UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA DERIVADA DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES EN UN LIBRO DE TEXTO PARA INGENIERÍA

Katia Vigo Ingar, Cintya Gonzales Hernández
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
kvigo@pucp.pe, cintya.gonzales@pucp.pe

RESUMEN: El objetivo de este artículo es describir y el analizar una organización matemática en relación a una aplicación de la derivada de funciones de dos variables de un libro de texto utilizado por los estudiantes de Ingeniería del segundo año de estudios. Para ello adoptamos la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Además, como parte de este análisis tomamos en cuenta los tratamientos y conversiones de los registros de representación semiótica que el autor del libro didáctico realiza. Nuestra investigación es cualitativa de tipo bibliográfica. Identificamos que el libro muestra una organización matemática puntual puesto que presenta solo un tipo de tarea, una sola técnica y el bloque tecnológico-teórico está presente de manera aislada en relación a este objeto. En el análisis encontramos que hay presencia de tareas rutinarias y procedimentales, afirmando que esta genera técnicas estabilizadas, el alcance de esas técnicas es limitado. Por otro lado hay ausencia de tareas inversas y tareas que privilegien la intuición geométrica.

Palabras clave: organización matemática, derivada parcial, ingeniería

ABSTRACT: The aim of this article is to describe and analyze a mathematical organization in relation to an application of the derivative of functions of two variables of a textbook used by second-year students of Engineering. We adopt the Anthropological Theory of Didactics. In addition, within this analysis we take into account the treatments and conversions of the records of semiotic representation that the author of the didactic book performs. Our research is qualitative, of bibliographic type. We identify that the book shows a mathematical punctual organization since it presents only one type of task, a single technique and the technological-theoretical block is present in isolation in relation to this object. In the analysis we found that there are routine and procedural tasks, which generates stabilized techniques, the scope of these techniques is limited. On the other hand, there is absence of inverse tasks and tasks that favor the geometric intuition.

Key words: mathematical organization, partial derivative, engineering

Introducción

Se realiza este estudio visto que, de acuerdo con Gonzales (2014), el libro de texto es considerado como referencia básica, tanto para los profesores como para los estudiantes y es una herramienta fundamental para el desarrollo de las clases. Por otra parte Trigueros y Martínez – Planell (2010) afirman que las funciones de dos variables juegan un papel importante en las matemáticas aplicadas, en las ciencias, en la ingeniería y en la economía.

Además, en base a estudios realizados en educación matemática con respecto a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial de funciones de dos variables reales, por ejemplo los realizados por Trigueros y Martínez-Planell (2010), Alves (2011) e Ingar (2014), entre otros, se ha mostrado que los estudiantes presentan algunos problemas en su aprendizaje, como por ejemplo, la relación entre las variables, la identificación del dominio de una función de dos variables, la representación gráfica, la conversión entre las representaciones propias al estudio de las funciones de dos variables, la percepción del registro gráfico de una función de dos variables, entre otros.

Con respecto a una de las aplicaciones de las derivadas parciales, Xhonneux y Henry (2010) realizan el estudio del teorema de Lagrange bajo la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y presenta un modelo epistemológico de referencia (MER) para analizar las organizaciones matemáticas de ese objeto en libros de texto. Dicho estudio muestra que el análisis de una organización matemática en un libro de texto no es suficiente, que es necesario realizar el análisis de la organización didáctica con el fin de investigar los conocimientos matemáticos. Al respecto, coincidimos con estos autores cuando afirman que el análisis de texto es el inicio para investigar los conocimientos matemáticos, puesto que el estudio de las organizaciones praxeológicas didácticas son pensadas para la enseñanza y el aprendizaje de organizaciones matemáticas; dado que, la TAD es una teoría que nos permite describir como son presentados los conocimientos matemáticos en los libros de texto; es que concordamos con Xhonneux y Henry (2010) cuando aseveran que una de las características de esta teoría es su poder descriptivo. Asimismo, esta teoría permite describir y analizar tanto las organizaciones matemáticas como las didácticas.

