LOS MODOS DE PENSAR LA DERIVADA: UN ESTUDIO DE CASO

Irma Pinto Rojas, Marcela Parraguez González
Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

RESUMEN: El objetivo de este reporte es mostrar evidencia empírica que sustenta los modos de pensar el concepto de derivada, desde una variación del marco teórico, –Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska. Con un estudio histórico y epistemológico de la derivada, emergió un modelo que interpreta su comprensión, cuyas componentes se han definido como los modos de pensar: Sintético-Geométrico-Convergente, Analítico-Operacional y Analítico-Estructural. Un estudio de caso con tres matemáticos investigadores en las líneas de “Linear Control Systems on Lie Group”, “Sub-Riemannian Geometry Optimality Semigroups” y destacados docentes de una universidad chilena, documentaron a través de una entrevista semiestructurada, la consistencia de los modos definidos, así como también se identificaron aquellos elementos matemáticos que permiten el tránsito de un modo geométrico a un modo analítico del concepto de derivada.

Palabras clave: comprensión, derivada, modos de pensamiento

ABSTRACT: The aim of this report is to show empirical evidence that supports the ways of thinking about the concept of derivative, from a variation of the theoretical framework, “Thinking Modes” by Sierpinska. With a historical and epistemological study of the derivative, a model that interprets its understanding emerged. Its components have been defined as modes of thinking: Synthetic-Geometric-Convergent, Analytical-Operational, and Analytic-Structural. A case study with three mathematical researchers in the fields of "Linear Control Systems on Lie Group", "Sub-Riemannian Geometry Optimality Semi groups" and outstanding teachers of a Chilean university as well, documented through a semi-structured interview, the consistency of the defined modes. Those mathematical elements that allow the transition from a geometric mode to an analytical mode of the concept of derivative were also identified.

Key words: understanding, derivative, thinking modes

Introducción

El Cálculo Diferencial está presente en los programas de estudio de Ciencias, Economía e Ingenierías en general y el concepto de derivada es su actor principal. En una institución universitaria del norte, existe preocupación por el aprendizaje de la derivada en sus estudiantes y direccionar un estudio en los aspectos cognitivos, fue el primer impulso de motivación para esta investigación. Responder ¿cómo comprenden la derivada los estudiantes? y ¿qué estrategias utilizan los estudiantes al resolver problemas que involucran la comprensión de la derivada?, fueron las primeras preguntas, un tanto ingenuas, para un problema tan complejo como es el aprendizaje de este concepto.

Desde la experiencia docente, se observa que los estudiantes están más cómodos resolviendo problemas donde se priorizan los algoritmos para trabajar con derivadas y presentan dificultades en problemas que requieren un entendimiento más profundo del concepto, Sierpinska (1985) y Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995), muestran evidencias de tal situación. Otras investigaciones en Didáctica de La Matemática han indagado en la derivada desde diversas perspectivas, entre éstas, Pino-Fan, Godino y Font (2015), con un estudio cuantitativo y cualitativo realizado a 53 estudiantes, señalan que el 56% de los estudiantes tuvieron problemas para demostrar mediante la definición formal de la derivada, en particular la derivada como límite, lo mismo se afirma en Vinner y Dreyfus (1989), Font (2000), Sierpinska (2007). La función derivada (aspecto global de la derivada) y la derivada en un punto (aspecto local de la derivada), han sido reportadas en Inglada y Font (2003), Badillo, Azcárate y Font (2011) como problemas metodológicos pendientes. Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), presentan una revisión de investigaciones que reportan sobre el aspecto global, y local de la derivada, argumentando que los estudiantes no comprenden las ideas que vinculan estos dos aspectos. Además, la doble naturaleza algorítmica y estructural de la derivada (Sfard, 1991) influyen en la comprensión del concepto en los estudiantes, proceso que se torna aún más complejo.

