

APRENDIZAJE INVISIBLE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Sergio Rubio-Pizzorno, Gisela Montiel Espinosa

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). México.

sergio.rubio@cinvestav.mx (www.zergiorubio.org), gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: A partir de la tercera revolución de la humanidad, la tecnología digital ha crecido de manera ingente, lo cual ha provocado, por ejemplo, un cambio en la estructura de la sociedad y cómo se comprende la educación. En esta última categoría, se manifiesta la posibilidad que tienen los individuos, y las comunidades que conforman, de suplir sus propias necesidades educativas. Este fenómeno ocurre como respuesta a la desidia del mundo oficial a dar respuesta al fenómeno de la educación. Debido a lo informal de estos aprendizajes, la institucionalidad responde a este fenómeno invisibilizando los aprendizajes desarrollados de esta manera.

En consecuencia con la problemática identificada, el propósito de este escrito es detectar indicios de aprendizajes matemáticos invisibles, mediante la revisión de literatura especializada, específicamente a través del análisis del *software* GeoGebra, como una manifestación de la sociedad 3.0. Con lo cual se comienza a delinear el problema de esta investigación, respecto a los aprendizajes invisibles para el caso de la geometría dinámica.

Palabras clave: aprendizaje invisible, tercera revolución de la humanidad, oficial - no oficial, GeoGebra

ABSTRACT: From the third humanity revolution, digital technology has rapidly increased, which has caused a change in the structure of society and the way education is understood. In latest category, the possibilities the individuals and their communities have to satisfy their own educational needs are shown. This phenomenon occurs in response to the official world's reluctance to respond to the phenomenon of education. Due to the informal nature of these learning, the institutions respond to this phenomenon by ignoring the learning developed in this way. In correspondence with the identified problem, this paper is aimed at detecting signs of invisible mathematical learning, through the review of specialized literature, specifically through the analysis of GeoGebra software, as an expression of the 3.0 society. Thus, the problem of this research, with respect to the invisible learning for the case of dynamic geometry, starts being focused.

Key words: invisible learning, third revolution of humanity, official - unofficial, geogebra

■ Introducción

En este escrito se reporta la identificación de la problemática a atender en nuestra investigación, la cual está caracterizada por el fenómeno social y educativo provocado por la aparición de las tecnologías digitales en el panorama mundial, o tercera revolución de la humanidad como lo denomina Serres (2013). Los efectos de este fenómeno en la educación han provocado una bifurcación entre el ámbito oficial y no oficial, en la manera de atender y de ocuparse de las necesidades educativas de las personas y las comunidades que integran. Lo oficial atiende a sus necesidades institucionales e invisibiliza los aprendizajes desarrollados por las personas en ámbitos no oficiales, aunque estos aprendizajes estén directamente relacionados con suplir las necesidades de las personas, solo por el hecho de no haber sido desarrollados en instancias oficiales.

En consecuencia al fenómeno señalado, es de interés para esta investigación situar los efectos de la tercera revolución de la humanidad y la dicotomía oficial-no oficial en la educación matemática, mediante la revisión de literatura especializada, específicamente lo que respecta a la geometría, debido al gran avance en las prácticas didácticas empleando ambientes de geometría dinámica (Sinclair et al., 2016). De tal manera que se comience a delinear un problema de investigación susceptible de desarrollar y viable de estudiar.

■ La tecnología digital ha penetrado e impactado a la educación

La relación entre educación y tecnología digital comenzó a mediados del siglo XX (Freiman, 2014), y a partir de ese momento esta tecnología ha penetrado e impactado en la educación a distintos niveles, tanto en sala de clases, escuelas, sistemas educativos, políticas gubernamentales, e incluso acuerdos de organizaciones internacionales preocupadas por la educación. Vemos como en la actualidad las aulas están equipadas con aparatos electrónicos como proyectores, pizarras digitales interactivas y computadores; las escuelas cuentan con conexión a Internet y laboratorios de cómputo; instituciones educativas brindan cursos de formación a distancia por medio de aulas virtuales; los gobiernos promulgan leyes y planes para entregar un computador o tabletas por estudiante. Esta penetración se condensa y converge a declaraciones de organismos internacionales preocupados de la educación, refiriéndose, por ejemplo, a la importancia de las competencias digitales como parte de las ocho competencias fundamentales de los ciudadanos del siglo XXI, por parte de la Agenda de Lisboa (Cobo y Moravec, 2011), o la tecnología como un dominio de aprendizaje del siglo XXI, por la Unesco (Learning Metrics Task Force – Unesco, 2013).

