# LA ECUACIÓN ¿HERRAMIENTA U OBJETO DE ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS? UNA MIRADA HISTÓRICA DESDE EL PROBLEMA DEL POSICIONAMIENTO GLOBAL

**CESAR MAURICIO RODRIGUEZ MEDINA**
**2014182034**
**JOHN JAIRO TOVAR TORRES**
**2014182041**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**
**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**BOGOTÁ D.C.**
**2014**

# LA ECUACIÓN ¿HERRAMIENTA U OBJETO DE ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS? UNA MIRADA HISTÓRICA DESDE EL PROBLEMA DEL POSICIONAMIENTO GLOBAL

**CESAR MAURICIO RODRIGUEZ MEDINA**
**2014182034**
**JOHN JAIRO TOVAR TORRES**
**2014182041**

**Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por el título de Especialista en Educación Matemática.**

**Director:**
**YEISON ALEXANDER SÁNCHEZ RUBIO**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**
**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**
**BOGOTÁ D.C.**
**2014**

**Nota de aceptación**

Director Trabajo de Grado

Jurado

Jurado

Bogotá, 15 de octubre de 2014

*Dedicatoria Mauricio Rodríguez:*

*A Dios como Señor de mi vida,*
*quien me ha llamado a ser su discípulo*
*haciendo cada cosa con amor y excelencia.*

*A Viviana mi esposa*
*quien me inspira a ser un mejor hombre cada día*
*con su amor y cuidado.*

*A Isabel Sofía mi hija*
*a quien espero enseñar siempre con el ejemplo*
*mostrándole que el esfuerzo y la perseverancia alcanzan la victoria.*

*Dedicatoria John Tovar:*

*A mi abuelo Abelardo Tovar,*
*quien con su ejemplo me enseñó,*
*que sólo vale la pena vivir en función de un mejor ser humano.*

*A mi mamá, a mi hermana,*
*quienes hicieron de mí el hombre*
*que no se rinde ante las dificultades.*

*A Sebastián y a Ana María, mis dos pequeños sobrinos,*
*de quienes quiero ser ejemplo,*
*para su futuro.*

Agradecimientos Mauricio Rodríguez:

*A Dios quien me ha dado la gracia de reconocer la necesidad de formarme*
*me ha dado amor para dar lo mejor de mí*
*y fortaleza para perseverar.*

*A mi familia, mi esposa y mi hija*
*por la paciencia, apoyo y amor que han tenido en este proceso*
*que nos ha implicado muchos sacrificios.*

*A la comunidad "El Gozo del Señor" por todo el apoyo*
*oración y ánimo que me han brindado durante este año.*

*A los profesores de la especialización*
*quienes fueron fuente de inspiración*
*para asumir con profesionalismo y pasión*
*esta bella labor de ser docente.*

*A mi mamá*
*quién siempre ha sido una inspiración*
*para ser excelente en cada cosa que emprendo*.

Agradecimientos John Tovar:

A la vida,
que permitió que se realizara este sueños,
después de un largo periodo de tiempo.

A mi familia,
quienes con su apoyo me levantaron,
en uno de los momentos más difíciles de mi vida.

A mis amigos,
quienes con sus palabras y su tiempo,
me ayudaron a no rendirme y continuar por este sueño.

A los profesores de la especialización,
quienes con su ejemplo y conocimiento,
hacen de mí hoy, un mejor profesional.

Muchas gracias a todos!

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Las ecuaciones, ¿Herramientas u objetos de la matemática? Una mirada histórica desde el problema del posicionamiento global."*** Presentado por los estudiantes:

***Cesar Mauricio Rodríguez Medina - 2014182034***
***John Jairo Tovar Torres -2014182041***

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **49** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2014.

**JURADOS**

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) *YEISON SANCHEZ*

Jurado: Profesor(a) *ALBERTO DONADO*

| 1. Información General | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de grado |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| **Título del documento** | La ecuación ¿Herramienta u objeto de estudio de las matemáticas? Una mirada histórica desde el problema del posicionamiento global. |
| **Autor(es)** | Rodríguez Medina, Cesar Mauricio; Tovar Torres, John Jairo |
| **Director** | Sánchez Rubio, Yeison Alexander |
| **Publicación** | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 76 p. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional |
| **Palabras Claves** | *Ecuación, Objeto de Estudio, Herramienta, Posicionamiento Global, Álgebra* |

## 2. Descripción

Se presenta el siguiente trabajo de grado en el marco de la Especialización en Educación Matemática, en el que se pretende estudiar la dualidad que presentan las ecuaciones como objetos o herramientas en el contexto de un problema histórico específico , a saber, el posicionamiento global.

## 3. Fuentes

Algunas de las fuentes utilizadas son:


Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. (P. Gomez, Ed.) (Primera Ed.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica.

Chueca Pazos, M., García García, F., Jimenez Martinez, M. J., & Villar Cano, M. (2008). *Compendio de historia de la ingeniería cartográfica.* Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia. Retrieved from http://www.fglorente.org/libros/compendiocunoIntro.pdf

Garcia Cruz, J. A. (2008). El arte de llegar a puerto: Matemáticas y Navegación desde la antiguedad hasta el siglo XVII. *Descubrir Las Matemáticas Hoy*, 185–199.

Gutierrez Llorente, A. (2005). Historia de la cartografía. In *Problemas de la matemática clásica* (pp. 1–31).

Hernandez-Pajarez, M., Juan Zornoza, J. M., & Sanz Subirana, J. (2001). *Procesado de Datos GPS : Código y fase Algoritmos , Técnicas y Recetas* (Primrea Ed.). Barcelona, España

Samama, N. (2008). *Global Positioning: Technologies and Performance*. New Jersey: WILEY

## 4. Contenidos

El presente trabajo de grado se ha ordenado en cinco capítulos de la siguiente manera:

En el ***capítulo uno*** se presenta los resultados de la indagación histórica realizada sobre las diferentes soluciones propuestas al problema del posicionamiento global.

El ***capítulo dos*** contiene la postura adoptada por los autores sobre que se entenderá por herramienta y por objeto de estudio.

El ***capítulo tres*** presenta una descripción de las matemáticas y las ecuaciones presentes en algunos momentos seleccionados de la historia del posicionamiento global.

El ***capítulo cuatro*** corresponde al análisis realizado a los momentos históricos seleccionados para determinar si las ecuaciones presentes fueron un objeto de estudio o una herramienta.

El ***capítulo cinco*** muestra las conclusiones relacionadas a los objetivos y los capítulos desarrollados.

Finalmente se presenta la bibliografía que fue conveniente al realizar el presente trabajo.

## 5. Metodología

La metodología en este trabajo de grado se enmarcó primeramente en la consulta de documentos en la historia para indagar las diversas soluciones planteadas al problema del posicionamiento global. Luego se tomó una postura por parte de los autores sobre qué se entiende por herramienta y por objeto de estudio para que al mirar en más detalles las soluciones propuestas y más particularmente las ecuaciones presente se pudiera establecer en qué forma se presentaron, lo cual permitió generar conclusiones y reflexiones que permiten ampliar la visión que se tiene de este elemento de las matemáticas

## 6. Conclusiones

- En las diversas soluciones planteadas a lo largo de la historia al problema del posicionamiento global, se encuentra una estrecha relación con las matemáticas, en particular con las ecuaciones. Entre las soluciones más destacadas se encuentran el cálculo de la circunferencia terrestre con el uso de proporciones, el cálculo de la latitud con corrección vía trigonometría esférica, el sistema LORAN-C apoyado en el corte de hipérbolas y el sistema GPS que utiliza el corte de esferas en el espacio.

- En algunos momentos analizados, se evidencia una transición de herramienta a objeto de estudio como en el caso de la trigonometría plana, necesaria para calcular ángulos, pero que al no considerar la curvatura de la tierra, generaba errores y por eso fue un objeto de estudio de Regiomontano, lo cual dio paso a la trigonometría esférica, que es una herramienta más apropiada para las condiciones del problema a resolver.
- Dentro de una problemática real las ecuaciones casi siempre juegan un papel de herramientas, sin embargo tienen la capacidad de volverse objetos de estudio con el fin de pulir su aplicabilidad.

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | Cesar Mauricio Rodríguez Medina<br>John Jairo Tovar Torres |
| **Revisado por:** | Yeison Alexander Sánchez Rubio |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 18 | 10 | 2014 |

**CONTENIDO**

Pág.

1. JUSTIFICACIÓN 1
2. OBJETIVOS 2
   2.1. Objetivo general 2
   2.2. Objetivos específicos 2
3. INTRODUCCIÓN 3
4. HISTORIA DEL POSICIONAMIENTO 4
   4.1. GRECIA ANTIGUA 5
   4.2. MUNDO ARABE 9
   4.3. ERA DE LOS GRANDES NAVEGANTES SIGLOS XV – XVIII 13
   4.4. ONDAS DE RADIO. SIGLO XIX 20
   4.5. ERA SATELITAL 23
5. OBJETO DE ESTUDIO Y HERRAMIENTA. 26
6. DESCRIPCIÓN DE LAS ECUACIONES PRESENTES. 28
   6.1. EL CÁLCULO DE ERATOSTENES DEL PERÍMETRO DE LA TIERRA 28
      6.1.1. Ecuaciones presentes 31
   6.2. EL CÁLCULO DE LA LATITUD 33
      6.2.1. Ecuaciones Presentes 34
   6.3. SISTEMA LORAN-C 36
      6.3.1. Ecuaciones Presentes 39
   6.4. GPS (Global Positioning System) 44
7. ANÁLISIS DE LOS MOMENTOS 56
   7.1. Eratóstenes 56
   7.2. Latitud 56
   7.3. LORAN-C 57
   7.4. GPS 58
8. CONCLUSIONES 60
9. RECOMENDACIONES 62
10. BIBLIOGRAFIA 63

**LISTA DE ILUSTRACIONES**


| | |
|---|---|
| Ilustración 1. Cuadrante de Ptolomeo | 7 |
| Ilustración 2. Astrolabio de Ptolomeo | 8 |
| Ilustración 3. Kamal | 12 |
| Ilustración 4. Brújula | 13 |
| Ilustración 5. Convergencia de meridianos | 15 |
| Ilustración 6. Proyección de Mercator | 16 |
| Ilustración 7. Instrumentos para medir la latitud | 17 |
| Ilustración 8. Reloj H4 | 19 |
| Ilustración 9. Sistema Loran | 23 |
| Ilustración 10. Paralelismo de los rayos del sol | 28 |
| Ilustración 11. Ángulos correspondientes en el cálculo de Eratóstenes | 29 |
| Ilustración 12. Meridiano del cálculo de Eratóstenes | 30 |
| Ilustración 13. Curvatura de la tierra en el cálculo de Eratóstenes | 31 |
| Ilustración 14. Relación de la altitud con la latitud | 33 |
| Ilustración 15. Estrella polar | 34 |
| Ilustración 16. Constelación de la cruz del sur | 34 |
| Ilustración 17. Sistema Loran-C | 39 |
| Ilustración 18. Sistema planteado Loran 2D | 41 |
| Ilustración 19. Hipérbola generada sistema Loran 2D | 42 |
| Ilustración 20. Corte de hipérbolas sistema Loran 2D | 42 |
| Ilustración 21. Principio de triangulación | 46 |
| Ilustración 22. Modelo GPS Geogebra® | 47 |
| Ilustración 23. GPS en dos dimensiones | 47 |
| Ilustración 24. Corte de circunferencias GPS 2D | 48 |
| Ilustración 25. Puntos de corte GPS 2D | 49 |
| Ilustración 26. Triangulación GPS 2D | 50 |
| Ilustración 27. Sistema planteado GPS 3D | 51 |
| Ilustración 28. Corte de esferas GPS 3D | 51 |
| Ilustración 29. Triangulación GPS 3D | 52 |

Ilustración 30. Principio de operaciones GPS 54
Ilustración 31. Dualidad herramienta objeto 61

# 1. JUSTIFICACIÓN

A lo largo de la historia el hombre se ha tenido que enfrentar a distintos problemas en los cuales las matemáticas, y específicamente las ecuaciones, han jugado un papel destacado dentro de la solución de los mismos. El presente trabajo pretende estudiar la problemática del posicionamiento global, y las ecuaciones que fueron utilizadas para dar solución a la misma, con el fin de estudiar si en los momentos históricos estas fueron vistas como un objeto de estudio de las matemáticas o como una herramienta.

Desde este estudio se pretende ampliar la visión de este tópico que usualmente se aprende y enseña como un objeto de estudio de la matemática, ya que pensamos que es posible observar que este concepto también surge como una herramienta y en ese caso es relevante estudiar con algo más de profundidad la forma en que lo hace, y así enriquecer nuestra práctica docente identificando y adquiriendo nuevos elementos involucrados en el concepto de ecuación, ampliando los recursos para acercar este concepto a nuestros estudiantes.

Por último, el analizar el papel que ha tenido la ecuación dentro de la solución de una problemática puntual pretende que también se profundice la comprensión de la matemática misma y sus elementos a través del estudio de la relación que hay entre un problema real y dicha ciencia, sus interacciones y la manera en que se complementan.

# 2. OBJETIVOS

## 2.1. Objetivo general

Estudiar si una ecuación se presenta como una herramienta o un objeto de estudio de la matemática desde la perspectiva histórica del problema del posicionamiento global.

## 2.2. Objetivos específicos

- Tomar una postura sobre que es una herramienta y que es un objeto de estudio de la matemática.
- Indagar diferentes soluciones que se han dado en la historia al problema del posicionamiento global y seleccionar algunos en los cuales las ecuaciones jueguen un papel importante.
- Estudiar y describir las ecuaciones presentes en el problema del posicionamiento.
- Analizar en algunos momentos históricos seleccionados si la ecuación se presentó como herramienta u objeto de estudio de la matemática.

# 3. INTRODUCCIÓN

En el marco de la enseñanza de las matemáticas pueden encontrarse innumerables elementos que se han venido consolidando dentro de los programas curriculares. Estos elementos coexisten unos con otros aun cuando parecieran no tener características en común, más que el mismo hecho de pertenecer a la gran ciencia llamada matemáticas.

En el presente trabajo se presenta un estudio que se realizó sobre uno de estos elementos de las matemáticas: las ecuaciones. Este elemento tiene formas primitivas desde civilizaciones tan antiguas como Babilonia (2000 a.C.) y Egipto (1700 a.C.) y ha permanecido a lo largo del desarrollo de las matemáticas en el pasar de los siglos. Ha tomado diferentes formas, se ha caracterizado y estudiado llegando a tener múltiples aplicaciones y relaciones dentro y fuera del universo mismo de esta ciencia.

Este elemento ha presentado una dualidad en el pasar del tiempo y radica en el hecho de que la ecuación ha tenido varias formas de verse, en algunas ocasiones es una herramienta con múltiples aplicaciones y en otras, es un objeto de estudio sobre él cual se construyen teorías. Para indagar y profundizar en esta dualidad, se ha escogido la perspectiva histórica como recurso importante para su estudio, sin embargo por la amplitud de esta, se tomará un problema histórico particular que ha estado durante el pasar de los siglos y en el cual las ecuaciones han tenido un papel importante: el  posicionamiento global.

En el capítulo 1 se presentan los hallazgos encontrados luego de la revisión en el marco histórico, al final del cual se realiza una selección de momentos que sirven de referencia para el problema en cuestión.

En el capítulo 2 se presenta la postura adoptada por los autores sobre que se entenderá por herramienta y por objeto de estudio. Luego en el capítulo 3 se profundizará en la matemática de los momentos seleccionados previamente en el primer capítulo.

Con estos elementos en el capítulo 4 se analizará si la ecuación se presenta como objeto de estudio o como herramienta en los momentos más relevantes del problema y se presentan las conclusiones del estudio.

## 4. HISTORIA DEL POSICIONAMIENTO

Desde la antigüedad el hombre ha sentido curiosidad de conocer y explorar su entorno, lo que llevó en algún momento a tener la necesidad de desplazarse en distancias cada vez mayores. Una vez se inicia un desplazamiento es importante reconocer un ruta o un camino para luego poder regresar al punto de partida, pero esto puede generar diversos inconvenientes.

El caso que pondría menores obstáculos es tal vez cuando el desplazamiento se realiza de manera terrestre en lugares donde haya referencias claras e invariables como árboles, montañas, rocas o formaciones terrestres con formas particulares de manera que a través de ellas se defina un mapa[1] con el cual se puede luego de recorrer cierta distancia retornar al punto de origen. Ahora bien, existen múltiples terrenos como bosques, desiertos, llanuras donde es difícil definir las referencias.

Una vez superada la etapa nómada, si se piensa en desplazamientos acuáticos, primero se tendría que resolver el reto de construir un medio transporte marítimo para poder desplazarse en largas distancias, al conseguir esto ocurriría un caso similar al de un desierto, pues al salir a altamar y perder de vista la orilla se vuelve complejo definir referencias y conseguir determinar un rumbo; una solución sería realizar los desplazamientos sin perder de vista la orilla, en cuyo caso la navegación sería muy limitada.

Por otro lado, aunque en la antigüedad no existía la posibilidad de desplazamientos aéreos, allí el problema sería aún más complejo, puesto que en el aire a gran altura también se pierden las referencias.

A lo largo de los siglos los pueblos iniciaron a desplazarse y además la simple curiosidad por explicar el mundo llevó al desarrollo de conocimientos y técnicas que resultaron útiles para poder resolver el problema del posicionamiento global.

Este problema requería poder encontrar alguna referencia que presentará alguna regularidad y que pudiera encontrarse con frecuencia o sin tanta dificultad y a lo largo de los siglos se vio en los astros del cielo la solución. Es así como desde la antigüedad se

[1] Representación geográfica de la Tierra, o de parte de ella, sobre una superficie plana, de acuerdo con una escala.

desarrollaron principios de observación del cielo tratando de captar los tiempos y las posiciones de los astros para determinar una ubicación respecto a esa referencia. Esta solución también presentaba retos, puesto que en condiciones climáticas desfavorables no es posible observar los astros, además las estrellas pueden observarse generalmente en la noche, sin embargo el desarrollo de la astronomía fue impulsando la creación de tecnologías y conocimientos que permitieran observar y tomar medidas de los astros para captar las regularidades.

