DESENVOLVER O PENSAMENTO ALGÉBRICO ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

Ana Matos, *ES da Lourinhã*

anamatos@gmail.com
Ana I. Silvestre, *EB 2,3 de Gaspar Correia, Lisboa*

Neusa Branco, *ESE de Santarém*

João Pedro da Ponte, *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*

jp@fc.ul.pt

O pensamento algébrico, mais do que manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. Este artigo apresenta três experiências de ensino que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Trata-se de estudos qualitativos e interpretativos realizados como investigações de professoras sobre a sua própria prática profissional. As experiências de ensino seguem uma abordagem exploratória e referem-se à aprendizagem da proporcionalidade directa (6.º ano), variáveis e equações (7.º ano) e relações funcionais (8.º ano). Os resultados mostram que, nesta abordagem, os alunos realizam aprendizagens significativas no seu pensamento algébrico.

Algebraic thinking, more than just the manipulation of expressions and solving equations, also involves the ability to establish generalizations and relationships, interpret situations, and solve problems. This paper presents three teaching experiments aiming at the development of students' algebraic thinking. They are qualitative and interpretative studies undertaken as teachers research their own professional practice. The teaching experiments, framed on an exploratory approach, concern direct proportion (grade 6), variables and equations (grade 7) and functional relationships (grade 8). The results show that, in this teaching approach, students experience significant learning in their algebraic thinking.

Introdução

Em Portugal como em muitos outros países, a Álgebra tem sido encarada sobretudo como o ensino da manipulação de expressões simbólicas, seja transformando-as em expressões equivalentes, seja resolvendo equações. Para os alunos, trata-se de um dos temas mais difíceis da Matemática, sendo, sem dúvida, um dos que gera maior insucesso. Para alguns, o problema pode resolver-se diminuindo a importância da Álgebra ou remetendo-a para um nível de ensino posterior. Uma outra estratégia é tentar encontrar as raízes do problema e, a partir daí, perspectivar novas soluções. É isso que muitos investigadores têm procurado fazer nos últimos anos, reflectindo sobre a natureza do pensamento algébrico, que procuram apresentar como algo muito mais amplo que a simples manipulação simbólica.

Por exemplo, Kaput (1999) defende que a Álgebra deve ser entendida de uma forma muito diferente da habitual. Na sua perspectiva, o pensamento algébrico pode tomar diversas formas que se entrelaçam. Considera que os alunos devem explorar situações aritméticas para chegar à expressão e formalização de generalizações (Aritmética generalizada) e trabalhar com regularidades numéricas para descrever e generalizar relações funcionais (pensamento funcional). Sublinha, igualmente, a modelação como uma oportunidade de exprimir e formalizar generalizações, bem como a generalização relativa a estruturas abstractas. Desta forma, a iniciação à Álgebra é feita a partir de generalizações com base nas experiências dos alunos e não pela aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica.

Esta perspectiva inspira o NCTM (2000), que indica que o currículo de Matemática, relativamente a este tema, deve possibilitar a todos os alunos: (i) a compreensão de regularidades, relações e funções; (ii) a representação e análise de situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; (iii) a utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) a análise da variação, em diversas situações. Entendido desta forma, este tema constitui uma componente importante do currículo que o unifica e lhe dá consistência, o que pode justificar a defesa, pelo NCTM, do lema "Álgebra para todos".

Os estudos aqui relatados têm por base experiências de ensino sobre proporcionalidade, equações e funções onde procuramos pôr em prática uma abordagem curricular exploratória. Esta abordagem enfatiza actividades de natureza exploratória e investigativa (Ponte, 2007), embora se usem também, de forma complementar, problemas e exercícios, por vezes do manual escolar do aluno. Além disso, procuramos fomentar uma dinâmica de aula que valoriza não só o trabalho em pares e em pequenos grupos como, principalmente, a discussão em grande grupo. Nestes momentos de discussão colectiva os alunos têm oportunidade de apresentar as suas estratégias, dar a conhecer as suas dúvidas e questionar as estratégias apresentadas pelos seus colegas. Estes momentos têm como objectivo envolver todos os alunos na partilha de significados e promover a sua compreensão dos conceitos e da linguagem algébrica.

