LAS MATRICES, UN AVANCE TECNOLÓGICO EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES

Autores:
Jenny Madelein González Castellanos
David Julián González Castellanos

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Especialización en Educación Matemáticas
Bogotá - Colombia
2014

LAS MATRICES, UN AVANCE TECNOLÓGICO EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES

Autores:
Jenny Madelein González Castellanos
David Julián González Castellanos

Tesis de grado, presentado como requisito para optar al título de Especialista en Educación Matemática

Director:
Yeison Alexander Sánchez Rubio

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Especialización en Educación Matemáticas
Bogotá - Colombia
2014

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Las Matrices: Un avance tecnológico en el estudio de las ecuaciones."*** Presentado por los estudiantes:

David Julián González Castellanos - 2014182012
Jenny Madelein González Castellanos - 201482013

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **47** puntos.

Observaciones:

____

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2014.

J U R A D O S

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) ______________________
YEISON SÁNCHEZ

Jurado:

Profesor(a) Edgar. C Guacaneme S.
EDGAR GUACANEME

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 85

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Las matrices, un avance tecnológico en el estudio de las ecuaciones
Autor(es)	González Castellanos, Jenny Madelein; González Castellanos, David Julián
Director	Yeison Alexander Sánchez Rubio
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 77 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Sistemas de ecuaciones, matrices, tecnología, técnica, ciencia, conocimiento descriptivo y conocimiento descriptivo.

2. Descripción
Este trabajo trata de responder la pregunta ¿las matrices son un avance tecnológico en el estudio de las ecuaciones?, para ello se realizó una recopilación histórica sobre unos apartados del algebra lineal, los cuales hacían énfasis en la evolución de la solución de sistemas de ecuaciones y su relación con la esencia de las matrices; por otra parte, se realizó una indagación sobre el crecimiento evolutivo de concepto y los elementos están inmersos en tecnología, determinando de esta manera una definición propia para lo que se entendió por tecnología en matemáticas. A partir de esta definición, se retoman algunos apartados particulares de la historia de las matrices, se hace reflexión en su método algorítmico y se clasifica según su desarrollo conceptual en referencia a los diferentes tipos de conocimiento tecnológico. Finalmente, se muestran unas posibles conclusiones sobre las interpretaciones de tecnología, sobre las reflexiones de la evolución histórica de las matrices y se trata de complicar las respuestas emergentes a la pregunta inicial.

3. Fuentes

Algarra López, M. N., Borges Hernández, C. E., García Dorta, I., & Hernandez Negrín, V. &. (16 de octubre de 2004). *http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf.* Recuperado el 15 de agosto de 2014, de paginaspersonales.deusto.es: http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

Blyth T.S & Robertson, E. F. (2002). *Basic linear algebra* (Segunda edicion ed.). London: Springer.

Cardano, G. (1993). On the rule of method. En G. Cardano, *Ars Magna or the Rules of Algeba* (T. R. Witmer, Trad., Segunda ed., p. 180-181). New York: The MIT.

Deivi Luzardo, A. J. (2006). Historia del algebra lineal hasta los albores del siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14*(2), 153-170.

García Moreno, F. (2004). La relación ciencia y tecnología en la sociedad actual. Análisis de algunos criterios y valores epistemológicos y tecnológicos y su influencia dentro del marco social. A*rgumentos de razón técnica:* Revista española de ciencia tecnología y sociedad, y filosofia de la tecnología (7), 105 - 148.

Gay, A., & Ferreras, M. A. (1995). La ciencia, la técnica y la tecnología. *La Educación Tecnológica, Aportes para su implementación* (p. 71 - 89). Buenos Aires, Argentina: CONICET.

González, V. W., & Hernández M, L. H. (2000). Tecnología y técnica: tres perspectivas. *Energía y Corporación, IX*(1), 6-19.

Grossman, S. I. (1992). *Álgebra lineal.* Mexico: McGRAW-Hill.

Guerra, A. A. (2012). *Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Herchbach, D. R. (1995). La tecnológia como conocimiento: implicancias para la educación. *Technology Education, 7*(1).

Ji-huan, H. (2002). Ancient Chinese Algorithm: The Ying Buu Shu (Method Of Surplus And Deficiency) Vs Newton Interation Method. *Applied mathematics and mechanics. English edition, 23*(12).(p.1408-1411)

Ordóñez, G. R. (2012). *Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del álgebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab.* Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Pérez, N. H., Mellincovsky, D. C., Barrozo, M. E., Páez, H., & Pekolj, M. (s.f.). *Técnica y tecnología, reflexiones entorno a ecuaciones e inecuaciones.* San

Luis.

Polo, Y. Á. (2014). *Introducción del álgebra lineal en España y en Colombia durante la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX.* Logroño: Universidad de la Rioja.

Rosales Góngora, A. (2009). Evolución histórica del concepto de matriz. *Revista digital matemática, educación e internet, 9*(2).

Rosales Ordóñez, G. (2012). *Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del álgebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab.* Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Zambrano, L. E. (2011). *Planteamiento y solución de problemas de ecuaciones, usando estrategias y métodos propuestos en el desarrollo histórico de la teoría de ecuaciones.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

4. Contenidos

Este documento muestra, en el primer capítulo, una compilación breve en cuanto a la historia de los sistemas de ecuaciones, los determinantes y las matrices. Después, en el segundo capítulo, presenta una compilación teórica en cuanto a tecnología, rescatando aspectos relevantes para este trabajo referentes al desarrollo tecnológico, tecnologías blandas y los procesos que interfieren en la tecnología. Para el tercer capítulo, se realiza un análisis particular en cuanto a algunos métodos referentes a sistemas de ecuaciones, determinantes y matrices, con el objetivo de determinar cómo y en qué forma cada uno de estos se relaciona con tecnología. Finalmente, en el último capítulo, se hace referencia a las conclusiones que se obtienen en base a la reflexión realizada a lo largo de este trabajo.

