$$
$$16 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{4(3)}{5}\right)^2$$
$$16 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25}$$
$$16 = \frac{400}{25}$$
$$16 = 16$$

El valor de $m = 2$, permite obtener los valores de $x = \frac{256}{5}$ y de $y = \frac{144}{25}$ como una solución al problema planteado; sin embargo, no son estos valores la única solución que tiene el problema, como ya se mencionó, cada vez que se asigne un valor a m, el problema tendrá una solución. Es decir, el tipo de ecuaciones trabajadas por Diofanto tenían siempre solución, pero la solución no era única, el método que utilizaba para hallar la solución a los problemas planteados permitía hallar infinitas soluciones racionales y positivas a un problema dado.

Habiendo realizado un reconocimiento del trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones en la civilización griega, china, babilónica y egipcia, y de acuerdo a las evidencias escritas de ejemplos y problemas que en su momento propusieron los matemáticos de estas civilizaciones antiguas y que permanecen registrados en libros, tablillas, pergaminos y demás; se sabe que las ecuaciones han estado presentes desde el momento mismo en que el hombre ha sentido la necesidad de dar respuesta y comunicar matemáticamente fenómenos del mundo físico y de su entorno inmediato; sin desconocer que el desarrollo y evolución de las ecuaciones ha estado altamente relacionado con el avance logrado en la escritura y el lenguaje.

Del análisis realizado, las cuatro civilizaciones perciben las ecuaciones como una herramienta de las Matemáticas que contribuye en la solución de ejercicios y problemas que sus matemáticos proponían; es decir, las ecuaciones eran esa parte de las Matemáticas que les permitía modelar e identificar tipos de problemas que al aplicarles un algoritmo de solución, les proporcionaba siempre una respuesta; aunque estas civilizaciones tuvieron lugares distintos de desarrollo, siempre consideraron como soluciones verdaderas de una ecuación aquellas que eran positivas y estaban dentro del conjunto numérico que trabajaban. La civilización china y griega, a diferencia de la egipcia y babilónica, realizaron acercamientos al trabajo con números negativos, aunque como ya se mencionó, no los aceptaron como solución de una ecuación.

Por lo que se puede afirmar que los matemáticos de esta época fijaron la atención en la existencia de soluciones de las ecuaciones; de acuerdo a lo observado en los problemas planteados, estos siempre tenían solución; sin importar el algoritmo o método de solución que emplearan para resolver el problema, la ecuación que lo modelaba siempre tenía solución; por lo que es posible afirmar que en cada civilización se logró la identificación de tipos de ecuaciones que conducían siempre a la existencia de soluciones y fue con estas ecuaciones que realizaron su aporte en el desarrollo y evolución de las Matemáticas. Al igual que con la existencia, se llevó a cabo un trabajo sobre la unicidad de las soluciones, encontrando que para la civilización egipcia y babilónica este elemento de las ecuaciones (la unicidad) hacia presencia fuertemente al momento de hallar la solución, ya que de las evidencias encontradas, las soluciones propuestas eran únicas.

Sin embargo, en las civilizaciones china y griega no sucede lo mismo, es decir, en la civilización china eran aceptadas sólo aquellas soluciones que eran positivas, pero estas soluciones no eran las únicas que se encontraban cuando solucionaban un problema, los chinos encontraban problemas con soluciones negativas y aunque no las aceptaban, eran conscientes (sobre todo con ecuaciones de segundo grado) que la solución positiva no era única; caso similar sucede con los griegos, quienes lograron encontrar formas generales de las ecuaciones que les permitían hallar soluciones infinitas a una ecuación.

Finalizado el recorrido por civilizaciones antiguas, se continúa con la búsqueda de conocer el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones pero ahora en la Matemática del siglo XVII d. C.

3.2. MATEMÁTICA MODERNA – BARROCO

Se toma como matemática moderna, la etapa comprendida entre los años 1500 d.C. a 1700 d.C.; en este periodo se continúa con la búsqueda de información sobre el trabajo realizado entorno a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones, tomando como referencia las grandes contribuciones que en Matemáticas hicieron tres distinguidos matemáticos de esta época.

3.2.1. François Viète (1540 – 1603). Matemático francés del siglo XVI. En el trabajo de Viète la interpretación geométrica era vigente; él representaba los números como segmentos y sus potencias cuadradas como cuadrados. La geometría era el campo de interpretación de las expresiones algebraicas y validaba los procedimientos de cálculo; pero Viète inició un tratamiento algebraico de las expresiones y lo utilizó para solucionar no sólo problemas algebraicos sino también problemas de Geometría, razón por la cual es conocido como uno de los fundadores del Álgebra.

Él fue el primero en utilizar letras del alfabeto[12] para representar incógnitas, potencias y coeficientes en las ecuaciones; al igual que Aristóteles, también realizó la distinción entre número y magnitud. Hizo "aproximaciones importantes como $\sqrt[3]{2} \approx \sqrt[4]{2} + \frac{1}{20}\sqrt{2}$ para resolver ecuaciones e introdujo el signo "+" para la suma, el "–" para la resta y "el vínculo" para la división, la multiplicación y la igualación la enunciaba de manera verbal" (Hofmann, 2002, p. 114).

En cuanto a las ecuaciones hizo grandes aportes, como representar en ecuaciones numéricas, el número desconocido y sus potencias por N (*numerus*), Q

[12] Elige las consonantes para las cantidades conocidas y las vocales para las incógnitas.

(quadratus), C (*cubus*) y sus combinaciones, como se muestra en la siguiente expresión:

"Si 65C – 1N, aequetur $1{,}481{,}544$ fit 1N57"; significa: Si $65x^3 - x = 1{,}481{,}544$ entonces $x = 57$.

El realizar esta representación de incógnitas con letras, le permitió a Viète la identificación del objeto matemático que estaba abordando, "las ecuaciones" al igual que "se podía discutir las condiciones de existencia y unicidad de los problemas *vía* cálculo algebraico". (Sessa, 2005, p. 59). Es decir, esta representación más formal del lenguaje y escritura de las ecuaciones permitió un mayor manejo algebraico, analítico y simbólico de los problemas matemáticos que eran modelados con ecuaciones; al igual que proporcionó un mejor acercamiento a la formalización de los tipos de ecuaciones, lo que conllevó a ver y tratar las ecuaciones como el objeto matemático en el cual se podía estudiar y razonar sobre la existencia y unicidad de soluciones.

Otro de sus aportes a las ecuaciones fue el tratado sobre ecuaciones al que le dio el nombre de "Análisis", en el cual se supone que existe un valor para la incógnita y se debe establecer una relación de igualdad expresando de dos formas distintas una cantidad donde se involucre la incógnita; con la relación de igualdad establecida se puede calcular el valor de la incógnita; después del análisis se llevaba a cabo la síntesis y la comprobación como hacían los egipcios. Con este tratado Viète resuelve ecuaciones de segundo grado y algunas de tercer grado.

Viète hizo un gran acercamiento para encontrar la relación entre los coeficientes y las raíces de una ecuación, pero no pudo hallarla, porque al igual que la mayoría de sus contemporáneos matemáticos, consideraba como solución de las ecuaciones sólo las raíces positivas; las raíces negativas no eran tenidas en cuenta como solución de las ecuaciones ya que no era posible representar por medio de un segmento una cantidad negativa; de igual manera es preciso recordar que los números positivos eran los únicos admitidos por esa época en Europa.

3.2.2. Rene Descartes (1596-1650). Matemático y filósofo francés. "Desarrolló los planos de una y dos dimensiones" (Mejía, Álvarez, & Fernández, 2005, p. 159), en los cuales se establece una relación[13] entre la Geometría y el Álgebra, y donde se afirma que existe una relación uno a uno entre un punto geométrico y un par ordenado, es decir, a cada punto en el plano cartesiano se le asigna un único par ordenado[14].

[13] Llamada principio de biunicidad.
[14] También llamado par coordenado.

Descartes proponía resolver problemas geométricos a través de la herramienta algebraica: “la estrategia que propone es representar los objetos geométricos a través de objetos numéricos: los puntos se identifican con pares de números y las rectas con conjuntos de pares que verifican una cierta ecuación” (Sessa, 2005, p. 61).

Esto lo llevó a desarrollar un método para relacionar las curvas con las ecuaciones, la *Geometría Analítica*, donde las curvas cónicas se representan con ecuaciones de segundo grado en las variables x e y.

Utilizó como propiedad del Álgebra la inclusión de cantidades conocidas como cantidades desconocidas en una sola expresión, es decir, en un problema geométrico se consideran todas las líneas y segmentos necesarios para su construcción sean conocidas o no sus longitudes, lo que permite entender un problema geométrico como la traducción de una ecuación; luego las condiciones necesarias para la construcción de un problema dependerán de las condiciones de solución de la ecuación que representa.