Para indagar la comprensión de la derivada desde su desarrollo en la matemática, esta investigación realiza un análisis histórico y epistemológico del concepto de derivada, con base en el marco teórico– Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska (2000), marco que permite a partir de una variación de sus modos, realizar una interpretación de los modos de comprensión para la derivada. De esta forma, esta investigación considera tres formas de pensar la derivada, que se definen como el modo, Sintético-Geométrico-Convergente (SGC), el modo Analítico-Operacional (AO) y el modo Analítico-Estructural (AE) como las componentes de un modelo que relaciona el aspecto local en relación sinérgica con el aspecto global de la derivada. Desde esta perspectiva se concibe la comprensión profunda de la derivada como la capacidad de un sujeto para articular estos tres modos de pensamiento.

Para afrontar la problemática, se plantean las siguientes preguntas que guían la investigación: ¿cuántas maneras diferentes de pensar la derivada se ponen en juego en una tarea matemática? y ¿qué elementos matemáticos contribuyen al logro del tránsito entre los modos de pensamiento geométrico y analítico del concepto? Un desafío en esta etapa de la investigación, será dar respuesta a estas preguntas, por lo que se han planteado los siguientes objetivos:

Objetivo general de investigación

Comprender y analizar, desde los modos SGC, AO y AE, el hecho didáctico de pensar la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva, la derivada como el límite de las pendientes de las rectas secantes en un punto y los indicadores que dan consistencia a la pendiente, para identificar y describir su conexión.

Específicamente, se pretendió determinar los elementos articuladores entre las formas de comprender la derivada, la búsqueda de estos elementos conectores que pudiera estar en el ámbito de la matemática o de la física o de otra disciplina. La búsqueda de los elementos que favorecen el tránsito entre estos modos de pensar la derivada, direcciona la búsqueda de una base teórica que permita describir y dar respuesta a la problemática planteada.

Marco de referencia: los modos de pensar la derivada

Desde un estudio histórico y epistemológico de la derivada, esta investigación realiza una variedad del marco teórico que presenta Sierpinska (2000), para interpretar la comprensión de la derivada en los aprendices. Se debe precisar desde el punto de vista matemático que el aspecto local de la derivada está referido a la consideración del entorno de un punto específico, como una vecindad de este punto en la curva, y en lo global es de interés una vecindad del punto específico suficientemente grande como el dominio de la función. En este estudio histórico y epistemológoco se han identificado tres etapas en el desarrollo de la derivada, su génesis, su naturaleza operacional y su carácter formal en la matemática. Todo este proceso, puede ser resumido a través de la siguiente frase: “Primero fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y solo entonces definida”, (Grabiner, 1983, p. 202).

Este marco de referencia corresponde a un modelo para la comprensión de la derivada, donde se relaciona el aspecto local y global de la derivada y sus modos de pensar respectivamente. Modelo que ha sido el resultado de la evolución de una investigación iniciada como una variación del marco teórico –Los Modos de Pensamiento– de Anna Sierpinska, reportado en, Pinto y Parraguez (2015), estos modos se han definido de la siguiente manera:

Modo Sintético-Gráfico-Convergente (SGC)

El contexto geométrico de la derivada como la pendiente de la recta tangente en el análisis histórico y epistemológico, (Bourbaki, 1972), muestra la diversidad de puntos de vista sobre la noción de recta tangente, así también la recta tangente es la noción matemática que esta investigación considera como una componente fundamental para conseguir la imagen directa, observable del concepto de derivada, característica que Sierpinska, (2000) da al pensamiento practico del modo Sintético-Geométrico (SG), al que esta investigación define como modo Sintético-Geométrico- Convergente, (Figura 1).

De acuerdo con Canul, E.; Dolores, C y Martínez-Sierra, G. (2011), una concepción geométrica global de la tangente, en la definición de Euclides, refiere a la tangente de una circunferencia, como*: Una línea recta es tangente a una curva cuando tenga un punto en común con la curva, no se puede pasar por este punto ninguna recta entre ella y la curva*. Sin embargo, para el propósito de construir rectas tangentes a la curva en esta investigación, esta definición presenta dificultad en la comprensión, dado que la curva con puntos de inflexión no tendría posibilidad de tangente, la concepción euclidiana se torna inadecuada, (Canul et al. 2011). Es necesario entonces considerar una definición de tangencia que suponga la tangencia desde lo local. En esta perspectiva, se considera entonces, para poder trazar tangentes a estas nuevas curvas, el punto de vista desarrollado por D´Alembert (1717-1783), para el logro de la representación del concepto de derivada por medio de la tangente que concuerda con la definición propuesta por Leibniz.