■ Tercera revolución en la humanidad

Esta penetración tecnológica no es exclusiva de la educación, otros ámbitos de la humanidad, como la sociedad, la economía, el trabajo y la vida privada se han visto modificadas por la integración tecnológica a sus prácticas. Estos cambios se fueron gestando durante la segunda mitad del siglo XX y

detonaron la aparición de las tecnologías digitales. Esto dio origen a lo que Serres (2013) denomina como una de las tres principales revoluciones en la historia de la humanidad, luego de la creación de la escritura e invención de la imprenta. Esta Tercera Revolución de la Humanidad (3RH) cambió, entre otros, la manera en que se articula la sociedad y cómo se entiende la educación.

Cobo y Moravec (2011) caracterizan el cambio social a raíz de la 3RH, como un cambio de paradigma entre la sociedad 1.0 (análoga, jerárquica, mecánica y determinista) y a la sociedad 3.0 (digital, intencionada y autoorganizada, sinérgica y diseñada).

En cuanto al efecto de la 3RH en la educación, Freiman (2014) identifica que, en su mayoría, los organismos oficiales se preocuparon de incorporar la tecnología teniendo en cuenta sus necesidades institucionales, por sobre atender a las necesidades educativas de las personas. Es decir, atender las directrices establecidas por políticas de los países, que fomentan el uso de tecnología en las escuelas, pero sin considerar cómo llevar a cabo magna tarea.

La descripción realizada sobre los efectos de la 3RH en el paradigma social dominante y el desempeño de la educación, se enmarca en un nivel de desarrollo oficial, entendiendo esto como las instituciones, centros de enseñanzas u otras instancias, que ejercen cierta autoridad sobre los miembros o conjunto de la sociedad, la nación, el estado o entidades territoriales.

Sin embargo, gracias a la proliferación y expansión de Internet, herramienta insigne de la sociedad 2.0, que emerge como instancia de democratización social y apertura a la libre disponibilidad de la información, también sucedieron cambios sociales y educativos a un nivel *no oficial*, motivados por la posibilidad de las personas para incidir en cambios locales, personales y colectivos, con efectos y resultados instantáneos.

En términos sociales, a partir de la 3RH, el avance tecnológico y la omnipresencia de Internet, la sociedad y la ciudadanía también se comenzaron a vivir de manera digital. Emergieron las redes sociales, plataformas para compartir información personal y comunitaria (YouTube, Flickr, Wikipedia, etc.), que permitieron compartir no sólo ideas, sino también generar nuevas interpretaciones de éstas. Cobo y Moravec (2011) denominan a este cambio social, a nivel no oficial, como el paradigma cultural del “corta-pegar”, aludiendo a la característica de remezclar y reutilizar información ya existente, para dar lugar a significados tan exclusivos y personales como los de las obras originales en las que se basaron (p. 51). Los blogs son un claro ejemplo de esta cultura del corta-pegar, espacio en el cual los autores comparten sus ideas personales con la comunidad global, valiéndose de la información compartida y disponible en esta red, expresada en distintos y diversos formatos, tales como audio, video, texto, imágenes.

Actualmente, en el contexto de la educación, existen modalidades de aprendizaje mediadas por la tecnología que nacen de manera independiente al ámbito oficial y a lo que éste determina que se debe aprender. Estas modalidades, como videos tutoriales en YouTube, plataformas de aprendizaje personalizado como Khan Academy, comunidades mundiales alrededor de software libre como GeoGebra, aplicaciones y sitios web para aprender idiomas como Duolingo, etc.; nacen en la

búsqueda por satisfacer las necesidades colectivas y personales de los miembros de la comunidad.

Debido a estas características, los aprendizajes desarrollados en estas modalidades corresponden a *aprendizajes invisibles* entendidos como:

Por una parte, contamos con el conocimiento explícito, que es sencillo de codificar o verbalizar, e incluso observar en libros, bases de datos, manuales de programación, partituras musicales, etc. Y por otra parte, está ese otro conocimiento, llamado tácito, que es personal o experiencial y que resulta mucho más complejo (sino imposible, en algunos casos) de exportar, sistematizar e incluso verbalizar. (Cobo y Moravec, 2011, p. 26)

Estos conocimientos o aprendizajes invisibles, se manifiestan en distintos ámbitos del saber humano, en el caso de las tecnologías digitales, con plataformas y formatos generales (como el caso de YouTube y Khan Academy), o de manera focalizada a distintas disciplinas (como GeoGebra para el caso de matemáticas y Duolingo para lenguas). Para esta investigación, nos interesa estudiar los aprendizajes invisibles relacionados con aprender matemáticas, por lo que analizamos el caso de GeoGebra, en sus facetas de herramienta digital y como comunidad global.