5. Metodología

Este trabajo se realizó en tres etapas principales. En un primer momento se realizó una compilación histórica en cuanto a sistemas de ecuaciones y matrices, y una teórica en cuanto a tecnología. La segunda etapa se enfocó en organizar la recolección teórica, seleccionando los aspectos relevantes en cada compilación, alcanzando una postura personal de lo que se entiende por tecnología, ciencia y técnica en este trabajo y logrando proponer una definición particular en cuanto a tecnología en matemáticas y por otra parte logrando rastrear bajo la perspectiva de avance tecnológico las relaciones entre métodos de solución de sistemas de ecuaciones. Finalmente la última etapa se enfocó en el análisis de algunos métodos utilizados históricamente para resolver sistemas de ecuaciones, identificando la matriz como un avance tecnológico, y a partir de aquí se construyen las conclusiones.

6. Conclusiones
Nuestra postura en cuanto a tecnología se centra en la perspectiva antropológica, debido a que estamos de acuerdo con la idea de que la técnica surge con los procesos de atender las necesidades del ser humano, y que la tecnología se desarrolla cuando la cognición le permite comprender, explicar, formular y comunicar procesos. Además, asumimos que la tecnología puede tener distintas representaciones (físicas y abstractas) siempre que se preocupe, más que por el desarrollo de una teoría, por la generación de conocimiento real en la praxis. Adicionalmente nuestro interés se enfoca en las matemáticas, estas son una ciencia específica, y a lo largo de su evolución, ha pasado por distintas facetas de donde se hacen evidentes aspectos tecnológicos, ya que históricamente, primero se contemplaron métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, que carecían de un discurso que los describiera y justificara, por lo que se basaban en conocimiento tecnológico tácito (métodos de falsa posición, cuadrados mágicos, exceso y defecto, etc.). Éste se fue transformando en conocimiento prescriptivo a medida que se generaban procesos reflexivos en busca de la generalización, eficiencia, mejor dominio, explicación, etc. de los métodos inicialmente usados, por lo cual se realizaron importantes avances con relación al lenguaje, la simbolización, la argumentación, entre otros aspectos (Cardano, Leibniz, Bezout, etc.), que luego de reflexionarse en búsqueda de mejorarlos, llegaron a su máximo de esplendor como conocimiento tecnológico descriptivo e incluso teórico (Cramer, Gauss, etc.).

Elaborado por:	Jenny González y David González
Revisado por:	Yeison Alexander Sánchez Rubio

Fecha de elaboración del Resumen:	02	12	2014

CONTENIDO

JUSTIFICACIÓN

Estamos en un punto de la historia en el cual se tiene mucho contacto con la palabra “tecnología”, en el que todo el tiempo se hace alusión a la necesidad de manejar distintas herramientas que permitan solucionar situaciones problemáticas en la vida, y en el que los procesos matemáticos se han instaurado como fundamentales para un buen desempeño en la vida social y comercial. Se ha acudido al uso de ordenadores y calculadoras programadas para el desarrollo de cálculos que permiten solucionar problemas. Sin embargo ¿podríamos haber caído en el mero uso de herramientas de cálculo?, ¿hemos dejado de lado la capacidad de dominar conocimientos por la comodidad de manipular aparatos?, ¿nos hemos limitado a pensar que la tecnología no es más que las herramientas digitales a las que a veces concedemos poderes extraordinarios?

Posiblemente estas cuestiones puedan hacerlos sentir identificados y por eso creemos importante reconocer otras posturas, en las que, se dé mayor importancia a las capacidades de conocer y manipular compilados de ideas históricamente construidos, o en las que un procedimiento permita organizar información y solucionar problemas acudiendo a lo que ya es tecnológico, evitando subrayar esto como tecnología; sino enfatizando el propósito de que un proceso de comprensión, aunque no implique el uso de aparatos electrónicos puede llegar a considerarse un avance tecnológico.

De forma paralela, el desarrollo histórico de las matemáticas, nace desde situaciones reales propias y también como adaptación de situaciones de otras ciencias, donde ocurren procesos evolutivos con el fin de optimizar, mejorar y teorizar procedimientos; es decir: las Matemáticas son un constructo social y así como la tecnología, las matemáticas son evolutivas y reflexivas en sus propias prácticas, por tanto nos cuestionamos si ¿es posible hablar de tecnología en Matemáticas?

INTRODUCCIÓN

Hemos organizado en este trabajo una exploración de posturas que permitirán una mirada distinta de los innumerables avances de las Matemáticas, pero particularizado en los sistemas de ecuaciones. De esta manera, se pretende mostrar una compilación histórica en cuanto al desarrollo de los sistemas de ecuaciones y cómo desde allí surge el uso de la matriz para solucionarlos de una manera eficiente, apropiada y ajustada a la realidad, respondiendo a necesidades de crecimiento industrial, social y/o cultural; en consecuencia se identificaran los usos de herramientas que facilitaron el proceso intelectual del matemático y se diagnosticara el aspecto procedimental detrás de algunos métodos matemáticos.

Pero el desarrollo evolutivo de las Matemáticas no solo se debe a la solución de problemas sociales o culturales; también se da por la necesidad intelectual del ser humano por indagar, formalizar, teorizar y mejorar una técnica. Por ejemplo, pensar en ¿por qué funcionan los métodos?, ¿qué sustenta el procedimiento a realizar?, ¿cómo se podría optimizar la técnica?, y otras preguntas más; para así recocer los momentos en que cada método se considera una técnica y cómo al observase de manera evolutiva, puede entenderse como una tecnología, reflexionando en cuanto a los procesos de comprensión detrás de las técnicas y herramientas utilizadas para resolver sistemas de ecuaciones.

Por tal razón, en cuanto al *Capítulo uno,* mostraremos una breve cronología histórica referente al desarrollo de los sistemas de ecuaciones, los determinantes y las matrices, dejando entrever la necesidad de cambiar la forma de acercarnos a las Matemáticas, entendiendo esta como tecnología desarrollada por el ser humano, en la que no es más importante la aplicación de un algoritmo que la comprensión de las relaciones entre conceptos que se establecen en el mismo; es decir, reconocer el desarrollo histórico de un concepto, las ideas que lo fundamentan y las relaciones que en él se dan.