Este artigo apresenta e faz um balanço de três experiências de ensino realizadas nesta perspectiva. Trata-se de estudos realizados por professoras sobre a sua própria prática profissional, desenvolvidos com uma das suas turmas, seguindo uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa. Parte da recolha de dados é realizada durante as aulas (observação da professora com posterior registo em diário de bordo, gravações áudio e recolha de registos escritos dos alunos). Outra parte provém de entrevistas realizadas, em regra, antes e depois de cada experiência de ensino. Nestas entrevistas, baseadas num conjunto diversificado de tarefas, procuramos analisar em que medida o pensamento algébrico dos alunos evoluiu, reflectindo o trabalho realizado na sala de aula. Em seguida, apresentamos três episódios que ilustram cada um dos estudos. Referimos, também, os principais resultados sugeridos por cada uma das três investigações.

Aprendizagem da proporcionalidade directa

A proporcionalidade directa é fundamental no desenvolvimento matemático dos alunos e é também um dos temas em que o seu desempenho é mais problemático. O estudo *Investigações e Novas Tecnologias no Ensino da Proporcionalidade Directa* (Silvestre, 2006) procura conhecer como se desenvolve a aprendizagem deste conceito no quadro de uma unidade de ensino com ênfase em tarefas de investigação/exploração, resolução de problemas contextualizados e uso da folha de cálculo. Entre outras questões, visa perceber se os alunos reconhecem a existência ou não de proporcionalidade directa numa dada situação, identificando os sistemas de representação e as estratégias usadas.

A unidade de ensino foi leccionada numa turma do 6.º ano em 10 aulas de 90 minutos (incluindo 1 de avaliação) e tem por base um conjunto de 7 tarefas inspiradas no livro *Uma Aventura no Palácio da Pena*. Entre os 21 alunos da turma (11 a 13 anos), três foram escolhidos para estudos de caso.

Vejamos então o desempenho de Guilherme numa questão que lhe foi colocada durante a entrevista realizada após o desenvolvimento da unidade de ensino.

1. Identifica as situações em que existe proporcionalidade directa.

1.1.

A	2,5	4,3	5
B	7,5	12,9	15

Guilherme investiga relações entre os números, pois sabe que existem regularidades numéricas na proporcionalidade directa:

> Guilherme – (Observando por breves instantes a tabela) Então… Mas tenho de usar o Excel? Este tem poucos [dados] e eu já sei que existe proporcionalidade.
>
> Prof.ª – Não tens de usar. Estão aqui estes materiais à tua disposição, só usas o que quiseres. Como sabes que existe proporcionalidade nesta situação?
>
> Guilherme – (Não usa qualquer material) Então, primeiro vi a [linha] A e a [linha] B (aponta para as linhas). Vi o último par de números.
>
> Prof.ª – Quais?
>
> Guilherme – (Aponta para a última coluna) Ao multiplicar 5 por 3 dá 15… Tenho quase a certeza que sim [que existe proporcionalidade]. Com esta conta acreditei que o mesmo se passa com os outros [pares] números e dá, em 7,5 há 3 vezes 2,5. Aqui é igual, basta saber a tabuada para isso, 3 [parte decimal de 4,3] vezes 3 dá 9 [parte decimal de 12,9] e 3 vezes 4 é 12. "Tá" certo.
>
> Prof.ª – Consegues identificar a constante de proporcionalidade?
>
> Guilherme – É 3, se dividir 15 por 5 dá 3. Também acontece com os outros [pares de] números.

Guilherme responde rapidamente que existe uma relação proporcional entre as grandezas A e B. Primeiro identifica uma relação multiplicativa entre o par numérico que envolve números inteiros, "multiplicar 5 por 3 dá 15", apesar de este ser o último par numérico da tabela; depois conjectura que a relação também acontece nos primeiros pares numéricos da tabela quando diz "acreditei que o mesmo se passa com os outros"; e, por fim, verifica a veracidade da conjectura. Todos os cálculos foram feitos mentalmente, sem qualquer apoio escrito, apesar dos dados envolverem números decimais, ainda que pequenos. É evidente que faz uso do seu conhecimento sobre números, nomeadamente sobre múltiplos de três. Também identifica a constante de proporcionalidade como o quociente entre os valores das grandezas B e A, isto é, reconhece a existência de outra regularidade entre os valores da tabela. Usa um raciocínio de natureza funcional pois realiza operações entre grandezas.