■ Geogebra como manifestación de la sociedad 3.0

Esta investigación reconoce como uno de sus principios que, debido al impacto global que ha provocado la aparición de la tecnología digital en el panorama educativo, las distintas disciplinas comparten de manera general algunas descripciones y caracterizaciones. Por ejemplo, en nivel de investigación educativa “la clave está en cómo se aprende, no en qué se aprende” (Cobo y Moravec, 2011, p. 61), lo cual aplica para diferentes didácticas disciplinares (historia, lengua, matemáticas, ciencias, etc.). Sin embargo, cada una de éstas tiene sus propias y privativas características, lo que obliga a considerar las particularidades de cada una al momento de realizar una investigación. De esta manera podemos declarar que, de manera general, aprender en ambientes materiales es diferente de aprender en ambientes híbridos. Y más aún, cuando se aprende en un ambiente híbrido, aprender matemática es distinto de aprender, por ejemplo, lengua, historia o alguna otra disciplina.

Reconocer este principio, permite enfocar las investigaciones a su campo disciplinar, que en el caso de esta investigación es la Matemática Educativa, disciplina que “se ocupa de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático” (Cantoral y Farfán, 2003).

En particular, analizamos la herramienta digital GeoGebra, de gran impacto en los ámbitos docente e innovación de la educación matemática, ya que pusieron los ambientes de geometría dinámica a disposición de todos, debido a su estatus de *software* libre (Sinclair et al., 2016).

GeoGebra es un software educativo cuyo propósito inicial fue combinar en una sola interfaz gráfica, las bondades de un procesador geométrico y de un sistema de cálculo algebraico simbólico (CAS), de ahí su nombre: GEOMETría y álGEBRA.

■ Desarrollo y Trabajo interconectado

Esta característica habla de la manera en que se construye y articula una herramienta en el Paradigma dinámico. Los grupos que desarrollan el software ya no son pequeños y cerrados, por el contrario, se constituyen una comunidad global alrededor de la herramienta digital. Pero no sólo en el desarrollo del programa, sino también en la posibilidad de compartir el conocimiento de manera libre y sin fronteras.

Esta organización social alrededor del software es natural cuando se habla de Software Libre, un concepto desarrollado por Richard Stallman en la década de 1980, como respuesta a la hegemonía de los sistemas operativos privativos, y a la imposibilidad de hallar una alternativa que no estuviese vinculada al monopolio comercial de tales software.

La propuesta de Stallman, que se sigue desarrollando de manera fructífera en estos días a través del Proyecto GNU y la Free Software Foundation, propone que un programa es software libre, si sus usuarios tienen las cuatro libertades esenciales:

- Libertad 0: La libertad de ejecutar el programa como se desea, con cualquier propósito.
- Libertad 1: La libertad de estudiar cómo funciona el programa, y cambiarlo para que haga lo que usted quiera. El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello.
- Libertad 2: La libertad de redistribuir copias para ayudar a su prójimo.
- Libertad 3: La libertad de distribuir copias de sus versiones modificadas a terceros.

Esto le permite ofrecer a toda la comunidad la oportunidad de beneficiarse de las modificaciones. El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello. (Free Software Foundation, 2016)

Para el propósito de este trabajo, es de interés analizar que la definición de software libre, a través de la declaración y cumplimiento de las cuatro libertades, tiene que ver más con efectos éticos, sociales y políticos, que con cuestiones técnicas. Como declara Stallman en una de sus conferencias sobre el software libre: “es el que respeta tu libertad y la solidaridad social de tu comunidad” (Stallman, 2013). Además enfatiza que el uso del software libre implica desarrollo social, ya que permite y fomenta el libre acceso a la información.

Conjugar las propuestas del software libre y el potencial de Internet, propicia de manera natural, el establecimiento y desarrollo de una comunidad colaborativa y global, alrededor de las herramientas digitales involucradas.

Volviendo al caso de GeoGebra, queda de manifiesto lo natural que se vuelve la colaboración entre los miembros de la comunidad. En palabras de Markus Hohenwarter, en su conferencia *Dynamic Mathematics for Everyone*: “para mí y para todos los que trabajamos con GeoGebra, la idea de compartir materiales educativos gratuitos con otros es muy importante” (Hohenwarter, 2013). Un dato interesante en cuanto a la articulación social alrededor del software, es que, según Markus Hohenwarter, el *origen de la Comunidad GeoGebra* ocurrió sólo después que el programa pasara a ser software libre.