### *4.1. GRECIA ANTIGUA*

En Grecia comenzó a desarrollarse lo que ahora conocemos como astronomía occidental. Allí en principio se buscaba dar una guía para los agricultores, lo que llevó a trabajar intensamente en el diseño de un calendario que fuera útil. Sin embargo el conocimiento avanzó más, por ejemplo la Odisea de Homero ya menciona constelaciones como la Osa Mayor y Orión, y describe cómo las estrellas pueden servir de guía en la navegación.

Las aportaciones científicas griegas más importantes se asocian con los nombres de los filósofos Tales de Mileto y Pitágoras, pero no se conserva ninguno de sus escritos. Se sabe que Tales fue el primero en plantear la idea de que la tierra es una esfera (que posteriormente es apoyada por Pitágoras y Aristóteles). Por otro lado, el primero en medir el meridiano terrestre fue Eratóstenes de Cirene quien comparo la inclinación de los rayos solares en Alejandría y Siena durante el solsticio de verano, llegando a un valor de 39500 km (valor muy aproximado al valor real de 40000 km). Sin embargo, Posidonio de Rodas creyó encontrar un error en el cálculo de Eratóstenes y encontró otro valor de 28400 km que pasó a los geógrafos, llevando a varios errores a la cartografía de la época. Por último, también hay que destacar que Hiparco de Rodas fue el que llevo el sistema Sexagesimal (implementado por los babilonios), y trabajó con él desarrollando un gran catálogo de estrellas, que fue fundamental para la navegación marina.

Posteriormente, aparece un libro que revoluciona la navegación marítima y la cartografía, llamado Syntaxis Mathematica (Almagesto), cuyo autor fue Ptolomeo. Este autor fue Astrónomo, matemático y geógrafo. Es muy poca la información sobre la vida de él que ha llegado hasta nuestro tiempo. No se sabe con exactitud dónde nació, aunque se supone que fue en Egipto, ni tampoco dónde falleció.

Su actividad se enmarca entre las fechas de su primera observación, cuya realización asignó al undécimo año del reinado de Adriano (127 d.C.), y de la última, fechada en el 141 d.C. En su catálogo de estrellas, adoptó el primer año del reinado de Antonino Pío (138 a.C.) como fecha de referencia para las coordenadas.

Ptolomeo fue el último gran representante de la astronomía griega y, según la tradición, desarrolló su actividad de observador en el templo de Serapis en Canopus, cerca de Alejandría. Su obra principal y más famosa, influyó en la astronomía árabe y europea hasta el Renacimiento.

Utilizando los datos recogidos por sus predecesores, especialmente por Hiparco, Ptolomeo construyó un sistema del mundo que representaba con un grado de precisión satisfactoria los movimientos aparentes del Sol, la Luna y los cinco planetas entonces conocidos, mediante recursos geométricos y calculísticos de considerable complejidad; se trata de un sistema geocéntrico según el cual la Tierra se encuentra inmóvil en el centro del universo, mientras que en torno a ella giran, en orden creciente de distancia, la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno.

El sistema de Ptolomeo proporcionó una interpretación cinemática de los movimientos planetarios que encajó bien con los principios de la cosmología aristotélica, y se mantuvo como único modelo del mundo hasta el Renacimiento, aun cuando la mayor precisión alcanzada en las observaciones astronómicas a finales del período medieval hizo necesaria la introducción de decenas de nuevos epiciclos, con lo cual resultó un sistema excesivamente complicado y farragoso.

En la Syntaxis Mathematica se deja claro que la tierra es el centro del universo (teoría geocéntrica), y se logra determinar el Ecuador terrestre a partir del movimiento de los cuerpos celestes que cruzaban aquella línea imaginaría exactamente por su cenit a 90E de altura.  Lo anterior, permitió a Ptolomeo plantear las siguientes premisas:

La elevación del polo celeste sobre el horizonte corresponde a la latitud del lugar del observador

La declinación del cenit[2] del observador señala la latitud en el momento en que un astro cruza su meridiano

*Ilustración 1. Cuadrante de Ptolomeo*

(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de: fglorente.org/libros/compendio%20primero%205.pdf)*

Para ese fin, Ptolomeo idealiza y construye algunos instrumentos como el cuadrante, que es un instrumento que tiene la forma de un cuarto de círculo que esta graduado de 0° a 90°, cuyo objetivo es medir ángulos verticales. En sus comienzos, era un instrumento de grandes dimensiones, después los árabes lo volvieron portátil. Además, no tenía graduaciones sino que cada lugar en el que se hubiera utilizado tenía “una marca” determinada. El instrumento tenía dos pínulas en uno de los radios para visualizar el astro y del centro colgaba una cuerda con un plomo para marcar la vertical. Para tomar medidas, se colgaba el instrumento de la anilla, se dirigía la visual al astro, con ayuda de las pínulas, y una vez conseguida se sujetaba el hilo de la plomada al limbo. Finalmente se tomaba la lectura.

Otro de sus instrumentos llamado astrolabio (que traduce buscador de estrellas) es un circulo de bronce o latón, atravesado por cuatro radios situados a 90° uno del otro formando

[2] El cénit es el punto de la esfera celeste situado en la vertical, sobre la posición del navegante. La recta que une el cénit al centro de la Tierra toca la superficie terrestre en la posición del navegante, que es la posición que pretendemos determinar.

dos diámetros ortogonales. Se fabricaba de ese material para que amortiguara la oscilación debida al viento y favorecía la verticalidad. El diámetro vertical representa la línea zénit-Nádir, y el horizontal la línea del horizonte. En esta misma línea está situado el grado 0, correspondiendo el grado 90 al zénit.

Para calcular la latitud utilizando el astrolabio, hay que tener en cuenta los siguientes parámetros:

Calculo de la latitud durante el día: el observador se debía levantar pocos minutos antes de que saliera el sol, y debía tomar una primera medida en grados de una de las estrellas, respecto al horizonte. Al medio día, se debía tomar otra medida justo en el cenit. Finalmente se restaban las dos mediciones y ese valor daba la latitud de la persona.

Calculo de la latitud durante la noche: se debe buscar la estrella polar (si la ubicación es en el hemisferio norte) o la prolongación del brazo mayor de la constelación de la cruz del sur (si la ubicación es en el hemisferio sur). Posteriormente, se calculaba el ángulo de dichas estrellas respecto al horizonte. A este valor se le restaba 90, obteniéndose así el valor de la latitud.

*Ilustración 2. Astrolabio de Ptolomeo*

(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de: fglorente.org/libros/compendio%20primero%205.pdf)*

En síntesis, podría decirse que en Grecia se sentaron las bases para dar solución al problema del posicionamiento global, puesto que sus desarrollos en la astronomía fueran claves para determinar una ubicación tomando como referencia la observación astronómica.

### *4.2. MUNDO ARABE*

Los árabes fueron quienes después de la decadencia de los estudios Griegos y la entrada de occidente en una fase de oscurantismo durante los siglos X a XV, continuaron con las investigaciones en astronomía, no buscaban directamente trabajar el problema del posicionamiento, pero sus desarrollos astronómicos y la conservación de la tradición griega fue clave para los avances que se darían en Europa posteriormente.

A partir del año 632, el pueblo habitante de la península Arábiga se extiende a Siria, Persia y Egipto. Durante 500 años los árabes serían el pueblo más rico y poderoso del mundo conocido. Mientras que la Europa occidental del Siglo VII d.C. conoce y acepta solamente el sistema de Tolomeo y la filosofía aristotélica, junto con el manejo de un sistema de numeración inadecuado, el mundo árabe, se hace depositario de las culturas persa, griega y bizantina, además, no adopta el sistema aristotélico, no combate ninguna teoría sobre el mundo y conserva la tradición científica y el espíritu de los griegos.

El desarrollo de la ciencia árabe inicia hacia el 760 d.C. bajo el impulso del Califa al-Mansur quien es responsable de la traducción al árabe de numerosas obras de astronomía hindúes, persas y griegas. Luego bajo el mando del Califa al-Mamun (786-833) se alcanzaría el máximo esplendor, se continúan las traducciones y se funda la “Casa de la Sabiduría”, donde se reúnen numerosos científicos. Cabe destacar que en ese reinado se construye un observatorio en Bagdad y Damasco, y que se traduce la “Syntaxis Mathematica” de Tolomeo bajo el nombre de Al-Magesto.

El imperio árabe creo una comunidad desde España hasta Asia central y llevaron a todas las tierras conquistadas una astronomía popular árabe que era una mezcla de la hindú, persa y griega, que se unificaba con la local de cada lugar de conquista. Hasta el siglo X, esta astronomía no adquirió unas características propias, pero a partir de entonces y hasta el siglo XV, los expertos musulmanes fueron inigualables en sus conocimientos.

Todo este conocimiento quedo recopilado en documentos en los que se podía encontrar: trigonometría; astronomía esférica; ecuaciones solares, lunares y planetarias; posiciones planetarias; paralajes; visibilidad solar y planetaria; geografía matemática (lista de ciudades con sus coordenadas geográficas correspondientes), con lo que se determina la dirección de la Meca; uranometría (tablas de estrella fijas con sus coordenadas), y, no en menor proporción, astrología matemática.

Aunque la religión no fue la única fuerza impulsora que promovió el crecimiento de la astronomía en el mundo islámico, se necesitaba resolver de algún modo el problema de orientar exactamente hacia la Meca todas sus estructuras sagradas, así como a las personas que realizaban los cultos diarios. La cartografía de los cielos surgió de esta necesidad de fijar las coordenadas de los lugares santos y la dirección correcta (la qibla) hacia la kaaba, el altar de la Meca hacia el cual se vuelven los musulmanes cinco veces al día para rezar sus oraciones.

Para el siglo XI, los astrónomos ya utilizaban instrumentos de cálculo trigonométrico y de otros tipos para determinar la qibla a partir de coordenadas geográficas. Este problema se convirtió en un trabajo de trigonometría esférica utilizando el cenit de la localidad en cuestión. En el tratado de geografía matemática de al-Biruni, por ejemplo, el objetivo era determinar la qibla correspondiente a Ghazni, Afganistán.

Al –Biruni nació el 15 de septiembre de 973 en la actual Uzbekistán. Su contribución más importante fueron sus agudas observaciones de los fenómenos naturales más que sus teorías. En algunas ocasiones se le llamó 'el maestro', y se convirtió en uno de los científicos más destacados de la civilización islámica de su tiempo.

Sus documentos muestran que escribió 113 obras, pero se han perdido la mayor parte. Los temas que trató incluyen astronomía, astrología, cronología, geografía, matemáticas, mecánica, medicina, farmacología, meteorología, mineralogía, historia, religión, filosofía, literatura y magia.

Entre las obras más importantes de Al-Biruni está Canon, su estudio más amplio sobre astronomía; Densities, que registra la densidad de diversos metales, líquidos y gemas; Astrolabe (Astrolabio) una de las descripciones más valiosas de este instrumento, e Historia de la India, su obra más conocida, en la que utiliza sus conocimientos del sánscrito para describir las costumbres, lengua, ciencia y geografía de la India. Al-Biruni falleció en Gazni (Afganistán), el 13 de diciembre de 1048.

Al igual que Al-Biruni hubo otros grandes científicos árabes que hicieron grandes aportes al problema del posicionamiento, por ejemplo, Al-Farghani que nació en Farghana, Transoxiana, fue uno de los astrónomos más importantes al servicio de al-Mamun y sus sucesores. Escribió "Elementos de Astronomía" (Kitab fi al-Harakat al-Samawiya wa Jawami Ilm al-Nujum, el libro del movimiento celeste y de la ciencia de las estrellas), el cual fue traducido al latín en el siglo XII, ejerciendo una gran influencia sobre algunos astrónomos europeos. Aceptó la teoría de Ptolomeo, determinó el diámetro de la Tierra y de los planetas y dejo escritos sobre la construcción de relojes solares. El Jawami, o "Los Elementos " como también se le conoce, fue la obra de al- Farghani mejor conocida y con posteriores influencias. Su impacto en la Europa medieval es clara si se tiene en cuenta la cantidad de manuscritos latinos aparecidos en las bibliotecas europeas. Esto hizo que se extendieran las ideas astronómicas de Ptolomeo, por lo menos hasta la llegada de la Sphere de Sacrobosco.

Otro de los científicos árabes que vale la pena destacar es Omar Khayyam, quien fue poeta, matemático y astrónomo persa. Se educó en las ciencias en su nativa Nishapur y en Balkh. Posteriormente se instaló en Samarcanda, donde completó un importante tratado de álgebra. Bajo los auspicios del sultán de Seljuq, Malik-Shah, realizó observaciones astronómicas para la reforma del calendario, además de dirigir la construcción del observatorio de la ciudad de Isfahán. De nuevo en Nishapur, tras peregrinar a la Meca, se dedicó a la enseñanza y a la astrología. La fama de Khayyam en Occidente se debe fundamentalmente a una colección de cuartetos, los Rubaiyat, cuya autoría se le atribuye y que fueron versionados en 1859 por el poeta británico Edward Fitzgerald.

Si en Occidente Omar Khayyam tan sólo es conocido como poeta, Oriente, en cambio, lo conoció casi exclusivamente durante toda la Edad Media como astrónomo, matemático y filósofo; en el ámbito de las matemáticas estudió las ecuaciones cúbicas proporcionando una solución geométrica para algunas de ellas, e intentó clasificar ecuaciones de diversos grados según el número de términos que aquéllas contuvieran. Sólo a partir de mediados del siglo XIX, desde que la traducción de Edward Fitzgerald de los Rubaiyat dio celebridad a su nombre en Europa y en América, empezó también a ser estudiado y admirado como poeta por el Oriente persa y árabe.

Junto a estos científicos también se desarrollaron instrumentos propios de los árabes como el Kamal hacia el siglo VII, este consistía en un pequeño rectángulo de madera que tenía un hueco cerca de sus aristas del que pendían uno o varios cordones con nudos. Cada uno de los nudos, correspondía a uno de los puertos en el que el barco había atracado. En la época, llego a convertirse en una sofisticada carta de navegación. El instrumento se operaba observando la altura de una o varias estrellas (entre las cuales se tenía en cuenta la polar), haciendo coincidir con el horizonte la arista inferior de la tabla, por cuyo centro se pasaba la cuerda de nudos y la arista superior con la enfilada que se tratara. Finalmente se tensaba la cuerda con la boca y se practicaba un nudo justo en el punto de sujeción.

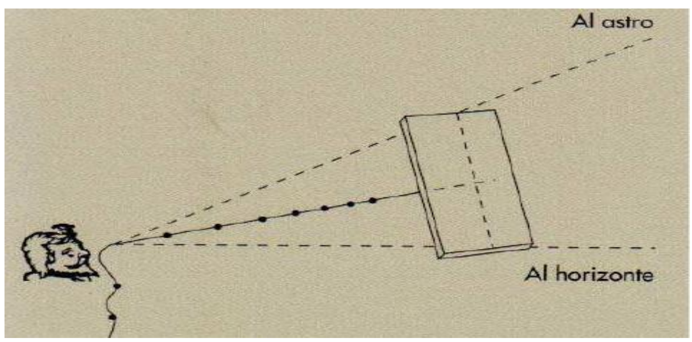


*Ilustración 3. Kamal*

(*O*btenida el 18 de Octubre, 2014, de:
fglorente.org/libros/compendio%20primero%205.pdf)

Otro de los instrumentos que utilizaron fue la Brújula hacia el Siglo X d.C. A pesar que no se conoce con certeza quien la inventó, ni en qué lugar, lo que sí se puede afirmar es que fueron los árabes los primeros en usarla, aproximadamente en el siglo X. Consistía en una lámina de hierro, una aguja magnetizada por una piedra con esas propiedades y colocada sobre un trozo de madera. Posteriormente se colocaba sobre un recipiente con agua y al flotar libremente, la aguja señalaba el norte magnético.

*Ilustración 4. Brújula*
*(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de:
fglorente.org/libros/compendio%20primero%205.pdf)

### *4.3. ERA DE LOS GRANDES NAVEGANTES SIGLOS XV – XVIII*

Gracias a los pueblos árabes los conocimientos astronómicos y matemáticos desarrollados por los griegos, hindúes, persas y por ellos mismos llegaron a Europa. En la península ibérica donde se establecieron los árabes, se crearon centros de desarrollo de la ciencia donde se daba un intercambio cultural y científico. En estos lugares comenzaron a llegar personas de distintos sitios de Europa y permitió gracias a traducciones del árabe al latín, que estos conocimientos fueran difundidos y aceptados en el viejo continente.

Desde mediados del siglo XV surgió la necesidad de encontrar una ruta hacia el este para comerciar con India pero que evitara la región de Persia. Habían dos posibilidades: la primera era navegar alrededor de la costa sur de África y la segunda era navegar hacia oeste bajo el supuesto que la tierra es una esfera. Los portugueses escogieron la primera solución (dirigido por Henry el navegante) en 1487, seguido a esta primera expedición, Vasco da Gama logró llegar a India por la ruta mencionada en 1498. Los españoles escogieron la segunda ruta, yendo directo hacia el occidente cruzando el Océano Atlántico. La verdadera ruta hacia India por el oeste fue descubierta cuando Magallán encontró el camino a través del estrecho de Magallanes en 1520.

En el siglo XV, durante el renacimiento, también se comenzaron a dar importantes aportes a la astronomía, como traducciones al latín de los textos árabes y griegos, junto a nuevos desarrollos en la trigonometría, en especial a la trigonometría esférica. Uno de los grandes matemáticos y astrónomos de este siglo fue Johann Müller de Königsberg, más conocido como Regiomontano. Entre sus obras más importantes se destaca De triangulis omnimodis (1464), donde expone el teorema de los senos para todo triángulo esférico, que permite relacionar las magnitudes angulares, lo cual fue clave para corregir la altura meridiana del Sol mediante observación directa con el astrolabio, estás correcciones se recogieron en rudimentarias tablas de la declinación solar para todos los días de un año, así como el lugar del sol. Otro de sus importantes escritos fueron sus Ephemerides (1474), donde dejo bases para el cálculo de la longitud observando los movimientos de la luna, además de tablas de corrección para la lectura. Se dice que Cristóbal Colón contaba con las cartas de navegación de Regiomontano durante su segundo viaje a América. Lamentablemente Regiomontano falleció muy joven porque se le considera el padre de la trigonometría moderna.