Para solucionar un problema, Descartes seguía los siguientes pasos:

1. Suponer que el problema se encuentra ya resuelto.
2. Nombrar a todas las líneas involucradas en el problema, tanto a las conocidas como a las desconocidas.
3. Bajo la condición 1, se debe encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las líneas desconocidas.
4. Bajo el último punto es posible expresar de dos maneras distintas una misma relación. La igualdad de estas dos expresiones es lo que constituye una ecuación.
5. La ecuación se debe resolver. Los requerimientos constructivos del problema están dados por los requerimientos constructivos de la ecuación. (Álvarez & Enríquez, 2000, p. 43)

En relación con las ecuaciones, Descartes realizaba una construcción geométrica cuyo objetivo era mostrar que si un problema geométrico es llevado hacia la solución de una ecuación, entonces se puede asegurar que el problema tiene solución siempre y cuando la ecuación que lo representa se pueda resolver; la dificultad para resolver un problema la determina el grado de la ecuación que la simboliza, ya que toda ecuación puede tener tantas raíces como unidades se indiquen en el grado de la ecuación.

Las ecuaciones de segundo grado, también se representaron de forma geométrica, pero Descartes solo consideraba las raíces positivas, las negativas las consideraba “falsas”, aunque entendía que algunas veces las ecuaciones no se podían representar geométricamente y suponía que sus raíces no eran cantidades reales.

“Por ejemplo para resolver la ecuación $z^2 = az + b^2$, Descartes procede de la manera siguiente: trácese un segmento LM de longitud b (Figura 6.), y levántese en L un segmento NL perpendicular a LM y de longitud $\frac{a}{2}$. Con centro en N dibújese la circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ y trácese la recta MN, que corta a la circunferencia en O y en P; entonces $z = OM$ es el segmento buscado. (Descartes ignora la raíz PM de la ecuación porque es “falsa”, es decir, es negativa”. (Boyer, 1969, p. 428)

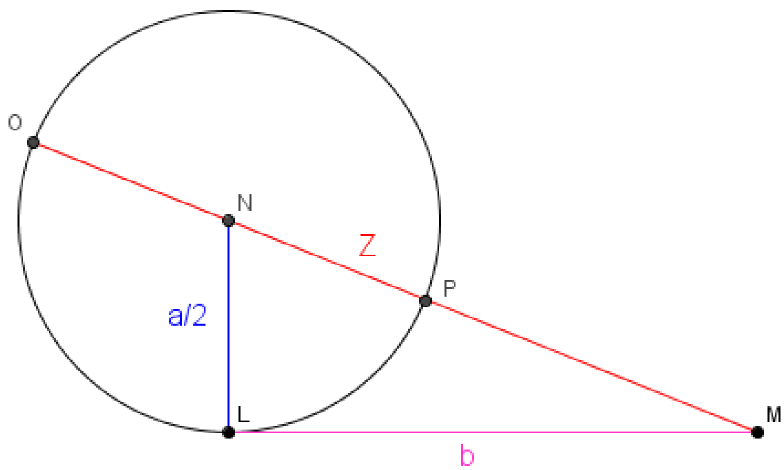


Figura 6. Construcción de una ecuación de segundo grado, representando el método de Descartes.

Otro aporte a las ecuaciones y más específicamente a la existencia y unicidad de soluciones es el teorema o *la regla de los signos*, el cual fue propuesto con el fin de conocer la ubicación y la cantidad de ceros de una función polinomial. Con esta regla Descartes obtenía información del número y la ubicación de los ceros de una función polinomial, o las raíces de una ecuación polinómica. Para aplicar la ley de signos se debe escribir el polinomio en potencias descendentes de la incógnita (x) y se cuenta el número de variaciones de signo de los coeficientes de $f(x)$ y $f(-x)$; el siguiente ejemplo, con escritura actual de funciones, ilustra la aplicación de la ley de signos.

Sea la función

$$f\ \ x\ = 3\underbrace{x^6 -}_{1}\underbrace{4x^4 +}_{2} 3x^3 + \underbrace{2x^2 -}_{3} x - 3$$

Como el polinomio es de grado seis debe haber un máximo de seis ceros, es decir, la ecuación $3x^6 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ tiene un máximo de seis raíces. En $f(x)$ hay tres variaciones en el signo de los coeficientes por lo que, Descartes suponía encontrar entre tres o un cero positivos (raíces); ahora con $f(-x)$ se tienen nuevamente tres variaciones de signo,

$$f\ \ -x\ \ = \underbrace{3x^6 - 4x^4}_{1} \underbrace{- 3x^3 + 2x^2}_{2} \underbrace{+ x - 3}_{3}$$

así que espera tener tres o un cero negativos (raíces), con lo cual puede intuir los signos y posición de hasta los seis ceros de la función polinómica, o lo que es igual las seis raíces de la ecuación polinómica.

3.2.3. Pierre de Fermat (1601 – 1665). Jurista y matemático francés, interesado por las Matemáticas y consagrado a ellas en su tiempo de ocio. Introdujo la idea de variable algebraica, estudió las propiedades de los números enteros continuando con la obra de Diofanto. Es recordado por desarrollar, junto a Blaise Pascal, los principios de la teoría de la probabilidad y, junto con Descartes, la Geometría analítica. Fue el primero en estudiar los máximos y mínimos de una función con el método que hoy se conoce como “derivadas” dando con esto el primer impulso al Cálculo infinitesimal.

Una parte del trabajo de Fermat se centra en la idea que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de una recta o una curva. Las dos incógnitas de la ecuación son segmentos lineales más que números; uno de estos segmentos es medido a la derecha desde un punto de referencia en el eje horizontal y el otro segmento se ubicaba sobre el extremo del primero con una ordenada vertical.

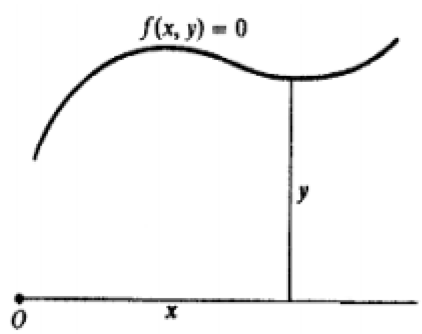


Figura 7. Representación geométrica de Fermat, para una ecuación con dos incógnitas.

En la Figura 7., está representada una ecuación con dos incógnitas, donde una de las variables toma valores sucesivos a lo largo de una línea sobre un eje dado y a la otra variable le corresponden valores que se determinan con la primera variable;

con esto muestra que una ecuación define a una recta o curva de acuerdo con un sistema coordenado. Bajo esta idea, Fermat estudia las curvas que están definidas por ecuaciones e introduce grupos de curvas dadas por ecuaciones algebraicas. Al igual que Descartes, Fermat solo considera como solución de una ecuación aquellas raíces que son positivas. "La *Isagoge* de Fermat tiene su propósito demostrar que las ecuaciones lineales representan rectas y que las ecuaciones cuadráticas corresponden a cónicas" (González, 2003, p. 128).

Como método de demostración, Fermat utilizó el procedimiento de descenso infinito[15], con el cual demostró que un cubo no puede descomponerse en la suma de dos cubos[16], la conjetura de Girard[17], entre otros; el primero lo generalizó formulando la proposición que no hay números enteros positivos $x, y, z,$ tales que, $x^n + y^n = z^n$ para $n > 2$, conocida mundialmente como *el último teorema de Fermat* o *gran teorema de Fermat*; con lo se puede suponer que Fermat conjeturó y propuso *tipos de ecuaciones que no tenían solución*.

Esta etapa de desarrollo y evolución de la Matemática muestra un gran avance en el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones. Los matemáticos elegidos como representantes de esta época mostraron grandes aportes al estudio de las ecuaciones; aportes como una escritura algebraica más formal, simbología para las operaciones, ampliación del conjunto numérico, es decir, operar con cantidades negativas aunque estas no fuesen aceptadas como solución de ecuaciones; el paso involuntario de la Geometría al Álgebra y la propuesta de ecuaciones sin solución, lo que resulta novedoso para la época y motiva el desarrollo y una mayor atención sobre la Matemática y cada uno de sus elementos.

Esta parte de la historia; Matemática moderna, como la etapa anterior, Matemáticas antiguas, han permitido conocer el nacimiento, evolución y aportes que las ecuaciones han realizado en el estudio, análisis y profundización de las Matemáticas; al igual que han mostrado como la existencia y unicidad de soluciones han contribuido en la identificación de los tipos de ecuaciones que conducían a soluciones positivas, consideradas verdaderas, y soluciones negativas consideradas falsas y las cuales hasta el momento no eran aceptadas por los matemáticos ni las Matemáticas de la época.