■ Herramienta integradora

Debido al propósito inicial de GeoGebra, se concibió como un software que permitía distintas representaciones de los objetos matemáticos de manera simultánea. La relevancia de esta multirepresentación es que “contribuyen al entendimiento de una noción específica, facilitada por el uso de software que ofrecen una conexión de diferentes aplicaciones” (Aldon, 2015, p.367). En la actualidad, GeoGebra cuenta con un variado número de vistas, donde cada una de ellas se asocia a una representación de los objetos matemáticos: vista algebraica, vista gráfica (2D), cálculo simbólico (CAS), hoja de cálculo, vista gráfica 3D, entre otros.

La puesta en funcionamiento de estas multirepresentaciones se produce gracias a la integración de todas las vistas de GeoGebra, por ejemplo, al crear un punto en la vista gráfica, se obtendrá su representación visual, además de sus coordenadas cartesianas en la vista algebraica. Pero esta característica por sí sola, no asegura que el trabajo realizado en el ambiente propicie un mejor entendimiento del objeto matemático en cuestión, ya que si bien se puede asegurar la multirepresentación simultánea de un objeto, esto no es garantía de su integración para generar una actividad con intención didáctica.

La multirepresentación habla del potencial productivo del software (eficiencia, costo y campo de validez), llamado *valor pragmático* de la herramienta. Pero no se refiere a lo que se está estudiando con el software, ni cómo este ambiente ayuda al entendimiento del objeto de estudio. Cuando el software afecta el cómo se comprende el objeto matemático y genera preguntas sobre éste, habla de su *valor epistémico* (Artigue, 2002).

Por lo tanto, la multirepresentación, como valor pragmático, corresponde sólo a una condición necesaria para generar una herramienta integradora. Se requiere también integrar tales representaciones con una intencionalidad didáctica, que de cuenta del valor epistémico de la herramienta.

■ Manipulación dinámica

Una de las características emblemáticas de GeoGebra es la capacidad de dinamizar el tratamiento de los objetos matemáticos involucrados en las construcciones y actividades realizadas en el software. Tan relevante es esta característica, que desde los inicios de la Geometría Dinámica se ha teorizado acerca de la “transformación continua en tiempo real, a menudo llamada *arrastre*” (Goldenberg, 1998, p. 351), la cual permite diferenciar a los software de geometría dinámica de otros software de geometría.

El arrastre permite manipular los objetos matemáticos abstractos de una forma en la cual, sólo con herramientas mecánicas o análogas, era imposible de realizar. Del Castillo y Montiel (2009) mencionan respecto de los ambientes informáticos que “permiten al usuario operar de una forma directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera los conceptos

matemáticos abstractos” (p. 462).

Al reflexionar en los objetos matemáticos, es posible darse cuenta de su inmaterialidad, es decir, la incapacidad humana de poder acceder a ellos de manera física o perceptible. No podemos tomar una función entre nuestras manos, ni mirar a lo lejos cómo camina el dos. De ahí la importancia, en este campo disciplinar, de la representación de los objetos matemáticos para poder interactuar con ellos.

En consecuencia, la representación dinámica de los objetos, en este caso la cualidad de arrastre en el software GeoGebra, emerge como un gran avance a la hora de interactuar con los abstractos objetos matemáticos.

■ Ambientes híbridos

GeoGebra fue creado con la intención de ayudar a los profesores de matemáticas en su quehacer docente. Junto con esto, las características propias del software, permiten integrar el programa a una clase escolar, a través de la proyección digital de su interfaz, su uso en tabletas y teléfonos inteligentes, al aprovechar su potencial dinámico en una pizarra digital interactiva, compartir o buscar construcciones de manera libre en su plataforma web, etc.

Todas estas maneras de integrar GeoGebra al quehacer educativo, propician una hibridación en los ambientes de trabajo, desarrollando actividades tanto en ambientes materiales (sala de clase), como en ambientes digitales (plataforma web, dispositivos móviles, proyecciones digitales).

■ Resultados iniciales

El análisis realizado a GeoGebra muestra ciertos aspectos del *software*, que dan evidencia de ser una construcción propia de la sociedad 3.0. Por ejemplo en facetas como propiciar una organización social en comunidades de carácter público, colaborativo y global (Contreras, 2003), la relación sinérgica que provoca entre los miembros de la comunidad, la integración de diferentes formatos y ambientes de trabajos intencionando la constitución de ambientes híbridos de trabajo. Sumado a estas características, se reconoce un tipo de interacción distinta con el saber matemático, lo cual puede dar pie a plantear una hipótesis relativa a la reducción de la brecha mediacional, presente al estudiar matemáticas.