Luego se pretende ampliar la mirada de tecnología, por lo cual en el *segundo capítulo*, tendremos en cuenta una caracterización histórica de lo que hace referencia a tecnología, mostrando diferentes posturas y modos de interpretar; de estos se rescataran argumentos que se ajusten a las necesidades de este trabajo, orientando una postura particular en cuanto a lo que se entenderá como “tecnología en Matemáticas” con el fin de identificar en la historia de los sistemas de ecuaciones, cuándo las matrices pueden verse como tecnología en cualquiera de sus estamentos.

En lo referente al *tercer capítulo*, se tratará de mostrar de modo particular un análisis de algunos métodos considerados relevantes tanto en el desarrollo de los determinantes y las matrices con respecto a la solución de sistemas de ecuaciones lineales; esto sumado a un acercamiento analítico referente a tecnología, buscando argumentar cuándo un método se considera herramienta, técnica o tecnología.

Finalmente, en el *cuarto capítulo*, mostraremos algunas conclusiones en base a las reflexiones que el desarrollo de este trabajo promovió; estas se orientarán tanto desde el aspecto tecnológico, así como al desarrollo evolutivo de métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

OBJETIVOS

General

- Caracterizar la relación entre tecnología en la solución de ecuaciones y el concepto matemático de matriz.

Específicos:

- Reconocer algunos aspectos relevantes de la Historia de las Matemáticas en los que se haga alusión al origen del concepto de matriz.
- Reconocer características de las matrices y sus métodos de tratamiento, que permitan establecer una relación con los métodos de solución de sistemas de ecuaciones.
- Establecer un marco conceptual sobre tecnología, que permita identificar la relación entre la solución de ecuaciones y las matrices como desarrollo tecnológico.

CAPÍTULO 1

CON RESPECTO A HISTORIA DE LAS MATRICES

En este capítulo realizaremos una revisión sobre la historia del concepto de matriz, para identificar momentos que generaron aportes significativos al estudio de las ecuaciones lineales, teniendo en cuenta cómo surgen, cómo se utilizan y cómo se teorizan las matrices. Por tanto, recopilaremos aportes de algunos teóricos que abordaron problemas del álgebra lineal, e hicieron referencia a razonamientos o métodos de solución de sistemas de ecuaciones, que cimientan los métodos en los que intervienen arreglos rectangulares de los coeficientes de las ecuaciones, es decir, arreglos matriciales. Además es de mencionar que se realiza una descripción retórica de algunos métodos, pero que no se ilustrara ningún método, ya que las ilustraciones pertinentes se realizaran en el tercer capítulo.

En Robertson, (2002) se menciona que surgió un desarrollo paralelo entre matrices y espacios lineales, lo que fue originado por la particularidad de resolver problemas específicos, no solo en matemáticas, sino también en otras ramas de la ciencia. Además indica que "los comienzos de las matrices y los determinantes surgen a través del estudio de sistemas de ecuaciones lineales" que llevaron a desarrollar diversos métodos de solución numéricos y de trabajo con lo desconocido, (variable, indeterminada o incógnita, según sea el caso). Por tanto, para ver la historia de las matrices, se debe realizar desde la orientación del álgebra lineal, pues esta es la que contempla el desarrollo gradual entre sistemas de ecuaciones lineales a métodos matriciales.

1.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En Babilonia se estudiaron ecuaciones lineales simultáneas[1] desde problemas concretos, los cuales se conservan en tablillas de arcilla y presentan instrucciones netamente verbales para solucionar ecuaciones; el trabajo de los algebristas babilonios tendía a reducir y transformar ecuaciones a una forma típica o conocida. Además, es mencionado en González, (2012) que:

> "Los babilonios basándose en sus tablas resolvían ecuaciones simultáneas lineales con dos incógnitas y ecuaciones simultáneas de segundo grado. Los babilonios pudieron resolver sistemas de ecuaciones de hasta diez ecuaciones con diez incógnitas para estudiar una situación referida a observaciones astronómicas". (p. 5)

[1] A lo largo de la historia, está escrito en varios documentos la frase "ecuaciones simultáneas", y en otros, "sistemas de ecuaciones"; es de aclarar que cualquier mención en el presente documento de estas dos formas estará haciendo referencia a sistemas de ecuaciones.

Por otra parte, un cuadrado mágico 3 por 3 se registra en la literatura china hacia el 650 a. C., para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este método se considera como un primer acercamiento al método de matrices. Así como se menciona en Algarra y otros, (2004) que el texto “*Nueve capítulos sobre el arte Matemático es un tratado matemático que se cree que fue confeccionado alrededor del siglo I d.C., de autor anónimo, y hasta hace poco, se ha considerado como el escrito especializado en matemáticas más antiguo que se conservaba*” (p. 19). Este es el primer ejemplo conocido del uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultaneas.

Los "cuadrados mágicos" eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India, junto con otros aspectos de las matemáticas combinatorias. Los primeros "cuadrados mágicos" de orden 5 y 6 aparecieron en Bagdad en el 983, en la Enciclopedia de la Hermandad de Pureza (Rasa'il Ihkwan al-Safa).

Más tarde, hacia los siglos I–II d.C., se escribió un papiro griego, descubierto y descifrado ya en el siglo XX que contiene un simbolismo que bien pudo influir en Diofanto. En dicho papiro se resuelve el sistema pasando a otro sistema en función de otra incógnita, pues el problema inicial describe coeficientes fraccionarios, así que se pasa a otro sistema que permite trabajar con números naturales, lo cual facilita el procedimiento algorítmico. Ver: (Luzardo, Historia del Algebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX, 2006)

Ya en la Grecia clásica siglo IV d. C. se resolvieron sistemas lineales; por ejemplo, González, (2012), señala que:

> “Thymaridas de Paros contó con un método para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas: ‘Si se conoce la suma de varias incógnitas, así como también las sumas parciales de una de ellas con cada una de las otras, y se suman todas estas sumas parciales, restando después la primera suma total y se divide la diferencia por el número de incógnitas disminuido en 2, se obtiene el valor de la primera; y de éste se deducen los demás’. Este método se conoce como ‘la flor de Thymaridas’”. (p. 8)

A este discurso algebraico para ser lo que hoy en día conocemos como un discurso “formal de matemáticas” sólo le faltó la expresión simbólica, pues para esta época todo se escribía retóricamente.