Este estudo mostra que os alunos distinguem situações em que existe proporcionalidade directa daquelas em que tal relação não existe. Mobilizam o conhecimento adquirido na unidade de ensino, isto é, procuram regularidades dentro e entre grandezas (ou seja, estratégias de natureza escalar e funcional) para verificar a existência de proporcionalidade. A realização das tarefas de investigação/exploração parece ter contribuído para o desenvolvimento desta sua capacidade de analisar estas regularidades. A eficiência e rapidez na identificação de regularidades parece depender do conhecimento dos alunos sobre números e relações multiplicativas. Além disso, os alunos utilizam eficientemente tabelas, a que recorrem predominantemente para representar dados, organizá-los e interpretar problemas, algo que podemos relacionar com o uso da folha de cálculo, que os induz a estruturar os dados desse modo.

Compreensão de variáveis e equações

A investigação *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Branco, 2008) visa compreender de que modo uma unidade de ensino para o 7.º ano, baseada no estudo de regularidades, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, para a compreensão das variáveis e equações. Incide em três questões: Que estratégias adoptam os alunos para descrever regularidades e para resolver problemas? Que compreensão revelam da linguagem algébrica? Que evolução revelam relativamente às estratégias de generalização e de resolução de problemas e à compreensão da linguagem algébrica?

A investigação respeita ao trabalho desenvolvido pelos 15 alunos da turma (11 a 14 anos), debruçando-se em particular, sobre 2 deles. A unidade de ensino engloba dois tópicos, *Expressões com variáveis* e *Equações*, e foi concretizada num total de 17,5 aulas de 90 minutos (incluindo 2 de avaliação). Inclui uma sequência de 6 tarefas relativas ao estudo de regularidades e uma outra de 4 tarefas que abordam o trabalho com equações. As tarefas exploratórias e investigativas propostas proporcionaram oportunidades de aprendizagem diversificadas, promovendo a formulação de generalizações e a representação de números generalizados e de grandezas incógnitas e variáveis.

Na primeira entrevista os alunos demonstram desconhecer o significado dos símbolos (letras) que representavam incógnitas e variáveis e de expressões algébricas, na maioria das situações. Por exemplo, Joana apenas reconhece o significado correcto do símbolo que representa a incógnitas numa equação do tipo $x + a = b$, sendo a e b números inteiros. Interpreta x como sendo o símbolo que está a ocupar o lugar de um número que é possível determinar realizando a operação inversa. Na resolução de problemas não usa a linguagem algébrica e segue uma estratégia aritmética que lhe permite determinar a solução com sucesso.

A situação seguinte refere-se à resolução de um problema na segunda entrevista com esta aluna:

Os três lados de um triângulo têm diferentes comprimentos. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro lado e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado.

a) Como podes representar o perímetro deste triângulo?

b) Qual é o perímetro do triângulo se o primeiro lado medir 10 *cm*?

c) Se o perímetro for de 31 *cm*, qual a medida de cada um dos lados do triângulo?

Joana lê o enunciado e faz o esboço de um triângulo sem ter qualquer atenção à medida dos seus lados. Surgem-lhe, então, algumas dúvidas relacionadas com o comprimento do primeiro lado do triângulo, do qual dependem os restantes. Conclui que este pode assumir diversos valores. Representa esse comprimento por uma letra e elabora uma expressão para o perímetro:

Joana – Podem ser vários.

Prof.ª – Vários, quê?

Joana – Vários centímetros. Acho que é o primeiro… O *n*. Mais 3. Não. O *n* mais o *n* mais 3. Mais *n* vezes 2.

Prof.ª – Escreve.

Joana – Acho eu.

Prof.ª – Escreve lá.

Joana – O *n*. Que é o primeiro lado.

Prof.ª – Muito bem.

Joana – Mais… O *n* mais 3. Que é o segundo. Mais o *n*… Ou *n* mais *n*, ou *n* vezes 2. Meto vezes 2 ou meto um 2?

