DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA ESCUELAS DE INGENIERIAS

Ernesto Arturo Bosquez, Javier Lezama, Avenilde Romo
Universidad Autónoma Metropolitana. (México) Centro de Investigación de Ciencia. Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. (México) ernestok1@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com, avenilderv@yahoo.com.mx

RESUMEN: En este artículo se plantea el diseño de una secuencia didáctica, orientada al estudiante de ingeniería para que vincule el teorema de convolución en el contexto de la ingeniería. Partimos del supuesto teórico de ver a la disciplina matemática como una disciplina de servicio, este hecho nos permite analizar diferentes usos del teorema de convolución, en lo que se conoce en ingeniería como disciplinas intermediarias, estas situaciones permitirán al estudiante vincular este conocimiento matemático desde varias perspectivas como la modelación matemática de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales, la transformada de Laplace como técnica de solución de ecuaciones diferenciales, la simulación a través de diagramas de bloques y éstos como cajas negras para que el estudiante proponga modelos que le sirvan para obtener la función de amortiguamiento en un circuito eléctrico, así como el uso de las leyes de ohm, Kirchoff y programas como OrCad, Math Lab y Graph.

Palabras clave: teorema de convolución, situación didáctica, modelación matemática, disciplina intermediaria

ABSTRACT: This paper is concerned with a didactic sequence design addressed to engineering students, so that they link the convolution theorem to the engineering context. We start from the theoretical assumption of viewing mathematics as a service discipline, which allows us to analyze the different uses of convolution theorem in what is known in engineering as intermediate disciplines. These situations will allow the student to link the mathematical knowledge from various perspectives, such as: the mathematical modeling of electric circuits, to differential equation, Laplace's transformation as a solution technique of differential equation, simulation through block diagrams, and these as black boxes, so that the student propose models that be useful to obtain the damping function in an electric circuit, as well as the laws of Ohm, Kirchoff ,and programs such as Orcad, Math Lab and Graph.

Key words: Convolution theorem, didactic situation, mathematical modeling, intermediate discipline.

Planteamiento del problema

El teorema de convolución es estudiado en el discurso escolar de las ecuaciones diferenciales en las escuelas de ingeniería. Al tratar a la Transformada de Laplace como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales se incorpora este teorema, la manera en que se presenta este conocimiento en los textos utilizados por profesores y estudiantes de este curso es,

Teorema de Convolución: Sean las funciones $f(x)\ g(x)$ continuas por tramos en el Intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}[f*g]=F(s)\cdot G(s)$$

Dónde $f*g$ es la convolución de f con g y se define como,

$$f*g=\int_0^t f(\alpha)g(\alpha-t)\,d\alpha$$

Siempre que esta última integral exista.

Este enfoque discursivo, reduce la actividad matemática del estudiante un aspecto operatorio para resolver ecuaciones diferenciales, es decir, promueve la idea de que el teorema es una serie de pasos que le permitirán resolver ecuaciones diferenciales y a través de este proceso, podrá elegir cuándo utilizar o no este teorema. También se observa que en este discurso el procedimiento muestra un desprovisto de vinculaciones del mismo en relación a la ingeniería que estudian (Bosquez, Lezama y Mora, 2010).

Lo que nos propusimos es diseñar una secuencia didáctica que permita:

- Construir un medio didáctico que considere los elementos de la matemática, ingeniería y tecnología.
- El medio didáctico permitirá que el estudiante vincule estos elementos en el contexto de la ingeniería.
- La secuencia didáctica permitirá la interacción entre el alumno, el medio didáctico y el docente.

A partir de esta intencionalidad, nos planteamos los cuestionamientos siguientes ¿Cómo involucrar al teorema de convolución en los contextos matemáticos de la ingeniería y tecnológicos? ¿Qué aspectos teóricos de la didáctica considerar? ¿Cómo construir los escenarios donde el estudiante pueda desarrollar de manera práctica los aspectos matemáticos y las disciplinas intermediarias en una secuencia didáctica?