Con estos conocimientos comenzaron a aparecer libros y compendios para facilitar la navegación, entre ellos se destaca Regimiento do estrolabio e do quadrante (1509), primera guía náutica y antecesor de nuestros almanaques náuticos y manuales de navegación, Regimiento de Navegación (Sevilla, 1563), escrito por Pedro de Medina y Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar (Sevilla, 1551) escrito por Martín Cortés.

A pesar de contar con nuevas y mejores formas de determinar la latitud se tenía el problema de encontrar una representación plana de la superficie terrestre que tuviera en cuenta la globosidad de la tierra y que fuera útil para la navegación. Martín Cortes en su texto se quejaba las cartas planas que se tenía que al no ser globosas no tienen en cuenta la convergencia de los meridianos según nos acercamos a los Polo. Por ejemplo, si se parte de dos puntos situados sobre una horizontal separados 60 leguas, y se desplaza hacia cualquiera de los polos siguiendo el meridiano que pasa por cada punto, cuando se hallan separado 60° de la horizontal, la distancia entre los meridianos se habrá reducido a 30 leguas.

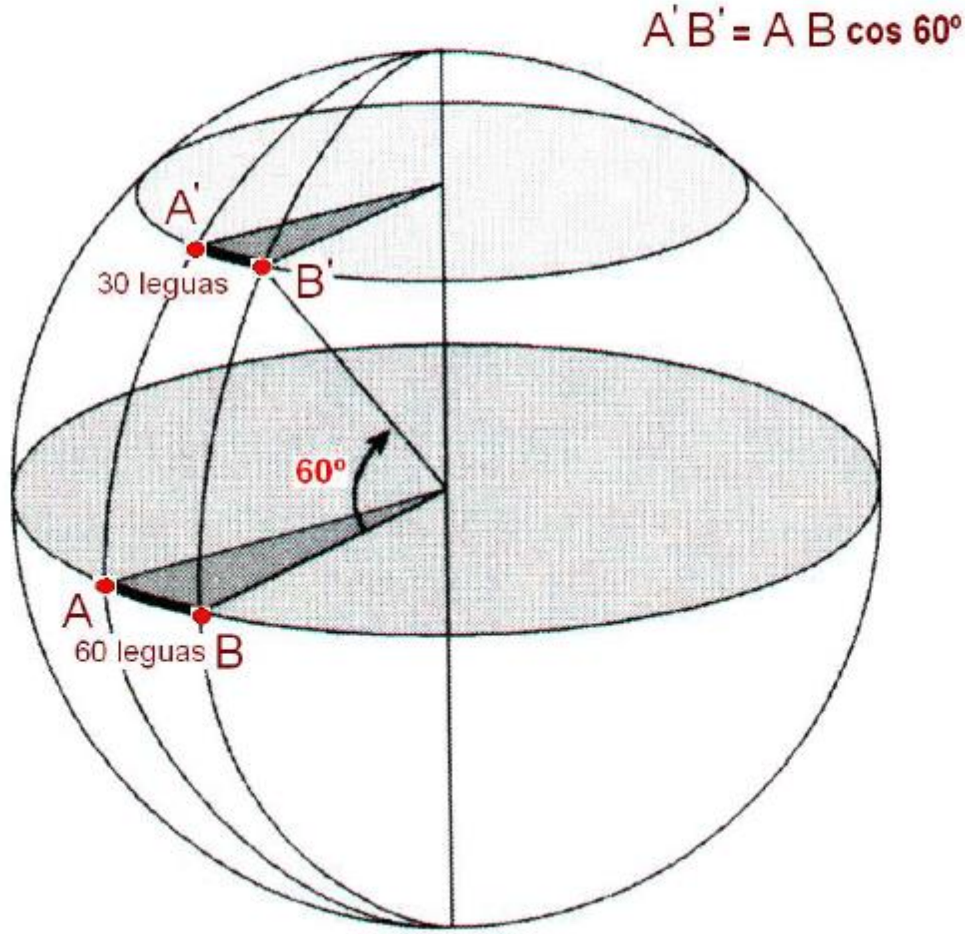


*Ilustración 5. Convergencia de meridianos*

*(*Tomada de *(Garcia Cruz, 2008))*

Esta relación la expresa correctamente Edward Wright en su célebre obra *Certaine errors in navigation*…, publicada a finales del siglo XVI, en 1599, y que supone la primera solución matemática al trazado de la carta náutica, solución que a partir de entonces, se conocerá como proyección Mercator-Wright. La primera imagen de esta proyección había aparecido en un pequeño mapa de Europa trazado para la cubierta de un reloj de sol por Erhardt Etzlaub (1460-1532) de Nuremberg entre 1511 y 1513. Sin embargo, fue Gerard Mercator

(1512-1594) quién primero la dio a conocer para propósitos náuticos en su célebre Das Weld Caerte (1569).

Gerhard Kremer, más conocido como Mercator, nació en Rupelmonde en 1512. Curso estudios en Lovaina donde fue alumno del astrónomo y cartógrafo Frisius. En 1537 elaboró el mapa de Tierra Santa y, posteriormente, realizó su primer mapamundi. En 1552 se estableció en Duisburg, donde trabajó en la construcción de la proyección que lleva su nombre. Este fue su principal aporte científico. Dicha proyección cilíndrica servía para representar la superficie terrestre en dos dimensiones, eliminando las distorsiones generadas por la curvatura de la tierra. Sin embargo, su uso por parte de los navegantes se impuso hacia el siglo XVII.

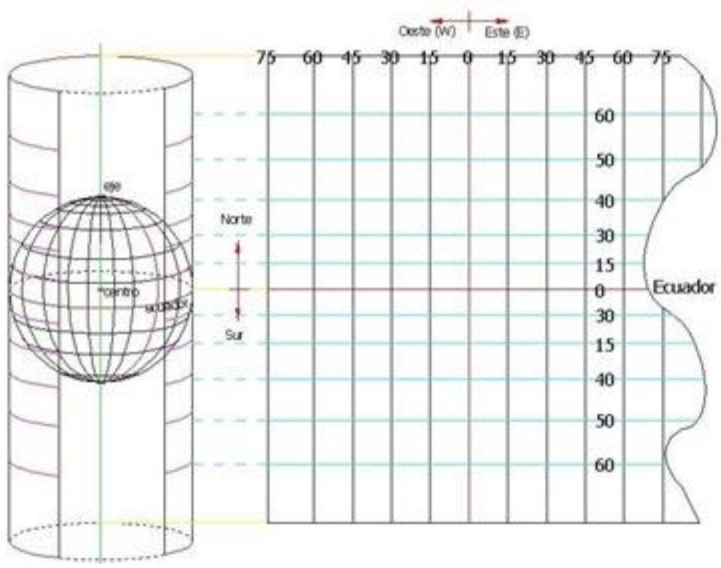


*Ilustración 6. Proyección de Mercator*

(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de:*

*http://ingecivilcusco.blogspot.com/2009/09/sistema-de-coordenadas-universal.html*)

Con todos estos avances, españoles y portugueses decidieron compartir el mundo gracia a su superioridad marítima. Ambos, comenzaron a abrir escuelas de formación marítima como la Escuela sagres en Portugal el Colegio de Sevilla en España. Para repartir el mundo realizaron tratos como el de Tordesillas (1494) y Saragosa (1529), pero las conquistas realizadas no podían ser verificadas de manera precisa por la poca precisión de sus técnicas de posicionamiento, teniendo en cuenta que solo la latitud de un lugar podía ser determinada, mientras que para la longitud, no había técnicas probadas disponibles. Así que los límites territoriales eran definidos con la ayuda marcas terrestres notorias (ríos, montañas, etc.), pero esta no era una solución simple para países ubicado a diez mil millas de distancia.

En cuanto a la determinación de la latitud, las tablas desarrolladas gracias a los avances matemáticos de Regiomontano fueron de gran ayuda, sin embargo también se mejoraron y crearon  instrumentos de medición. Por ejemplo en el siglo XVI d.C. John Davis creo el cuadrante que consiste en un eje central que tiene dos arcos de circunferencia uno en cada lado. El más pequeño está graduado de 0° a 65° con divisiones de 1° que además tiene una pínula móvil. El otro, tiene una graduación desde 0° hasta 30°, con las mismas divisiones del otro y con otra pínula, pero con una escala transversal que permite apreciar hasta un minuto de arco. Otra de las creaciones fue el octante Hadley en el siglo XVII d.C. basado en un modelo Hooke e Isaac Newton. Se le conoce como octante, ya que inicialmente el arco de limbo era de un 1/8 de circunferencia, es decir 45°. Consta de un brazo móvil (llamado alidada), Un arco semicircular que sirve de limbo, dos espejos (uno pequeño que la mitad está cubierto de plata y la otra es transparente, y otro grande que esta sobre la alidada), y un visor. Ya para el siglo XVII se creó el sextante gracias a John Bird, este es un instrumento muy similar conceptualmente al octante pero con una distinta graduación, ya que presenta un arco de limbo de 60°, lo que hace que pueda medir ángulos de hasta 60°). Dispone de un espejo móvil con una aguja que señala en la escala el ángulo medido; un espejo fijo, que en parte permite ver a través de él; y un pequeño tubo hueco, a veces con lentes a modo de catalejo.

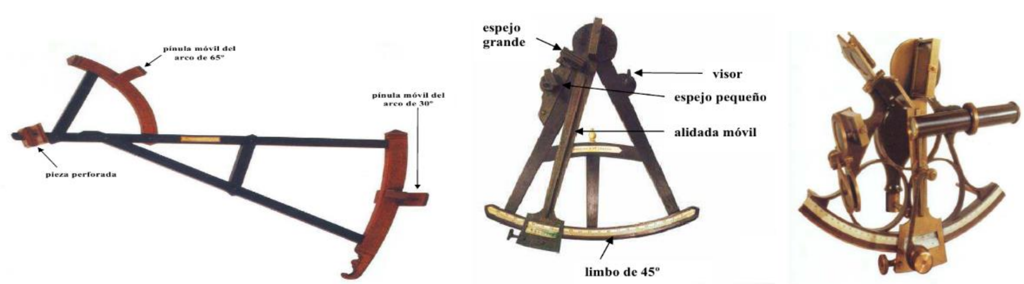


*Ilustración 7. Instrumentos para medir la latitud*

*(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de:

fglorente.org/libros/compendio%20primero%205.pdf)

Por otro lado la determinación de la longitud vería su solución hasta el siglo XVIII, a pesar que reyes colocaron grandes recompensas para cualquiera que la lograrа́ determinar con precisión en altamar. Medir la longitud significa establecer la ubicación exacta de un barco en el sentido este-oeste, y la solución terminó en poder medir tiempo, pues este es ayuda en la determinación de los meridianos de longitud. Así, para averiguar la longitud en el mar, hay que saber qué hora es en el barco y también en el puerto base u otro lugar de longitud conocido en ese mismo momento. Los dos tiempos reales, permiten que el navegante convierta las diferencias horarias en separación geográfica.

Gracias a los descubrimientos astronómicos y cosmográficos se determinó el giro de la tierra sobre su eje en exactamente 24 horas. Por la conformación esférica de la tierra en el Ecuador (360°), se llegó al resultado que la movilización terrestre en torno al sol, 15° correspondería a una hora de diferencia en latitud ecuatorial en el sentido E- W. Esos 15° corresponden a una distancia recorrida. En el Ecuador, donde es mayor el perímetro de la tierra, los 15° abarcan mil millas. Sin embargo, al norte o al sur de esta línea disminuye el valor de cada grado. Un grado de longitud equivale a cuatro minutos de tiempo en todo el mundo, pero decrece en términos de distancia pasando de 68 millas en el Ecuador a prácticamente 0 en los polos.

El gran problema de antaño, era la determinación exacta de la hora del lugar, para con ese dato poder calcular la anhelada longitud. Establecer la longitud en la tierra no revestía mayor complicación. Sin embargo, diversas circunstancias de índole mecánico ambiental dificultaban la determinación de la hora exacta en el mar. Siendo la relojería de la época (principalmente péndulos) la encargada de la resolución de esta variable, sus partes móviles eran fuertemente afectadas por variaciones de presión y temperatura, balances y cabeceos, anomalía que dilataba o contraía sus estructuras metálicas; sumándose a esto, la alteración causada en los lubricantes usados en sus piezas, lo que finalmente arrojaba desajustes horarios indeseables e imperfecciones en la obtención de la longitud estimada.

Esta dificultad derivó en graves problemas en los levantamientos de cartas náuticas de la época, donde hubo sendas disputas por espacios marítimos incorrectamente delimitados. La búsqueda de un reloj, que no fuera afectado por las fuerzas terrestres sobre una plataforma flotante, duró cuatro siglos y obligó a generaciones de científicos europeos a su exploración y experimentación.

Muchos de ellos hasta su muerte no vieron avances significativos, pero todos aportaron en alcanzar incluso la solución definitiva a fines del siglo dieciocho. Astrónomos de gran renombre como Galileo y Newton se enfrentaron a este desafío, requiriendo la ayuda de astros y planetas, fundándose magníficos observatorios en París, Londres y Berlín. A medida que pasaba el tiempo y se apreciaba que ningún medio daba resultado, las grandes potencias marítimas con vocación expansionista, España, Inglaterra, los Países Bajos e Italia comenzaron a ofrecer suculentos premios en moneda oro a una solución viable.

El relojero inglés John Harrison, genio de la mecánica y pionero de la ciencia inventó un reloj que llevaba la hora exacta desde el puerto de origen hasta cualquier rincón del mundo. Harrison construyó una serie de relojes prácticamente exentos de fricción, que no necesitaban lubricantes ni limpieza con materiales indemnes y unos elementos móviles perfectamente equilibrados entre sí, por mucho que se bamboleasen. Prescindió del péndulo y combinó diversos metales en la máquina, de modo que cuando una de las partes se dilataba o se contraía con los cambios de temperatura, las demás contrarrestaban el cambio, manteniendo la marcha constante del reloj. Tuvo que luchar mucho contra la elite científica para que aprobaran sus logros para así reclamar su recompensa la que finalmente le fue concedida en 1773 por su reloj H4, tras 40 años de revolucionarias ideas del tema. Así, un simple relojero les arrebató el premio a los sabios astrónomos de la época.

*Ilustración 8. Reloj H4*

*(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de: http://www.relojes-especiales.com/foros/relojes-de-bolsillo/fancy-dial-disfruten-339818/)

Gracias a estos desarrollos para el siglo XVIII ya era posible determinar la longitud y la latitud de cualquier lugar y así poder establecer la posición de una persona.

### *4.4. ONDAS DE RADIO. SIGLO XIX*

Un momento importante en el problema del posicionamiento global se da gracias a las tecnologías basadas en ondas de radio. Para entender esto, es importante tener en cuenta los trabajos de personajes como James Maxwell o Heinrich Herz, el primero desarrolló en 1864 las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las ondas y posteriormente en 1886, Herz con base en los desarrollos de Maxwell logró demostrar las leyes de reflexión de las ondas electromagnéticas.

Herz también desarrolló un experimento donde logró emitir una onda y luego con un receptor midió la cantidad de energía transmitida, a partir de allí, a pesar que el propio Herz no pudo ver el fruto de su trabajo por fallecer joven, se abriría un sendero que conduciría a la invención de dispositivos que a partir de ondas transmitieran información.

En 1903, el investigador Alemán  Christian Hulsmeyer fue capaz de detectar ondas de radio luego que las emitiera en dirección de un buque esperando que se reflejara. En 1904, Hulsmeyer patentó la idea y desarrolló un equipo con la finalidad de ayudar a la navegación de los buques, pero su idea al ser presentada no causo gran entusiasmo porque solo tenía una milla de alcance. Tuvieron que pasar 20 años, hasta que el italiano Marconi retomará estos análisis e hiciera notar que era posible que las ondas de radio focalizadas en un haz pudieran ser reflejadas por un objeto y obtener información como la distancia a la que se encuentra, aún en la noche o malas condiciones de tiempo. Sin embargo, estos desarrollos tampoco fueron lo suficientemente convincentes como para llevarlos a aplicaciones amplias.

Una de las tecnologías desarrolladas fue el radar, el cual se suscitó por la tensión de la guerra. Así se iniciarían fuertes desarrollos de esta idea principalmente en EE.UU. e Inglaterra. En principio ambas naciones iniciaron dichos desarrollos por separado y con diferentes fines, pero luego por la visión de Winston Churchill se aprobaría el traspaso de tecnología entre ambas naciones y se daría un trabajo conjunto que dio mayores alcances a los avances.

Dentro de estos desarrollos se destaca el del ingeniero Sir Robert Wattson-Watt quien en 1935 logró la detección de un avión a través de ondas de radio a una distancia de 15 millas y unos meses después utilizando ondas de radio de 12 MHz detectó un bombardero a 40 millas de distancia. En ese momento se llamó al aparato RDF (Radio Detection Finding), aunque algunos lo conocían como rayo de la muerte, fue años más tarde que se le daría el nombre actual de Radar (Radio Detection and Ranging).

En 1936 en EE.UU., luego del inicio de la navegación aérea, los científicos Page y Young lograron detecciones aéreas de gran exactitud con un “radar” pulsado a una distancia de 10 millas usando ondas de 28,2 MHz, posteriormente aumentaron la duración del pulso a 5 microsegundos logrando detecciones de 25 millas y debido al éxito en las pruebas se concretaría en diciembre de ese año la construcción del SCR-268, el primer radar de control de tiro antiaéreo.

Para este momento se consolida la utilidad y complejidad del radar, viéndolo como un arma silenciosa con gran potencial. El reto planteado en ese momento era el de tratar de reducir el tamaño de las antenas, pues por las frecuencias utilizadas hasta el momento, el tamaño de las misma era impráctico.

