

FORMAS DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO ASOCIADAS A SITUACIONES FUNCIONALES CON ESTUDIANTES DE NIVEL SECUNDARIA

José David Zaldivar Rojas, Idalia Citlalli Alonso Ruiz

Universidad Autónoma de Coahuila. (México)

david.zaldivar@uadec.edu.mx, ialonso@uadec.edu.mx

RESUMEN: La presente investigación reporta cómo alumnos de nivel Secundaria en México desarrollan formas de pensamiento algebraico y los medios semióticos que usan para ello. Nuestro objetivo es analizar la interpretación y medios semióticos que usan los estudiantes para referirse a lo *indeterminado* cuando se enfrentan a una situación donde se establece una relación funcional de manera implícita. El análisis se realiza con base en las categorías delimitadas dentro de la Teoría de la Objetivación, dejando ver aquellas formas de pensamiento algebraico que se presentan en los estudiantes que anteceden a un nivel simbólico y que se basan en otros recursos semióticos para ello. En este trabajo mostramos avances parciales de nuestra investigación, presentamos una revisión bibliográfica al respecto del tema y el camino de análisis que se pretende realizar. El análisis permite brindar evidencia sobre gestos y recursos semióticos que dejan ver un nivel de pensamiento algebraico contextual, donde los significados y argumentos son principalmente numéricos.

Palabras clave: pensamiento algebraico, objetivación, relación funcional

ABSTRACT: This research reports how secondary school students in Mexico develop algebraic thinking ways and the semiotic means they use to do it. Our goal is to analyze the interpretation and semiotic means that students use to refer to indeterminateness when facing up a situation where a functional relationship is implicitly established. The analysis is carried out based on the categories delimited within the theory of objectification, showing up those forms of algebraic thinking that students, preceding a symbolic level, have which are based on other semiotic resources. In this work we show partial advances of our research. We present a bibliographical review regarding the topic and the type of analysis that is intended to be carried out. The analysis allows providing evidence about gestures and semiotic resources that reveal a level of contextual algebraic thinking, where the meanings and arguments are mainly numerical.

Key words: algebraic thinking, objectification, functional relationship

■ Introducción

El interés hacia el tema del pensamiento algebraico surge de reflexiones relacionadas con la transición de la aritmética al álgebra, misma que acontece principalmente en el nivel Secundaria y, en ocasiones, presenta problemas de diversa índole (Butto y Delgado, 2012). Nuestra intención en este trabajo es mostrar avances en el análisis sobre medios semióticos de objetivación (Radford, 2010) presentes en estudiantes de nivel Secundaria cuando se enfrentan a una actividad de predicción relacionada a una función lineal. Nuestro interés también radica en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de nuestros estudiantes en el nivel Secundaria, de manera que éstos puedan acceder al estudio del álgebra por medio de actividades centradas en una articulación entre lo aritmético y lo algebraico.

■ La problemática de investigación

De manera general, cuando se habla de “álgebra” en la escuela, los estudiantes creen que eso implica hablar de operaciones con *letras*. Sin embargo, lo cierto es que el álgebra y el pensamiento algebraico nos permite acceder a un pensamiento lleno de simbolismo útil para desempeñar cualquier tipo de trabajo u oficio, desde leer un instructivo o llenar un formulario, es decir, es un tipo de pensamiento que nos posibilita a trabajar en situaciones donde se presenta lo *indeterminado* (SEP, 2011).

El álgebra en la escuela es un tema enseñado en nivel Secundaria como una transición de la aritmética y se encarga del estudio de objetos matemáticos indeterminados como incógnitas, variables y parámetros. Al respecto, Butto y Delgado (2012, p.2) mencionan: “Una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes enfrentan al iniciarse en el estudio de álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal”. Desde nuestro punto de vista, dicha “transición lineal” provoca que el álgebra sea vista también como un conjunto de operaciones carentes de significados. De hecho, Butto y Delgado (2012) mencionan que la manera en la cual se inician los estudiantes en el estudio del álgebra permitirá en gran medida llegar a conocer algunos de los obstáculos anteriormente mencionados.