De igual manera, se observa que los matemáticos de estas épocas se preocuparon por querer encontrar siempre una solución (existencia) a las ecuaciones planteadas y que dicha solución estuviese dentro del conjunto numérico que manipulaban; aunque Pierre de Fermat, en el siglo XVII, logró

[15] Cierta forma de inducción matemática a la inversa.
[16] No hay números enteros positivos $x, y, z,$ tales que, $x^3 + y^3 = z^3$.
[17] Todo número primo de la forma $4n + 1$ puede expresarse de una y sólo una manera como suma de dos cuadrados.

identificar tipos de ecuaciones cuya solución no era posible hallar en esa época ni en la época actual. En cuanto a la unicidad, se observó que en un principio las soluciones de una ecuación eran únicas; pero al ampliar el estudio de las ecuaciones y sus soluciones, se encuentra que aunque no aceptaban soluciones negativas ni irracionales, fueron conscientes que las soluciones que pertenecían a sus conjuntos numéricos no eran únicas, es decir, la existencia de soluciones dependía del planteamiento del problema (tipo de ecuación), las ecuaciones podían tener solución única, como lo trabajado por los egipcios y babilónicos; varias soluciones como lo mostraron los chinos, griegos, Viète y Descartes, aunque no aceptaran ciertas soluciones; infinitas soluciones como lo presentó Diofanto aunque se conformaba con conocer una sola solución; o ninguna solución como lo conjeturó Fermat.

De lo anterior se puede afirmar que el estudio de la existencia y unicidad de soluciones en las ecuaciones, contribuyó en la identificación de tipos de ecuaciones que permitían conocer de antemano si existía o no solución, así como el número posible de soluciones que podían hallar. También se puede afirmar que el estudio de la existencia y unicidad ayudó a consolidar los métodos de solución, los cuales permitían hallar la o las soluciones de un problema modelado con ecuaciones.

Se da por finalizada la etapa de revisión histórica, la cual permitió conocer el trato dado a las ecuaciones y la necesidad de razonar sobre la existencia y unicidad de soluciones antes de aplicar un método para hallar una solución; por lo cual, es preciso indagar si en el currículo colombiano propuesto se exalta la importancia que las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad tienen al momento de comprender y consolidar el estudio de las Matemáticas escolares.

4. UNA MIRADA DESDE EL CURRÍCULO

Como se mencionó anteriormente, el recorrido histórico ha permitido conocer el trabajo realizado con las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones, reconociendo las ecuaciones como objetos matemáticos que contribuyen en el fortalecimiento de procesos como el razonamiento y la modelación matemática; de igual manera, el estudio de las ecuaciones, contribuye en la construcción y consolidación de un pensamiento matemático formal. Teniendo en cuenta que las pruebas internas y externas aplicadas en Educación Básica y Media, reportan que “gran parte de nuestros estudiantes no alcanzan un razonamiento ni pensamiento matemático básico” (Zubiría, 2014), se propone conocer el trato dado a las ecuaciones en el currículo escolar colombiano, fijando la atención en la existencia y unicidad de soluciones. Para ello se hace necesario e ineludible empezar con la revisión de los derroteros curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), para la enseñanza – aprendizaje de la Matemática en los colegios oficiales y no oficiales del país; ya que en estos derroteros se encuentra la ruta curricular que rige los doce años de enseñanza de las matemáticas escolares.

Para lograr una idea general del trato dado a las ecuaciones en el currículo escolar colombiano, se propone realizar un acercamiento a la planeación curricular del área de matemáticas de la Institución Educativa Lucila Piragauta[18] de Yopal, con el fin de evidenciar en documentos institucionales el direccionamiento propuesto para abordar las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones. Como complemento de las revisiones anteriores, se indagará por el trabajo realizado por el docente en el aula de clase, al momento de abordar las ecuaciones; es decir, se pretende conocer la importancia que los docentes de esta Institución Educativa le dan al estudio de la existencia y unicidad de soluciones cuando sus estudiantes requieren trabajar con ecuaciones, de igual manera se espera conocer cómo, el docente, motiva en sus estudiantes el razonamiento de la existencia y unicidad de soluciones al estudiar las ecuaciones.

4.1. LINEAMIENTOS CURRICULARES

El primer derrotero curricular a revisar, son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del año 1998, los cuales son pensados como “una propuesta en permanente proceso de revisión y cualificación que ha de suscitar análisis, discusiones y proyecciones en torno al mejoramiento de la calidad de la educación matemática” (MEN, 1998, p. 4), para la Educación Básica primaria, secundaria y Media.

[18] Resolución de aprobación N° 1270 de 2003, emanada de la Secretaría de Educación de Casanare.

En los lineamientos curriculares se manifiesta que el hacer matemáticas no es solo aprender definiciones, fórmulas, teoremas y resolver problemas, también es encontrar buenas preguntas, es decir, razonar; ya que esto último es tan importante como encontrarles solución. Lo anterior implica una gran responsabilidad en el profesor, el cual tiene la gran tarea de buscar y proponer situaciones donde sus estudiantes descubran que el razonamiento y pensamiento matemático que adquieren en la escuela es lo que les permite encontrar la solución a cualquier situación planteada; entendiendo como solución aquella que está fundamentada en saberes teóricos propios de las matemáticas.

En esta propuesta curricular no se encuentra de manera explícita el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación, pero se pide al profesor controlar los números y procesos aritméticos en los problemas propuestos, dicho de otra forma, el docente de matemáticas debe considerar las ecuaciones como objetos matemáticos y estudiar sus elementos para fortalecer el pensamiento matemático de sus estudiantes; lo que lo lleva a ser consciente de la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación antes de presentarla a sus estudiantes. También le sugiere adoptar estrategias didácticas y pedagógicas que permitan enfrentar a los estudiantes con la construcción, geométrica o algebraica, de expresiones algebraicas y de fórmulas; esto con el objetivo de ver las estructuras algebraicas como medio de representación que facilita el estudio analítico de objetos matemáticos como las ecuaciones, y los métodos como herramientas para la resolución de problemas.

Así mismo, esta propuesta pide al docente de matemáticas ser consciente de la estructura algebraica que propone a sus estudiantes cuando aborda y plantea una ecuación, al igual que el docente debe conocer y controlar los números y procesos aritméticos necesarios para solucionar situaciones problema con ecuaciones algebraicas; es decir, el docente debe guiar y proponer a sus estudiantes situaciones que conduzcan a una única solución, a infinitas soluciones y a ninguna solución. En otras palabras, se puede pensar que los Lineamientos Curriculares de manera implícita, proponen y recomiendan al profesor, tener en cuenta la existencia y unicidad de soluciones al proponer situaciones problema que se modelen o solucionen con ecuaciones algebraicas.

4.2. ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS

Continuando con el estudio de los derroteros curriculares propuestos por MEN para la enseñanza de las matemáticas escolares, se revisará ahora los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del año 2006. En esta propuesta curricular manifiesta a los docentes de Matemáticas de las instituciones educativas de todo el país que "la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos" (MEN, 2006, p. 46). Así se reitera a los docentes de Matemáticas la necesidad de concebir y vivir el hacer, enseñar y aprender Matemáticas como herramienta social, donde las matemáticas de aula hacen parte fundamental en la formación personal, familiar y social del ciudadano que se forma en las aulas de clase.

Para lograr proyectar las Matemáticas como herramienta social, esta propuesta curricular propone desarrollar en el estudiante desde transición a grado once, cinco procesos[19] de la actividad matemática, teniendo en cuenta que debido a "La complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las Matemáticas exigen en los estándares una alta coherencia tanto vertical como horizontal" (MEN, 2006, p. 78). Para lograr una coherencia vertical, los docentes deben abordar los estándares presentes en los cinco pensamientos[20] desde grado transición hasta grado once en forma continua y permanente; la horizontalidad se presenta en cada grado abordando en forma conjunta los pensamientos matemáticos.

En esta propuesta las ecuaciones se relacionan y encajan en el *pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos* donde se considera que,

> El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como *constante*, *variable, función*, *razón o tasa de cambio, dependencia e independencia* de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones (MEN, 2006, p. 66).

De donde se entiende que el sistema de representación que se encuentra directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico.

Las ecuaciones se empiezan a nombran explícitamente en los grados sexto a séptimo con el estándar del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos "Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones" (MEN, 2006, p. 85). Al revisar los estándares de los grados posteriores se encuentra que para los grados octavo a noveno las ecuaciones continúan apareciendo de manera explícita en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, cuando las mencionan como "ecuaciones

---

[19] Formulación, tratamiento y resolución de problemas; Modelación; Comunicación; Razonamiento; y Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

[20] Pensamiento numérico y sistemas numéricos; Pensamiento espacial y sistemas geométricos; Pensamiento métrico y sistemas de medidas; Pensamiento aleatorio y sistema de datos; y Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

algebraicas” y “sistemas de ecuaciones lineales”; pero en los estándares de los grado décimo a undécimo ya no son mencionadas, pero al observar con detenimiento los estándares propuestos en los demás pensamientos se encuentran las ecuaciones pero de manera implícita.

Teniendo en cuenta lo expresado en los diferentes estándares propuestos en Educación Básica secundaria y Media, se puede entender que el estudio de las ecuaciones se reduce a un manejo algorítmico en el que se garantiza que siempre existe una solución y es única. Dentro de los estándares no se encuentra alguna referencia respecto al estudio de la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones.

Sin embargo al revisar el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas se pide “abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna” (MEN, 2006, p. 52), es decir, que el cuestionamiento a la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones algebraicas se da al momento de proponer a los estudiantes situaciones problema donde tenga que cuestionarse por la existencia de la solución y la cantidad de soluciones que tendría la situación problema que el docentes o los mismos estudiantes han planteado.