Para septiembre de 1938 entraría en servicio una gran cadena de antenas de radio entre 22 y 28 MHz en la costa este y sur de la isla de Gran Bretaña. Este arreglo de antenas se conocería como “Chain Home” y fue el primer radar de vigilancia aérea de la historia, que sirvió mucho a los ingleses en la “Batalla de Inglaterra”. De esta batalla se conocen las memorias del general Alemán Adolf Galland que menciona la ventaja que daba a los aviones ingleses el poder ser dirigidos segundo a segundo con las instrucciones de los controladores.

Otro reto consistió en tratar de montar un radar a bordo de una aeronave, lo cual se logró el 17 de agosto de 1937 en la nave AVRO K6260, a través del cual se logró la detección de portaaviones y cruceros de batalla.

Debido a las constantes guerras se crearon escuelas e institutos que estudiaban a fondo los desarrollos de esta tecnología. Entre las más destacadas se encuentra el Laboratorio de Radiación de Cambridge, dependiente del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) el que con la cooperación de la Armada y el Ejército creó la Escuela de Radar del MIT.

Con estas escuelas y otras en Alemania, Italia y otros países, se desarrollaron mejores versiones de radar, cambiando las frecuencias, los transmisores, los receptores y buscando cada vez mejores alcances y mayor precisión. Esto además genero la necesidad de crear instrumentos que detectaran los radares como estrategia de defensa, lo cual llevó al inicio de una guerra electrónica.

Cuando se finaliza la guerra, se detiene el desarrollo precipitado de los radares, lo que da paso a avances en aplicaciones civiles y algunas militares pero todas bajo los mismo principios. Por ejemplo, uno de esos avances fue el Sistema Loran, abreviatura de la expresión long range navigation (navegación de largo alcance)

Loran es uno de los muchos sistemas que permiten a los navegantes determinar la posición de su barco o avión, a partir de la diferencia de recepción de las señales de radio procedentes de dos emisores sincronizados distantes entre sí. El sistema emisor loran se compone de una estación maestra y otra esclava. La maestra emite cada 0,05 segundos una pequeña señal, que es repetida por la esclava, controlada por radio desde la maestra, 0,001 segundos más tarde.

Ambas señales se reciben en el barco o avión, se amplifican y se registran como pequeñas ondas sobre la pantalla de un tubo de rayos catódicos. Los circuitos del receptor están dispuestos de forma que la distancia entre las señales corresponda a la diferencia de tiempos de llegada de las señales de ambas estaciones. El receptor posee además un dispositivo temporizador electrónico que permite medir dicha diferencia en microsegundos (millonésimas de segundo). Como las ondas de radio viajan a una velocidad constante de 300000 km por segundo, la ubicación de todos los puntos en los que las señales de las dos estaciones están separadas un determinado intervalo de tiempo se puede representar mediante una curva concreta que es una hipérbola, en cuyos focos se encuentran ambas estaciones emisoras. El navegante dispone de un mapa con muchas de estas curvas, denominadas curvas de posición loran, y tras determinar la diferencia de tiempos, por ejemplo, 3 microsegundos, sabe que la posición de su nave se halla en algún punto de la curva de 3 microsegundos del mapa. Sintonizando una pareja de emisores loran y repitiendo este proceso, el navegante es capaz de detectar otra curva que represente la posición de la nave; la posición real del aparato se halla en la intersección de las dos curvas loran. Loran posee un alcance útil de unos 2,250 km por la noche y unos 1,200 km de día. Las señales se emiten generalmente en la banda de frecuencias de 1,8 a 2,0 MHz. Sirve tanto para marcar y mantener un rumbo, como para fijar la posición, y presenta la ventaja de ser independiente de las condiciones meteorológicas. Su exactitud oscila entre unos centenares de metros y unos pocos kilómetros, dependiendo del equipo utilizado y de la distancia entre la nave y la emisora.

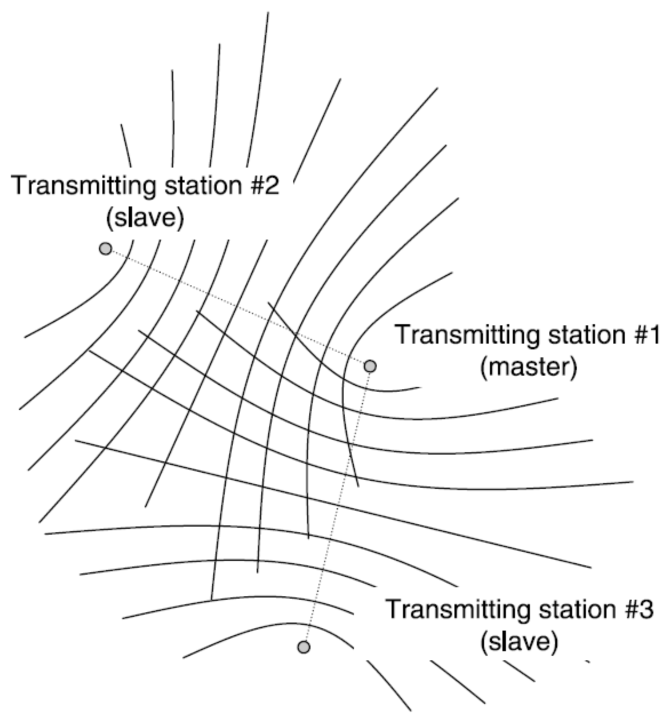


*Ilustración 9. Sistema Loran*

(*Tomado de:* (Samama, 2008))

### *4.5. ERA SATELITAL*

A principio de 1960 los departamentos de defensa, transporte y la agencia espacial norteamericanas (DoD, DoT y NASA respectivamente) tomaron interés en desarrollar un sistema para determinar la posición basado en satélites, es decir aprovechando las ondas de radio. El sistema debía cumplir los requisitos de globalidad, abarcando toda la superficie del globo, funcionando de manera continua sin que le afectaran las condiciones atmosféricas y que fuera dinámico para posibilitar su uso en la aviación con precisión.

TRANSIT fue el primer sistema de satélites lanzado por Estado Unidos y probado por la marina estadounidense en 1960, en el marco de la guerra fría. Solo cinco satélites orbitando la Tierra permitían a los buques determinar su posición en el mar una vez cada hora. El sucesor de TRANSIT fue el satélite Timation en 1967, que demostró que los relojes atómicos de alta precisión podrían funcionar en el espacio. A partir de ese momento, el GPS se desarrolló rápidamente para fines militares con un total de 11 satélites “Block I” lanzados entre 1978 y 1985.

Sin embargo, fue el derribo de un avión de pasajeros coreano (vuelo 007) por parte de la URSS en 1983 lo que llevó al Gobierno de Ronald Reagan en EE.UU. a establecer el GPS para aplicaciones civiles de modo que los aviones, las embarcaciones y medios de transporte de todo el mundo pudieran determinar su posición y evitar desviarse involuntariamente y entrar en límites territoriales extranjeros.

El desastre del transbordador de la NASA SS Challenger en 1986 redujo la actualización del sistema GPS hasta que en 1989 se lanzaron los primeros satélites Block II. En el verano de 1993, EE.UU. lanzó su 24 satélite Navstar a la órbita, que completó la moderna constelación de satélites GPS. Veintiún satélites de la constelación estaban activos en todo momento y los otros 3 eran de repuesto. La red de GPS actual cuenta con 30 satélites activos.

## 4.6. CONCLUSIÓN

La historia acá presentada es solo un fragmento de los momentos que tuvieron más auge y reconocimiento a nivel global, sin embargo es probable que hayan existido soluciones particulares en otros lugares, pueblos y momentos que no aparezcan acá reseñados.

Por otro lado, en la historia presentada se evidencia una relación estrecha entre la matemática y las soluciones planteadas al problema del posicionamiento, puesto que en cada una de ellas fue necesario el desarrollo de procedimientos numéricos para tomar medidas y para su interpretación, por ejemplo se reconoce un trabajo sobre semejanza de triángulos y relaciones de ángulos respecto a rectas paralelas, además el uso de razones trigonométricas donde se infiere el uso de ecuaciones, entre otros.

En general, aunque se reseñaron veintitrés siglos de historia aproximadamente, se pueden reconocer dos momentos claves: el primero y más extenso, tiene como esencia un trabajo sobre ángulos para la determinación de la latitud, allí estarían los trabajos griegos, árabes y renacentistas europeos; el segundo, tiene como esencia el aprovechar la generación de curvas (hipérbolas o circunferencias) o superficies (esferas, hiperboloides) respecto a referencias fijas conocidas para aprovechar el corte de las mismas y así establecer la posición de un individuo, en este se destaca el sistema Loran C y el GPS.

En cualquier caso se observa como en el desarrollo de la ciencia y más particularmente la matemática se desarrollaron diferentes y más novedosas formas de establecer la posición de cualquier objeto, cada vez de manera más exacta y utilizando diferentes tecnologías.

## 5. OBJETO DE ESTUDIO Y HERRAMIENTA.

En este capítulo se presenta la postura asumida por los autores sobre lo que se considerara una herramienta y un objeto de estudio, para lo cual se tomaron los trabajos de Chevallard (1997) y Douady (1984), sin embargo no se hace una presentación extensa de la discusión generada puesto que no está dentro del alcance del trabajo.

Desde la antigua Grecia se ha tratado de entender lo que es un objeto de estudio y una herramienta. Evidencia de ello esta que en el libro “el órganon” de Aristóteles, no sólo se pretendía organizar el mundo y la mente a través de la lógica para evitar las contracciones y las paradojas a las que se llegaba con el pensamiento, sino que por primera vez se planteaba la cuestión de si la lógica era el objeto de estudio de la filosofía (que en esa época se creía que era la única rama de la misma), o si era una herramienta (que se debe entender como una rama que sirve de instrumento para la filosofía). Desde entonces se ha abierto la discusión sobre lo que es un objeto de estudio y una herramienta para la ciencia.

Los objetos de estudio son la base fundamental para las distintas ciencias. Se caracterizan porque son susceptibles de ser profundizados permitiendo que no sólo se tenga un concepto, sino que se llegue a clasificaciones o a ramas que subdividen al objeto. Por ejemplo, se puede tener el caso en la geología de las rocas que después de encontrar similitudes y diferencias se clasificaron en ígneas, metamórficas y sedimentarias, por lo que las rocas son un objeto de estudio para la geología. También, se puede encontrar que las reacciones son un objeto para la química, ya que en su momento fueron estudiadas encontrándose regularidades, lo que permitió que se pudieran caracterizar y clasificar, que tuvieran su propia simbología y que se pueda obtener su parte estequiométrica.

Las matemáticas también tienen sus propios objetos de estudio que para Chevallard (1997) deben tener las siguientes características:

- Tener una definición
- Tener unas propiedades
- Tener unas ocasiones de uso

Así, se puede encontrar que por ejemplo las operaciones entre polinomios son un objeto de estudio para las matemáticas ya que tienen su propia definición, tienen sus propiedades (por ejemplo la manera de proceder con el grado cuando se suma y se multiplica), y tienen sus ocasiones de uso (cuando se va a factorizar).

Por otra parte, se pueden encontrar las herramientas que son conceptos u objetos que se caracterizan por su capacidad de uso. Éstas, pueden ser exclusivas de una ciencia o pueden ser interdisciplinares. Por ejemplo, las matemáticas pueden ser una herramienta para la física, ya que le ayuda a modelar y a comprender muchos de los fenómenos por los que se cuestiona esta ciencia.

Dentro de las ciencias, se pueden encontrar distintos tipos de herramientas que se pueden caracterizar según su utilidad. Así, se pueden clasificar en:

- **Herramientas para calcular:** son herramientas que pueden ser utilizadas para calcular un valor desconocido. Se valen de elementos abstractos para realizarse, por lo que las operaciones matemáticas son necesarias para determinar un valor no conocido. Por ejemplo, se puede tener que la trigonometría es un objeto que como herramienta ayuda a determinar ángulos o longitudes desconocidas.
- **Herramientas para medir:** son herramientas que pueden ser utilizadas para medir una variable desconocida. Se valen de elementos concretos para realizar la medida, que ayudan a determinar el valor no conocido. Por ejemplo, un termómetro es una herramienta que sirve para determinar la temperatura de un líquido.
- **Herramienta interna:** son herramientas que pueden ser utilizadas para comprender y estudiar conceptos u objetos dentro de una ciencia. Por ejemplo, el lenguaje formal ayuda a comprender y estudiar las estructuras algebraicas.
- **Herramienta para modelar:** son herramientas que pueden ser utilizadas para modelar problemáticas presentes en una ciencia. Por ejemplo, las ecuaciones ayudan a modelar los movimientos de la física.

# 6. DESCRIPCIÓN DE LAS ECUACIONES PRESENTES.

## *6.1. EL CÁLCULO DE ERATÓSTENES DEL PERÍMETRO DE LA TIERRA*

Un día, estando en la biblioteca de Alejandría, Eratóstenes encontró un informe de observaciones sobre Siena en el que se decía que al mediodía del 21 de junio (durante el solsticio de verano), los objetos no producían sombras y en el fondo de los pozos podía verse la luz del sol (esto debido a que la ciudad está sobre la línea del trópico de cáncer).
La idea principal del trabajo de Eratóstenes fue que para dar una medida completa de la circunferencia podía ir sumando pedazos de arco de circunferencia, que obtenía a partir de medidas angulares[3]. Para comprender como procedió, se valió de tres hipótesis:

- **Los rayos del sol llegan a la tierra de forma paralela:** la ilustración 10, permite visualizar que en el punto 1 los rayos no se pueden considerar paralelos. Pero en el punto 4, y en un punto más alejado, se empieza a visualizar que los rayos se aproximan cada vez más a rectas paralelas.

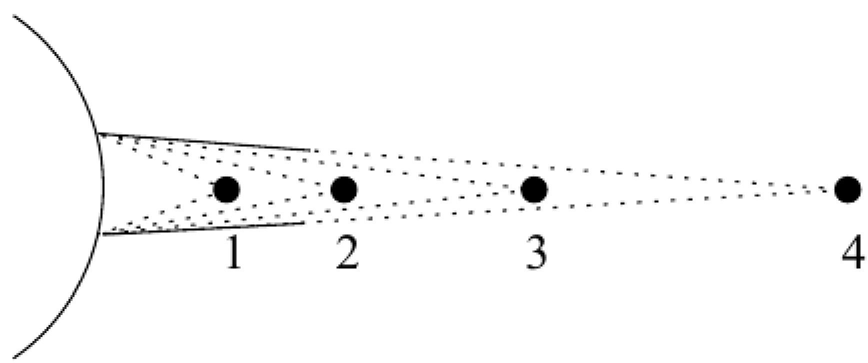


*Ilustración 10. Paralelismo de los rayos del sol*

(Tomado de (Deulofeu & Figueiras, 2002))

[3] En aquella época los ángulos no se medían en grados, sino en porciones de circunferencia.

- **La sombra proyectada por un gnomon[4] en las dos ciudades:** Eratóstenes observó que durante la meridiana[5] del sol en Alejandría el gnomon proyectaba una sombra, mientras que en Siena ya sabía que no se producía ninguna, en esa fecha. A partir de este estudio, asumió que el gnomon estaba alineado con el radio de la tierra.

  Teniendo en cuenta la dirección del gnomon y el paralelismo de los rayos del sol, aplicó la siguiente propiedad geométrica: dos líneas paralelas cortadas por una recta secante, proporcionan 4 ángulos que son congruentes (ilustración 11). De esta manera, Eratóstenes encuentra un ángulo en la superficie de la tierra, que puede medir con ayuda de un gnomon y que le permite medir un ángulo inaccesible en el centro de la tierra. La medida que obtuvo fue de $\frac{1}{50}$ partes de circunferencia.

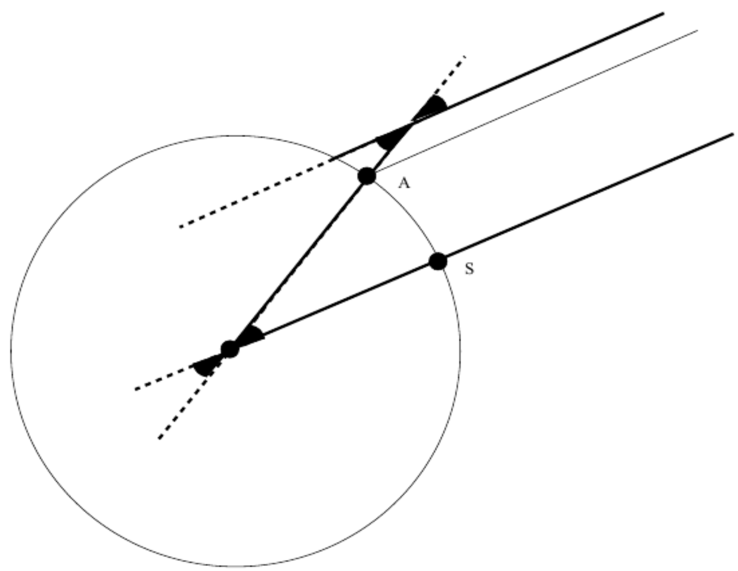


*Ilustración 11. Ángulos correspondientes en el cálculo de Eratóstenes*

(Tomado de (Deulofeu & Figueiras, 2002))

[4] Era el instrumento astronómico utilizado en la antigüedad. Consistía en un palo vertical colocado sobre una superficie plana, normalmente graduada para medir la longitud y la dirección de la sombra durante el día.
[5] Momento del día en el que un astro se encuentra en su punto más alto.

- **La distancia entre Alejandría y Siena es de 5000 estadios:** para determinar este valor, Eratóstenes sabía que el río Nilo atraviesa las dos ciudades, describiendo una línea recta. Al tener este comportamiento (y sabiendo que la tierra era redonda[6], afirmo que las dos ciudades estaban en el mismo meridiano (en otras palabras, en un mismo círculo máximo de polo a polo de la tierra), como se ilustra en la ilustración 12.