Por otro lado, diferentes investigaciones abordan la transición entre la aritmética y el álgebra desde diferentes enfoques (ver por ejemplo: Butto y Delgado, 2012; Rojano y Sutherland, 2001; Kieran y Filloy, 1989). De manera general, en estos trabajos, se brinda evidencia de que los alumnos presentan dificultades al llegar al proceso de *generalización* que implica el álgebra simbólica. Por ejemplo, Kieran y Filloy reportan que, en ocasiones, en el estudio del álgebra los estudiantes consideran a las letras (símbolos) como meras “etiquetas” de aquello que representan, sin un sentido relacionado con la noción de variable.

■ Marco conceptual

Hay autores que mencionan que el uso de la simbología algebraica para resolver problemas o situaciones no revela un pensamiento algebraico, sino que pudiera tratarse de procedimientos aritméticos, como es el caso de un despeje o una sustitución. Radford (2010) menciona que son tres los elementos que caracterizan al pensamiento algebraico: el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro), la analiticidad (reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos); y la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos en algebra). Los anteriores elementos hacen del pensamiento algebraico un conjunto de procesos corporizados de acción y reflexión constituidos histórica y culturalmente, de manera que pensar algebraicamente va más allá del manejo de las letras y de las operaciones algebraicas. En dicho pensamiento está implícito lo desconocido, de manera que el álgebra posee como característica intrínseca el enfrentarse a lo indeterminado usando formas analíticas (Radford, 2010). Además, Radford propone una tipología de pensamiento algebraico para referirse a la indeterminancia: el *factual*, el *contextual* y el *simbólico*. En el pensamiento algebraico factual la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, sino que se expresa en acciones y la indeterminancia queda implícita. En el contextual, por su parte, la indeterminancia es explícita, mientras que en el simbólico se utilizan símbolos alfanuméricos del álgebra para nombrar la indeterminancia.

Esta tipología del Pensamiento Algebraico propuesta por Radford tiene sus bases en la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2014) que propone que “aprender no es simplemente adquirir un conocimiento, sino también es un proceso formativo y trans-formativo del ser, del sujeto que aprende” (Radford, 2011, p.44). Para la TO el saber es continuo y evolutivo en un contexto cultural, político y social determinado. Así, la educación no debería centrarse solamente en difundir saberes dejando de lado el ser. En la práctica escolar, el contexto es el aula misma y, al tratarse de un proceso social, deben estar involucrados factores externos tales como la actividad en sí, la cual nos permite crear la intención para que llegue a un fin o un saber intencional. Además, el aprendizaje no ocurre solo y debe ser mediado. Al estar en contacto con el medio, con el exterior, nos topamos con objetos, instrumentos, cosas, etc., llamados artefactos, mismos que en la TO se consideran como fuentes de saber, de manera que “el “conociendo” (knowing) queda definido como toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.)” (Radford, 2014, p. 142). Dicha “toma de conciencia” queda entonces definida como objetivación, misma que Radford define como: “el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente” (p. 141).

■ Aspectos metodológicos: el diseño experimental

Con la intención de analizar cómo estudiantes de nivel Secundaria desarrollan formas de pensamiento algebraico y los medios semióticos que usan para ello, se convino en diseñar una actividad que se denominó “Los Resortes”, basada en los trabajos de Arrieta y Díaz (2015) y Méndez (2006). La intención de las tareas que componen la actividad es que los estudiantes produzcan recursos semióticos que les permitan referirse a lo indeterminado cuando se presenta una relación funcional entre dos variables. La tipología del pensamiento algebraico anteriormente mencionada constituirá una herramienta para el análisis de las producciones de los estudiantes. Además, se pondrá especial énfasis en los recursos semióticos (lo hablado, lo escrito, lo representado, lo gesticulado) que los estudiantes emplean.

La actividad “Los Resortes” consistió en presentarles a los estudiantes imágenes de un resorte al cual se le colocan diferentes pesas y las tareas buscan que los estudiantes produzcan maneras para referirse a lo indeterminado, que en este caso se refiere al estiramiento del resorte cuando se le pone cualquier peso (ver figura 1). Una vez presentadas las imágenes, se les realizan a los estudiantes preguntas (ver Cuadro 1), las cuales se dividen en momentos correspondientes a los elementos de la tipología del pensamiento algebraico propuestas en Radford (2010). Al final se agrega un problema que se denominó “El problema del Mensaje”.