De igual manera el proceso de modelación “permite decidir qué variables y relación entre variables son importantes” (MEN, 2006, p. 53), lo que al aplicar al estudio de las ecuaciones se convierte en la posibilidad de hacer predicciones, obtener resultados y verificar lo razonable de los resultados con respecto a las condiciones iniciales de un problema, es decir, estudiar y conjeturar sobre la existencia y unicidad de soluciones en situaciones que implican el uso de ecuaciones.

4.3. PROPUESTA CURRICULAR DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LUCILA PIRAGAUTA

Conociendo la propuesta para abordar las ecuaciones que el MEN ha propuesto a los profesores de Matemáticas de Educación Básica primaria, Básica secundaria y Media de las instituciones educativas oficiales y no oficiales del país, se continuará ahora con la revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa Lucila Piragauta de Yopal, una Institución mixta de carácter oficial ubicada la zona sur del municipio, la cual atiene en promedio 1600 estudiantes al año, de los cuales el 60% son de Educación Básica secundaria y Media.

En la propuesta curricular de la I.E. Lucila Piragauta, se especifica el estándar a abordar en el periodo, logros, indicadores de logro, entre otros, (Tabla 2.). Al buscar las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones, se observa que las ecuaciones hacen su primera aparición en grado séptimo al ser mencionadas en los contenidos "ecuaciones aditivas y multiplicativas con racionales" y cuyo logro es "construir e interpretar fórmulas, ecuaciones para representar situaciones que requieren variables, operan con cualquiera de ellas y encuentra procedimientos para resolverlas" (IE Lucila Piragauta, 2010, pág. 23).

Tabla 2. Formato que registra la propuesta curricular de la I.E. Lucila Piragauta de Yopal.

Área/ Grado/ Periodo	MATEMATICAS 0701
Estándar	REALIZA OPERACIONES ARITMÉTICAS DE MANERA PRECISA Y EFICIENTE CON NÚMEROS RACIONALES.
Logros	Construir e interpretar fórmulas, ecuaciones para representar situaciones que requieren variables, operan con cualquiera de ellas y encuentra procedimientos para resolverlas.
Indicadores logros	Construyen e interpretan fórmulas, ecuaciones para representar situaciones que requieren variables, opera con cualquiera de ellas y encuentra procedimientos para resolverlas.
Contenidos - Competencias	Números racionales. // Ecuaciones aditivas con racionales. // Ecuaciones multiplicativas con racionales. // Aplicación y solución de problemas con racionales.
Actividades	Como es de gran importancia la interacción de los estudiantes con sus compañeros. Se realizarán actividades individuales y en grupo, buscando que se llegue de esta manera a un consenso de acuerdo de ideas, durante todo el proceso se seguirán procesos y análisis de resultados buscando que el estudiante desarrolle su capacidad de solución de problemas.
Hs	25 horas.
Recursos	Explicaciones, solución de talleres, desarrollo de guías, libros y fotocopias.
Criterios de Evaluación	La evaluación se aplica de forma continua teniendo en cuenta opiniones, solución de talleres y guías, participación en clase. Nivel de interpretación y argumentación, basados en aspectos cognitivos y formativos.

Las ecuaciones continúan apareciendo en los grados posteriores, en octavo como ecuaciones lineales, en noveno como sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, y en grado décimo como ecuaciones trigonométricas y sistemas de ecuaciones lineales y matrices, pero son propuestas a través del proceso matemático de ejercitación de procedimientos. No se llevan a la modelación, ni al razonamiento; mucho menos a la formulación y resolución de problemas, ante lo cual se pude decir que de acuerdo a lo registrado en la propuesta curricular del área de matemáticas, en esta Institución Educativa no se está teniendo en cuenta la ecuación como objeto matemático, es decir, las ecuaciones son trabajadas y abordadas como una herramienta de las matemáticas que sirve para hallar el valor numérico de una variable por medio de procedimientos algorítmicos, sin inquietar al estudiante por la estructura del conjunto numérico sobre el que está trabajando; por lo cual no se considera relevante ni importante estudiar la existencia y unicidad de soluciones al abordar o trabajar ecuaciones algebraicas.

Conociendo las tres propuestas curriculares (Lineamientos curriculares, Estándares de Competencias y propuesta curricular de la I.E.), se realiza un acercamiento con los docentes del Departamento de Matemáticas de la Institución Educativa Lucila Piragauta para reconocer el trabajo que realizan con sus estudiantes cuando abordan las ecuaciones; esto con el fin de identificar el trato que se da a las ecuaciones en esta institución educativa, fijando la atención en la importancia y relevancia que proponen, este grupo de docentes, a sus estudiantes al momento de razonar sobre la existencia y unicidad de soluciones en una ecuación algebraica.

Este acercamiento se realiza mediante una pequeña indagación a los seis docentes de Básica secundaria y Media de esta institución; la cual, como ya se mencionó, busca conocer si el grupo de docentes tiene en cuenta el estudio de la existencia y unicidad de soluciones cuando trabaja ecuaciones algebraicas con sus estudiantes. De igual manera se realizan dos visitas informales para conversar con los docentes y tener una visión más amplia de la concepción que tienen y enseñan a sus estudiantes sobre las ecuaciones algebraicas.

Para la indagación se construye un formato en el que se presentan, a los docentes, cuatro preguntas (Tabla 3.); las dos primeras orientadas a conocer el nivel de enseñanza en el que se desempeña el docente en la actualidad, con el fin ubicar las concepciones del docente dentro de los derroteros curriculares; mientras que las dos últimas son propuestas para conocer el concepto matemático que maneja el docente con respecto a la existencia y unicidad de soluciones en una ecuación y la forma como es o son abordados estos elementos de las ecuaciones en la aulas de clase.

Tabla 3. Formato de indagación, aplicado a los docentes de Matemáticas de la I.E. Lucila Piragauta.

En el marco del Seminario "Trabajo de Grado I" para optar al título de Especialista en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional se pretende conocer la opinión de docentes del área de matemáticas sobre las ecuaciones. • ¿En qué nivel de enseñanza se desempaña? Primaria ____ Secundaria _____ Media ____ • En qué grado de enseñanza, considera usted, se empiezan a enseñar las ecuaciones ___________________ • En su práctica docente, ¿usted aborda la existencia y unicidad de soluciones al enseñar ecuaciones?, ¿Por qué? ____ ____ • De ser necesario, ¿cómo abordaría estos elementos de las ecuaciones (existencia y unicidad) con sus estudiantes? ____ ____ Agradecemos las opiniones y/o reflexiones que desde su experiencia y conocimiento nos ha permitido conocer.

En las Figuras 8 y 9., se muestran algunas de las encuestas realizadas por los docentes de la I.E.

Agradecemos sus opiniones y/o reflexiones, que desde su experiencia como docente del área de matemáticas, tiene sobre las ecuaciones.

- ¿En qué nivel de enseñanza se desempaña?

Primaria ___ Secundaria X Media X

- En qué grado de enseñanza, considera usted, se empiezan a enseñar las ecuaciones

Sexto.

- En su práctica docente, ¿tiene en cuenta la existencia y unicidad de soluciones al utilizar ecuaciones? Por qué?

Estos 2 elementos son los que validan el desarrollo de las mismas

- De ser necesario, ¿cómo abordaría estos elementos de las ecuaciones (existencia y unicidad) con sus estudiantes?

Estableciendo diferencias entre "Identidad" y "ecuación" y con una clara comprensión del conjunto de los números Reales.

Agradecemos sus opiniones y/o reflexiones, que desde su experiencia como docente del área de matemáticas, tiene sobre las ecuaciones.

- ¿En qué nivel de enseñanza se desempaña?

Primaria ___ Secundaria X Media X

- En qué grado de enseñanza, considera usted, se empiezan a enseñar las ecuaciones

SEGUNDO, PRIMARIA.

- En su práctica docente, ¿tiene en cuenta la existencia y unicidad de soluciones al utilizar ecuaciones? Por qué?

ME PARECE MAS RELEVANTE EL PLANTEAMIENTO DE LA ECUACIÓN (ABSTRAER - PLANTEAR) LOS PROBLEMAS EXISTENTES CON LA SOLUCIÓN (PROCEDIMIENTO) SE PUEDEN CORREGIR EN EL CAMINO.

- De ser necesario, ¿cómo abordaría estos elementos de las ecuaciones (existencia y unicidad) con sus estudiantes?

TOMANDO COMO PUNTO DE PARTIDA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALES (APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA A LA VIDA)

Figura 8. Encuestas aplicadas a docentes de la I.E. Lucila Piragauta. Yopal, mayo de 2014.

Agradecemos sus opiniones y/o reflexiones, que desde su experiencia como docente del área de matemáticas, tiene sobre las ecuaciones.

- ¿En qué nivel de enseñanza se desempaña?

Primaria ___ Secundaria ___ Media X

- En qué grado de enseñanza, considera usted, se empiezan a enseñar las ecuaciones

Primaria.

- En su práctica docente, ¿tiene en cuenta la existencia y unicidad de soluciones al utilizar ecuaciones? Por qué?