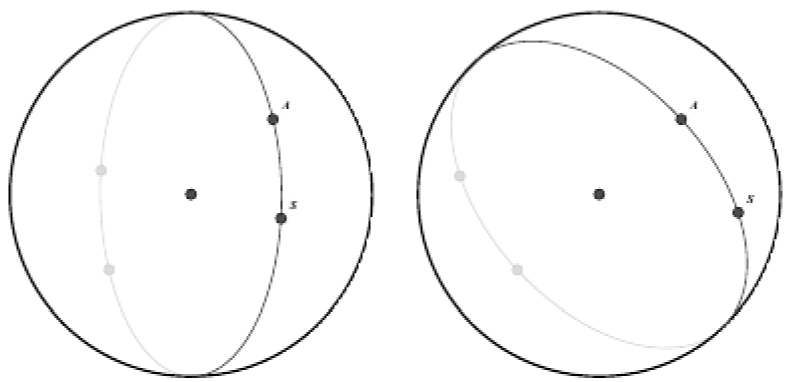


*Ilustración 12. Meridiano del cálculo de Eratóstenes*

(Tomado de (Deulofeu & Figueiras, 2002))

Sabiendo todo lo anterior, pagó a unos comerciantes viajeros para que midieran la distancia entre las dos ciudades[7]. El valor que obtuvieron fue de 5000 estadios[8].
Con lo anterior, utilizó la siguiente relación para calcular la circunferencia de la tierra:

$$\frac{Longitud\ del\ meridiano}{Longitud\ del\ arco\ Alejandría - Siena} = \frac{Medida\ angular\ de\ un\ meridiano}{medida\ angular\ del\ arco\ Alejandría - Siena}$$

El primer término de la igualdad es un cociente de longitudes, del cual se quiere hallar el numerador y se conoce el denominador: 5000 estadios.

[6] Seriamente influenciado por Ptolomeo.
[7] Se sabe por datos históricos que en aquella época se solía utilizar partes del cuerpo para medir longitudes. Por ejemplo, utilizaban los pies o el cúbito. Para las medidas más largas se valían de estiradores de cuerdas que median 100 cúbitos cada uno. Distancias más largas, eran medidas en estadios que eran equivalentes a 12000 cúbitos.
[8] Hoy en día se sabe que es equivalente aproximadamente a 157.5 metros.

El segundo término de la igualdad es un cociente de medidas angulares. Como la medida angular de un meridiano es la de una circunferencia completa, el numerador de este segundo término es 1 y el denominador es, de acuerdo con la medida de la sombra con el gnomon, $\frac{1}{50}$ partes de la circunferencia completa.

Finalmente, realizo los siguientes cálculos:

$$Longitud\ de\ la\ circunferencia\ terrestre = \frac{5000 \times 1}{\frac{1}{50}}$$

$$Longitud\ de\ la\ circunferencia\ terrestre = 5000 \times 50$$

$$Longitud\ de\ la\ circunferencia\ terrestre = 250000\ estadios$$

#### 6.1.1. Ecuaciones presentes

Para realizar el cálculo del perímetro de la tierra, Eratóstenes primero tuvo que realizar el cálculo del ángulo que se generaba a partir de la sombra que se proyectaba y la longitud del gnomon en la ciudad de Alejandría. Para realizarlo desprecio la curvatura de la tierra y, como la longitud de la sombra que se generaba era tan corta en comparación con el radio de la tierra, asumió que era recta. (ilustración 13).

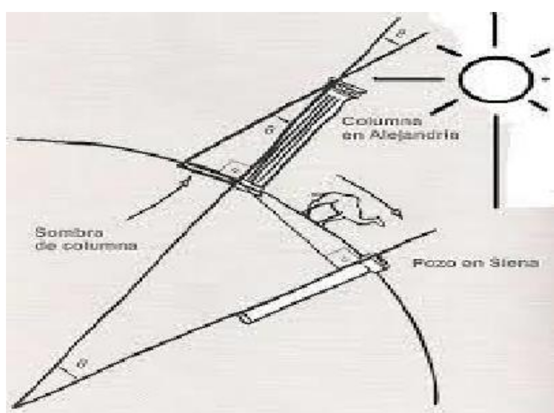


*Ilustración 13. Curvatura de la tierra en el cálculo de Eratóstenes*

(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/homotecia_y_semejanza_aplicaciones_naji/semejanza6.html)*

Como se puede ver en la ilustración 13, para determinar el ángulo Eratóstenes tuvo que formar un triángulo rectángulo entre la longitud del gnomon y la sombra que se proyectaba. Para lograr determinar el ángulo que separaba las dos ciudades, tuvo que utilizar las razones trigonométricas y así, obtener una ecuación como la siguiente:

$$\tan\alpha = \frac{longitud\ de\ la\ sombra}{longitud\ del\ gnomon}$$

De la ecuación, se sabe que la variable es α que es el valor desconocido. También es importante tener en cuenta que los griegos contaban con tablas en las que se mostraban los resultados a este tipo de ecuaciones. Se sabe que los cálculos que hicieron para construirlas fueron a partir del teorema de Pitágoras.

Por otra parte, y como se mostró anteriormente, Eratóstenes tuvo en cuenta la proporcionalidad existente entre las longitudes de arco del ángulo que calculó, y la del arco total de la tierra para plantear una ecuación como la siguiente:

$$\frac{S}{T} = \frac{\theta s \cdot r}{\theta t \cdot r}$$

En donde:

S = longitud del arco entre las dos ciudades

T= longitud del arco total de la tierra

θs = ángulo entre las dos ciudades

θt = ángulo total de la tierra

r = radio de la tierra

Como es evidente, el valor del radio de la tierra se cancela, por lo que la ecuación que resolvió Eratóstenes fue similar a la siguiente:

$$T = \frac{\theta s \cdot S}{\theta t}$$

Es importante destacar que debido a que Eratóstenes asumió que se podía despreciar la curvatura de la tierra entre las dos ciudades, su cálculo no fue exacto, lo que le generó un pequeño error en su medición.

### 6.2. *EL CÁLCULO DE LA LATITUD*

Otro de los momentos que fue importante para solucionar el problema del posicionamiento global fue el cálculo de la latitud. Para determinarla fue necesaria la invención del astrolabio. Este instrumento permitió calcularla haciendo una sencilla medición, teniendo en cuenta la posición de los astros como referencia. Lo que se mide con él, es el ángulo de altitud[9], que es equivalente a la latitud del lugar, bajo unas condiciones. La ilustración 14 permite ver más claramente la relación entre la medida de la altitud y la de la latitud.

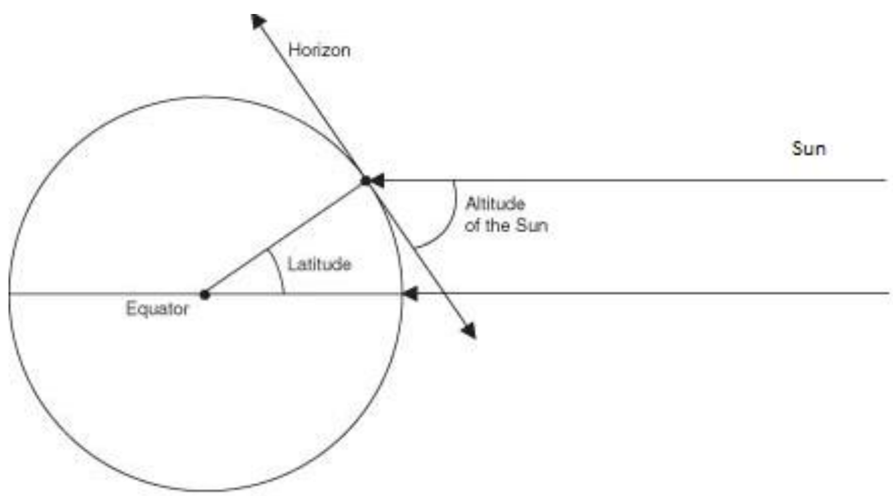


*Ilustración 14. Relación de la altitud con la latitud*

(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de: http://www.medciencia.com/del-astrolabio-al-gps-historia-de-la-geolocalizacion-i/)*

Para lograr determinar la latitud de un lugar, era fundamental saber en qué momento se daba la meridiana del astro[10]. Debido a que en la antigüedad no se tenía relojes precisos, no se sabía con exactitud cuál era el momento exacto en el que se daba la meridiana del astro. Los cuerpos celestes que se utilizaban eran, durante el día el sol, y durante la noche, dependiendo del hemisferio en donde se encontraran, la estrella polar (en el norte) o la

---

[9] Medida del ángulo al que se encuentra el cuerpo astronómico respecto al horizonte.
[10] Momento en que el astro está en su punto más alto y que da le sensación de estar estático por un lapso de tiempo

constelación de la cruz del sur (en el sur). En las ilustraciones 15 y 16 se muestra la estrella polar y la constelación de la cruz del sur, respectivamente.

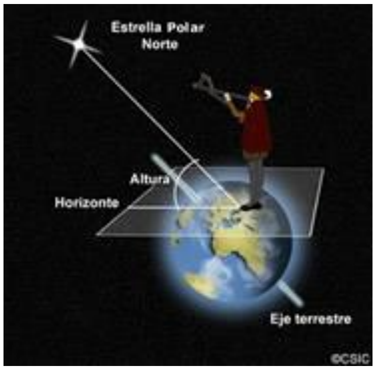


*Ilustración 15. Estrella polar*

(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de:(http://www.taringa.net/posts/imagenes/3088227/Estrella-Polar.html*)

*Ilustración 16. Constelación de la cruz del sur*

(*Obtenida el 18 de Octubre, 2014, de: http://elsextantedehevelius.blogspot.com/2010/09/breve-historia-de-la-cruz-del-sur.html)*

Lo que se realizaba durante el día, era estudiar el comportamiento de la sombra que proyectaban los objetos con la luz del sol, y buscar el momento de la meridiana. Es en ese momento, en el que se debía realizar la medición de la latitud, porque asumían que el cuerpo celeste estaba en el mismo meridiano del lugar.

Durante la noche, se hacía algo muy similar a lo que se hace en el día. Se debía estudiar el cielo, tratando de entender en qué momento la estrella referencia parecía no tener movimiento, o en otras palabras, se buscaba la meridiana del astro.

### 6.2.1. Ecuaciones Presentes

Para calcular la latitud, se debe tomar como referencia el Ecuador terrestre que tiene 0°, mientras que los polos tienen 90°. Así, para calcularla en el hemisferio norte se debe utilizar la siguiente ecuación:

$$Latitud\ del\ lugar = 90° - h$$

En donde h es la medida angular de la altitud del astro utilizado para la medición.

Por otra parte si la medida se da en el hemisferio sur, se utiliza la siguiente ecuación:

$$Latitud\ del\ lugar = h - 90°$$

En donde cada una de las variables tiene el mismo significado que en la ecuación del hemisferio norte.

Uno de los problemas más significativos que se tuvo es lo que pasaba si el astro no se encontraba en la meridiana, debido a que en algunos lugares no era fácil de determinar. Para tener una medida más precisa respecto a esto, los navegantes estaban atentos al momento en el que el astro parecía no moverse y realizar varias mediciones. Posteriormente las promediaban y se iban a las tablas (que llamaban efemérides) y determinaban la latitud del lugar en el que se encontraban.

Teniendo ya claro que la latitud se medía en ángulos y las tablas que les permitía saber su latitud, se empezaron a diseñar nuevos instrumentos para hacer más preciso el cálculo. Así, por ejemplo los árabes inventaron el kamal que para su comodidad, se valía de una cuerda en la que los navegantes registraban con un nudo la latitud de un determinado lugar. Este instrumento era simplemente una tabla en forma rectangular en la que sus vértices permitían ver el horizonte y el astro en el momento de su meridiana. Su problema principal radicaba en que muchas veces el horizonte no se podía ver claramente al ser tan rígido, por lo que no siempre se determinaba correctamente la latitud. Además, era un instrumento muy liviano por lo que se veía afectado por el viento.

Como el astrolabio y el kamal requerían que se observara directamente al sol cuando se quería determinar la latitud durante el día, muchos de los navegantes perdieron sus ojos por lo que fue necesario crear nuevos instrumentos. Es así como nace la ballestilla y el cuadrante de Davis que funcionan con la sombra y que al igual que los otros instrumentos utilizaban la misma ecuación para determinar la latitud. Su problema principal radicaba en que eran instrumentos de madera, por lo que se veían afectados por el viento y la marea del mar.

Para hacer mucho más preciso el cálculo se crean el sextante y el octante. La diferencia con los anteriores es que estos instrumentos utilizan espejos por lo que mientras se está viendo el horizonte, se va buscando el astro, lo que hace más preciso el cálculo. Por otra parte, es un instrumento de materiales más pesados lo que evita que el viento y la marea en un barco dañen la medición.

Aún con la mejora de todos estos instrumentos, los navegantes muchas veces no determinaban correctamente la latitud en la que se encontraba el barco, por lo que se hacía evidente que en algo estaba fallando o el instrumento o la ecuación. Así, Regiomontano se dio cuenta que la inclinación de los rayos del sol variaban su inclinación a lo largo del año, esto debido a la declinación solar[11]. Por lo que agregó una nueva variable a la ecuación de la latitud:

En el hemisferio norte:

$$Latitud\ del\ lugar = 90° - h + \gamma$$

En el hemisferio sur:

$$Latitud\ del\ lugar = h + \gamma - 90°$$

En donde $\gamma$ es el valor de declinación del astro.

Para determinar la declinación solar, Regiomontano estudió cuidadosamente el comportamiento de los rayos del sol, llegando a la siguiente ecuación:

$$d = (-23.45)\left[\cos\left(\frac{360 \cdot (N + 10)}{365}\right)\right]$$

En donde:

d = declinación solar.

N = número de día del año.

Así, Regiomontano construyó las tablas de declinación solar cuyos valores iban de 23.45° (durante el solsticio de verano) a –23.45° (durante el solsticio de invierno). Además, si la medición se realiza durante alguno de los equinoccios, la declinación será aproximadamente de 0°.

### 6.3. SISTEMA LORAN-C

Con la aparición de dispositivos emisores y receptores de ondas de radio se abrió paso a nuevas aplicaciones, puesto que se hizo posible enviar y recibir información a largas

[11] Es el ángulo formado entre los rayos de luz del sol y la línea del ecuador de la tierra.

distancias, aun en condiciones climáticas desfavorables. Entre estas aplicaciones se destacan aquellas que permiten determinar una posición.

Para cualquier sistema de navegación basado en ondas de radio, la comprensión de la propagación de las mismas en el medio es un aspecto fundamental en el problema de obtener una determinación exacta de la posición (Referencia). Un problema que encontraremos en las señales de radionavegación viene dado por la presencia de caminos directos de llegada de la señal, denominado habitualmente *multipath* en inglés. Estos caminos se presentan debido al fenómeno de reflexión de la señal. Estas reflexiones pueden ser especulares[12], cuando la superficie es muy lisa, o difusas si la superficie reflectante es acusadamente rugosa en términos de la longitud de onda de la portadora de la señal. Las reflexiones especulares son las que causan el multipath por dos motivos: i) conservan la coherencia (es decir, el comportamiento de su fase sigue siendo predecible) tras la reflexión, ii) la energía no se difunde en todas direcciones, perdiendo su intensidad como en el caso difuso, sino que la trasmiten en una dirección privilegiada donde suficiente energía es enviada de tal manera que se pueda confundir con la señal directa.

La señal en la antena receptora, tendrá, por tanto, tres componentes: la señal directa, las reflexiones especulares y las reflexiones difusas, de muy baja intensidad estas últimas.

El modelo sobre el cual se determina la posición de un objeto es un sistema hiperbólico. Los sistemas tradicionales de este tipo se basan en la medida de la diferencia de tiempo mediante la medida en la diferencia de fase de la señal procedente de dos transmisores diferentes.

El sistema LORAN (LOng RAnge Navigation) se concibió durante la II Guerra Mundial. Se denominó originalmente LRN (Loomis Radio Navigation) en referencia al físico Alfred Lee Loomis, quien lo inventó. El sistema LORAN se encuentra aún en uso, en su versión LORAN-C. El primer sistema LORAN, tal y como lo concibió Loomis, es el denominado ahora LORAN-A, que funcionó como un sistema de frecuencias medias entre los 1750 y los

---

[12] Reflexión especular: Ocurre cuando los rayos luminosos que caen en una superficie reflectora muy plana son reflejados de modo que el ángulo incidente es igual al ángulo reflejado.
Reflexión difusa: Ocurre cuando los rayos paralelos que caen en una superficie rugosa, reflejan los rayos luminosos con ángulos dispersos, de modo que no se puede observar una imagen en la superficie.

1950 MHz. Hubo otros desarrollos del sistema, denominados LORAN-A, LORAN-B, LORAN-D y LORAN-F, que no fueron mucho más allá del estado experimental.

El LORAN-C, que es el sistema hiperbólico de interés, sigue en funcionamiento y tiene la continuidad asegurada a corto y medio plazo por decisión política de los EEUU y de varios gobiernos europeos. Es un sistema que todavía es útil por su grado de exactitud de 0.1 a 0.25 millas náuticas[13], por ser un sistema independiente que puede servir de back-up al GPS y porque su señal, más fuerte que la del GPS, es más difícil de oscurecer mediante jamming[14].

La primera cadena del LORAN-C entró en fase operativa en la costa este de EEUU en 1958. En la actualidad existen 28 cadenas funcionando en todo el mundo que proporcionan una herramienta de navegación para el tráfico marítimo y también forma parte de las operaciones de navegación aérea de las Reglas de Vuelo Visual VFR (Visual Flight Rule) y las Reglas de Vuelo Instrumental IFR (Instrument Flight Rule). Las cadenas constan de una estación principal (o master, M) más dos, tres o cuatro estaciones secundarias (X, Y, Z y W, también llamadas X-Ray, Yankee, Zulu y Whiskey, respectivamente).