Asociado a lo anterior, por ejemplo, Küchemann (1978) determinó 6 niveles para describir las diferentes formas en que las letras se pueden utilizar: letra evaluada, ignorada, como objeto, como letra desconocida específica, como número generalizado y como variable. La clasificación anterior deja ver que la noción de variable es un tema complejo puesto que un estudiante, tanto en el estudio del álgebra como de las matemáticas en general, debe transitar por diferentes conceptualizaciones de dicha noción, lo cual conlleva distintas maneras de actuar y usar los significados de la variable, por parte de los estudiantes. Al igual que el trabajo anterior, Trigueros y Ursini (2000) realizan una investigación sobre la conceptualización de la variable en la enseñanza con una serie de actividades que propusieron a estudiantes de secundaria, de preparatoria y primer grado de universidad. A partir de este estudio, las autoras clasifican tres usos de la variable: como incógnita, número general y como relación funcional. De hecho, los resultados de la investigación anterior también dejan ver que en el nivel medio superior la comprensión de la noción de variable dentro de problemas que involucraban relaciones entre variables, es decir, variables en relaciones funcionales, fue uno de los aspectos donde los estudiantes tuvieron más dificultades, lo cual hace pensar que en dicho nivel las relaciones funcionales son desatendidas dentro de la enseñanza.

En la presente investigación también consideramos como problemática la poca atención a la noción de variable en actividades que involucren relaciones funcionales. Pero, además, consideramos necesario reflexionar sobre la forma en la cual el pensamiento algebraico se presenta cuando los estudiantes se enfrentan a actividades que requieren relacionar dos variables o simbolizar una relación funcional y qué recursos semióticos utilizan para ello.

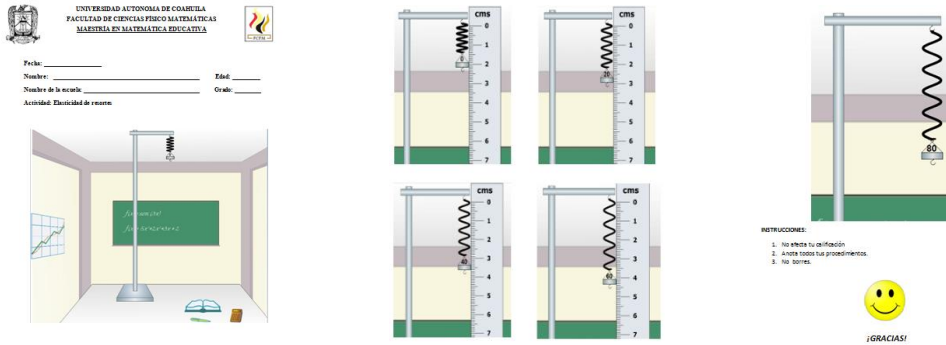


Figura 1. Actividad “Los resortes”

Cuadro 1. Momentos que conforman la actividad

Momento	Preguntas
1	<p>¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 20 gramos?</p> <p>¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 40 gramos?</p> <p>¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 60 gramos?</p> <p>¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 80 gramos? (para la pesa de 80 gramos el estudiante debe encontrar un estiramiento constante cada 20 gramos)</p>
2	<p>¿Cuál será el estiramiento del resorte si se colocan una pesa de 30 gramos? (dado que el estudiante no cuenta con una pesa de 10 gramos se torna importante que comprenda cómo cambia el estiramiento cada 10 gramos)</p>
3	<p>¿Cuál será el estiramiento del resorte si se colocan una pesa de 17 gramos? (dado que no se cuenta con pesas de 1 gramo, el estudiante debe encontrar cuánto cambia el estiramiento por cada gramo de peso)</p>
4	<p>¿Cuál será el estiramiento del resorte si se colocan una pesa de 33.3 gramos? (Se busca que el estudiante generalice una relación funcional que pueda establecer entre el estiramiento y el peso, probablemente proponer una fórmula)</p>
Problema del mensaje	<p>¿Cuál será el estiramiento del resorte si se coloca cualquier cantidad en el porta pesas? (se busca que el estudiante proponga una fórmula simbólica)</p>

La actividad se aplicó a dos grupos de 2 y 3 estudiantes de tercer grado de Secundaria, respectivamente, en la ciudad de Saltillo, Coahuila. Las sesiones se video-grabaron y se audio-grabaron con fines de análisis. Durante la implementación de la actividad el profesor no solo fue un facilitador o transmisor del saber, sino que se convirtió en parte activa del aprendizaje.