Polo, (2014) menciona que Gamblico, en el siglo III d. C., utilizó el método de Timarida para resolver el siguiente sistema y otro sistema igual con coeficientes numéricos racionales en los segundos miembros.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4) \\ x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_4) \\ x_1 + x_4 = 4(x_2 + x_3) \end{cases}$$

Cardano, (1993), en su 'Ars Magna' hacia 1545, da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que llamó "la regla de modo", la cual en esencia trabaja con los coeficientes para encontrar el valor de una de las incógnitas y a partir de allí logra determinar el valor de las demás incógnitas[2] y de este modo puede encontrar la solución al sistema. En tal libro se ve que esta regla se deduce a partir de la idea de sustitución.

Blyth, (2002), afirma que "La idea de determinante apareció en Japón y Europa casi al mismo tiempo". El representante de Japón fue Seki y en Europa Leibniz; aunque Seki lo publicó primero.

> *En 1683, Seki escribía "Métodos de Resolución de problemas Disimulados" que contienen métodos matriciales escritos exactamente como en las tablas del método chino. Sin tener alguna palabra que correspondiera a 'determinante', Seki los introdujo y dio métodos generales para calcularlos basados en ejemplos, a partir de los cuales fue capaz de encontrar determinantes en matrices de orden* 2×2*,* 3×3*,* 4×4*, y* 5×5*.* (p. viii)

Además se hace mención que un determinante es un número que se asigna a una formación cuadrada de números de cierto modo. Mientras tanto, Rosales (2012) menciona que "en una carta de Leibniz a Guillaume de L`Hopital (1661-1704), le explica que cierto sistema de ecuaciones lineales tiene solución*"* (p. 17), Leibniz utilizó la palabra "resultante" para ciertas sumas combinatorias de coeficientes de un determinante y probó varios resultados sobre éstos resultantes, incluyendo uno que, en esencia, es la conocida regla de Cramer. Además, Rosales (2012) indica que "Leibniz también conocía que un determinante se puede expandir usando columnas, lo que hoy se conoce como la expansión de Laplace, y estudió los sistemas de coeficientes de ecuaciones, principalmente aquellos ligados a las formas cuadráticas en donde usó los determinantes".

Por tanto, esta fue la primera publicación, donde la notación para determinantes se formalizó, ya que la manera de escribir de Leibnitz, hacía corresponder la relación entre filas y columnas, es decir él no está usando coeficientes numéricos, sino "dos caracteres, el primero mostrando en que ecuación está, y el segundo a que letra pertenece." Así, 12 corresponde a lo que nosotros llamaríamos en notación

[2] A este proceso de encontrar el valor de una incógnita, y a partir de allí determinar el valor de las otras reemplazando reiteradamente, lo llamaremos de ahora en adelante Retroceso

matricial a_{12}. Leibnitz era un convencido de que una buena notación matemática es la clave del progreso, de manera que experimentó con diferentes notaciones para sistemas de coeficientes.

También sus manuscritos no publicados contienen más de 50 diferentes maneras de escribir sistemas de coeficientes, en los cuales trabajó durante un período de 50 años, desde 1678. Solo dos publicaciones: 1700 y 1710, contienen resultados, y en estos usa la misma notación que en su carta a L'Hopital. En el documento de Blyth (2002) se indica que Leibniz también estudió sistemas de coeficientes de formas cuadráticas que lo llevaron, naturalmente, hacia la teoría de matrices.

Así mismo, por los años 1730, Maclaurin escribió "Tratados de álgebra" el cual no fue publicado sino hasta 1748, dos años después de su muerte. Este tratado contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes probando la regla de Cramer para sistemas de 2×2, y 3×3 e indicando como trabajar para sistemas 4×4. Polo (2014) indica que en el capítulo XI Maclaurin da una colección escolar de problemas resueltos. Unos tienen un enunciado directamente matemático y otros son problemas de la vida cotidiana, pero todos se traducen en la formulación de un sistema de dos o tres ecuaciones que hay que resolver. Hay sistemas de ecuaciones lineales, y también hay de dos ecuaciones que combinan una lineal con otra referida a productos, proporciones o expresiones cuadráticas, como ya se conocían desde Diofanto. Los sistemas lineales 2×2 ó 3×3 son resueltos por métodos específicos cuando son particularmente sencillos, y otros por lo métodos generales que el autor eleva a teoría en el capítulo siguiente. El capítulo termina con un párrafo en el que se indica que si hay más cantidades a determinar que ecuaciones puede haber un número infinito de soluciones y, al contrario, si el número de cantidades es menor a las ecuaciones, puede ser imposible encontrar una solución, "porque algunas de las condiciones pueden ser inconsistentes con otras" Polo (2014).

Polo (2014) indica que en el capítulo XII, Maclaurin hace una generalización para encontrar los métodos de solución a diferentes sistemas cuadrados de ecuaciones, trabajando solo con los coeficientes, también demuestra el método para un sistema 2×2 y después toma esto ya demostrado para resolver un sistema 3×3, en donde el objetivo principal es convertir cualquier sistema en una ecuación, y a partir de dicha ecuaciones empieza a reemplazar iteradamente para encontrar la solución que satisface el sistema, igualmente, indica que con esta generalización, puede resolverse cualquier sistema $n \times n$, pero que los procedimientos algorítmicos se complican mucho a partir del sistema 5×5.

Rosales (2012) aclara que "El propio Gabriel Cramer (1704-1752) anuncio la regla general para sistemas n x n en su *Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques*, publicado en 1750" (p. 18), esto surgió motivado por el deseo de encontrar la ecuación de una curva plana pasando a través de un número dado de puntos. Además, Polo (2014) menciona que para encontrar la cónica que pasa por cinco puntos se resuelve un sistema de ecuaciones lineales 5×5, lo cual es una generalización de lo realizado por Maclaurin.