Al identificar estas características se puede reconocer, en términos generales, el potencial de GeoGebra como representante de las herramientas de la sociedad 3.0. Así también, nos interesa profundizar en aspectos del saber matemático, con el propósito de focalizar la investigación hacia aspectos de la educación matemática. Para lo cual, ponemos el énfasis en qué se estudia en el ambiente que provee GeoGebra.

De esta manera, reconocemos ciertas propiedades que se relacionan con el saber matemático, tanto en su manipulación, como en sus características epistémicas. En términos generales, GeoGebra

realiza una multirepresentación de los objetos matemáticos, articulando las distintas vistas del programa; de manera específica, sus vistas gráficas, representantes de los ambientes de geometría dinámica, destacan por la manipulación dinámica de los objetos geométricos, mediante el *arrastre*.

El arrastre, como característica definitoria de los ambientes de geometría dinámica, añade ciertas propiedades al ambiente, las cuales son heredadas a los objetos geométricos representados en ese entorno, modificando su naturaleza geométrica (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017). Esta nueva naturaleza en los objetos geométricos dinámicos, podría fomentar el surgimiento de aprendizajes invisibles asociados a ciertos saberes matemáticos estudiados en ambientes inusuales (digitales), invisibilizados por una dimensión hegemónica del *discurso Matemático Escolar* (en el sentido que plantean Soto y Cantoral, 2014).

■ Conclusiones y proyecciones

A partir de la 3RH, la sociedad experimentó ciertas modificaciones. En particular notamos en la educación el fenómeno de invisibilización de los aprendizajes construidos en entornos no oficiales por instancias oficiales. Debido a la disciplina donde se enmarca este proyecto de investigación, se focaliza en aspectos relativos a la educación matemática mediante el análisis de GeoGebra.

De este análisis surgen algunos resultados que permiten delinear una ruta investigativa para este proyecto, centrando la atención el saber en juego mediante una problematización de la geometría, lo que denominamos *énfasis epistémico*, así como también estudiando de qué manera incide la tecnología digital en el desarrollo social de ciertas comunidades, a lo cual nos referimos como la *organización social propiciada por la tecnología digital*.

Al abordar estos dos elementos pretendemos desarrollar sustento teórico para delinear un planteamiento de investigación que considere los aspectos claves identificados hasta el momento: impacto de la tecnología digital en la emergencia de aprendizajes invisibles; distinción del desarrollo educativo en ámbitos oficiales y no oficiales; énfasis epistémico; y organización social propiciada por la tecnología digital.

■ Referencias bibliográficas

- Aldon, G. (2015). Technology and Education: Frameworks to Think Mathematics Education in the Twenty-First Century. En: Uwe Gellert, Joaquim Giménez Rodríguez, Corinne Hahn y Sonia Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics: A C.I.E.A.E.M. Sourcebook*, 365–381. Springer International Publishing, Cham. ISBN 978-3-319-15410-7. doi: 10.1007/978-3-319-15410-7 24.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. ISSN 13823892. doi:

10.1023/A:1022103903080.

- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27–40.
- Cobo, C. y Moravec, J. (2011). *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación*. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona. ISBN 9788447535170.
- Contreras, Pau (2003). *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica*. Editorial Gedisa S. A., Barcelona. ISBN 84-9784-007-0.
- Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o Instrumento? Esa es La Pregunta. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 459–468. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Free Software Foundation (2016). ¿Qué es el software libre? Extraído el 30 de septiembre de 2016 desde www.gnu.org/philosophy/free-sw.html
- Freiman, V. (2014). Types of Technology in Mathematics Education. En Stephen Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, 623 – 629. Springer Netherlands.
- Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. A. (1998). What is Dynamic Geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, 351–367.
- Hohenwarter, M. (2013). *Dynamic Mathematics for Everyone* [Video]. En youtu.be/Yq1eBZjz16I
- Learning Metrics Task Force - Unesco (2013). *Toward Universal Learning. What Every Children Should Learn*. UNESCO Institute for Statistics and the Center for Universal Education at the Brookings Institution.
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Naturaleza de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.
- Serres, M. (2013). *Pulgarcita*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education*, 48(5), 691-719. doi: 10.1007/s11858-016-0796-6
- Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática* 28(50), 1525-1544. doi: 10.1590/1980-4415v28n50a25
- Stallman, R. (2013). *Conferencia sobre Software Libre* [Video]. En https://youtu.be/5t_EcPTEzh4