Prof.ª – Aquilo que tu quiseres.

Joana – Então vou pôr vezes 2.

a) Como podes representar o perímetro deste triângulo?

$n + n + 3 + n \times 2$

Joana traduz as relações do problema indicadas em linguagem natural para linguagem algébrica, revelando compreender o significado de variável e o que esta representa neste contexto. Usa a letra *n* para representar a medida do primeiro lado e representa a medida dos restantes lados em função desta. Na alínea c) não recorre directamente à expressão da alínea a), ou seja, não segue uma estratégia algébrica. Pode obter uma equação para resolver o problema igualando a expressão que representa o perímetro a 31, mas não o faz. Em vez disso, segue uma estratégia aritmética. Contudo, as operações que realiza têm por base a compreensão da expressão algébrica, que demonstra ao justificar a divisão por quatro:

Joana – O primeiro. Mais o… O segundo também tem um lado que dá o número *n* e o do terceiro é 2 [identifica o coeficiente dos termos em *n* que constam em cada uma das expressões que representam os lados do triângulo].

Prof.ª – Sim.

Joana – A dividir por 4, acho eu.

Prof.ª – OK, 28… Sim, e agora?

Joana – Agora… Dá!

c) $31-3=28$ $28 \div 4=7$

1º $=7$

2º $=10$

3º $=14$

Joana realiza as mesmas operações inversas que se efectuam na resolução da equação que traduz o problema, $4n + 3 = 31$, usando a estratégia "andando para trás". Estas operações permitem-lhe determinar o valor da medida do primeiro lado e, de seguida, calcular a medida dos restantes lados. Por fim, verifica na calculadora se os resultados obtidos.

No final da segunda entrevista foram colocadas a Joana algumas perguntas adicionais sobre o significado das letras e das expressões. Na sua resposta, refere utilizar a letra n para representar um número desconhecido, que pode assumir vários valores relativos à medida do primeiro lado:

Joana – Na pergunta não diz qual é que é o número, por isso é um n. Não se sabe qual é o número.

Prof.ª – Mas representa o quê, mesmo? Esse n.

Joana – O primeiro lado.

Prof.ª – O quê? O primeiro lado…

Joana – Os centímetros do primeiro lado.

Nesta situação, Joana revela compreender a variável como número generalizado e o seu significado no contexto do problema, o que não se verifica na primeira entrevista. A aluna interpreta o símbolo como meio de exprimir uma generalização numa expressão algébrica. Neste caso o símbolo representa um número que pode assumir diversos valores, numa expressão que indica o perímetro da figura. Noutras situações revela também ser capaz de interpretar a variável como incógnita.

Este estudo mostra que a unidade de ensino ajudou a promover o desenvolvimento da capacidade de generalizar e de usar a linguagem algébrica para expressar essas generalizações. Tal como o caso de Joana ilustra, verifica-se uma significativa evolução dos alunos na compreensão da linguagem algébrica relativa aos diferentes significados dos símbolos em diferentes contextos. Outros dados mostram também que os alunos atribuem significado à manipulação de expressões. Este estudo revela, contudo, a existência de algumas dificuldades, em diversos alunos, na compreensão de aspectos da linguagem algébrica, interpretando o símbolo x como um algarismo e não interpretando o sinal de igual como símbolo de equivalência.

Exploração de relações funcionais

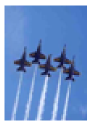
O trabalho *Explorando relações funcionais no 8.º ano* (Matos, 2007) tinha como principal objectivo estudar o modo como a resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo relações funcionais, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 8.º ano de escolaridade. As questões de investigação foram as seguintes: (i) Que estratégias utilizam os alunos, antes e depois da leccionação desta unidade, na exploração de situações onde existem relações entre variáveis? De que forma, antes e depois da unidade, interpretam e utilizam a linguagem algébrica em diferentes situações?