Fundamentos teóricos

El diseño de una secuencia didáctica que se propone, surge a partir de la metodología conocida como ingeniería didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995), así como algunos aspectos teóricos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y del paradigma científico de ver a la disciplina Matemática como una disciplina de servicio (Howson, Kahane, Lauginie y Turckheim, 1988). Otro aspecto importante corresponde a la actividad de la modelación tanto en la matemática como en la Física y en la Ingeniería misma (Blum, 2002), es decir, la representación de expresiones matemáticas relacionadas con situaciones de la vida real. Todos estos elementos teóricos nos permitieron vincular de alguna manera al teorema de convolución con los elementos mencionados.

Primer componente teórico

Consideramos dos aspectos para nuestro trabajo. En el primero como característica relevante es que el profesor ve al estudiante como un contenedor de conocimientos matemáticos, entre mejor contenedor mejor estudiante será, en este enfoque cancela un significado fuera del contexto matemático, restringiendo así al estudiante. En el otro aspecto, una secuencia didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor, estudiante y medio didáctico. El medio didáctico lo constituye el espacio donde se desenvuelven los elementos y es propuesta por el profesor. Así la secuencia didáctica comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento. Dentro de una secuencia didáctica se encuentran las situaciones a didácticas que corresponden a los procesos en los cuáles el profesor plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar, hipótesis y conjeturas que asemejen el trabajo que se realiza en una comunidad científica (Brousseau, 1986). En este trabajo una de las tareas a realizar es describir y diseñar el medio didáctico que estará realizado por una serie de situaciones a didácticas que en suma conformarán a la secuencia que propondremos para llevarla a clase. En la consideración de los aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos, nos lleva a considerar lo siguiente:

- Observamos que la génesis del teorema de convolución es de naturaleza matemática, por lo que adoptar esto en nuestro diseño es altamente complejo o mejor dicho, imposible, esto se confirma en el trabajos de Mellin (1896).
- Vimos que el discurso escolar típico de este conocimiento matemático deja en los estudiantes de ingenierías un significado del tipo operatorio y por tanto restringido a la falta de vinculación con la ingeniería que estudian.
- Como campo de restricciones quedan los estudiantes en el discurso típico escolar de este conocimiento sin una participación significativa dentro del aula en donde pudieran conjeturar o construir este conocimiento a partir de motivaciones indicadas por el docente.

Lo anterior justifica el por qué nuestro interés de diseñar una secuencia didáctica para el discurso escolar del teorema de convolución con el objeto de que el estudiante sea ahora el actor principal durante su desarrollo y que el medio didáctico le permita hacer vinculaciones de este conocimiento para enriquecerlo en los contextos de la matemática, ingeniería y tecnológicos.

Segundo componente (teórico)

El estudio ICMI 3 "Mathematics as a service subset", en cuya introducción se afirma:

> The teaching of mathematics to students of other disciplines must now be accepted as a fact, a social need and, also, a relatively new problematic issue. (Howson et al. 1988, p.1).

Es decir, en este estudio se ve a la disciplina matemática como una disciplina de servicio.

En este mismo estudio, Pollak (1988) evidencia dos tipos de necesidades matemáticas en la práctica de ingenieros:

Elementary needs: << the ability to set up the right problem, to have a good idea how big the answer should be, and to get the right answer by any available means whatsoever-mentally, calculator, paper-and-pencil, computer whatever >>.

Advances needs: << we need employees who know that there is a large variety of forms of mathematical thinking, and what these various forms can do.

La pregunta que emerge es: ¿cómo lograr que desde la enseñanza de las matemáticas estas necesidades sean tomadas en cuenta?