Medante el uso de ecuaciones puedo. solucionar problemas. usando diferentes metodos pero. Uno Unico solucion

- De ser necesario, ¿cómo abordaría estos elementos de las ecuaciones (existencia y unicidad) con sus estudiantes?

El teorema de unicidad no simpre nos ayuda a encontrar la solucion de un problema; pues este puede tener. otras.

Agradecemos sus opiniones y/o reflexiones, que desde su experiencia como docente del área de matemáticas, tiene sobre las ecuaciones.

- ¿En qué nivel de enseñanza se desempaña?

Primaria ___ Secundaria X Media ___

- En qué grado de enseñanza, considera usted, se empiezan a enseñar las ecuaciones

6°

- En su práctica docente, ¿tiene en cuenta la existencia y unicidad de soluciones al utilizar ecuaciones? Por qué?

Si, Solución de problemas y temas relacionados

- De ser necesario, ¿cómo abordaría estos elementos de las ecuaciones (existencia y unicidad) con sus estudiantes?

Figura 9. Encuesta aplicadas a docentes de la I.E. Lucila Piragauta. Yopal, mayo de 2014.

Los docentes del Departamento de Matemáticas de la I.E. se encuentran distribuidos a lo largo del nivel de Educación Básica secundaria y Media, de los cuales las dos terceras partes se desempeñan en los niveles de Básica secundaria y media; esto debido a que la I.E., ha fragmentado el área de matemáticas por asignaturas, como aritmética, geometría y estadística en grados sexto y séptimo; algebra, geometría y estadística en grados octavo y noveno; trigonometría y estadística en grado décimo; y cálculo y estadística en grado once.

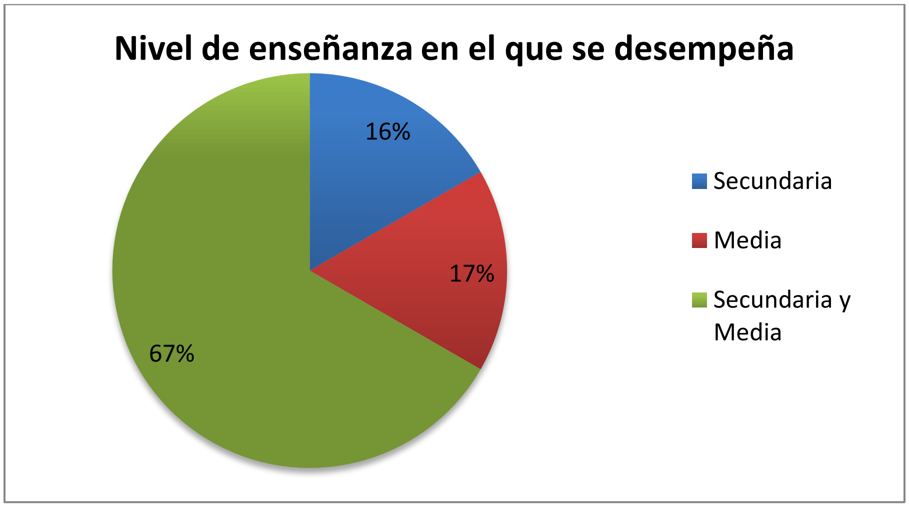


Gráfico 1. Nivel de enseñanza en el que se desempeñan los docentes de la I.E. Lucila Piragauta.

Con la información recogida se pudo establecer que en el Departamento de Matemáticas de la I.E., no se han establecido ni unificado criterios claros que propendan por la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones como objeto de las matemáticas escolares. Cuando se pregunta a los docentes por el grado de enseñanza en el cual se debe empezar a enseñar las ecuaciones, la opinión está dividida (Gráfico 2.).

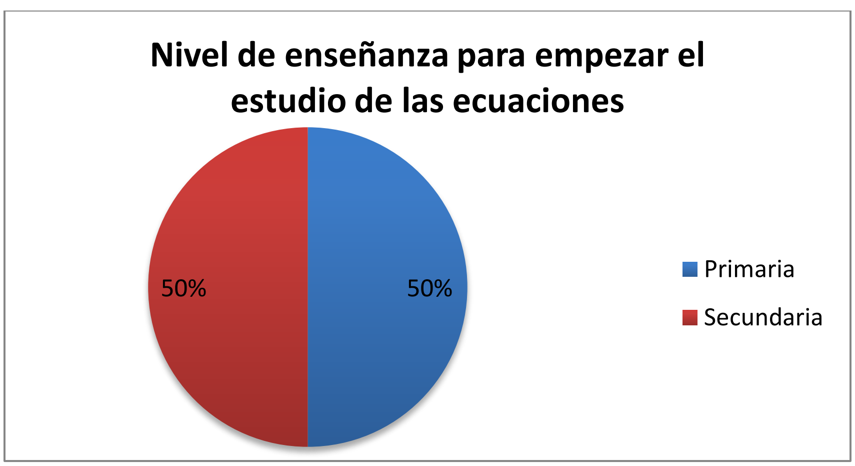


Gráfico 2. Nivel de enseñanza para empezar el estudio de las ecuaciones.

La mitad de los docentes manifiestan que es en el nivel de Básica primaria donde se debe iniciar el estudio de las ecuaciones, porque es en este nivel donde se deben fundamentar y consolidar las bases de la educación, y esto la hace acreedora a iniciar el estudio de las ecuaciones. Por su parte quienes manifiestan que es en Básica secundaria, lo hacen pensando en los métodos de solución que deben manejar los estudiantes para poder dar respuesta al valor que toma una determinada variable; es decir, consideran, abordan y dejan, en sus estudiantes la idea que las ecuaciones son una herramienta matemática que sirve únicamente para realizar despejes de variables y ayudan a conocer el valor numérico de una variable; desafortunadamente no las estudian como objetos matemáticos porque consideran que no aportan al desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Al analizar la información registrada en la tercera pregunta, se encuentra que tan solo el 33% de los docentes encuestados tienen en cuenta la existencia o la unicidad de soluciones (solo una de las dos), cuando propone ejercicios y situaciones problema que conllevan a la utilización, aplicación y estudio de las ecuaciones a sus estudiantes (Gráfico 3.). Este grupo de docentes manifiestan que consideran necesario lograr que el estudiante se cuestione por la existencia de la solución de una ecuación algebraica porque debe tener siempre en cuenta el contexto en el cual se está planteando la ecuación; quienes manifiestan tener en cuenta la unicidad de soluciones, lo hacen desde un punto de vista algorítmico pensando en la factorización y solución de ecuaciones de segundo grado, pero no como desarrollo de procesos de razonamiento y modelación.

Gráfico 3. Existencia y unicidad de soluciones abordadas en la práctica de aula.

En las respuestas dadas a la cuarta pregunta, los docentes plasmaron información adicional (Gráfico 4.) que permitió identificar la idea que tienen sobre el trabajo con ecuaciones; la mitad de los docentes considera importante, necesario y fundamental que los estudiantes pasen de lenguaje cotidiano a lenguaje simbólico;

pues manifiestan, es esta la mayor dificultad que presenta los estudiantes al momento de resolver situaciones que implican el uso de ecuaciones. Un alto porcentaje de los docentes considera que los elementos de existencia y unicidad de soluciones de una ecuación algebraica no deben hacer parte del estudio de las ecuaciones, ya que todas las ecuaciones tienen siempre solución, y es única cuando se trabajan ecuaciones de primer grado, mientras que cuando se trabajan ecuaciones de segundo grado se obtienen dos soluciones; manifiestan que estos procesos matemáticos ya establecidos y por lo tanto no es necesario hacer cuestionamientos o razonamientos sobre ellos.

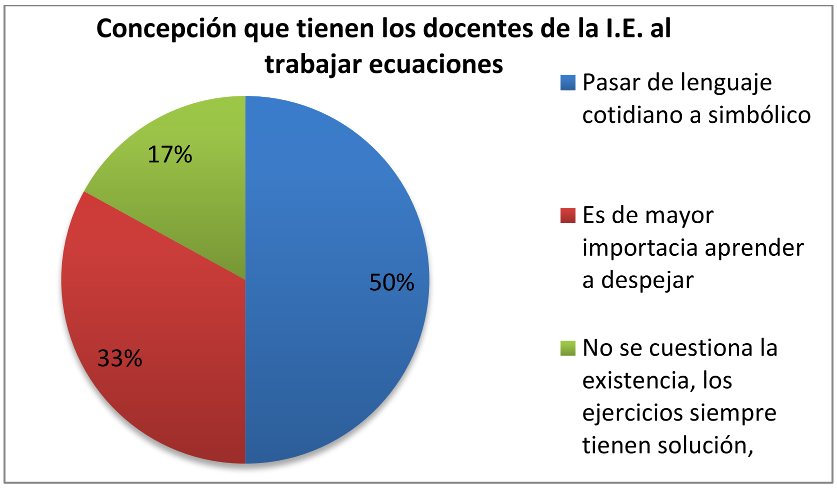


Gráfico 4. Concepción que tiene los docentes de la I.E. al trabajar ecuaciones.