La señal de navegación Loran es un tren de pulsos sobre una portadora senoidal[15]. Todos los transmisores de la cadena operan en la misma frecuencia, evitándose la interferencia mutua o el solapamiento en un receptor mediante la multiplexión[16] en el tiempo. Primero transmite la M (maestra), 9 pulsos en total, y a continuación siguen las demás respetando el orden alfabético, 8 pulsos cada una. A continuación se repite el ciclo completo. El intervalo entre un tren de pulsos de M y el siguiente tren de pulsos de M se conoce como Group Repetition Interval (GRI) y es único para cada cadena. El GRI identifica a la cadena para cualquier receptor. El receptor calcula las diferencias de tiempo de llegada entre la señal de M y la señal de cada secundaria. Esa diferencia de tiempos, determina el lugar

[13]La milla náutica es una unidad de longitud empleada en navegación marítima y aérea. En la actualidad, la definición internacional, adoptada en 1929, es el valor convencional de 1852 m, que es aproximadamente la longitud de un arco de 1' (un minuto de arco, la sesentava parte de un grado sexagesimal) de latitud terrestre.
[14] El Jamming es la transmisión de señales de radiocomunicación de forma deliberada para perturbar la transmisión de otra señal de radio.
[15]Es una onda, generalmente senoidal, modificada en alguno de sus parámetros (amplitud, frecuencia o fase) por una señal de entrada denominada moduladora con el fin de transmitir una información. Esta onda portadora es de una frecuencia mucho más alta que la de la señal.
[16]En telecomunicación, la multiplexación es la combinación de dos o más canales de información en un solo medio de transmisión usando un dispositivo llamado multiplexor.

geométrico (una hipérbola) de los puntos con idéntica diferencia de tiempos respecto a las posiciones de la M y su secundaria (Ver ilustración 17). La posición del receptor se determina por intersección de dos o más hipérbolas.

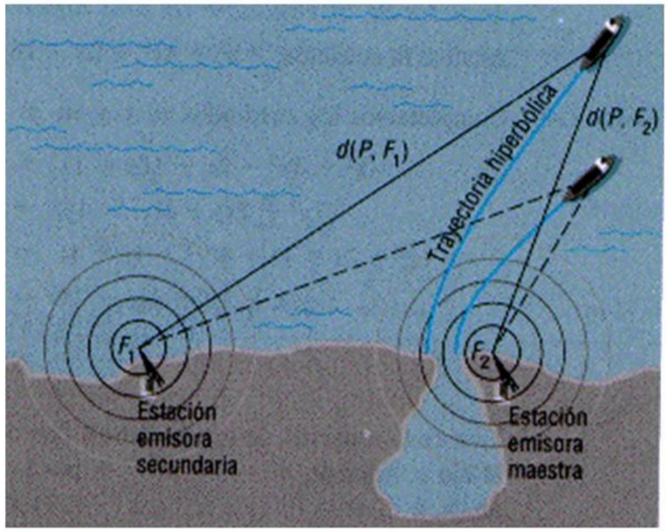


*Ilustración 17. Sistema Loran-C*

(*Tomada de* (PintoRogelio, 2007))

### 6.3.1. Ecuaciones Presentes

Como se ha observado, el modelo del sistema LORAN se describe mediante el lugar geométrico de diferencia de distancia constante a dos puntos dados, más conocido como hipérbola. El estudio de este tipo de las cónicas se ha dado desde el siglo III a.C.

Distintos puntos de vista pueden considerarse para proporcionar un definición de las cónicas, desde la clásico donde una cónica es la sección obtenida al cortar un cono por un plano, hasta la analítica donde una cónica es el lugar geométrico de los puntos que verifican una determinada relación de distancias. Estas definiciones permiten adelantar algunas propiedades que serán de utilidad en las aplicaciones.

En el caso del punto de vista analítico, una cónica puede ser descrita mediante los focos. Por ejemplo, una elipse es el conjunto de puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos, llamados *focos* es constante.

$$ELIPSE = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,F) + d(P,F') = 2a\}$$

Una hipérbola es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es constante.

$$HIPERBOLA = \{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P,F) - d(P,F')| = 2a\}$$

Resumiendo lo anterior, la forma implícita de la hipérbola como su forma paramétrica es:

Ecuación implícita: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{matrix} x = a \cosh t \\ y = b\ senh\ t \end{matrix}\right\}, -\infty \leq t \leq \infty$

En el sistema LORAN se determinan la intersección de dos de hipérbolas (caso plano, navegación aérea cerca de la superficie) o tres hiperboloides (caso espacial, navegación aérea a altura). En este caso la distancia constante se mide en unidades de distancia de propagación de señal RF (Radio Frecuencia). La posición de la Maestra y su instante de transmisión definen el origen de coordenadas y tiempos en el sistema (receptores y secundarias).

En el caso de dos dimensiones, asumiendo un sistema cartesiano de coordenadas y conociendo la posición o las coordenadas de la estación maestra (0,0) y de dos estaciones esclavas, la estación Y $(X_y, Y_y)$ y la estación W $(X_w, Y_w)$; se quiere determinar las coordenadas del barco $(X_i, Y_i)$.

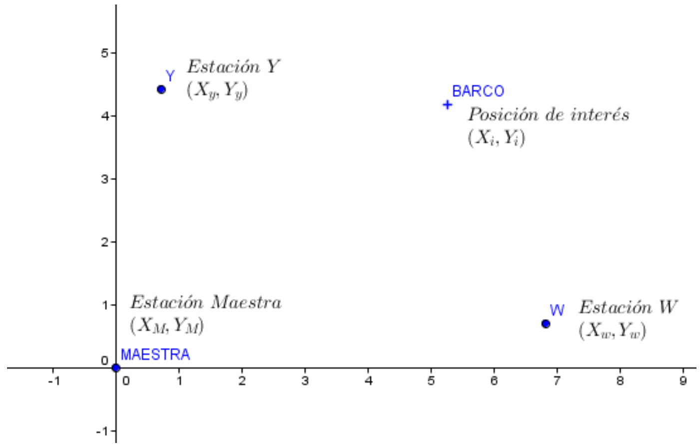


*Ilustración 18. Sistema planteado Loran 2D*

Tenemos que:

- Distancia Y – Barco ($d_y$): $\sqrt{\left(X_i - X_y\right)^2 + \left(Y_i - Y_y\right)^2}$
- Tiempo de recorrido: $t_y = \frac{d_y}{v}$, donde $v$ es la velocidad a la que viajan las ondas ($300.000\frac{Km}{s}$ $aprox.$)
- Distancia Maestra – Barco ($d_M$) : $\sqrt{(X_i - 0)^2 + (Y_i - 0)^2} = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$
- Tiempo de recorrido: $t_M = \frac{d_M}{v}$, donde $v$ es la velocidad a la que viajan las ondas ($300.000\frac{Km}{s}$ aprox.)

Como el receptor registra la diferencia de tiempo ($\tau_{yM}$) entre las señales se tiene que:

- $\tau_{yM} = t_M - t_y = \frac{1}{v}\left(\sqrt{X_i^2 + Y_i^2} - \sqrt{\left(X_i - X_y\right)^2 + \left(Y_i - Y_y\right)^2}\right)$

  $v \cdot \tau_{yM} = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} - \sqrt{\left(X_i - X_y\right)^2 + \left(Y_i - Y_y\right)^2}$

  Observemos que si el barco está estático, $v$ y $\tau_{yM}$ son constantes, luego tenemos que la diferencia entre las distancias del a la estación maestra y del barco a la estación esclava Y también son constantes, formando en el plano cartesiano el lugar geométrico correspondiente a una hipérbola.

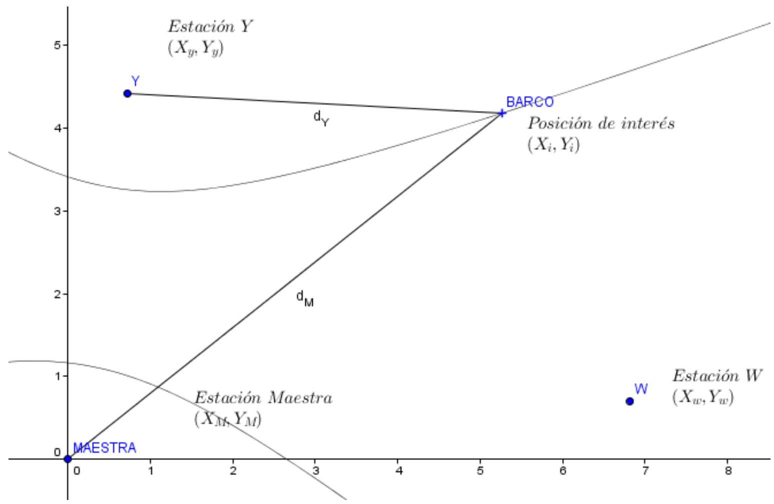


*Ilustración 19. Hipérbola generada sistema Loran 2D*

Pero hasta el momento el barco puede situarse en cualquier punto de la hipérbola, para encontrar en cual punto se encuentra exactamente se pues realizar el mismo procedimiento respecto a la estación W y se tiene:

- $\tau_{wM} = t_M - t_w = \frac{1}{v}\left(\sqrt{X_i^2 + Y_i^2} - \sqrt{(X_i - X_w)^2 + (Y_i - Y_w)^2}\right)$

$$v \cdot \tau_{wM} = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} - \sqrt{(X_i - X_w)^2 + (Y_i - Y_w)^2}$$

De esta manera el barco se encuentra en la intersección de las dos hipérbolas

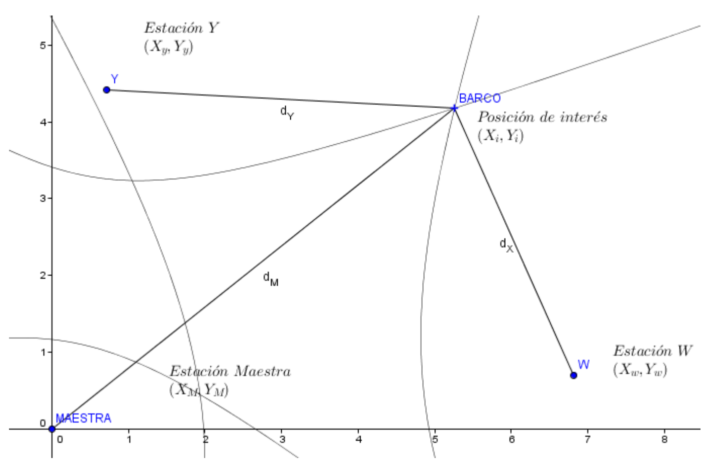


*Ilustración 20. Corte de hipérbolas sistema Loran 2D*

Esta intersección corresponde a la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v \cdot \tau_{yM} = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} - \sqrt{\left(X_i - X_y\right)^2 + \left(Y_i - Y_y\right)^2} \\ v \cdot \tau_{wM} = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} - \sqrt{(X_i - X_w)^2 + (Y_i - Y_w)^2} \end{cases}$$

Para el caso tridimensional (hiperboloides), asumiendo nuevamente un sistema cartesiano pero con tres ejes y añadiendo una nueva estación esclava para contemplar la nueva variable (altura) se tienen las siguientes ecuaciones:

$$T_M = \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$T_V = \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_V)^2 + (y - y_V)^2 + (z - z_V)^2}$$

$$T_w = \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 + (z - z_w)^2}$$

$$T_x = \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_x)^2 + (y - y_x)^2 + (z - z_x)^2}$$

Luego:

$$\tau_L = T_V - T_M = \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_V)^2 + (y - y_V)^2 + (z - z_V)^2} - \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tau_R = T_W - T_M = \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2 + (z - z_W)^2} - \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tau_Q = T_X - T_M = \frac{1}{c}\sqrt{(x - x_X)^2 + (y - y_X)^2 + (z - z_X)^2} - \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por lo tanto la posición está dada por la solución del sistema de ecuaciones.

La fuente de error más importante en LORAN-C es la incertidumbre en el conocimiento de la velocidad de propagación, que depende de la conductividad de la superficie de la Tierra y en menor medida de las condiciones atmosféricas. De ahí que tanto el alcance como la estabilidad de la señal sean mejores sobre el mar que sobre la tierra firme.

Una forma de corregir este error es trabajar con las ondas y los dispositivos emisores y receptores para mejorar la estimación de la velocidad de propagación, sin embargo también puede tomarse un camino vía ecuaciones. Para esto se añade una estación esclava extra y se realiza el mismo procedimiento mencionado anteriormente buscando la nueva hipérbola generada, ahora bien, si la nueva curva corta por el punto que ya se había calculado, se tendría mayor certeza en la veracidad de la posición estimada, pero si la hipérbola no corta el punto, se evidencia el error en la estimación de la velocidad de propagación y se puede plantear un nuevo sistema de ecuaciones que involucre la nueva estación y que tenga en cuenta el error como una nueva variable. Este sistema puede resolverse con ayuda de métodos de linealización y métodos numéricos para obtener una estimación más precisa de la posición.

## 6.4. GPS (Global Positioning System)

El GPS es la tecnología más utilizada en la actualidad para determinar la posición de un individuo. Este sistema tiene tres componentes principales: el espacial, el de control y el de usuario.

El componente espacial está constituido por una constelación de 24 satélites en órbita terrestre aproximadamente a 20200 km, distribuidos en 6 planos orbitales[17]. Estos planos están separados entre sí por aproximadamente 60° en longitud y tienen inclinaciones próximas a los 55° en relación al plano ecuatorial terrestre. Fue concebido de manera que existan como mínimo 4 satélites visibles por encima del horizonte en cualquier punto de la superficie y en cualquier altura.

El componente de control está constituido por 5 estaciones de rastreo distribuidas a lo largo del globo y una estación de control principal (MCS-Master Control Station). Este componente rastrea los satélites, actualiza sus posiciones orbitales, calibra y sincroniza sus relojes. Otra función importante es determinar las órbitas de cada satélite y prever su trayectoria durante las 24 horas siguiente. Esta información es enviada a cada satélite para

[17] El plano orbital de un objeto orbitando alrededor de otro es el plano geométrico en el cual está contenida la órbita. Bastan tres puntos en el espacio para definir el plano orbital: el centro del objeto más pesado, el centro del segundo objeto (objeto que orbita) y el centro de este último objeto transcurrido un tiempo.

después ser transmitida por este, informando al receptor local donde es posible encontrar el satélite.

El tercer componente corresponde a los usuarios que incluye a todos aquellos que usan un receptor GPS para recibir y convertir la señal GPS en posición, velocidad y tiempo. Incluye además todos los elementos necesarios en este proceso, como las antenas y el software de procesamiento.

Todas las señales de radiofrecuencias están formadas por ondas electromagnéticas que se desplazan por el espacio de forma concéntrica a partir de la antena transmisora, de forma similar a como lo hacen las ondas que se generan en la superficie del agua cuando tiramos una piedra. Debido a esa propiedad las señales de radio se pueden captar desde cualquier punto situado alrededor de una antena transmisora. Las ondas de radio viajan a la velocidad de la luz, es decir, 300 mil kilómetros por segundo (186 mil millas por segundo) medida en el vacío, por lo que es posible calcular la distancia existente entre un transmisor y un receptor si se conoce el tiempo que demora la señal en viajar desde un punto hasta el otro.

Para medir el momento a partir del cual el satélite emite la señal y el receptor GPS la recibe, es necesario que tanto el reloj del satélite como el del receptor estén perfectamente sincronizados. El satélite utiliza un reloj atómico de cesio, extremadamente exacto, pero el receptor GPS posee uno normal de cuarzo, no tan preciso. Para sincronizar con exactitud el reloj del receptor GPS, el satélite emite cada cierto tiempo una señal digital o patrón de control junto con la señal de radiofrecuencia. Esa señal de control llega siempre al receptor GPS con más retraso que la señal normal de radiofrecuencia. El retraso entre ambas señales será igual al tiempo que demora la señal de radiofrecuencia en viajar del satélite al receptor GPS.

La distancia existente entre cada satélite y el receptor GPS la calcula el propio receptor realizando diferentes operaciones matemáticas. Para hacer este cálculo el receptor GPS multiplica el tiempo de retraso de la señal de control por el valor de la velocidad de la luz. Si la señal ha viajado en línea recta, sin que la haya afectado ninguna interferencia por el camino, el resultado matemático será la distancia exacta que separa al receptor del satélite.

Las ondas de radio que recorren la Tierra lógicamente no viajan por el vacío sino que se desplazan a través de la masa gaseosa que compone la atmósfera; por tanto, su velocidad no será exactamente igual a la de la luz, sino un poco más lenta. Existen también otros factores que pueden influir también algo en el desplazamiento de la señal, como son las condiciones atmosféricas locales, el ángulo existente entre el satélite y el receptor GPS, etc. Para corregir los efectos de todas esas variables, el receptor se sirve de complejos modelos matemáticos que guarda en su memoria. Los resultados de los cálculos los complementa después con la información adicional que recibe también del satélite, lo que permite mostrar la posición con mayor exactitud.

### 6.4.1. Ecuaciones presentes

El principio matemático sobre el que está basado el GPS es la triangulación que permite conocer un punto de ubicación deseado respecto de tres conocidos. Para esto es necesario conocer la distancia que separa al objeto, cuya ubicación deseo conocer, de los tres puntos de ubicación conocida, con esto se trazan tres circunferencias cuyos radios (*r)* corresponde con esas distancias.

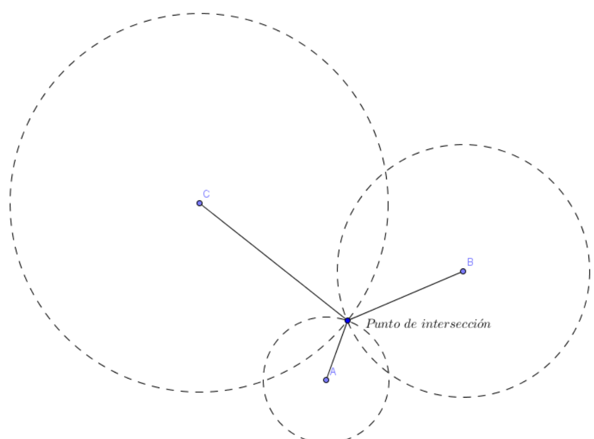


*Ilustración 21. Principio de triangulación*

La intersección de las tres figuras corresponderá a la ubicación deseada. Este principio puede llevarse al caso tridimensional mediante la construcción de esferas en el espacio.