En el documento de Rosales (2012) se dice que “en 1764, Etienne Bezout (1730-1783) muestra nuevos métodos para calcular determinantes, así como también Vandermonde (1735-1796).” (p. 18), Bezout demuestra que la anulación del determinante de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas homogéneo es una condición necesaria y suficiente para que haya soluciones no nulas.

Además, el método de Bezout para resolver un sistema de ecuaciones consiste en la introducción de ciertos factores indeterminados, a los cuales se les asignan valores que satisfagan ciertas condiciones útiles en un momento oportuno; esto se puede interpretar como: multiplicar por una variable a una de las ecuaciones, luego operar entre ecuaciones y, finalmente, buscar el valor de la variable de tal manera que alguno de los coeficientes que acompañan a la incógnita sea cero. Esto puede ocurrir ya que se asume que las variables son elementos que pertenecen al conjunto y por tanto pueden cancelarse con el módulo de la adición (cero), lo cual hace que simplifique el sistema de ecuaciones para después describir la variable no eliminada en términos de la variable que fue introducida en un inicio y trabaje según sea el caso con una incógnita.

1.2 MATRICES Y DETERMINANTES

En 1772, Laplace afirmó que los métodos introducidos por Cramer y Bezout eran impracticables y, en un escrito donde él estudiaba las órbitas de planetas, discutía la solución de sistemas de ecuaciones lineales sin calcularlos pero, usando determinantes. Además, es mencionado en Rosales (2012) que la eliminación gaussiana, que primero aparece en el texto” Nueve Capítulos de Arte Matemático” escrito 200 años a.C, era usada por Gauss en sus estudios de la órbita del asteroide Pallas. Usando las observaciones de Pallas tomadas entre 1803 y 1809, Gauss obtuvo un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas. Gauss ideó un método sistemático para resolver tales ecuaciones, el que precisamente conocemos ahora como “eliminación gaussiana” con los coeficientes de una matriz.

Fue Cauchy en 1812 quien usó el término “determinante” en el sentido moderno. El trabajo de Cauchy es el más completo de los primeros trabajos sobre determinantes. Según menciona Polo (2014, p. 5), Cauchy no consideró oportuno integrar la teoría de determinantes que elaboró en 1815 en su *Análisis algebraico* de 1821; se limitó a lo mínimo para justificar la resolución según Cramer de los sistemas lineales algebraicos de igual número de ecuaciones que de incógnitas. En 1826 Cauchy, en el contexto de formas cuadráticas en *n* variables, usó el término “*tableau*” para la matriz de coeficientes. Él encontró los valores de matrices y dio resultados sobre diagonalización de una matriz en el contexto de convertir una forma cuadrática a la suma de cuadrados. También introdujo la idea de matrices similares (pero no el término) y mostró que si dos matrices son similares, ellas tienen la misma ecuación característica. También probó, nuevamente en el contexto de formas cuadráticas, que toda matriz simétrica real es diagonalizable.

Jacobi, alrededor 1830, y luego Kronecker y Weierstrass en los años 1850 y 1860 también miraron resultados matriciales pero otra vez en un contexto especial, esta vez relativo a la idea de una transformación lineal. Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en 1841. Esto fue de gran importancia, ya que por primera vez la definición de determinante fue hecha en forma algorítmica y las entradas en los determinantes no fueron especificadas. Así, sus resultados fueron aplicados igualmente bien a casos donde las entradas eran números o funciones. Estos tres escritos de Jacobi hicieron la idea de determinante ampliamente conocida.

Cayley publicó en 1841, la primera contribución inglesa a la teoría de determinantes. En este escrito, usó dos líneas verticales en ambos lados del arreglo para denotar el determinante, una notación que ahora es común. Eisenstein en 1844 denotó las sustituciones lineales con una simple letra y mostró cómo sumarlas y multiplicarlas como números ordinarios, excepto porque no hay commutatividad. Es justo decir que Eisenstein fue el primero en pensar las sustituciones lineales como la formación de un álgebra.

Polo (2014) menciona que "fue James Joseph Sylvester quien utilizó por primera vez el término –matriz- en 1850. Que lo define en un artículo de 1858, *Memoria sobre la teoría de matrices*". Adicionalmente en Robertnowlan[3], informan que Sylvester definió "*matriz* como *un arreglo rectangular de términos*, viéndolo como una matriz de números derivados de sistemas de ecuaciones. *Matrix* en latín significa *útero*, pero también puede significar cualquier lugar en el que se forma o produce algo"[4].

Así mismo, la nulidad de una matriz cuadrada fue definida por Sylvester en 1884. Él estaba interesado en invariantes de matrices, esto es, propiedades que cumplen algunas matrices y que no son alteradas bajo ciertas transformaciones. Según González (2012, p. 13) Sylvester definió matriz "como un arreglo cuadrilongo de términos", además Góngora (2009) menciona que hay una relación entre los tipos de intersecciones de las cónicas y los tipos de factores comunes que intervienen en el desarrollo polinomial del determinante del sistema de ecuaciones de dichas cónicas. Esto hace que las preocupaciones geométricas iniciales sean sustituidas por las de estudiar las distintas descomposiciones polinomiales de la intersección de dichas cónicas. Es en este contexto en el que Sylvester introduce la noción de "menor" del determinante, pues descubre que es más rápido y seguro empezar

[3] Ver: (http://www.robertnowlan.com/), 2 de septiembre de 2014, 9:00pm
[4] Invitamos al lector a constatar la traducción de este apartado del documento.
http://www.robertnowlan.com/pdfs/Sylvester,%20James%20Joseph.pdf

estudiando las diferentes relaciones posibles entre el determinante correspondiente a la característica y sus menores. En dos memorias publicadas en 1851, Sylvester generaliza sus trabajos a intersecciones de cuadráticas y formas cuadráticas con "*n* letras". La extracción efectiva de los menores de un determinante de orden *n* se apoya en una representación en una tabla rectangular que Sylvester denomina "la matriz" de los menores.