En cuanto al cómo abordarían, de ser necesario, la existencia y unicidad de soluciones en la práctica de aula, el 67% de los docentes dice que se puede dar a través de la solución de problemas que pueden surgir de la cotidianidad del estudiante (Gráfico 5.).

Gráfico 5. ¿Cómo abordaría la existencia y unicidad en su práctica de aula?

De la información recogida y analizada, se puede decir que los docentes de Matemáticas de esta I.E. conciben la ecuación como el algoritmo matemático que permite conocer o hallar el valor numérico de una variable, pero no es considerada ni estudiada como objeto matemático, razón por la cual sus elementos de existencia y unicidad de soluciones tampoco hacen parte en el estudio y análisis de las ecuaciones, pues se cree que no son necesarios en el trabajo de aula.

Por otra parte y aunque no hacía parte de la encuesta, los diálogos informales permitieron indagar en el grupo de docentes por la utilización de programas informáticos en el desarrollo de las clase de matemáticas, a lo cual los docentes manifiestan utilizar en las aulas de clase programas como Excel, Derive y Geogebra. Sin embargo, por lo mencionado en la utilización que se les da en el aula de clase, se puede entender que programas como Excel y Derive son utilizados como calculadoras, los cuales realizan operaciones y gráficas de manera rápida, precisa y efectiva, pero solo se ven como eso, calculadoras que hallan respuestas, no son vistos como herramienta tecnológica que contribuye en el análisis y razonamiento de los objetos matemáticos abordados en el aula de clase. En cuanto a Geogebra, es un programa que se subutiliza, ya que con él se realizan gráficas de polígonos, rectas, círculos, ángulos y demás; pero no es utilizado como herramienta que permite la modelación de situaciones del contexto y de las matemáticas.

Como se puede observar, los docentes no utilizan software o programas informáticos como apoyo a la comprensión y aprehensión de los conocimientos matemáticos, tampoco son vistos como herramientas que pudiesen apoyar el estudio de las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones.

De acuerdo a lo mencionado en este capítulo, resulta preocupante que pese a que el MEN ha apoyado investigaciones e iniciativas que propenden por el cambio de prácticas de aula que buscan una mejora sustancial de la calidad educativa y las ha puesto al alcance de los todos los docentes del país, en sus “derroteros curriculares”; algunos docentes no conozcan, apropien ni cuestionen estas propuestas, lo cual impide la construcción de buenas a mejores propuestas curriculares institucionales, que propendan por el desarrollo y potenciamiento del pensamiento matemático al interior de las aulas de clase.

Esta falta de conocimiento o apropiación de las últimas propuestas Ministeriales permite tener concepciones y posturas curriculares equivocadas, como considerar que el único sentido que se les puede dar a las ecuaciones es el de una herramienta algorítmica que permite realizar una serie de operaciones aritméticas para despejar variables o que transforma lenguaje verbal en lenguaje algebraico; las cuales impiden desarrollar y potenciar en los estudiantes procesos de razonamiento, modelación, comunicación y resolución de problemas que, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias, son un camino adecuado para formar estudiantes con pensamiento matemático ciudadano.

5. CONDICIONES QUE GARANTIZAN EXISTENCIA Y UNICIDAD

Buscando conocer el trato dado a las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones, se ha indagado en la historia y en las propuestas curriculares del MEN, de una I.E. y de algunos docentes de Matemáticas, se propone en este capítulo, conocer los elementos formales de las Matemáticas – Teorema del valor medio, valor intermedio y punto fijo – que garantizan la existencia y unicidad de soluciones en una ecuación algebraica; razón por la cual se propone conocer la postura que desde los libros de texto de Educación Básica secundaria, Media y Superior se tiene sobre los elementos de las ecuaciones que son abordados en este trabajo.

Se empieza la revisión de libros de texto[21] de Básica secundaria donde se aborden las ecuaciones; encontrando que en la unidad 4 del texto Estrategias Matemáticas 7 se propone trabajar *Ecuaciones con proporciones* (Padilla, Melo, Barraza, & Sánchez, 2003, p. 102), donde dan un ejemplo de cómo hallar el término desconocido en una proporción para luego proponer al estudiante cuatro situaciones problema para que las resuelva; como es de suponer todas las situaciones tienen solución y es única, ya que la cuarta proporcional es única. Dentro del contenido del libro no se hace referencia a alguno de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones en las ecuaciones propuestas.

Para grado octavo, el texto Pensamiento Matemático 8, dentro del Pensamiento variacional, en la lección 8 hace referencia a las *Ecuaciones* (Díaz, Centeno, Jiménez, Quijano, Díaz, Robayo & Torres, 2002, p.275). En el contenido de la lección se dan algunas definiciones de ecuación, función polinomial, ecuación racional, entre otras; también se mencionan las propiedades de uniformidad y se mencionan unos principios generales para solucionar ecuaciones. Luego se presenta al estudiante una serie de ejercicios y situaciones problema para que los resuelva, pero todo lo propuesto tiene solución y es única. En ninguna parte de la lección o del libro se mencionan los teoremas de existencia y unicidad de soluciones.

En grado noveno se tiene el texto Matemáticas Prentice Hall 9. En él las ecuaciones aparecen en la unidad 1 como: ecuaciones con radicales, la ecuación de la recta, rectas paralelas y perpendiculares y ecuación cuadrática (Rodríguez, Dimaté & Beltrán, 2000). El libro presenta la solución a un ejercicio y luego presenta al estudiante una serie de ejercicios para que los resuelva. Como en los textos anteriores, todos los ejercicios propuestos tienen solución y es única. No se hace mención en ninguna parte de la unidad o del libro los teoremas de existencia y unicidad de soluciones.

[21] Se toman como referencia los libros de texto que reposan en la biblioteca de la I.E. Lucila Piragauta.

Para Educación Media se cuenta con el texto Espiral 10, el cual hace mención a las ecuaciones en la unidad 3 con *Ecuaciones trigonométricas* (Ardila, Pérez, Samper & Serrano, 2004, p. 108). Se inicia con la definición de ecuación trigonométrica, se muestra el paso a paso en la solución de algunos ejercicios para posteriormente proponer al estudiante un taller de procesos donde todos los ejercicios tienen solución y única, y solución infinita cuando se suma un múltiplo entero del periodo a la solución básica. En los ejercicios propuestos aparece delimitado el rango a trabajar lo que implica que todas las soluciones a los ejercicios propuestos son únicas. No se hace mención a ninguno de los teoremas de existencia y unicidad y no se justifica porqué la ecuación pasa de tener solución única a soluciones infinitas.

Por último tenemos dos libros de texto de grado once, Nuevo Alfa 11 (Moreno & Restrepo, 2001) y Delta 11 (Moreno & Restrepo, 2008). En ninguno de los dos textos se hace mención a las ecuaciones y mucho menos a la existencia y unicidad de soluciones.

Como se observa a lo largo de la revisión, los libros de texto proponen ejercicios y situaciones problema que siempre tienen solución y su solución es única, luego garantizan la existencia y unicidad de soluciones en todas las ecuaciones de primer y segundo orden que proponen; pero no se hace mención a los Teoremas que garantizan la existencia y unicidad de estas soluciones.

Se continúa la revisión pero ahora en libros de Educación Superior, se toman como referencia libros de Cálculo consultados frecuentemente por docentes y estudiantes de los primeros años de pregrado, entre los cuales se destacan el "Cálculo de una variable" de Stewart, "El cálculo" de Leithold y "El cálculo" de Apostol; de igual manera se busca información en dos páginas web, es.wikipedia.org y www.vitutor.com, consultadas continuamente por estudiantes de Básica primaria y secundaria, Educación Media y pregrado; con el fin de identificar la importancia, las similitudes y diferencias que tiene los libros seleccionados y las páginas web frente al estudio de la existencia y unicidad de soluciones específicamente en los Teoremas del valor medio, valor intermedio y punto fijo.

Al revisar las definiciones y/o enunciados sobre los teoremas del valor medio, valor intermedio y punto fijo en las fuentes consultadas, se observa que los enunciados están definidos para funciones; no se menciona de manera textual las ecuaciones. Esto se da debido a que las ecuaciones son un caso particular de las funciones, es decir, cuando se tiene la expresión $y = f(x)$ se habla de una función pero cuando la expresión se iguala a cero, es decir, $f(x) = 0$ convierte en una ecuación.

La información recogida se presenta en tablas, las cuales identifican cada una de las fuentes consultadas con la respectiva definición o enunciado con el cual es dado a conocer cada uno de los teoremas, al igual que la identificación del lenguaje utilizado en esa definición y en la demostración; también muestran el sistema de representación en que es presentado y los conceptos nombrados o relacionados en la definición o demostración. Por último se presenta la propuesta de temáticas abordadas después de mencionar o estudiar estos teoremas. A continuación se presenta la información relativa a cada uno de los teoremas.

5.1. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Con la información suministrada por los libros de Cálculo y las páginas web, se construyó la Tabla 4., las siguientes imágenes son apartes de los libros donde mencionan el Teorema.