Modo Analítico -Operacional (AO)

Para definir la derivada en términos de la definición de límite, (Grabiner, 1883), Cauchy considera el límite de la relación de las diferencias $[\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{i})-\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})]\,/\,\boldsymbol{i}$ en un intervalo de continuidad de $f(x)$. Se necesita de la continuidad para $f(x + i) - f(x)$ e i puedan tanto "acercarse indefinidamente y al mismo tiempo el límite cero", o lo que es equivalente, "cantidades infinitamente pequeñas." Cauchy nunca indica explícitamente esto como un teorema, cada función diferenciable debe ser continua. Como lo habían hecho muchos de sus predecesores, que aunque el numerador y el denominador de la razón $f(x + \mathrm{i}) - f(x)\,/\,\mathrm{i}$ es cero ", la relación en sí misma puede converger a otro límite, ya sea positiva o negativa", que cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de x, para indicar esta dependencia, se da a la nueva función el nombre de la función derivada y se designa con la ayuda de un acento por la notación y' o $f'(x)$; la frase “este límite, cuando existe" ejemplifica la actitud rigurosa de Cauchy. Tal vez la calificación "cuando el límite existe” sólo estuvo motivada por el comportamiento de las funciones conocidas en puntos aislados, pero su lenguaje era lo suficientemente general para abrir toda la cuestión de la existencia o no existencia de derivadas (ver Figura 1).

Modo Analítico -estructural (AE)

Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos y dependen de los tipos de relaciones y de los objetos evocados por el sujeto en el momento de resolver una tarea, (Parraguez, 2012), por tal razón este modo considera los indicadores y las propiedades que caracteriza a la pendiente en relación con la recta tangente y la curva (ver Figura 1).

Se presentan tres modos que permiten describir la comprensión de la derivada en lo local.

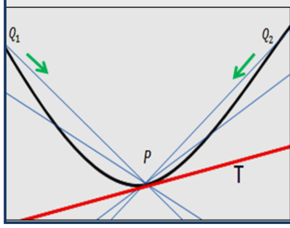
Sintético-Geométrico-Convergente SGC	Analítico-Operacional AO	Analítico-Estructural AE
	• $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ • Si este límite existe en x_0 $m = f'(x_0)$. Donde m es el límite de las pendientes de las rectas secantes a f desde P	• Recta tangente a la curva en P • Indicadores que dan consistencia a la pendiente de la recta tangente a la curva en P

Figura 1. Sintético-Geométrico -Convergente (SGC), el Modo Analítico-Operacional (AO) y el Modo Analítico- Estructural (AE) del concepto de derivada.

Para comprender la derivada en lo local, se deben articular los tres modos presentados en Figura 1, describir y validar dichos elementos es el propósito de esta investigación. En la Figura 2, se muestra el diagrama que guiara la búsqueda, para ello se plantea la siguiente pregunta ¿cuáles son los elementos articuladores entre los aspectos Sintético-Geométrico-Convergente, Analítico-Operacional y Analítico-Estructural, que permiten la comprensión del concepto de derivada?

Diagrama que representa la búsqueda de articuladores

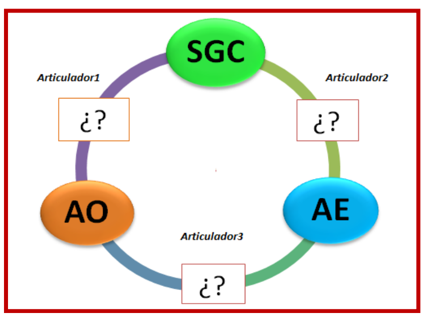


Figura 2. La relación de los articuladores con los modos definidos

Metodo y resultados

La propuesta de validación de estos tres modos de pensar la derivada, está sustentada en dos fuentes:

Primera fuente: El análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico del concepto de derivada sustentado en la literatura existente, que ha proporcionado categorías conceptuales útiles para la construcción de los modos de pensar la derivada, relevante en el aprendizaje del Cálculo Diferencial.