Polo (2014) señala que el impulso definitivo a la teoría matricial fue dado por Sylvester en los ochenta del siglo XIX, cuando estaba en estrecha relación con la matemática norteamericana. Además, por su papel en el estudio de las sustituciones y las formas bilineales, las matrices se consolidaron como objeto matemático autónomo gracias a su consideración adicional como “cantidades complejas” de orden superior, más allá de los complejos ordinarios y los cuaternios, formando álgebras de dimensiones arbitrarias.

1.3 APORTES A LA TEORÍA DE MATRICES

Polo (2014) mencina que hacia mediados del siglo XIX se incoporan al tema de determinantes Caley y Silvester produciendo una mayor algebrizacion e introduccioendo progresivamente la teoria de matrices. Tiempo mas tarde, “sugrio el teorema de Hamilton-Caley, que el primero encontro estudiando los números hipercomplejos (cuaternios etc.) y el segundo con las matrices” (p. 445). En 1953 Cayley publicó una nota donde aparece por primera vez la inversa de una matriz. Además Polo (2014) indica que Cayley introdujo en 1858 la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas”. Luzardo (2006, p. 160) menciona que Cayley desarrolla el álgebra matricial definiendo las operaciones básicas de suma, multiplicación y multiplicación por escalares, así como la inversa de una matriz invertible, junto con una construcción de la inversa de una matriz invertible en términos de su determinante y prueba que, en el caso de matrices 2×2 , una matriz satisface su propia ecuación característica.

Así mismo, Blyth (2002), indica que Cayley declaraba que había comprobado el resultado para matrices de orden 3×3, indicando su prueba, pero dice: “Yo no tengo la condición necesaria para llevar adelante el trabajo de probar formalmente el teorema para el caso general de una matriz de cualquier grado". Polo (2014) indica que Cayley y Hamilton trabajaron juntos y llegaron a que utilizando las operaciones polinomicas con una “matriz cualquiera, satisface una ecuación algebraica de su mismo orden, siendo el coeficiente de la mayor potencia la unidad, y los de las otras potencias funciones de los términos de la matriz, siendo en efecto el ultimo coeficiente el determinante” (p. 206), lo que se conoce como el "Teorema de Cayley-Hamilton". Cayley también probó un caso especial del teorema, para matrices de orden 4×4, en el curso de sus investigaciones sobre cuaterniones. Además probó que la multiplicación de matrices es asociativa e introduce las potencias de una matriz, así como las matrices simétricas y antisimétricas. Por tanto, según Robertson, Cayley merece ser considerado como el fundador del *álgebra de matrices*.

Más adelante, Frobenius, en 1878, escribió un importante trabajo sobre matrices en "Sustituciones lineales y formas bilineales" pero él no conocía el trabajo de Cayley. Frobenius trabajaba en su artículo con coeficientes de formas cuadráticas y no usa el término matriz. Sin embargo probó importantes resultados sobre matrices canónicas como representaciones de clases de equivalencia de matrices.

Frobenius además probó el resultado general de que una matriz satisfaga su ecuación característica y en 1878 definió el "rango de una matriz" el cual usaba en sus trabajos sobre formas canónicas y la definición de "matrices ortogonales". En 1896, Frobenius conoció las "Memorias sobre la teoría de matrices" de Cayley (1858) y después comenzó a usar el término "matriz". A pesar del hecho que Cayley solo había probado el teorema de Cayley-Hamilton para matrices de 2×2 y 3×3, Frobenius generosamente atribuyó el resultado a Cayley a pesar de haber sido él, el primero en probar el teorema general.

En el documento de Luzardo (2006) se indica que a finales del siglo XVII fueron redescubiertas y desarrolladas las ideas originales de los babilonios, y principalmente de los chinos, sobre el pensamiento lineal. Recordemos que hasta el siglo XVIII el álgebra era, esencialmente, el arte de resolver ecuaciones de grado arbitrario. El matemático y filósofo francés, D'Alembert descubre que las soluciones de un sistema $ax = b$ (suponemos que $a, b, x \in \mathbb{R}$ por motivo que el descubrimiento de los reales elevaron todas las matemáticas a un nivel teórico) forman una variedad lineal. Asimismo, Euler, Lagrange y el propio D'Alembert se dan cuenta que la solución general del sistema homogéneo $ax = 0$ es una combinación lineal de algunas soluciones particulares.

1.4 ALGUNAS UTILIDADES DE LAS MATRICES

En lo referente a otras aplicaciones de las matrices, se alude en Polo (2014) Olga Taussky – Todd (1906-1995), durante la II Guerra Mundial, uso la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado Fluttering.

Además, es de considerar que la utilización de las matrices ha sobrevivido hasta nuestros días, ya que su utilidad para el estudio de los sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de manera natural en geometría, estadística, economía, etc.

Nuestra cultura está llena de matrices de números (entendiéndola como una organización numérica rectangular) desde las formas más elementales así como:

- El horario de los aviones de cada una de las plataformas es una matriz de doble entrada.

- La tabla de cotizaciones de la bolsa en cada uno de los días de la semana.
- Los horarios de clases con columnas (Lunes, Martes, etc.) y filas (7:00 a 7:45, ...) donde las celdas se completan con las materias.
- Las tablas de sumar y multiplicar
- La disposición de los alumnos en clase
- Las casillas de un tablero de ajedrez
- Las apuestas del baloto.
- Los puntos de un monitor de ordenador

Son tantos ejemplos de la vida cotidiana de matrices. Actualmente, muchos programas de ordenador utilizan el concepto de matriz; así, las hojas de cálculo funcionan utilizando una inmensa matriz con cientos de filas y columnas en cuyas celdas se pueden introducir datos y fórmulas para realizar cálculos a gran velocidad.

De manera más elaborada las matrices juegan un papel relevante en áreas tales como la física, ya que como menciona Blanco (2011) la primera aplicación conocida a la Física de datos de 1925, año en que Heisenberg, Born y Jordania aplicaron matrices al Estudio de la "Mecánica Cuántica", la primera aplicación en la Ingeniería los datos de 1934, año En que Duncan y Cuello, Ingenieros Aeronáuticos ingleses, publicaron article "un método para la Solución de problemas por oscilación matrices" Las matrices se han utilizado en el planteamiento y solución de problemas que se presentan en muy diversas áreas aplicadas, tales como: Análisis de circuito y redes (cálculo de voltajes, corrientes y potencias) y despacho económico de carga, en Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Térmica, Ingeniería Aeronáutica, etc.