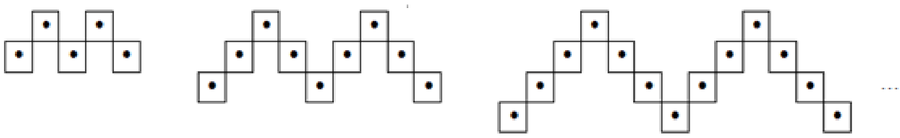
A unidade de ensino foi leccionada em 16 aulas de 90 minutos (incluindo 3,5 de avaliação) envolvendo 8 tarefas exploratórias e investigativas. Uma primeira parte, *Sequências de Números*, inclui 3 tarefas envolvendo regularidades em sequências pictóricas e numéricas e a sua generalização. Numa segunda, as *Funções,* são introduzidas 2 tarefas sobre relações entre variáveis, com a variável independente contínua e uma terceira tarefa envolve a interpretação de gráficos distância-tempo. Por fim, as 2 últimas tarefas aprofundam o estudo de *Equações do 1.º grau*, alargando-o à resolução de problemas e equações literais. Da turma, com 27 alunos (13 a 16 anos), foram seleccionados 2 alunos para estudos de caso.

Na primeira entrevista, numa sequência de números, Sofia analisa o modo como varia o número de pontos de uma figura para a seguinte, que lhe permite imaginar a continuação da sequência e caracterizar as figuras iniciais. As suas dificuldades surgem na caracterização de uma figura distante e na formulação de uma generalização para a relação funcional.

O episódio seguinte ilustra o desempenho de Sofia na exploração de sequências, durante a segunda entrevista:

I. Recordas-te da tarefa em que estudámos os grupos de aves (e aviões) que voavam em V para poupar energia? Existem outras formas possíveis de voar, com um consumo de energia mais económico. Observa a sequência seguinte, em que cada grupo voa numa formação em W.





1 2 3 ...

Quantos pontos terá a 5.ª figura desta sequência. Explica como pensaste.
Quantos pontos terá a 100.ª figura desta sequência? Apresenta o teu raciocínio.

Para caracterizar uma figura próxima, Sofia recorre à análise da figura anterior. No entanto, na caracterização da 100.ª figura, apercebendo-se que a sua ordem é elevada procura encontrar uma regra geral, tentando compreender a relação de correspondência entre as variáveis: número da figura e número de pontos que lhe corresponde. Começa, então, por observar uma regularidade relativamente às figuras 1 e 3 da sequência:

Prof.ª – Então, diz lá o que é que estás a pensar agora.

Sofia – Vou ver quantos teria a 10.ª… Não, 100.ª figura.

Prof.ª – Hum, hum. Que contas são essas que estás a fazer?

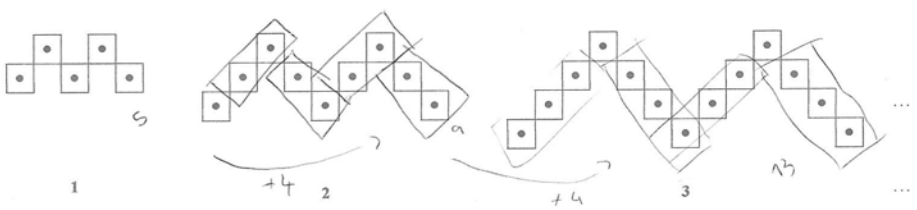
Sofia – Não sei, estou a pensar aqui nalguma tipo… Numa fórmula para fazer.

Prof.ª – Hum, hum. Vai dizendo alto. Mesmo que à primeira não esteja correcto, não faz mal.

Sofia – Estou a pensar aqui… 1 vezes 1, mais 4, dá 5. Depois aqui o… 3 vezes 3, 9, mais 4 dá 13. Mas esta aqui… Não sei… [aponta para a figura dois]. É preciso cinco [com algum desânimo]. 2 vezes 2, 4, mais 5, 9.

Esta regularidade consiste na possibilidade de multiplicar a ordem por si própria e adicionar quatro unidades para obter o número correcto de pontos. No entanto, ao procurar encontrar outros exemplos que confiram maior credibilidade a esta conjectura inicial, Sofia depara-se com o caso da figura 2, que funciona como contra-exemplo.