Teoría Antropológica de lo Didáctico

Según Chevallard (2001), en la TAD, las nociones de (tipo de) tarea, (tipo de) técnica, tecnología y teoría permiten modelar las prácticas sociales en general y en particular la actividad matemática, basándose en: Toda práctica institucional puede ser analizada bajo diferentes puntos de vista y de diferentes maneras, en un sistema de tareas relativamente bien delineadas, y el cumplimiento de toda tarea ocurre del desenvolvimiento de una técnica. Para el autor, la palabra técnica es utilizada como una “manera de hacer” una tarea, pero no precisamente como un procedimiento estructurado y metódico o algorítmico.

Según el investigador, la relación institucional que se establece entre una institución (I) alumno, profesor y un objeto (O), depende de las posiciones que ocupan en esa institución y del conjunto de tareas que esas personas deben cumplir usando determinadas técnicas. El problema de delimitar tareas, según el autor, en una práctica institucional que varía de acuerdo con el punto de vista de la institución en la cual se desarrolla la práctica o de una institución externa que observa la actividad para describirla con un objetivo preciso.

En este sentido, en una organización praxeológica el Tipo de tarea denotado por T es identificado si contiene por lo menos una tarea t. Tipos de tarea provocan acciones con objetivos bien definidos y son siempre expresados por un verbo. Por ejemplo, encontrar el valor máximo de $f(x,y)= x^2+y^2$ es un tipo de tarea, pero "encontrar" simplemente no lo es. Es por esto que se hace necesario distinguir tarea, tipo de tarea y género de tarea.

Para el investigador, un género de tarea existe bajo la forma de diferentes tipos de tarea, cuyo contenido está bien claro y definido. Por ejemplo, encontrar es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo.

Tarea, tipos de tareas y géneros de tareas, para el autor, no son datos de la naturaleza, pero si artefactos, obras, constructos institucionales, cuya reconstrucción en tal institución es un problema enteramente objeto de la didáctica.

La técnica denotada por τ, es una determinada manera de hacer o realizar un tipo de tarea T. Una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene, en principio, una técnica ô relativa a T. De esta manera se tiene un "bloque" designado por $[T/\tau]$, que se denomina bloque práctico-técnico y que, para el autor se identificará como un saber-hacer: un determinado tipo de tareas T y una determinada manera τ de realizar las tareas de este tipo.

La tecnología denotada por Ө, es un discurso racional que tiene por finalidad justificar la técnica τ y para garantizar que permita realizar las tareas del tipo T. La tecnología permite asegurar que la técnica es correcta, exponer el porqué es de aquella manera, además de posibilitar la producción de nuevas maneras de hacer, es decir, nuevas técnicas. La cuarta y última noción del modelo praxeológico es la Teoría, denotada por Ꙩ. Según Chevallard (2001), como el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, se hace necesario un nivel superior de justificación-explicación-producción. Es, en este sentido que la teoría asume, en relación con la tecnología, la función que esta última tiene en relación de la técnica, es decir, la teoría tiene el objetivo de justificar y de esclarecer la tecnología. Por lo expuesto, el autor afirma que la tecnología y la teoría están próximas, y no sería difícil confundirlas.

Metodología

Nuestra investigación es cualitativa de tipo bibliográfica, porque usa los textos como fuente de análisis; además, según Gil (2002) permite al investigador cubrir una amplia gama de fenómenos y ésta se amplía mucho más porque se puede buscar directamente. Además, para De Andrade y Lakatos (2003), la metodología cualitativa de tipo bibliográfica abarca toda la bibliografía hecha pública, es decir, publicaciones sueltas. Es así que, esta metodología tiene por finalidad colocar al investigador en contacto directo con todo lo que está escrito. En este sentido, basados en los aportes de estos autores, nuestro texto a analizar es el de Finney & Thomas (2010), está presente en el sílabo del curso de Matemática III como bibliografía básica; por ello es utilizado por estudiantes de Ingeniería de Alimentos en el tercer ciclo de estudios (segundo año).