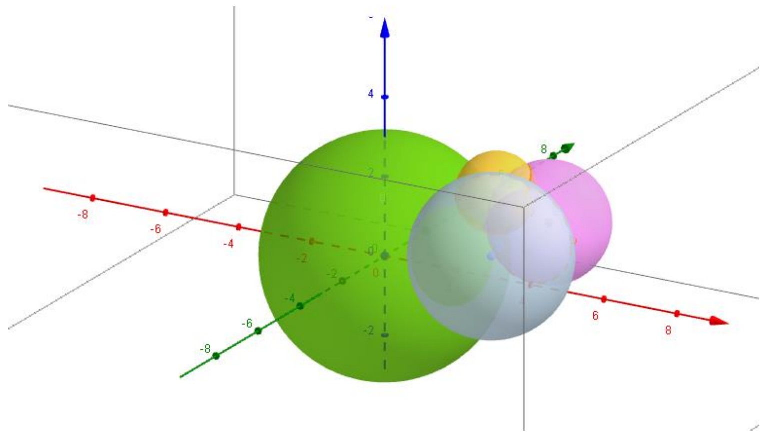

*Ilustración 22. Modelo GPS Geogebra®*

Ahora bien, el cálculo de la distancia a cada uno de los satélites se realiza mediante una comparación de los tiempos provenientes del satélite y del receptor. Para entender la relación de las ecuaciones y el modelo se planteó con la ayuda de Geogebra® un sistema en dos dimensiones y un sistema en tres dimensiones, partiendo de la base que la posición de los satélites es conocida, además que no va a haber error en la determinación de la distancia a estos, es decir, que los relojes del satélite y el receptor estuvieran sincronizados y que las ondas no sufren alteración en el camino. Este sería un modelo ideal del GPS pero permite observar la aplicación de la matemática en el proceso.

Para el caso de dos dimensiones se tendría la siguiente situación, donde la referencia (0,0) sería el ecuador terrestre y el meridiano de Greenwich

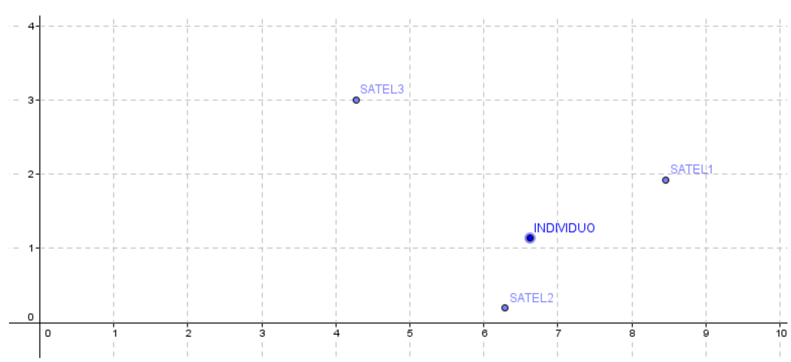


*Ilustración 23. GPS en dos dimensiones*

Luego, cuando el receptor detecta las ondas emitidas por los satélites con la información de su posición y el tiempo, se puede establecer las circunferencias cuyo radio sea la distancia (determinada a partir de la diferencia de tiempo y la velocidad de las ondas $distancia = velocidad \cdot tiempo$) y el centro las posiciones de los satélites.

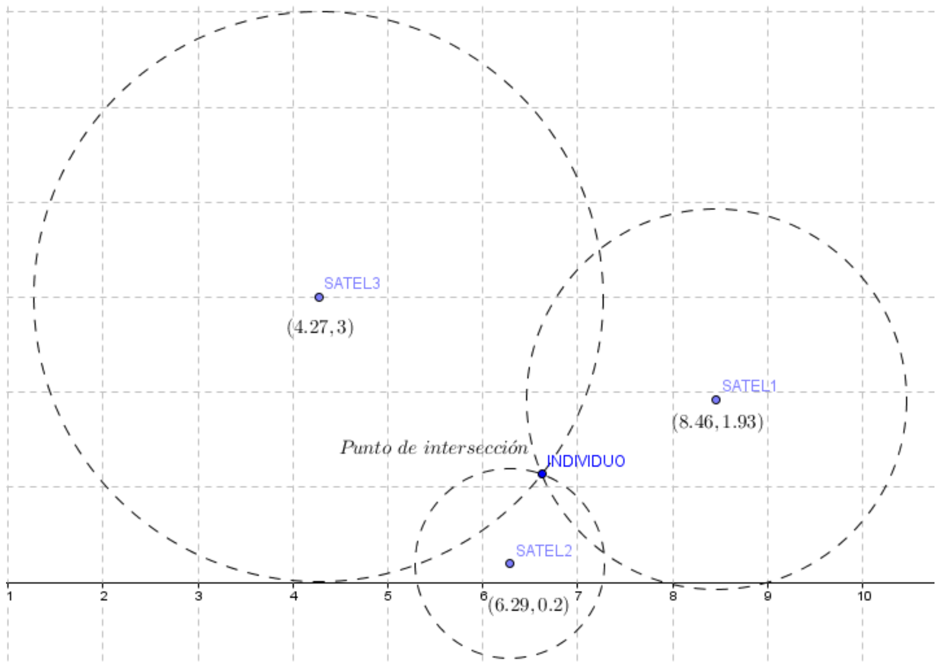


*Ilustración 24. Corte de circunferencias GPS 2D*

Si solo se contara con la lectura de dos satélites, habría dos lugares posibles donde estaría el individuo como se observa en la figura generando un error, por lo que el tener una tercera lectura puede entenderse también como una corrección al sistema apoyado en la matemática.

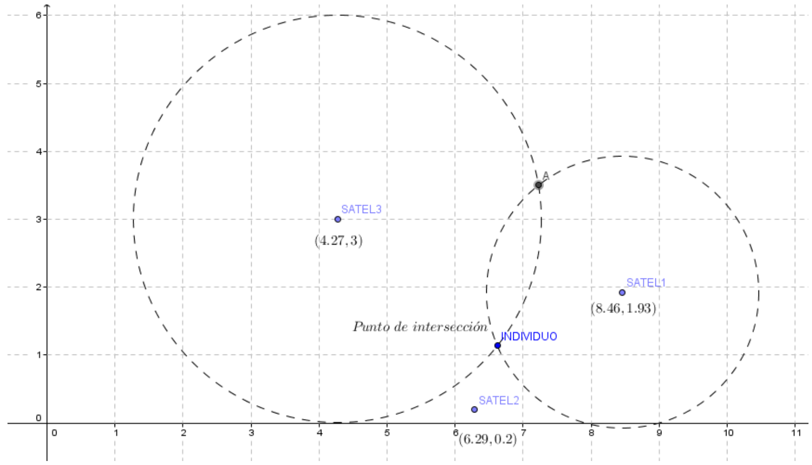


*Ilustración 25. Puntos de corte GPS 2D*

Con estos datos se tendrían las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} (x-6.29)^2+(y-0.2)^2=1 & (1) \\ (x-8.46)^2+(y-1.93)^2=4 & (2) \\ (x-4.27)^2+(y-3)2=9 & (3) \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones no lineales, para solucionarlo pueden desarrollarse las expresiones

$$\begin{cases} x^2+y^2-12.58x-0.4y+38.6041=0 & (4) \\ x^2+y^2-16.92x-3.86y+71.2965=0 & (5) \\ x^2+y^2-8.54x-6y+18.2329=0 & (6) \end{cases}$$

Ahora al restar las ecuaciones $(4)\ y\ (5)$, $(4)\ y\ (6)$ y $(5)\ y\ (6)$, se tendrían tres ecuaciones lineales que corresponderían a tres rectas que se generan de la intersección de las circunferencias.

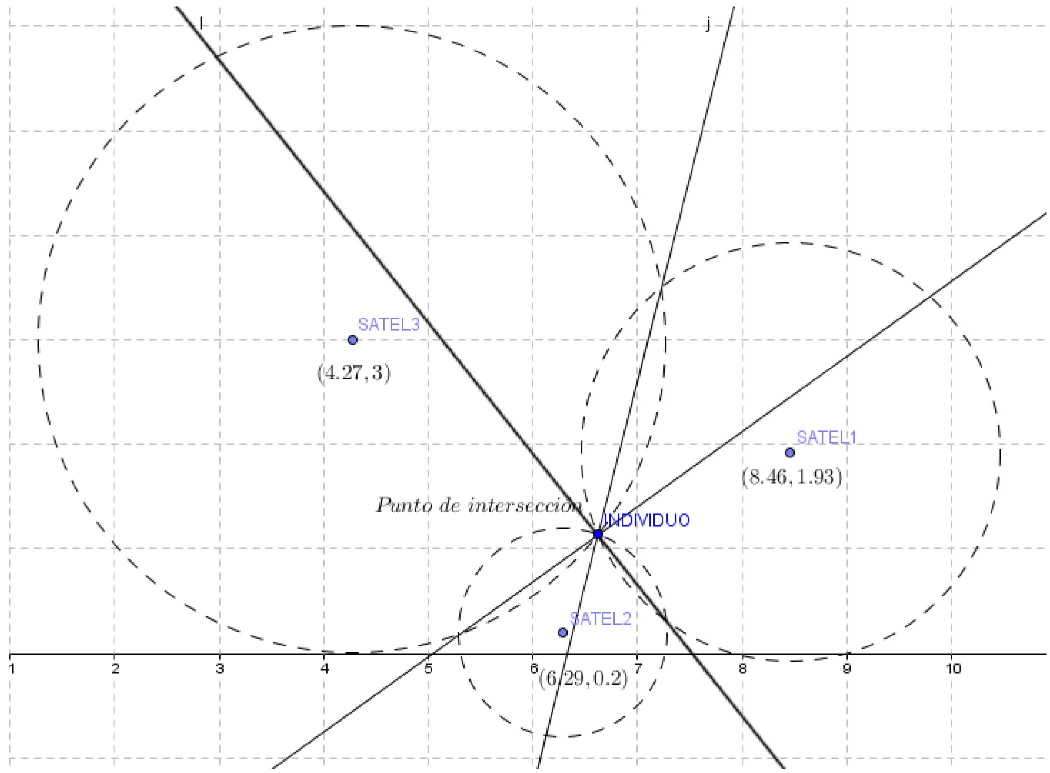


*Ilustración 26. Triangulación GPS 2D*

Tomando solo dos de estas y hallando su intersección se tendría la posición del individuo que corresponde al corte de las rectas. Por ejemplo, tomando $(4)-(6)$ y $(5)-(6)$ se tendría el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4.34x + 3.46y = 32.6924 \\ -8.38x + 2.14y = -53.0635 \end{cases}$$

Para este tipo de sistemas se tienen varios métodos de solución como el de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 4.34 & 3.46 & 32.6924 \\ -8.38 & 2.14 & -53.0636 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1=\frac{f_1}{4.34}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0.79 & 7.53 \\ -8.38 & 2.14 & -53.0636 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_2=f_2+8.38f_1} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0.79 & 7.53 \\ 0 & 8.82 & 10.06 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2=\frac{f_2}{8.82}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0.79 & 7.53 \\ 0 & 1 & 1.14 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1=f_1+0.79f_2} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 6.62 \\ 0 & 1 & 1.14 \end{array}\right]$$

Es decir, $x = 6.62$ e $y = 1.14$, lo cual se comprueba en geogebra.

De igual manera se construye el sistema en tres dimensiones:

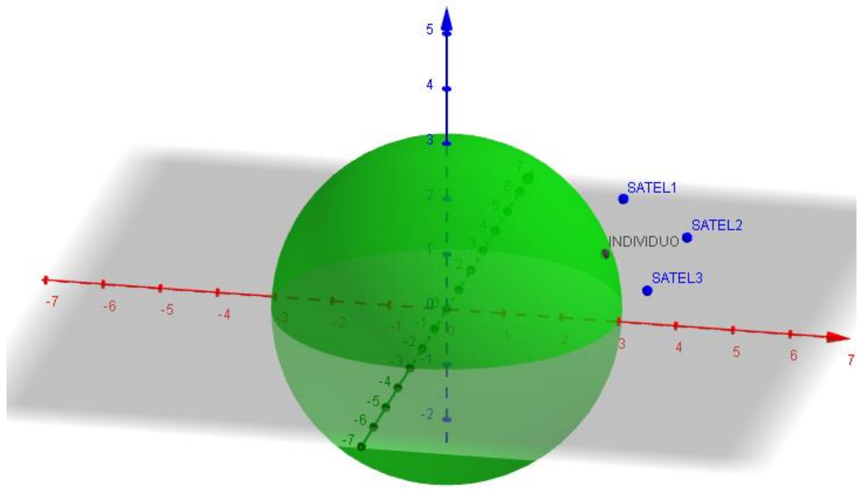


*Ilustración 27. Sistema planteado GPS 3D*

Luego, cuando el receptor detecta las ondas emitidas por los satélites con la información de su posición y el tiempo, se puede establecer las esferas cuyo radio sea la distancia (determinada a partir de la diferencia de tiempo y la velocidad de las ondas $distancia = velocidad \cdot tiempo$) y el centro las posiciones de los satélites.

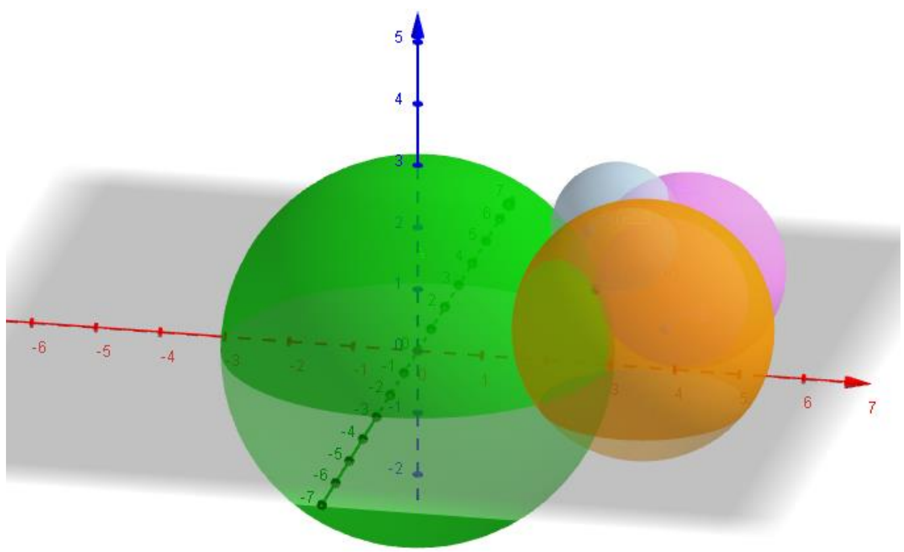

*Ilustración 28. Corte de esferas GPS 3D*

Donde las coordenadas del satélite 1 son $(3.02, 0.31, 2.12)$, las del satélite 2 $(4.02, 0.83, 1.31)$ y las del satélite 3 $(3.85, -1.63, 1.21)$ y las distancias son 1, 1.5 y 2 respectivamente. Con estos datos se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (x-3.02)^2 + (y-0.31)^2 + (z-2.12)^2 = 1 & (7) \\ (x-4.02)^2 + (y-0.83)^2 + (z-1.31)^2 = 2.25 & (8) \\ (x-3.85)^2 + (y+1.63)^2 + (z-1.21)^2 = 4 & (9) \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones no-lineales, sobre el cual podría intentarse utilizar la estrategia planteada en el caso de dos dimensiones de desarrollar las expresiones y luego restar las ecuaciones.

$$\begin{cases} x^2 - 6.04x + y^2 - 0.62y + z^2 - 4.24z + 12.7109 = 0 & (10) \\ x^2 - 8.04x + y^2 - 1.66y + z^2 - 2.62z + 16.3154 = 0 & (11) \\ x^2 - 7.70x + y^2 + 3.26y + z^2 - 2.42z + 14.9435 = 0 & (12) \end{cases}$$

Al restar las ecuaciones se tendría:

$$\begin{cases} 2x + 1.94y - 1.62z = 3.6045 & (13) \\ -0.34x - 4.92y - 0.2z = -1.3719 & (14) \\ 1.66x - 3.88y - 1.82z = 2.2326 & (15) \end{cases}$$

Estas ecuaciones corresponden a tres planos en el espacio que se generan por el corte de las esferas.

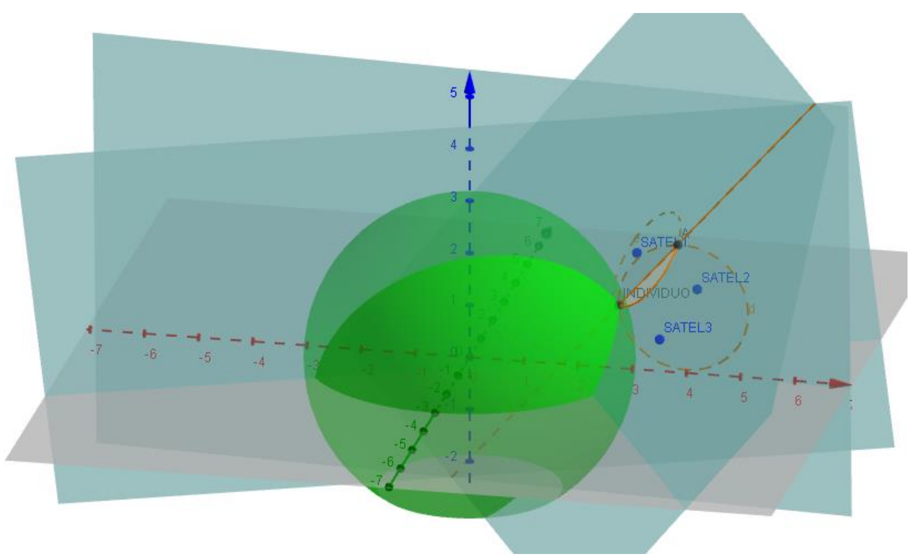


*Ilustración 29. Triangulación GPS 3D*

Al analizar los tres planos se encuentra que el corte de los planos es una recta que a su vez corta en dos puntos a las esferas, uno de esos puntos es la ubicación del individuo, pero se espera que al resolver el sistema se pueda deducir cual es la ubicación real puesto que la otra sería un punto alejado del planeta tierra, lo cual se saldría de la lógica.