Finalmente en este capítulo hemos resaltado algunos aspectos relevantes de la historia de las matemáticas en los cuales de manera directa o indirecta se hizo alusión a la idea de matriz, partiendo de tesis históricas que dan cuenta que: la esencia detrás de esta, se encuentra en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. También mostramos de forma “casi” consecuente, pero no rigurosa, como: la idea de sistemas de ecuaciones lineales se fue transformando, haciendo énfasis en el trabajo con coeficientes y de manera evolutiva con la organización matricial; en consecuencia se evidenció que la evolución del trabajo con matrices se encamino por dos ideas esenciales: por lado, la idea de las determinantes de una matriz y por otro, la de trabajo con coeficientes en arreglos cuadrados matriciales.

CAPÍTULO 2

CIENCIA, TÉCNICA Y TECNOLOGÍA

En la actualidad la ciencia y tecnología ocupan un lugar fundamental, puesto que cómo se menciona en García (2004), esta es una sociedad con la necesidad de producir tecnología, por distintos medios y en diferentes campos. Esta postura es apoyada por Gay & Ferreras (1995) quien comenta que, en nuestro mundo la tecnología marca el ritmo del progreso y las pautas de vida, es decir que habitamos en un mundo modelado por la tecnología.

Adicionalmente, teniendo en cuenta que en la noción de tecnología está implícita la idea de ciencia y técnica. De tal forma que estas tres palabras, ciencia, técnica y tecnología, están inmersas en las actividades del hombre, e indiscutiblemente ligadas al desarrollo de la civilización, García (2004) sustenta el concepto de "sistema tecnológico" como el conjunto de aspectos de carácter científico y técnico que se relacionan para producir nuevas tecnologías y comunicarlas a la sociedad.

2.1 TRES PERSPECTIVAS SOBRE TECNOLOGÍA

Es evidente una estrecha relación entre ciencia, técnica y tecnología, aunque no es del todo sencillo caracterizar y distinguir a cada una, motivo por el cual, en busca de una mejor definición de tecnología abordaremos su relación con la ciencia y técnica. Así, teniendo en cuenta las relaciones que se desarrollan en un sistema tecnológico, y nuestro interés de caracterizar la tecnología, iniciaremos mencionando las características de tres perspectivas comentadas en Gonzalez & Hernandez (2000), de donde se reconocen las siguientes tres posturas sobre tecnología: perspectiva epistemológica, perspectiva sociológica-institucional y perspectiva antropológica.

Perspectiva epistemológica: se sustenta en la idea de que la tecnología surge con la interacción entre procesos artesanales y conocimientos científicos, de tal forma que se percibe a la tecnología como ciencia aplicada a procesos de sistematización e industrialización. Sin embargo, los autores indican que una mirada histórica refleja que el desarrollo tecnológico no siempre ha estado asociado al conocimiento científico, debido a que, entre otras cosas, el concepto de ciencia que conocemos actualmente es resultado de la revolución científica de los siglos XVI y XVII.

Desde esta perspectiva se entiende a la tecnología y la técnica como cosas distintas, de tal forma que la segunda es la actividad que busca transformar la naturaleza y que está asociada a otros tipos de conocimiento como el conocimiento ordinario, pericias artesanales, componentes estéticos, ideológicos y filosóficos. Esos otros tipos de conocimiento cuentan con un alto grado de subjetividad propia de la cultura en la que se desarrollan y no son solo otras formas de conocer sino también de hacer.

Además, se reconoce que los orígenes de la técnica coinciden con los del hombre, puesto que él desde sus inicios ha intentado reformar la naturaleza con el fin de satisfacer sus necesidades, a diferencia de la tecnología que adquiere relevancia en aspectos sociales y económicos. De tal forma que se considera, desde la perspectiva epistemológica, que con la tecnología se inician procesos en los que elementos de la ciencia moderna y la técnica se fusionan para producir elementos nuevos, promoviendo la transformación de la sociedad e incluso de la ciencia y la técnica. Adicionalmente se puede afirmar que “la técnica además de estar emparentada con una serie muy diversa de saberes, también ha sido productora de saberes” (Gonzalez & Hernandez, 2000, p 7).

Así, debido a que desde esta perspectiva se reconoce que la tecnología surge a partir del siglo XVI, se indica que los desarrollos anteriores a la aparición formal de la ciencia se dan en el campo de la técnica, lo cual se evidencia cuando se observa que el hombre no necesitó de la aparición de la ciencia moderna para transformar el mundo que lo rodeaba.

La técnica implica saber hacer, lo que puede consistir en una serie de acciones, operaciones, procedimientos o destrezas, que permiten lograr un fin específico. En muchos casos este saber práctico no se encuentra sistematizado en teorías o archivos, razón por la cual muchos de los saberes técnicos desaparecieron por no estar documentados, o en otros casos fueron guardados celosamente por agrupaciones cerradas que impedían que se conocieran en comunidades diferentes.

Con relación al conocimiento que aborda y sustenta la tecnología, es necesario mencionar que, aunque la innovación es promovida por el conocimiento científico, él no tiene por qué ser el de las teorías más desarrolladas en una determinada disciplina. Para esto, los autores citan a Mario Bunge que comenta que “los modelos teóricos empleados en la previsión tecnológica son, usualmente, más sencillos y superficiales que los empleados en la predicción científica puesto que la finalidad de la tecnología no es la verdad sino la eficiencia” (p 8).

De esta forma, es posible concluir que desde la perspectiva epistemológica la técnica ha existido desde los orígenes de la humanidad, y al desarrollarse formalmente la ciencia, hacia los siglos XVI y XVII, se fusionan para sofisticar los procesos de producción, dando origen a la tecnología, que aunque demanda de fundamentos científicos, los discursos y teorías que requiere no son de muy altos grados de formalidad, puesto que su interés no es la búsqueda de la verdad sino la eficacia en el desarrollo de procesos que encuentran sentido en la realidad.