En el capítulo 14, sección 14.7 se encuentra nuestro objeto matemático de estudio: valores extremos y puntos de silla. El autor presenta 4 tareas resueltas y 30 tareas propuestas relacionadas con el estudio de los extremos locales.

Organización Matemática

En este apartado describiremos la organización matemática presente en el texto Finney & Thomas (2010) relacionada a la determinación de valores extremos locales de funciones reales de dos variables, a partir de ahora denominaremos funciones.

Afirmamos que si sabemos que la función tiene un valor extremo, entonces la tarea es determinar ese valor, y de no ser así, verificar. Vamos a definir dos tipos de tareas para determinar valores extremos locales de funciones de dos variables:

T1 - Determinar los valores extremos locales de funciones no diferenciables

T2 - Determinar los valores extremos locales de funciones diferenciables

A continuación describimos las tareas, técnicas y tecnología relacionadas a estos tipos.

Respecto al tipo de tarea T1 y T2 describimos las siguientes tareas, las cuales definiremos de la siguiente manera $t_{i,j}$, donde i representa el tipo al que pertenece y j es el número de la tarea.

$t_{1,1}$: Determinar los valores extremos locales de funciones no diferenciables continuas (donde no existen las derivadas parciales) dada su expresión algebraica.

$t_{1,2}$: Determinar los valores extremos locales de funciones no diferenciables discontinuas (donde existan derivadas parciales) dada su expresión algebraica.

t_2: Determinar los valores extremos locales de funciones diferenciables dadas su expresión algebraica.

Llamaremos τ_1 a la técnica que emplea la representación gráfica como referencia para resolver las tareas del tipo 1 y 2.

Paso1,1: Determinar el dominio de la función.

Paso1,2: Realizar un esbozo de la representación gráfica de la función graficando curvas de nivel.

Paso1,3: Determinar con la intuición geométrica los posibles valores extremos.

Paso1,4: Verificar la definición de valores extremos (Examinar los valores que toma la función cerca del punto del dominio donde se estudia el extremo).

De acuerdo con Bosch (1994 citada en Gonzales, 2014) existe una dicotomía entre los elementos de la praxeología matemática, ya que los pasos de una técnica en una institución pueden ser tareas en otra y viceversa, consideramos institución en el sentido de TAD. Por ejemplo, el paso 1.2 de la organización matemática presentada, corresponde a una tarea en gráfica de funciones.

En el texto analizado encontramos la siguiente definición (ver):

DEFINICIONES Sea que $f(x, y)$ esté definida en una región R que contiene el punto (a, b). Entonces,

1. $f(a, b)$ es un valor **máximo local** de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b).
2. $f(a, b)$ es un valor **mínimo local** de f si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b).

Figura 1. Definición de Máximo y Mínimo Local. Fuente: Finney & Thomas (2010) p. 803

En esta definición podemos encontrar un paso de la técnica τ_1 para determinar los extremos locales de una función de dos variables.

Llamaremos τ_2 a la técnica que emplea la representación algebraica como referencia para resolver las tareas del tipo 1.

Paso1,1: Determinar el dominio de la función.

Paso2,1: Determinar el rango de la función a partir de la expresión algebraica.

Paso2,2: Aplicar desigualdades de números reales.

Paso1,4: Verificar la definición de valores extremos (Examinar los valores que toma la función cerca del punto donde se estudia el valor extremo).

En esta técnica se puede observar lo que afirma Bosch (1994) puede ocurrir que algunas técnicas se articulen entre sí en un sistema para formar una técnica de nivel superior. Podemos ver que τ_2 contiene algunos pasos de τ_1.

En el texto analizado encontramos el teorema (ver Figura 2) que se emplea para determinar los puntos del dominio donde es posible que la función tenga extremo. Podemos observar que se utiliza la definición de punto crítico.