Ahora bien como los tres planos se cortan en una recta en vez de un punto no puede solucionarse por los métodos de sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo al intentarse la solución por gauss-jordan en uno de los pasos se tendría la siguiente matriz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.86 & 1.71 \\ 0 & 1 & 0.1 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Es decir que una de las ecuaciones se anuló, sin embargo de este mismo paso se tiene que

$$x = 0.86z + 1.71$$

$$y = -0.1z + 0.16$$

Estos valores se pueden reemplazar en cualquiera de las expresiones $(10), (11)\ o\ (12)$. Por ejemplo, al reemplazarlo en la ecuación $(10)$ se tiene:

$$1.75z^2 - 6.45z + 5.11 = 0$$

Esta ecuación es del tipo cuadrático, lo cual concuerda con la interpretación del sistema pues puede tener dos soluciones. Al resolver la ecuación se obtiene:

$$z_1 = 2.52$$

$$z_2 = 1.15$$

Al realizar el mismo procedimiento pero esta vez despejando las variables respecto a $y$ se tiene que:

$$x = -8.6y + 3.09$$

$$z = -9.97y + 1.59$$

Estos valores al ser reemplazados en la ecuación $(10)$ generan la ecuación

$$174.53y^2 + 8.51y - 5.11 = 0$$

Al resolver la ecuación se tiene que

$$y_1 = 0.14$$

$$y_2 = -0.19$$

Con los valores de $z$ e $y$, se pueden obtener los siguientes valores de $x$

$$x_1 = 2,73$$

$$x_2 = 3,86$$

Es decir se tienen las coordenadas C1 $(2.81\ , 0.14, 1.15)$ y C2 $(3.78, -0.19, 2.52)$, de las cuales la C1 es una buena aproximación de las coordenadas del individuo.

En la realidad el receptor no tiene una información precisa del tiempo, lo cual sumado a las desviaciones de las ondas en su camino al receptor genera errores por lo que se dice que se calcula una pseudo distancia. En este caso, similar al sistema LORAN-C también podría tenerse la lectura de un cuarto satélite para estimar el error, pues si el punto hallado no hace parte de la esfera de este nuevo satélite, podría hacerse una estimación para corregir la ubicación determinada.

Este sistema de cuatro satélites tendría la siguiente configuración:

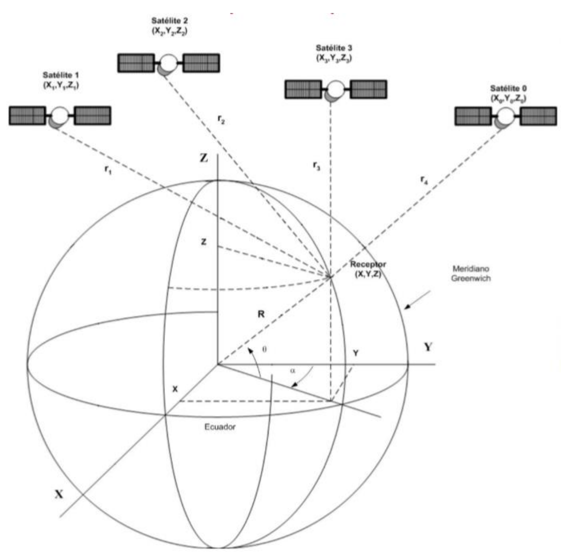


*Ilustración 30. Principio de operaciones GPS*

(*Tomada de* (PintoRogelio, 2007) )

Y con estos datos, tomando el error como una nueva variable genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(X_0 - X)^2 + (Y_0 - Y)^2 + (Z_0 - Z)^2 = (r_0 - c\tau)^2$$

$$(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2 = (r_1 - c\tau)^2$$

$$(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2 = (r_2 - c\tau)^2$$

$$(X_3 - X)^2 + (Y_3 - Y)^2 + (Z_3 - Z)^2 = (r_1 - c\tau)^2$$

Donde $r_1$ es la distancia real al satélite y $c\tau$ es el error estimado. Este sistema también puede resolverse con ayuda de métodos de linealización y de métodos numéricos para obtener una mejor estimación de la posición.

# 7. ANÁLISIS DE LOS MOMENTOS

## 7.1. Eratóstenes

En el cálculo del perímetro de la tierra realizado por Eratóstenes se puede encontrar que en un primer momento se utilizó una ecuación trigonométrica (que para ese momento ya estaba establecida). Esta fue utilizada como una herramienta para calcular, ya que le permitió obtener el valor desconocido de un ángulo que necesitaba obtener para poder realizar el cálculo de la longitud del arco total de la tierra. Además, fueron necesarias las operaciones matemáticas para determinar el valor que no se conocía.

Con el ángulo ya establecido, se encuentra que Eratóstenes plantea una ecuación como proporción en la que su variable es la longitud del arco total de la tierra. Esta ecuación se utiliza como una herramienta para calcular, ya que fue la que le permitió solucionar el problema. En este caso, también fueron necesarias las operaciones por lo que se considera una herramienta de ese tipo.

Por otra parte, es evidente que las ecuaciones son una herramienta de modelación que le facilitaron a Eratóstenes realizar el cálculo del perímetro de la tierra. Sin ellas, no hubiese sido posible plantear y resolver el problema de manera clara.

## 7.2. Latitud

En el problema de latitud, se encuentra que la ecuación fue una herramienta de cálculo que permitió desarrollar herramientas de medición. Así, lo único que hacía falta era el diseño de una herramienta de medición que permitiera determinar el ángulo. Así se construye el astrolabio, el kamal, la ballestilla, el cuadrante de Davis, el sextante y el octante, que en esencia son el mismo instrumento (ya que sirve para medir un ángulo), pero de una forma más precisa.

Sin embargo, algo seguía haciendo falta en la ecuación debido a que los instrumentos ya se habían mejorado y aun así, los barcos se seguían desviando de sus rutas. Por lo que Regiomontano empieza a estudiar la ecuación de la latitud y se da cuenta que hace falta una variable relacionada a los errores presentes. Así, la variable que hace falta es la inclinación del astro que se toma como referencia y que se deduce a partir de la trigonometría esférica. Por lo que la ecuación en este punto debe ser vista como un objeto de estudio ya que a partir de ella se empieza el estudio de la trigonometría esférica que se caracteriza porque:

- Tiene una definición, que de acuerdo a Berracoso y otros (2003) sería: “trata del establecimiento de las propiedades y relaciones que satisfacen los elementos de triángulos definidos en la superficie de una esfera mediante arcos de círculo máximos,…”
- Tiene unas propiedades, que de acuerdo a Berracoso y otros (2003) serían las propiedades tanto de la esfera, relacionadas con los triángulos.
- Tiene unas ocasiones de uso, que es evidente en este caso en el que se toma el cielo como una esfera que sirve de referencia para la ubicación en el mar.

Una vez que se estudia la ecuación y queda establecida, vuelve a ser una herramienta, que en este caso es de modelación, que es útil para la geografía.

### 7.3. LORAN-C

En el caso del sistema loran se reconoce la aplicación de las cónicas, particularmente de la hipérbola, se observa un gran avance respecto a las soluciones anteriores, puesto que la referencia no estaba en el espacio donde las condiciones climáticas pueden dificultar su apreciación, sino que estaba en referencias fijas terrestres cuya posición puede ser fácilmente establecida en un mapa. Además si bien tiene un soporte en la geometría analítica para la comprensión de la hipérbola generada en una situación particular, no se hace necesario un manejo profundo de las ecuaciones respectivas, porque en la práctica con la lectura de diferencias de tiempos que hace el dispositivo loran se determina la diferencia de distancia entre las estaciones y solo basta con observar en un mapa previamente elaborado cuales son las hipérbolas que corresponden a dicha diferencia y en el corte de las mismas está la posición buscada.

En este proceso la matemática juega un papel determinante en la elaboración de los mapas y el manejo de las ecuaciones de la hipérbola es necesario. Sin embargo, el problema no genera la necesidad de profundizar en el concepto de hipérbola por lo que no se concibe a la cónica como un objeto de estudio en esta situación particular, sino que es una herramienta de modelamiento susceptible de uso que permite comprender los datos tomados por el dispositivo y así solucionar el problema del posicionamiento.

Por otra parte si se toma la lectura de una tercer estación, esta información se puede usar para determinar la precisión de la ubicación determinada, puesto que la nueva hipérbola generada debe cortar en la intersección de las otras dos, en caso de no ocurrir esto, debido a desviaciones que pudieron sufrir las ondas en el medio de camino al dispositivo, es posible plantear un modelo matemático de corrección para ajustar el sistema, en cuyo caso la ecuación de la hipérbola es nuevamente una herramienta.

### 7.4. GPS

En el caso del GPS, es interesante como se combinan las diferentes soluciones planteadas hasta el momento, puesto que se retoma la observación de los astros para hacer ajustes de los satélites mientras orbitan alrededor del planeta tierra, en lo que se reconoce la importancia de las estrellas como referencias con regularidades constantes. Por otro lado, al igual que en el sistema loran, se trabaja con ondas de radio que asegurar la operación del sistema las 24 horas sin importar las condiciones climáticas, solo que en este modelo como los satélites se encuentran a grandes distancias aumentan las desviación y por tanto aumenta el error, llevando a la necesidad de plantear sistemas de ecuaciones más complejos que el sistema loran, pero con la ventaja que es aplicable a nivel global, puesto que la red de satélites está diseñada para que siempre estén visibles al menos seis satélites en cualquier lugar del planeta, mientras que el sistema loran tiene solo zonas limitadas de aplicación, principalmente marítimas.

Dentro del sistema de GPS al tener las lecturas de los receptoras que contienen información de tiempo y posición del satélite emisor, se hace necesario la solución del sistema vía ecuaciones, es decir, está vez no es posible la elaboración de mapas para interpretar las lecturas. Al resolver el sistema de ecuaciones que requiere mínimo de la lectura de cuatro satélites se determinan tres coordenadas (latitud, longitud y altitud), dentro de una referencia terrestre definida.

Por la complejidad de la matemática planteada se observa que las ecuaciones pudieron ser un objeto de estudio que requiere de la integración de la geometría analítica, de métodos numéricos, de modelos de linealización de ecuaciones, entre otros. Sin embargo, una vez más se ve que las matemáticas actúan como herramienta de modelamiento que permite comprender las señales y los datos recibidos de los satélites.

# 8. CONCLUSIONES

- Debido a que por sí misma la geografía no daba respuesta al problema del posicionamiento global, se necesitó de una herramienta de modelación en una ciencia externa que fueron las matemáticas, cuyo aporte incluye a las ecuaciones; estas permitieron que el problema se lograra entender, trabajar y solucionar.
- El desarrollo de las matemáticas significó más precisión en la solución al problema del posicionamiento.
- En el cálculo del perímetro de la tierra dos ecuaciones se hacen presentes y sirven como herramientas de cálculo. Esto debido a que la ecuación trigonométrica que aparece en un primer momento, sirvió para determinar el ángulo que separaba las dos ciudades, y la ecuación de proporciones se hace presente para calcular el meridiano total de la tierra.
- En la determinación de la latitud, la ecuación aparece como una herramienta para calcular. Esto sirvió además para que se generara la necesidad de herramientas para medir (astrolabio y demás instrumentos para medir el ángulo de la latitud).
- Se encuentra un episodio especial en los estudios desarrollados por Regiomontano, ya que desarrolló unas tablas de corrección en el proceso de determinación de la latitud apoyado en la trigonometría esférica, lo que da a entender que la tuvo como objeto de estudio y logró desarrollar propiedades que resultaron adecuadas para corregir las mediciones de ángulos con respecto a astros, es decir, tuvo ocasiones de uso. Sin embargo, no se puede precisar con certeza el papel jugado por la ecuación, ya que por un lado es concebible la hipótesis de que al agregar un error en la ecuación y estudiar como poder determinar ese error lo llevo a sus estudios de la trigonometría esférica por lo que la ecuación jugaría un papel de objeto; pero también es viable la hipótesis de que primero vino el desarrollo en trigonometría esférica y luego si aborda el problema de la determinación del error en las ecuaciones relacionadas al cálculo de la latitud, en este caso la ecuación jugaría un papel de herramienta. En la indagación realizada no se encontraron datos lo suficientemente concluyentes para apoyar una u otra.

- La descripción mediante ecuaciones del comportamiento de las ondas, permitió nuevas soluciones más precisas y con aplicaciones más amplias al problema del posicionamiento global.
- En el sistema Loran-C, la ecuación apoya la construcción de mapas siendo una herramienta de modelamiento que facilita al navegante la determinación de su posición aún en condiciones climáticas adversas. Por otro lado acá también es posible hacer una corrección del error sumando nuevas lecturas y generando un sistema de ecuaciones.
- El sistema GPS compila los principios encontrados a lo largo de la historia e involucra las ecuaciones como una herramienta de cálculo y modelamiento, permitiendo además nuevos modelos de corrección de error y llegando a una gran precisión en la determinación de la posición sin importar el lugar donde se encuentra la persona.
- Aunque las ecuaciones en la mayoría de los momentos se mostraron como una herramienta, es importante destacar que cuando fue vista como un objeto de estudio ayudó a que se generara otro objeto de estudio como lo fue la trigonometría esférica. Esto permite inferir que el estudio de un objeto, puede contribuir al surgimiento de otros.
- Es importante notar que en la mayoría de soluciones planteadas la ecuación se comporta como una herramienta útil y versátil, que permite calcular y modelar situaciones reales para determinar una posición. Sin embargo en el siglo XV es interesante ver como en el caso en que los modelos matemáticos no eran precisos condujo a la transición de herramienta a objeto de estudio para generar nueva teoría que condujera a nuevas propiedades que se ajustaran de forma precisa a la realidad como lo fue la trigonometría esférica desarrollada por Regiomontano. Este se ilustra en el siguiente gráfico:


*Ilustración 31. Dualidad herramienta objeto*

## 9. RECOMENDACIONES

Con la realización de este trabajo de grado surgen algunas reflexiones y recomendaciones de cara a la enseñanza de las matemáticas en el aula. La enseñanza de las ecuaciones usualmente se inicia dentro de la revisión que se hace de los conjuntos numéricos y se complementa junto al estudio de funciones, en ambos casos, lo usual es presentar este elemento como un objeto de estudio sobre el cual se dan unas definiciones, se plantean algunas propiedades sobre la igualdad y se exponen algunas ocasiones de uso.

Las ocasiones de uso que se plantean muchas veces se limitan a aplicaciones dentro de las mismas matemáticas, algunos libros de texto llevan las aplicaciones a problemas de contexto “real” como cálculo de áreas, determinación de edades, problemas con dinero, etc. Estas aplicaciones no logran exponer a los estudiantes la importancia que han tenido las ecuaciones y su estudio a lo largo de la historia, por lo que se convierte en un elemento más del currículo que con facilidad se olvida.

Los hallazgos hechos en este trabajo, pueden brindar al docente una perspectiva de la utilidad que pueden tener las ecuaciones en una problemática importante que ha enfrentado la humanidad como lo fue el poderse posicionar en cualquier lugar del planeta, en este problema, las ecuaciones ofrecieron una herramienta de modelamiento y de cálculo determinante. Por esto consideramos importante que las clases de matemáticas no sólo se dediquen a la transposición de conocimientos para ser enseñados, sino que también se tenga en cuenta la historia y la potencialidad de los saberes como herramienta para modelar, entender y solucionar problemáticas que en algún momento se le pudieron presentar al ser humano.

Este trabajo de grado puede ser utilizado como referente de otras investigaciones. Esperamos que se den nuevas indagaciones con otros conceptos de las matemáticas, que permitan llegar al fondo de una problemática, contribuyendo a que se den nuevas propuestas didácticas que hagan de esta ciencia algo más llamativo para los estudiantes de la educación básica y media.

## BIBLIOGRAFIA


Álvarez Pérez, J. L. (2008). *Introducción a los GNSS*.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. (P. Gomez, Ed.) (Primera Ed.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica.

Chueca Pazos, M., García García, F., Jimenez Martinez, M. J., & Villar Cano, M. (2008). *Compendio de historia de la ingeniería cartográfica.* Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia. Retrieved from http://www.fglorente.org/libros/compendiocunoIntro.pdf

Corbellini, G. (1998). *Guía de orientación* (p. 164). Madrid: TUTOR.

Deulofeu, J., & Figueiras, L. (2002). *Las medidas a través de la historia*.

Douady, R. (1984). *Cuaderno de didáctica de la matemática Nº 3*.

Douady, R. (1993). *Juego de Marcos y Dialéctica Herramiento - Objeto*. Departamento de Matemáticas Educativa del CINVESTAV.

Ferraro, R., & Lerch, C. (1997). *¿Qué es que en tecnología?* Buenos Aires, Argentina: Ediciones Granica.

Garcia Cruz, J. A. (2008). El arte de llegar a puerto: Matemáticas y Navegación desde la antiguedad hasta el siglo XVII. *Descubrir Las Matemáticas Hoy*, 185–199.

Gutierrez Llorente, A. (2005). Historia de la cartografía. In *Problemas de la matemática clásica* (pp. 1–31).

Hernandez-Pajarez, M., Juan Zornoza, J. M., & Sanz Subirana, J. (2001). *Procesado de Datos GPS : Código y fase Algoritmos , Técnicas y Recetas* (Primrea Ed.). Barcelona, España.

Marquez, R. (n.d.). *Sistemas lineales inconsistentes y ajuste de redes GPS* (pp. 1–130).

PintoRogelio, P. (2007). Aviónica y sistemas de navegación. Sevilla, España: Universidad de Sevilla.

Samama, N. (2008). *Global Positioning: Technologies and Performance*. New Jersey: WILEY.

Thompson, B. (1998). Global Positioning System : The Mathematics of GPS Receivers. *MATHEMATICS MAGAZINE*, *Volumen 71*, 260–269.