A continuación mostramos un análisis preliminar de los resultados, dado que la investigación que se reporta se encuentra actualmente en curso.

■ Análisis preliminar de resultados

Durante el momento 1 de la actividad, los estudiantes usaron el ritmo y el movimiento de la mano para referirse a lo que estaban buscando, es decir, lo *indeterminado*, y utilizaron estos recursos como medios semióticos para objetivar. En la Figura 3 se muestra cómo la estudiante mueve la mano de arriba hacia abajo y otra vez hacia arriba para decir cuánto se estira el resorte, llegando, desde nuestro marco conceptual, a un pensamiento que se podría denominar de tipo factual.

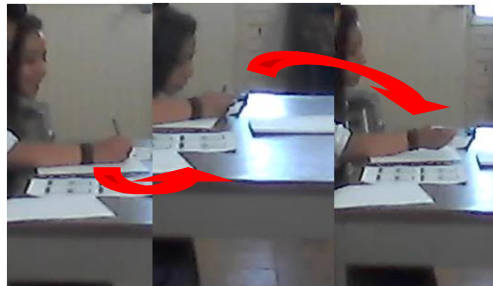


Figura 3. Gesticulación de “arriba hacia abajo” para expresar estiramiento

Una vez que la estudiante objetiva la indeterminación a partir de un gesto y de cuánto cambia el estiramiento en cada pesa de 20 gramos, opera con ella de una forma razonada y la suma para obtener el estiramiento del resorte con una pesa de 80 gramos (figura 4). En este momento consideramos que se presenta un pensamiento *contextual*, puesto que eso desconocido para el estudiante se expresa y se exterioriza por medio de la resta y se debe de sumar al anterior encontrando así el estiramiento que se le pide.

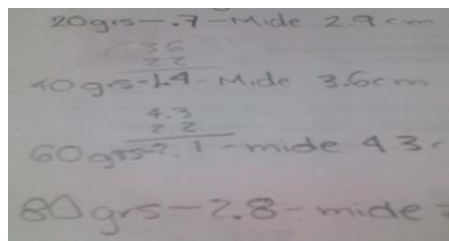


Figura 4. Lo indeterminado expresado contextualmente

En el momento 2, los estudiantes dicen la palabra “aumenta” como medio para referirse a la indeterminación. Para resolver el momento 2 y dado que no se tienen pesas de 10 gramos, los estudiantes determinan cuánto “aumenta” el estiramiento cada 10 gramos calculando la mitad entre el estiramiento de una pesa de 20 gramos y una pesa de 40 gramos y al resultado le suman 2.2 (que es el tamaño original del resorte sin pesa), de manera que se hace consciente la necesidad de una condición inicial la cual es indispensable para encontrar el resultado final del estiramiento para 30 gramos (ver extracto 1). En este momento se presenta un pensamiento contextual y se utiliza una palabra clave como medio semiótico para ello: “aumenta”.

*Alumna1: Porque cada 20 **aumenta** 0.7 tenemos que sacar la mitad de 0.7*

Alumno1: que es 0.35, por tres sería 1.05

Investigador: entonces ustedes dicen que se estira 1.05 con 30 gramos y con 20, ¿2.9?

Alumno1: más 2.2

Extracto 1. Diálogo sobre la necesidad de una condición inicial y lo que aumenta el estiramiento por cada 10 gramos.

En el momento 3, los alumnos observan que la estrategia de la mitad no les funciona como en el momento anterior, entonces buscan cuánto se estira el resorte por gramo y lo llaman **y**. El valor y anterior resulta ser la razón de cambio entre lo que se estira el resorte y cada gramo de peso (Extracto 2). Los estudiantes alcanzan a generalizar de esta manera la indeterminación, y la manejan de una forma analítica.