TEOREMA 10: Criterio de la primera derivada para valores extremos locales
Si $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior (a, b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen allí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Figura 2. Criterio de la primera derivada. Fuente: Finney & Thomas (2010) p. 803

En la figura 3 se puede observar algunos pasos de técnica τ_2, son complementados con la definición de punto crítico, la cual podemos denominar como sigue:

Paso (2,*) Determinar los puntos críticos de la función

EJEMPLO 1 Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$.

Solución El dominio de f es todo el plano (de manera que no hay puntos frontera) y las derivadas parciales $f_x = 2x$ y $f_y = 2y - 4$ existen en todas partes. Por lo tanto, los valores extremos locales pueden presentarse sólo cuando

$$f_x = 2x = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y = 2y - 4 = 0.$$

La única posibilidad es el punto (0, 2), donde el valor de f es 5. Como $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 + 5$ nunca es menor de 5, vemos que el punto crítico (0, 2) tiene un mínimo local (figura 14.43). ■

Figura 3. Tarea aplicación del teorema 10. Fuente: Finney & Thomas (2010)

Llamaremos τ_3 a la técnica que emplea para resolver las tareas del tipo 2.

Paso1,1: Determinar el dominio de la función.

Paso3,1: Determinar si la función es diferenciable.

Paso (2,*): Determinar los puntos críticos de la función.

Paso 3,2: Determinar el discriminante.

Paso1,4: Verificar el criterio de la segunda derivada (ver figura 4).

En la figura 5 se puede ver un problema resuelto usando la técnica.

TEOREMA 11: Criterio de la segunda derivada para valores extremos locales
Suponga que $f(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en (a, b), y que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Entonces,

i) f tiene un **máximo local** en (a, b), si $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b).
ii) f tiene un **mínimo local** en (a, b), si $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b).
iii) f tiene un **punto de silla** en (a, b), si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en (a, b).
iv) **El criterio no es concluyente** en (a, b), si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en (a, b). En este caso, debemos encontrar otra manera de determinar el comportamiento de f en (a, b).

Figura 4. Criterio de la segunda derivada. Fuente: Finney & Thomas (2010

La tecnología de la organización matemática presentada está dada por el siguiente teorema:

ϴ – Sea $f : U \subseteq R^n \rightarrow R$ una función definida en el conjunto abierto U de R^n que tiene en $\bar{x} \in U$ un punto crítico. Supongamos que en una bola B de R^n con centro en $\bar{x}$, las derivadas parciales de segundo orden son continuas. Sea $H(\bar{x})$ la matriz hessiana de *f* en $\bar{x}$. Entonces:

a. Si la forma cuadrática es definida positiva, entonces *f* tiene un valor mínimo local en $\bar{x}$.
b. Si la forma cuadrática es definida negativa, entonces *f* tiene un valor máximo local en $\bar{x}$.

Por lo que afirmamos que esta tecnología que justifica las técnicas, presenta un modelo matricial. Además que el bloque tecnológico-teórico está presente de manera aislada en relación a este objeto.

Según Xhonneux (2011), la presencia o ausencia de tareas estructurales, permite constituir el bloque tecnológico-teórico de manera eficaz. Por ejemplo, en el álgebra escolar, al pasar de ver las expresiones algebraicas como procesos (forma operativa heredada del aprendizaje de la aritmética escolar) a verlas como objetos, dentro de una estructura algebraica.

Se puede suponer que la actividad matemática trata de articular la parte estructural a la parte procedimental en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, la importancia acordada a cada uno de esos dos aspectos de la actividad matemática en los procesos de enseñanza y en la realización de tareas inherentes a cada tipo de actividades varía de una institución a otra.