Presentación del diseño de la Secuencia Didáctica

En esta secuencia didáctica se proveen una serie de actividades con sus tareas respectivas con el objeto de hacer interactuar al estudiante de ingeniería de tal manera que pueda resolver cada una de éstas usando sus conocimientos previos y pueda hacer conjeturas o hipótesis para que a través del espacio didáctico que se le proporciona pueda vincular en conjunto a la ecuación diferencial, modelos matemáticos, modelos físicos, conocimientos de la ingeniería de especialidad como la teoría de control y teoría de circuitos eléctricos y así culminar con una suma de vinculaciones que le ayuden a incorporarlos en el teorema de convolución. En esta secuencia didáctica se usarán los elementos siguientes: un circuito eléctrico resistencia –inductancia (*RL*), el ambiente electrónico Or Cad (Spice) y el software Matlab 7, así como conocimientos de la disciplina de especialidad de la ingeniería: teoría de control, teoría de circuitos eléctricos. Esta secuencia didáctica está compuesta por cinco actividades específicas, cada una está seguida de la descripción de su objetivo particular, y de lo que se espera que hagan los estudiantes involucrados. Los estudiantes deberán tener los conocimientos de un curso de ecuaciones diferenciales, así como el manejo necesario para construir y realizar mediciones en los circuitos eléctricos *RL,* con el programa computacional *Or Cad.* Así mismo, se requiere un manejo básico de la opción del *Simulink* y del programa computacional MatLab7, ya que será fundamental para manejar elementos del álgebra de bloques.

Primera Actividad

El objetivo de esta actividad es que cada estudiante involucrado con esta actividad obtenga empíricamente el modelo matemático de la corriente eléctrica que circula en un circuito eléctrico *RL*. Pretendemos que lo anterior se logre a través de tres tareas específicas que tiene que desarrollar cada estudiante. En esta actividad utilizará el programa *Or Cad*, mismo que se le proporcionará en una PC.

Primera tarea. - Usando el programa Or Cad, cada estudiante construirá virtualmente, un circuito *RL*, como el que se indica en la figura No 1. El estudiante debe obtener un dibujo parecido al indicado en la figura No 1.

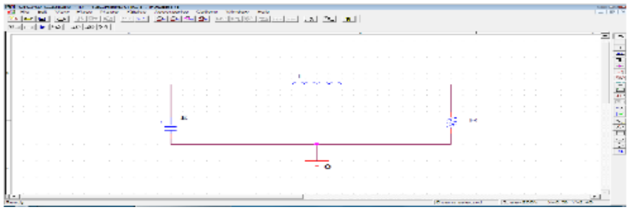

Figura 1

R	L	E
1	1	12
2	3	12
3	5	12

Figura 2

Segunda tarea. - El estudiante dará los valores que se indican en la figura 2 a *R, L y E*. (Ver figura No 2), y por cada triada obtendrá gráficamente, las caídas de voltaje tanto de R y L, es decir V_R, V_L, respectivamente. Así mismo abrirá una tercera ventana para que ahí grafique $V_R + V_L$, y observe que se obtiene en cada caso, ver figura No 3.

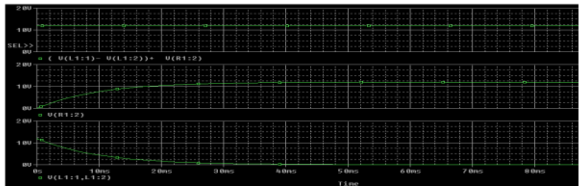

Figura 3

En la parte inferior se observa a V_R, en medio a V_L y en la parte superior a la suma de ambas, algo similar deberá ocurrir en los demás casos.

El estudiante debe observar que a partir de los resultados de las gráficas de la figura No 4, pueda inferir, al menos empíricamente, que:

$$V_R + V_L = E\,. \tag{1}$$

Es decir, *justifica experimentalmente* una de las leyes de Kirchhoff, “la suma de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico es cero”.