Alumna 1: Ya habíamos sacado lo de diez que era .35 entonces el .35 lo dividimos entre los diez y para sacar lo de cada gramo y es 0 .035, y eso por 17 es .59 más lo de 2.2 que ya medieron al principio y eso da 2.79

Extracto 2. La razón de cambio y la forma de expresar la indeterminación.

En el momento 4 los estudiantes manejan la indeterminación como algo inherente a ellos y operan con ella de forma analítica. Desde la postura teórica asumida en este trabajo, se podría decir que los estudiantes lograron objetivar lo indeterminado (el estiramiento) con base en el establecimiento de la razón de cambio haciendo evidente la generalización a la que han llegado como se observa en el Extracto 3.

Investigador: ¿cuánto es?

Alumno 2: 3.36

Investigador: ¿por qué?

Alumno2: porque multipliqué lo que se estira cada gramo por 33.3 más 2.2 ó sea se estiro 1.16.

Extracto 3. Se objetiva el estiramiento a través del establecimiento de la razón de cambio.

Por último, el “problema del mensaje” consistió en decirles a los estudiantes que se imaginaran a un amigo en otra escuela al cuál le tenían que explicar cómo sacar el estiramiento del resorte si se coloca cualquier cantidad en el porta pesas. En este momento los alumnos objetivan la indeterminación usando un recurso semiótico simbólico, es decir, se estableció una “fórmula” para calcular el estiramiento del resorte (ver figura 5). El estudiante que propuso dicha relación usó símbolos alfanuméricos propios del álgebra operando la indeterminancia con cierta naturalidad, como algo propio, presentándose un pensamiento algebraico simbólico. Se pone el resultado del estudiante y lo acompañamos de una copia fiel para apoyar a la visualización de lo escrito por el estudiante.

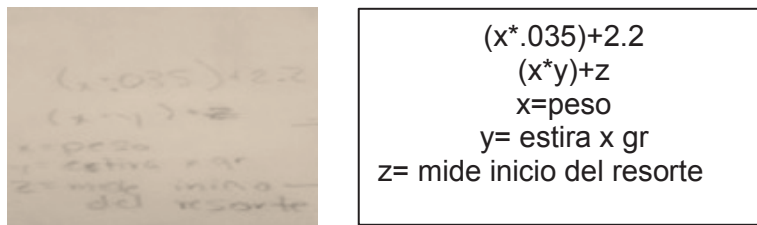


Figura 5. La “fórmula” propuesta por un estudiante durante el problema del mensaje.

■ Comentarios finales

El trabajo presentado es una investigación en proceso. Se continuará con un análisis más exhaustivo de los medios semióticos usados por los estudiantes, principalmente los que anteceden al uso de símbolos alfanuméricos. No obstante, consideramos que se ha realizado un avance importante en el análisis.

El análisis preliminar presentado deja ver elementos que permiten esclarecer el desarrollo del pensamiento algebraico en situaciones donde se debe establecer una relación funcional entre dos variables. De tal manera, nuestro trabajo viene a enfatizar afirmaciones realizadas por Radford (2010) sobre una tipología del pensamiento algebraico, el cual evoluciona a través de lo factual y lo contextual, hacia lo simbólico. Consideramos que además contribuimos a atender las problemáticas relacionadas con el establecimiento de relaciones funcionales que dentro de los cursos regulares de álgebra en Secundaria, muchas veces son descuidadas por un énfasis en tareas algorítmicas.

■ Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 30-48.
- Butto, C., y Delgado, J. (2012). *Rutas hacia el álgebra: actividades en Excel y Logo*. México: Horizontes Educativos.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.
- Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. *L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigació*, 12(1), 33-49.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Núm. Esp.*, 103-129.
- Rojano, T. y Sutherland, R. (2001). Algebraic reasoning with spreadsheets. *Centre of Research and Advanced Studies*, 1-16.
- Secretaría de Educación Pública. 2011. *Libro para el maestro Educación Secundaria*. Distrito Federal, México.
- Trigueros M. y Ursini A. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Revista Educación Matemática*. 17(12), 27-47.
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Distrital José de Caldas. Bogotá, Colombia.