3.3.2 Teorema del valor medio

Sea f una función tal que

(i) es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;
(ii) es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Figura 10. Definición del Teorema en el Cálculo de Leithold.
Tomado de (Leithold, 1994, p. 217)

TEOREMA DEL VALOR MEDIO Sea f una función que cumple con las hipótesis siguientes:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces hay un número c en (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, en forma equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Figura 11. Definición del Teorema en el Cálculo de Stewart.
Tomado de (Stewart J. , 2008, p. 282)

TEOREMA 4.5. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS. S
función continua en todo un intervalo cerrado $[a, b]$ que tiene deriv
punto del intervalo abierto (a, b), existe por lo menos un punto c inter
para el que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) .$$

Figura 12. Definición del Teorema en el Cálculo de Apostol.
Tomado de (Apostol, 1988, p. 226)

Tabla 4. Compilación información Teorema del valor medio

Fuente	Cálculo de Stewart	Cálculo de Leithold	Cálculo de Apostol	Wikipedia	Vitutor
Enunciado	Sea f que cumple con las hipótesis siguientes **1.** f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. **2.** f es derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces hay un número c en (a,b) tal que 1. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ o, en forma equivalente, 2. $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ (Stewart J. , 2008, p. 282)	Sea f una función tal que (i) es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$; (ii) es diferenciable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (Leithold, 1994, p. 217)	Si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a,b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a,b), existe por lo menos un punto c interior a (a,b) para el que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ (Apostol, 1988, p. 226)	Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a,b) entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a,b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$. Es decir: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$	Si una función es: **Continua** en $[a,b]$ **Derivable** en (a,b) Entonces, existe algún punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Lenguaje	Formal	Formal	Formal	Semi formal	Semi formal
Conjunto de Representa-ciones	-Algebraico -Gráfico	Algebraico	Verbal	Algebraico	Verbal
Conceptos Relacionados	-Función continua - Función diferenciable -Teorema de Rolle -Recta secante -Recta tangente -Continuidad -Derivada	-Pendiente -Recta tangente -Recta secante -Función continua - Función diferenciable -Continuidad -Derivada -Teorema de Rolle	-Función continua -Derivada -Teorema de Rolle	-Función continua -Derivada -Recta tangente -Recta secante -Teorema de Rolle	Función continua Derivada
Temas	-Prueba creciente/ decreciente (prueba C/D) -Primera derivada -Concavidad -Segunda derivada	-Funciones crecientes y decrecientes, y criterio de la primera derivada -Concavidad puntos de inflexión y criterio de la segunda derivada	-Aplicaciones del valor medio a propiedades geométricas de las funciones -Criterio de la derivada para los extremos -Derivadas parciales	Teorema del valor medio de Cauchy	

En las fuentes consultadas se define el Teorema del valor medio, como un Teorema de existencia, el cual garantiza que existe por lo menos un valor medio en el intervalo (a,b). Al analizar los conceptos que relacionan cuando realizan la demostración de este teorema para derivadas, exceptuando a www.vitutor.com, se menciona la utilización del Teorema de Rolle[22] para demostrar el Teorema del valor medio formulado por Lagrange[23], teniéndose que el teorema del valor medio de Lagrange es una generalización del teorema de Rolle y que la fórmula del valor medio de Cauchy[24] es una extensión del teorema de Lagrange cuando $g(x) = x$.

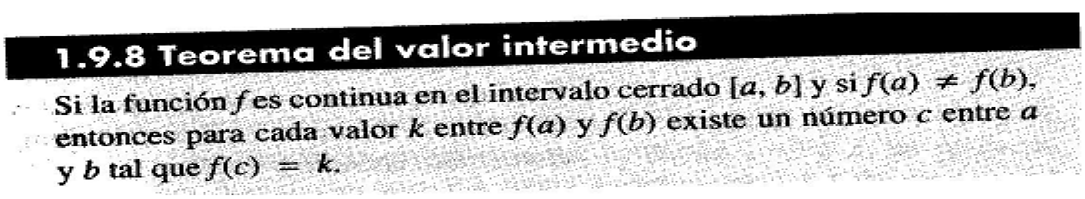
De la información propuesta en los libros de Cálculo y las páginas web se asume el Teorema del valor medio como teorema de existencia; y como se mencionó páginas atrás, las ecuaciones son un caso particular de las funciones lo que implica que el Teorema del valor medio también aplica a las ecuaciones; es decir,

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y d es una imagen de la función, que $f(a) \leq d \leq f(b)$, entonces existe c que pertenece al intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Ahora si g es una función continua en el mismo intervalo $[a, b]$ que f, y además $g(x) = f(x) - d$; al evaluar los límites del intervalo $[a, b]$ y el punto c en $g(x)$ se tendría que $g(a) \leq 0$; $g(b) \geq 0$ y $g(c) = 0$. De donde se tendría que c es una raíz de f y por tanto una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Con lo que se garantiza la existencia de al menos un punto c del que no interesa conocer su valor numérico sino tener la certeza que existe la solución de la ecuación en ese intervalo.

5.2. TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Con la información suministrada por algunos de los libros de Cálculo y páginas web, se construyó la Tabla 5., las siguientes imágenes son apartes de los libros donde mencionan el Teorema.


1.9.8 Teorema del valor intermedio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.

Figura 13. Definición del Teorema en el Cálculo de Leithold.
Tomado de (Leithold, 1994, pág. 80)

[22] Publicado en 1691 por el matemático francés Michel Rolle (1652 – 1719), en el libro Méthode pour résoudre les égalitéz; el cual dice: Sea *f* una función que satisface las siguientes tres hipótesis:
1. *f* es continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*.]
2. *f* es derivable en el intervalo abierto (*a*, *b)*.
3. *f* (*a)*= *f(b*)
Entonces hay un número *c* en (*a*, *b)* tal que *f(c)*= 0.

[23] Joseph – Louis Lagrange (1736 – 1813), matemático italiano.

[24] Agustin – Louis Cauchy (1789 – 1857), matemático francés.

REMA 3.8. Sea f continua en cada punto de un intervalo [a, b]. Si x_1 y dos puntos cualesquiera de [a, b] tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$, la función f todos los valores comprendidos entre $f(x)_1$ y $f(x_2)$ por lo menos una vez en intervalo (x_1, x_2).

Figura 14. Definición del Teorema en el Cálculo de Apostol.
Tomado de (Apostol, 1988, pág. 177)

En el cálculo de Stewart y en www.vitutor.com no se encuentra definición del teorema del valor intermedio. En las demás fuentes se define este teorema para funciones continuas y derivables.

Tabla 5. Compilación información Teorema del valor intermedio

Fuente	Cálculo de Stewart	Cálculo de Leithold	Cálculo de Apostol	wikipedia	vitutor
Enunciado		Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$; y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$. (Leithold, 1994, pág. 80)	Sea f continua en cada punto de un intervalo $[a,b]$. Si $x_1 < x_2$ son dos puntos cualesquiera de $[a,b]$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$, la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ por lo menos una vez en el intervalo x_1, x_2. (Apostol, 1988, pág. 177)	Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$. Entonces para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$, existe al menos un c dentro de (a,b) tal que $f(c) = u$. (Wikipedia, 2014)	
Lenguaje		Formal	Formal	Semi formal	
Conjunto de Representa-ciones		Verbal	Verbal	Verbal	
Conceptos relacionados		Función Continuidad	Teorema de Bolzano Continuidad	Función continua	
Temas		Continuidad de las funciones trigonométricas y teorema de estricción Recta tangente y derivada	El proceso de inversión Propiedades de las funciones que se conservan por inversión Inversas de funciones monótonas	Teorema de Bolzano	

La demostración de este teorema parte del Teorema de Bolzano[25] y se presenta en un sistema de representación verbal manifestando que su demostración rigurosa hace parte de los cursos y libros de Cálculo avanzado.

El teorema de valor intermedio, al igual que el teorema del valor medio, es un teorema de existencia, el cual garantiza que en un intervalo determinado de una función continua, para cada valor de la función existe un punto dentro del intervalo, es decir que,

Al tener una función f continua en un intervalo $[a,b]$ con $f(a) \neq f(b)$, entonces a cada valor k que pertenezca al intervalo $[f(a), f(b)]$ le corresponde un punto c en $[a,b]$ tal que $f(c) = k$. Es decir, el Teorema del valor intermedio garantiza la existencia de un punto *c*.

Este teorema, al igual que el Teorema del valor medio, no determina el valor de c pero sí garantiza la existencia de una imagen para al menos un punto del dominio de la ecuación, luego la solución no necesariamente es única.

5.3. TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Para este teorema solo se encontró información en http://es.wikipedia.org/, la cual se presenta en la Tabla 6.

Tabla 6. Compilación información Teorema del punto fijo

Fuente	Cálculo de Stewart	Cálculo de Leithold	Cálculo de Apostol	wikipedia	vitutor
Enunciado				Una función f sobre un dominio dado (con rango en el mismo dominio) tiene, al menos, un punto fijo; es decir, que existe un punto x en dicho dominio para el cual: $f(x) = x$	
Lenguaje				Natural	
Conjunto de Representa-ciones				Verbal	

[25] Sea f continua en cada punto del intervalo cerrado $[a,b]$ y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(c) = 0$.