Tercera tarea. - El estudiante debe expresar matemáticamente a (1) en términos de la corriente eléctrica $i(t)$

Es decir, el estudiante debe inferir, al menos empíricamente, que todo circuito *RL* propuesto, cómo el que construyó en Or Cad, es modelado por una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, dónde $i(0)=0$.

$$V_L + V_R = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d\,i(t)}{dt} + R\,i = E(t). \tag{2}$$

Segunda Actividad

El objetivo de esta actividad es cada estudiante contraste que la gráfica de la solución de la ecuación diferencial (2) con la gráfica del circuito eléctrico RL, que se obtiene con el programa Or Cad. Para lograr esto se le proponen al estudiante tres tareas que se describen a continuación.

Primera tarea. - El estudiante debe resolver la ecuación diferencial (2) usando la técnica de la transformada de Laplace.

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri=E \quad \underset{LAPLACE}{USANDO} \quad i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{3}$$

Segunda tarea. - Usando un soft ware matemático (en nuestro caso Graph) obtenga la gráfica de la solución obtenida en la primera tarea.

Tercera tarea- Contrastar la gráfica anterior con la gráfica que obtuvo en Or Cad.

Esperamos que el estudiante en esta segunda actividad infiera que las gráficas en ambos casos son las mismas.

Tercera Actividad

El objetivo de esta actividad es que el estudiante construya un diagrama de bloques “sugerido” por el profesor y pueda contrastarlo con el circuito construido en Or Cad. Para lograr esto la actividad correspondiente está compuesta por tres tareas.

Primera tarea. - El estudiante debe construir el diagrama de bloques que se propone (Figura No 4), de tal manera que podrá verificar, si es correcta o no su construcción ya que en esta parte él podrá obtener los resultados inmediatos para su confiabilidad.

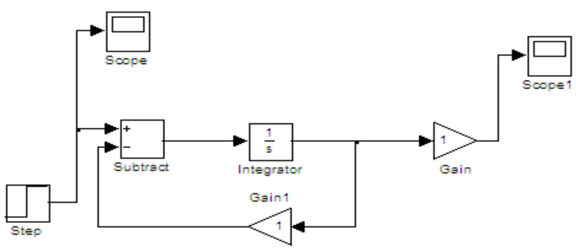

Figura 4 Representación del diagrama de bloques

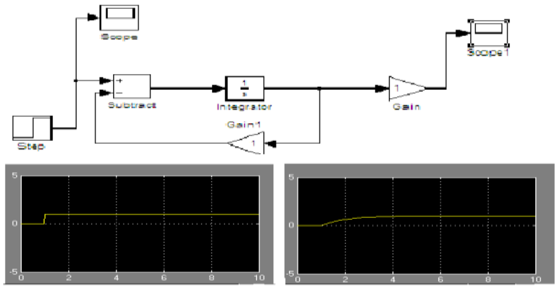

Figura 5 Diagrama de bloques propuesto por el docente.

Segunda tarea. - El estudiante explorará el diagrama de bloques construido por él, dando diferentes valores de entrada y observará los distintos valores de salida del sistema, así podrá darse cuenta que para todos los casos que proponga siempre va obtener los resultados similares a los que se representan en el diagrama de bloques representado en la figura No 5.

Tercera tarea- El estudiante responderá al siguiente cuestionamiento.

i) Considere la gráfica de la expresión (3), con los valores $E=3, R=1\ y\ L=1$. Contraste ésta con la gráfica anterior, ¿que observa?

ii) Ahora dé usted valores constantes arbitrarios a la misma expresión; *E, R y L* y estos mismos valores compárelo con el diagrama de bloques dado, ¿Qué observa?

iii) ¿Puede usted dar una inferencia a partir de i) y ii)?

El estudiante debe inferir que el diagrama de bloques es similar al circuito *RL*.

Cuarta Actividad

Objetivo: Usando el diagrama de bloques de la actividad anterior, y las consideraciones teóricas de la disciplina intermediaria, el estudiante mediante experimentación deberá darse cuenta que la función impulso unitario, bajo las condiciones que se especifican en la teoría de Control y que se exponen a continuación es del tipo $h(t)=e^{-kt}$. Esta actividad está compuesta de dos tareas. A continuación se darán algunas consideraciones teóricas relevantes.