EJEMPLO 3 Determine los valores extremos locales de la función

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4.$$

Solución La función está definida y es derivable para todas las x y y, y su dominio no tiene puntos frontera. Por lo tanto, la función tiene valores extremos sólo en los puntos donde f_x y f_y se anula en forma simultánea. Esto da como resultado

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \qquad f_y = x - 2y - 2 = 0,$$

o bien,

$$x = y = -2.$$

Por lo tanto, el punto $(-2, -2)$ es el único punto donde f puede asumir un valor extremo. Para ver si esto es así, calculamos

$$f_{xx} = -2, \qquad f_{yy} = -2, \qquad f_{xy} = 1.$$

El discriminante de f en $(a, b) = (-2, -2)$ es

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3.$$

La combinación

$$f_{xx} < 0 \qquad \text{y} \qquad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

nos dice que f tiene un máximo local en $(-2, -2)$. El valor de f en este punto es $f(-2, -2) = 8$. ■

Figura 5. Tarea criterio de la segunda derivada. Fuente: Finney & Thomas (2010)

Análisis de la organización matemática

1. Faltan definir tareas donde se pueda privilegiar la intuición geométrica, es decir se pueda realizar la técnica τ_1. De acuerdo con Bosch (1994), las técnicas tienden a estar normalizadas; este es un rasgo importante de la vida institucional, esto se puede entender que como los estudiantes ya aprendido derivadas parciales, entonces se tiene que utilizar, además porque están en la sección y otros factores que no permiten la articulación con otras OM.
2. Respecto al alcance de la técnica que presenta el libro analizado, el criterio de la segunda derivada no resuelve tareas donde al menos una de sus derivadas parciales no exista o el Hessiano sea cero.
3. Ausencia de tareas inversas, por ejemplo una tarea inversa a determinar los valores extremos locales, podemos plantear la tarea, demostrar que una función no tiene valores extremos locales.
4. Presencia de tareas rutinarias que pueden ser resueltas con una técnica estabilizada, que permiten realizar las tareas de manera supuestamente idóneas. Se presentan tareas donde las funciones siempre son diferenciables, como se puede observar en la figura 5. Se puede proponer tareas donde las derivadas parciales existen pero no se anulan en ningún punto del dominio de la función.
5. Sólo se presentan tareas procedimentales, más no tareas estructurales en el sentido de Xhonneux (2011), estos son los tipos de tarea que se definen por explicar, interpretar, definir, analizar, resumir, etc.

Consideraciones finales

De los resultados obtenidos, observamos que la organización matemática que se desarrolla en torno a la aplicación de la derivada de funciones de dos variables, está justificada por la teoría de matrices, respecto al bloque práctico-técnico se priorizan tareas procedimentales, cuyas técnicas se presentan de manera algorítmica, se formulan en lenguaje matemático, es decir, se presentan mediante definiciones y teoremas; el alcance de la técnica presente es limitado. Por otro lado, no se presentan tareas estructurales necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático formal. Afirmamos que el libro presenta una organización matemática puntual puesto que presenta un tipo de tarea, una sola técnica en relación a este objeto matemático.

Referencias bibliográficas

Alves, V. (2011). *Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tesis de doctorado no publicada, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, Brasil.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática el caso de la proporcionalidad*. Tesis de doctorado no publicada. Universitat Autónoma de Barcelona. España.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemática, Huesca*. 1-10. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr.

De Andrade, M. y Lakatos, E. (2003). *Fundamentos de la Metodología Científica*. (5ta. Ed.). Brasil: Editorial Atlas.

Finney, R. y Thomas, G. (2010). *Cálculo varias variables*. (12 Ed.). México: Addison Wesley Longman de México, S.A

Gil, A. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. (4ta. Ed.) Brasil: Editorial Atlas

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ingar, K. (2014). *A visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais.* Tesis de doctorado no publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions, *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.

Xhonneux, S. (2011) *Regard instutionnel sur la transposition didactique du théorème de Lagrange en mathématiques et en économie*. Tesis de doctorado no publicada, Université de Namur. Francia.

Xhonneux, S. & Henry, V. (2010). *A didactic survey of the main characteristics of Lagrange's theorem in mathematics and in economics*. Cerme 7: Working Group 14, 1-10.