Segunda fuente: Un estudio de caso (Stake, 2010). La aplicación de una entrevista semiestructurada a tres investigadores en matemáticas en las líneas del álgebra y la geometría con vasta experiencia en el campo de la enseñanza, el propósito de indagar si los informantes expertos refutan o confirman la estructura en la Figura1. La implementación de la situación corresponde a una entrevista en donde los modos (Figura 1), son presentados en tres tarjetas, sin rótulo, las que el entrevistado puede manipular, con el objeto de no producir sesgo en los datos.

Se muestra en este escrito una pequeña parte de la entrevista. La transcripción de la entrevista por episodios, al primer informante, rotulado [INF1].

[1INF1]Y en caso que se produzca un vértice como en el caso de la función módulo de x por ejemplo, no existe una única recta que pasa por ese punto, que podría ser considerada como tangente, sino que hay varias, es por ese concepto, como hay tantas pendientes, no tiene sentido la derivada en ese punto, se puede mirar al revés. Uno podría ver también que la función es derivable cuando se puede asociar una única pendiente a una recta tangente ¿entiendes?

[1ENT]: ¿Qué elementos de la matemática, cree usted que relacionan estos aspectos de la derivada?

[2INF1] Primero es que usted puede fijar el *f(x)* del punto P y puede decir que *f(x+h)* es el extremo del triángulo, en conexión con el punto *Q*, o puede ser mirando cualquier punto del otro lado, a la izquierda o derecha de *P*. Con relación al cociente, usted, tiene un triángulo, con eso estamos pensando en el límite, con relación al cociente, usted, tiene un triángulo y con eso relaciono, el valor de h que es lo que define el cateto del triángulo.

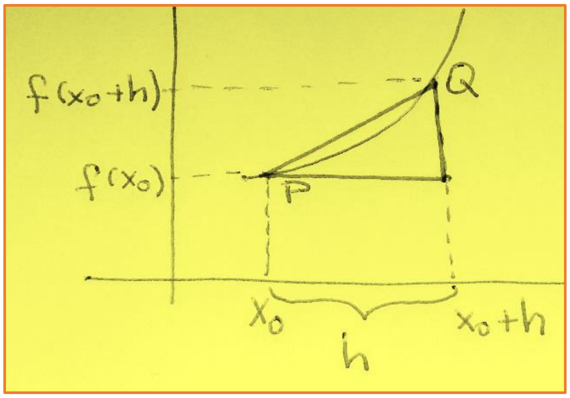


Figura 2. Articulador del modo SGC y AO

El ángulo de tangencia da exactamente la pendiente de la recta tangente, cuando *h* tiende a cero. Para mí el concepto que hace la ligazón entre los dos es perfectamente el triángulo rectángulo, porque estoy usando implícitamente que el ángulo está formado entre dos catetos del triángulo.

Reflexiones

El análisis de los datos tomados de los informantes, respecto de los modos definidos, dan cuenta de la coherencia existente entre los modos definidos y lo declarado por los informantes, como se muestra en [1INF1].

El triángulo rectángulo (Figura 3), es el elemento geométrico que articula el modo SGC y AO desde la perspectiva local de la derivada y se corresponde con el triángulo característico de la perspectiva leibniziana, la curva como una poligonal de lados infinitesimales.

Se pretende validar los articuladores para el aspecto global con la aplicación de nuevos instrumentos y entrevistas en profundidad, para concluir con la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje del concepto, que serán relevantes para la comprensión de la derivada.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 97-140.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas.* España: Alianza Editorial.

Canul, E.; Dolores, C. y Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 14(2), 173-202.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de *f'(x).* El caso de la función seno. *Uno*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas* 7(25), 21-40.

Grabiner, J. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. New York: Dover Publications.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*. 56(4), 195-206.

Inglada, N., & Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SI-IDM), 1-18.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento. Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. *Bolema*, 29(51), 60.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría Los Modos de Pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28,* 337-344. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22 (1), 1-36.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(2), 267-296.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite*. Recherches en Didactique des Mathematiques.* 6(1), 5-7.

Sierpinska, A. (2000). *On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (2007). I need the teacher to tell me if I am right or wrong. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul, South Korea* (Vol. 1, pp. 45-64).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22 (1), 1-36.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos. Madrid*: Morata.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education,* 356-366.