A) Al circuito eléctrico se le considera cómo un sistema lineal constante, dónde la señal de entrada a este sistema es el voltaje, o bien, la señal del impulso unitario según sea el caso. La respuesta al sistema mencionado es la corriente eléctrica, o bien, la respuesta del sistema al impulso unitario.

El contenido del diagrama mencionado se describe gráficamente en la figura No 6, y seguidamente se describe su análisis.

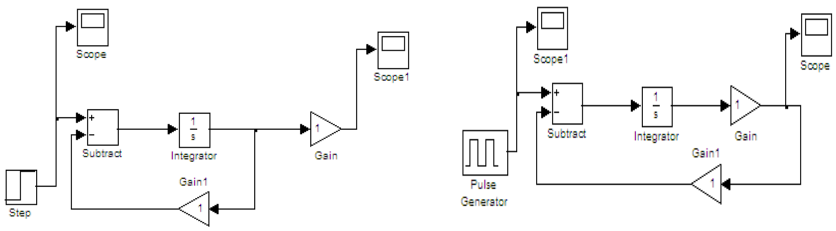

Figura 6. Señales de Entrada y Salida.

El análisis se fundamenta en la función de transferencia, según la *teoría de control,* es decir, a partir de la ecuación diferencial que modela el circuito, se le aplica la transformada de Laplace, y de ahí se considera al cociente de la función de salida entre la función de entrada, esta es una forma de obtener los diagramas de bloques expuestos.

.

B) La respuesta de un sistema lineal constante, cumple con las dos condiciones siguientes.

i) Principio de superposición, es decir dadas las señales de entradas del sistema considerado $E_1 \; y \; E_2$, con sus respectivas respuestas de salida $i_1(t) \; y \; i_2(t)$, entonces, se tiene que,

$$E_1 + E_2 \rightarrow i_1 + i_2 \tag{4}$$

ii) La respuesta de salida de un sistema lineal siempre puede expresarse cómo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) E(\tau) d\tau \tag{5}$$

Dónde $h(t,\tau)$ es la respuesta del impulso unitario del sistema cuándo éste está en reposo.

Primera tarea. - Cada estudiante propondrá un tipo de circuito eléctrico dónde la señal de entrada sea una aproximación a la delta de Dirac, y a partir de éste deberá proponer un diagrama de bloque que construirá en Matlab 7, tomando en consideración que la salida será $h(t)$. Para esto deberá usar como herramienta el diagrama de bloques usado en la actividad anterior. Esperamos que el estudiante use Matlab y su propuesta deberá ser algo parecido al diagrama de bloque mostrado en la Figura 7

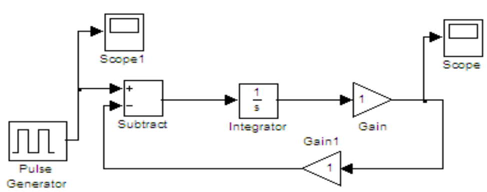

Figura 7 Diagrama de bloque construido con Matlab 7, que representa a un circuito eléctrico cuya señal entrada es aproximada a la delta de Dirac.

Segunda tarea. - El estudiante explorará dando valores a la aproximación delta de Dirac, es decir, incorporará estas cantidades en el diagrama de bloques elaborado en Matlab 7, e interpretará las gráficas que obtenga en la salida del sistema.

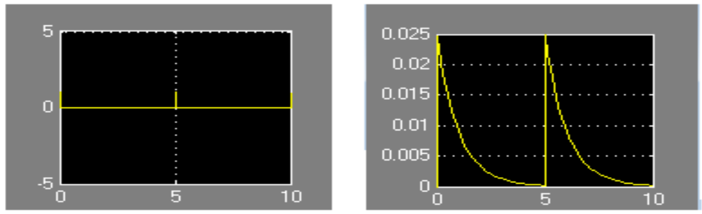

Figura 8 Obtención de las gráficas correspondientes a la señal de entrada y salida del diagrama de bloques de la figura 10 Los valores considerados son, Amplitud 1, Periodo 5, y Porcentaje (%) de periodo .5.