Conceptos relacionados				Función Dominio Rango	
Temas				Categoría: Desambiguación	

Este teorema enuncia que en una función f, con dominio y rango igual al dominio, se garantiza la existencia de al menos un punto fijo donde $f(x) = x$.

De acuerdo a lo observado durante la revisión de las fuentes consultadas para conocer cómo se aborda y presenta a docentes y estudiantes los Teoremas que garantizan la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones algebraicas; se percibió que en los libros de texto utilizados en la escuela (encargada de la Educación Básica y Media) se propone un trabajo con ejercicios y situaciones problema que tiene solución siempre y esta solución es única; lo que reduce el trabajo con ecuaciones a un trabajo algorítmico de despeje de variables, reemplazo de números y aplicación de algunos métodos de solución; pero no se lleva al cuestionamiento ni justificación de la existencia y unicidad de las soluciones encontradas en cada problema. Una justificación errónea de los libros, puede ser el considerar el estudio formal de las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad, como temáticas no aptas para la matemática escolar y consideran que serán abordadas en la Educación Superior.

De igual manera, los libros de Educación Superior consultados, no se hace énfasis en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones algebraicas, en estos libros se encuentran enunciados los Teoremas del valor medio e intermedio los cuales garantizan, justifican y demuestran la existencia y unicidad de soluciones en funciones continuas, funciones derivables e integrables. Es de suponer que estos libros, asumen que el lector (estudiante o docente) asimila y extrae el caso particular de estos Teoremas que es aplicable a las ecuaciones algebraicas.

Sin embargo, en ninguno de los dos casos (textos en la escuela o Cálculos en Educación Superior) se mencionan y trabajan los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones; luego, desde la mirada de los libros pareciera que no se es muy importante el estudio de la existencia y unicidad de soluciones al estudiar y trabajar las ecuaciones.

6. CONCLUSIONES

Teniendo una mirada global, desde la historia, el currículo colombiano y los textos llevados a las aulas de clase como apoyo a la labor docente, se pueden realizar algunas apreciaciones y enseñanzas que permitió adquirir el presente trabajo de grado. Entre las cuales se encuentra la necesidad (que en docentes y estudiantes debe existir) de buscar, conocer, estudiar y comprender la historia de las matemáticas para lograr un mejor entendimiento y conocimiento de la función social y de desarrollo de pensamiento que las matemáticas tienen con la sociedad.

Al revisar la historia de las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones, se puede comprender que el estudio de este objeto matemático no consiste únicamente en aplicar métodos de solución para dar respuesta a un problema o ejercicio propuesto. El estudio de las ecuaciones va más allá, como lo demuestran civilizaciones antiguas como la egipcia, babilónica, griega y china; donde el estudio de las ecuaciones permitió avances en la escritura y simbología de la época, que posteriormente se convirtió en nuestro lenguaje aritmético y algebraico. Las ecuaciones también aportaron en la identificación de tipos de ecuaciones con los cuales, cada civilización antigua, pudo conocer y trabajar problemas en los cuales tenían la certeza de obtener una única solución; en el caso de los griegos, al menos una solución; de igual manera, las ecuaciones, tuvieron participación en el descubrimiento de nuevos conjuntos numéricos.

Razón por la cual, las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad de soluciones no pueden ser tratados como simples herramientas algorítmicas, necesarias y útiles para hallar valores numéricos de variables o incógnitas; el estudio de la existencia y unicidad de soluciones en una ecuación algebraica debe ser visto y estudiado desde una perspectiva analítica, donde se debe analizar el tipo de ecuación que se está proponiendo, el conjunto numérico en el cual se encuentra la ecuación y desde el contexto de donde es propuesta, razonar sobre la existencia de soluciones y el número de soluciones que puede llegar a tener.

Para lograr estudiar las ecuaciones y sus elementos de existencia y unicidad en la Educación Básica y Media, es necesario que los docentes conozcan y se apropien de los derroteros curriculares propuestos por el MEN, para mejorar o reformular las propuestas curriculares de las instituciones educativas del país; buscando pasar de una ecuación como herramienta algorítmica o una ecuación como objeto matemático que ayude a desarrollar y potenciar los procesos de razonamiento, modelación, comunicación y resolución de problemas de los niños y niñas que están siendo formados en nuestras escuelas y de los cuales se espera la adquisición de un pensamiento matemático ciudadano.

Al tratar la ecuación como objeto de las Matemáticas en la escuela, se hace necesario que los elementos que garantizan la existencia y unicidad de soluciones, como el Teorema del valor medio e intermedio, sean abordados, estudiados y comprendidos desde la formalidad matemática que el nivel de enseñanza en el que trabajen lo permita, sin limitar el estudio formal de las ecuaciones a los niveles de Educación Media y Superior; ya que el estudio de la existencia y unicidad de soluciones puede darse en la Educación Básica primaria y Básica secundaria sin ningún temor.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, C., & Enríquez, R. M. (2000). *Descartes y la ciencia del siglo XVII* (Facultad de Ciencias UNAM ed.). México: Siglo veintiuno editores.

Apostol, T. (1988). *Calculus.* Santafé de Bogotá: Reverté Colombiana S.A.

Ardila, R., Pérez, M., Samper, C., & Serrano, C. (2004). *Espiral 10.* Bogotá: Norma.

Blanco Pérez, C. A. (2014). *Lógica, ciencia y creatividad.* Madrid, España: Librería - Editorial Dykinson.

Boyer, C. B. (1969). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Díaz, F., Centeno, G., Jiménez, N., Quijano, M. V., Díaz, R., Robayo, M. F., y otros. (2002). *Pensamiento Matemático 8.* Bogotá: Libros & Libros.

González, P. M. (2003). *Los origenes de la geometría analítica* (Vol. 6). Tenerife: Fundación Canaria Orotava.

Hofmann, J. E. (2002). *Historia de la Matemática: Desde el comienzo hasta la revolución francesa* (1 ed.). México: Limusa S.A.

IE Lucila Piragauta. (2010). *Propuesta curricular del área de matemáticas.* Institución Educativa Lucila Piragauta, Yopal.

Jiménez, M., & Moreno, C. (2011). *Universidad de Murcia - España.* Recuperado el 21 de 04 de 2014, de http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/babilonia/babilon.htm

Leithold, L. (1994). *El cálculo.* México: Oxford University Press.

Lorente, A. C. (s.f.). *Historia de las civilizaciones.* Recuperado el 20 de 5 de 2014, de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20del%20algebra%20y%20de%20sus%20textos.pdf

Mejía, F. D., Álvarez, R. J., & Fernández, H. C. (2005). *Matemáticas previas al cálculo.* Medellín, Colombia: Sello editorial Universidad de Medellín.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* (MEN, Ed.) Recuperado el 06 de 05 de 2014, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/w3-article-339975.html

MEN. (2006). *Documento N° 3. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciecias y Ciudadanas* (1 ed.). Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional.

Moreno, V., & Restrepo, M. (2001). *Nuevo Alfa 11.* Bogotá: Norma.

Moreno, V., & Restrepo, M. (2008). *Delta 11.* Bogotá: Norma.

Padilla, E., Melo, C., Barraza, W., & Sánchez, E. (2003). *Estrategias Matemáticas 7.* Bogotá: Educar Editores.

Pérez de Laborda, A. (1984). *¿Salvar lo real?: Materiales para una filosofía de la ciencia.* (Ilustrada ed.). Madrid, España: Ediciones Encuentro.

Pérez, M. A. (2009). *Una historía de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes.* Visión Libros.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la Historia de las Matemáticas .

Rodríguez, B., Dimaté, M., & Beltrán, L. (2000). *Matemáticas Prentice Hall 9.* Santafé de Bogotá: Pearson Educación de Colombia Ltda.

Ruíz Felipe, J. (2009). El método demostrativo de Euclides en los Elementos. (Cefalea, Ed.) *Revista Digital Sociedad de la Información.*(17).

Ruíz, Á. (2003). *Historia Y Filosofía de las matemáticas.*

Santiago, A. C., & Santiago, M. J. (2011). *Resúmenes de matemáticas i con notas históricas.* Madrid: Visión Libros.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Simondi, V. Y., & González, S. R. (2010). Tres Civilizaciones. Tres Numeraciones. *Revista de Educación Matemática, 25*(1), 37.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas.* México: Crítica.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas.* México.

Vitutor. (s.f.). Recuperado el 8 de Septiembre de 2014, de http://www.vitutor.com/fun/6/teorema_lagrange.html

Vives, S. M. (2006). *Matemáticas para el siglo XXI.* (U. J. I, Ed.) Castelló de la plana, España.

Wikipedia. (25 de 12 de 2013). Recuperado el 8 de 9 de 2014, de http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_medio

Wikipedia. (11 de Agosto de 2014). Recuperado el 8 de septiembre de 2014, de http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_intermedio

Wikipedia. (21 de Enero de 2014). Recuperado el 8 de Septiembre de 2014, de http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_punto_fijo

Zubiría, J. D. (2014). ¿Por qué los malos resultados en las pruebas Pisa? *Revista Semana*.