Nesta situação, a estratégia numérica não lhe permite obter o número de pontos da 100.ª figura. Perante a pergunta se consegue imaginar a 100.ª figura, Sofia deixa de procurar regularidades nos pares de números que se correspondem, passando à observação da representação pictórica. A aluna observa que "em cada figura o número de pontos de cada lado é o número da figura." Depois de se centrar na análise do seu aspecto e de relacionar o número de pontos existente em cada lado com a sua ordem, imagina uma decomposição possível para a 3.ª figura, que rapidamente aplica às restantes figuras:



Prof.ª – E agora, em que é que estás a pensar?

Sofia – Pois, estou a ver que 2 vezes 2 dá… Não! 2 vezes 4, mais 1, dá o número de coiso… Da figura… E aqui… 3 vezes… Não… 3 vezes 4, mais 1, dá o número de pontos da figura.

Prof.ª – Hum, hum. Voltando à questão.

Sofia – Então, se calhar, para saber o número de pontos da 100.ª figura é 100 vezes 4 mais 1.

Em cada figura o nº de pontos de cada lado é o nº da figura

$100 \times 4 = 400$

$400 + 1 = 401$

Com base nesta decomposição torna-se evidente, para Sofia, o modo como se relacionam a ordem da figura e o seu número de pontos. A aluna mostra, em seguida, que consegue exprimir a generalização da relação funcional utilizando linguagem corrente e também a linguagem algébrica, embora o faça de um modo parcialmente incorrecto:

Ao multiplicar o nº da figura por 4 e somar 1
dá sempre o nº total de pontos em qualquer figura

n = nº total de pontos
x = nº da figura

n → 4x+1

Neste episódio Sofia já não revela dificuldades na caracterização de uma figura distante e no estabelecimento de generalizações e recorre mesmo à linguagem algébrica para exprimir o seu raciocínio. É bem a nítida sua evolução. O estudo a que se reporta esta secção, encarado na sua globalidade, sugere que a ênfase na exploração de relações funcionais proporciona o desenvolvimento de significado para a linguagem algébrica e de uma concepção mais ampla sobre a sua utilização. O trabalho realizado ajudou os alunos a alargar o leque de estratégias de que dispõem para explorar situações que envolvem variáveis, a raciocinar de modo cada vez mais geral e a expressar as suas generalizações com recurso a uma linguagem mais formal. Observa-se nos alunos que nele participaram uma nítida evolução do seu pensamento algébrico.

Conclusão

Os estudos aqui brevemente relatados constituem experiências de ensino tendo em vista promover o pensamento algébrico dos alunos através de uma abordagem curricular exploratória. Estas experiências foram concebidas e postas em prática por professoras-investigadoras na sua própria sala de aula. Dois elementos principais caracterizam esta abordagem: (i) ênfase na resolução de tarefas de exploração e investigação e na elaboração de relatórios escritos pelos alunos e (ii) a promoção de momentos de trabalho em grupo e de discussão geral na turma.

As três experiências evidenciam progressos assinaláveis em alunos dos 3 anos de escolaridade, que se apropriam dos modos de representação da Álgebra (tabelas, gráficos, representações simbólicas). Os alunos evidenciam ser capazes de gerar estratégias informais e, progressivamente, de usar também estratégias mais formais para resolver uma variedade de problemas. Mostram ainda ter desenvolvido a capacidade para estabelecer e representar generalizações. Os alunos dos 7.º e 8.º anos mostram ainda desenvolver a sua compreensão da linguagem algébrica, para o que contribuiu decisivamente a exploração de situações envolvendo regularidades.

Verifica-se, porém, que persistem algumas dificuldades nos alunos, que se justificam pela grande complexidade cognitiva que representa a iniciação à Álgebra e pela duração necessariamente limitada da leccionação das unidades de ensino. A compreensão dos conceitos algébricos fundamentais é um processo lento e exigente para professores e alunos que requer um trabalho ao longo de vários anos. Em futuros estudos, procuraremos investigar em que medida esta estratégia é viável e produtiva relativamente à aprendizagem de outros conceitos algébricos.

Referências

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Tese de Mestrado, Univ. Lisboa).

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico* (Tese de Mestrado, Univ. Lisboa).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5-6), 419-430.

Silvestre, A. I. (2006). *Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade directa: Uma experiência no 2.º ciclo* (Tese de Mestrado, Univ. Lisboa).