1.- ¿Qué observa si el periodo crece? ¿Según las gráficas obtenidas, a qué función se aproxima la respuesta de este sistema?

2.- ¿Qué función representa la solución de esta ecuación diferencial?

Quinta Actividad

Objetivo: El estudiante debe dar cuenta que la manera en que se propone en la ciencia interdisciplinaria el cálculo de la función de salida, en este caso $i(t)$, con la condición inicial $i(t)=0$, cuándo se da una señal de entrada $E(t)$, corresponde justamente a la solución obtenida en 3 y de aquí deduzca que la solución $i(t)$ en un circuito *RL* corresponde a una integral de convolución, claro esto de manera empírica. Con esto creemos que el estudiante le dará un sentido al **teorema de convolución** y con esto finaliza esta secuencia didáctica. Para lograr esto se proponen dos tareas.

Primera tarea. - Cada estudiante calculará $y(t)$, usando los conocimientos de la disciplina intermediaria, es decir, usará la segunda propiedad de los sistemas lineales constantes (integral (5)).

Aquí esperamos que el estudiante considere la expresión (9), es decir:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau,$$

Y sustituya a $h(t)$ para $t\geq 0$, entonces obtiene que,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau=\frac{1}{L}\int_{o}^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t}E(t-\tau)\,dt. \qquad (6)$$

Segunda tarea. - El estudiante contrastará el resultado anterior con el resultado de la solución de la ecuación diferencial (3). ¿Qué encuentra en este contraste?

Esperamos que el estudiante responda,

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} * E(t). \tag{7}$$

Conclusiones

Con lo expuesto anteriormente hemos buscado dotar de un sentido a este teorema sin depender de toda la complejidad matemática que le da sentido únicamente en el contexto matemático. Lo anterior atiende al paradigma de las matemáticas como disciplina de servicio y ofrece una posibilidad de vincular modelos físicos, matemáticos y de ingeniería a través de interfaces: los escenarios de simulación que ofrecen los softwares Or Cad y Mat Lab. La modelación aparece como un elemento clave, en particular con el uso de modelos físicos (Circuitos), matemáticos (Ecuaciones diferenciales) y de ingeniería (Función de transferencia), los cuales fungen como elementos de control de la simulación y el tratamiento de las tareas propuestas. La secuencia propone así un escenario desde la disciplina intermediaria, que permite introducir este teorema dotándolo de un sentido a partir de su uso. Otra situación relevante es que en esta propuesta de enseñanza el estudiante es el principal actor durante el proceso, es decir está siempre supervisado por el docente, sin embargo el estudiante es el que actuará la mayor parte en todas las actividades que se proponen, finalmente, la obtención de función "*h*" es por ensayo y error, quedará pendiente, en otro escrito, su obtención específica.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.) (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, Un esquema para la Investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá*:* Grupo Editorial Iberoamérica*,*

Bosquez, E., Lezama, J., Mora, C. (2010). Algunas reflexiones de contraste del formalismo con la algoritmia de la enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería. En P. Lestón, (Ed.). (2010). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23* (361-368). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51: 149 doi: 10.1023/A:1022435827400.

Brousseau, G. (1986). Fondements et mèthodes de la didactique des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 33-115.

Howson, A. G., J. P. Kahane, P. Lauginie, y E. de Turckheim (Eds.) (1988), *Mathematics as a Service Subjec.* ICMI Study Series, Cambridge: Cambridge University Press.

Mellin H.(1896). Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationale Coefficienten, *Societatis Scientiarum Fennicae*, *21(196),* 6-57.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subjec- why? In A. G. Howson, J. P. Kahane, P. Lauginie, E. de Turckheim (Eds.), *Mathematics as a service subject.* ICME Study Series, Cambridge: Cambridge University Press pp. 28-34.