Perspectiva sociológica-institucional: Esta perspectiva nos presenta a la tecnología como resultado de su relación con las instituciones que la soportan (industrias de producción). Es decir que da sentido al concepto de tecnología al concebirla como el recurso que le permite a la industria desarrollos técnicos que permiten aumentar la productividad de bienes y servicios. Desde esta visión la tecnología es el conjunto de conocimientos y aparatos, desarrollados bajo las necesidades formuladas por la industria, o que sin importar su surgimiento permiten mejorar los procesos de producción.

Sobre esta perspectiva no ahondaremos más debido a que no coincide con la propuesta que pretendemos trabajar.

Perspectiva antropológica: esta perspectiva considera que la técnica surge con la humanidad, mientras que la tecnología aparece a medida que la cognición humana se complejiza para comprender, explicar, justificar o producir, nuevos procedimientos. Por lo tanto se basa en la idea de que desde su origen el ser humano ha tenido que modificar su entorno para adaptarlo a las necesidades humanas y suplir sus falencias biológicas naturales.

Con respecto a esto en Gonzalez & Hernandez (2000) citando a Portmann comentan que “el hombre es un ser desesperadamente inadaptado” (p 13) y por la carencia de una pre-adaptación orgánica de origen, con relación a su organismo y a su contexto espacial, el ser humano es expuesto al mundo, de tal forma que es forzado a suplir esas carencias a través de las herramientas y técnicas para seguir existiendo. Así, señalan que:

> Solamente un ser descoordinado a nivel extra especifico está obligado a transformar su medio, a inventar técnicas y tecnologías para así descargar-reemplazar y superar cada una de las partes que fallan en su organismo o que simplemente no posee. (p 14).

Adicionalmente, en la perspectiva antropológica se concede gran importancia al lenguaje en el desarrollo de técnicas y tecnologías, puesto que, por la aparición del lenguaje es que el ser humano logra realizar representaciones del mundo, de tal forma que se permite la interiorización, reflexión y comunicación que favorece la creación y transmisión de técnicas, junto al estudio que fundamenta el discurso y los procesos para describir, explicar y justificar: es decir que gracias al lenguaje también se desarrollan los procesos cognitivos que desde esta perspectiva se consideran tecnología.

Con relación a la noción de técnica, también es necesario mencionar que desde esta perspectiva se considera que generan y son generadas por lo que Gonzalez & Hernandez (2000) denominan “comportamiento técnico” que se describe como “el conjunto de actitudes psicosomáticas que se traducen, en un ser determinado, en una acción material sobre el medio exterior…. (En ciertas especies, se habla de creación particular o de técnicas de fabricación)”

Derriben que cada operación técnica desarrolla una serie de acciones que se denomina “cadena operatoria”, y que mientras en los animales se llama instinto, en los seres humanos se conoce como “inteligencia”, esto debido a que el hombre a diferencia de los animales posee una memoria social, que es una estructura colectiva adquirida durante la socialización y que se designa como “cultura”.

Por otra parte, se reconoce que la tecnología surge cuando la cognición del ser humano se complejiza, indicando que a medida que la mente logra manipular objetos abstractos, desarrollar un lenguaje simbólico, manipularlo y establecer relaciones para comprender y explicar diversos procesos, surge la tecnología. Para referirse a esto, Gonzalez & Hernandez (2000), indican que

> La técnica comenzó por resolver los problemas más cercanos al organismo y se fue alejando de manera directamente proporcional a la cognición humana entre más artificiales e imaginarias fue la solución. O si se prefiere, entre más abstracta se volvió la cognición humana, más la técnica se convirtió en tecnología. (p 11)

De esta forma, en esta perspectiva la tecnología es claramente diferente a la técnica, puesto que, mientras la última surge con las necesidades de la humanidad, la tecnología surge con el desarrollo cognitivo del ser humano, cuando este le permite comprender y explicar diversos procesos, entre ellos las técnicas.

Es decir que la tecnología está relacionada con la capacidad humana de comprender, explicar y formular procesos que le permitan acercarse a, adaptarse a o modificar las condiciones que su medio social y ambiental le presenta, frente a lo cual Herchbach (1995) indica que “reconocer la centralidad del conocimiento lleva a concebir la tecnología como algo más que un artefacto y como más que técnicas y procesos”.

Ahora bien, es necesario detenernos en este momento y comentar que nuestra postura se centrará en la perspectiva antropológica de la tecnología, puesto que estamos de acuerdo con la idea de que la técnica surge con los procesos de atender las necesidades del ser humano, y que la tecnología se desarrolla cuando la cognición le permite comprender, explicar, formular y comunicar procesos.

Además, esta idea admite la posibilidad de pensar que la tecnología puede tener distintas representaciones (físicas y abstractas) siempre que se preocupe, más que por el desarrollo de una teoría, por la generación de conocimiento real en la praxis. Frente a esto Herchbach (1995) comenta que “es por medio de la actividad que se define el conocimiento tecnológico, es la actividad la que establece y ordena los marcos de trabajo en los cuales se genera y usa el conocimiento tecnológico”.

Ahora bien, debido a que reconocemos la existencia de las tres perspectivas, y que en cada una interaccionan distintos conceptos de ciencia, técnica y tecnología, pasaremos a caracterizar la relación ciencia-tecnología y técnica-tecnología.

2.2 SOBRE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Para comenzar, reconocemos que existe una tendencia a pensar que la ciencia es superior a la tecnología, lo cual, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente sobre la perspectiva epistemológica, reconocemos que se debe en parte, a que la tecnología es un concepto relativamente reciente, puesto que surge aproximadamente en el siglo XVIII con la vinculación de la ciencia y la técnica en la sistematización de procesos de producción artesanal, por lo que se tiende a pesar que la tecnología no es más que “ciencia aplicada”. Sin embargo, ante esta postura García Moreno (2004) indica no estar de acuerdo, al comentar que “la tecnología no es ciencia aplicada, es ya una parcela del conocimiento humano totalmente independiente” (p 12) es decir que para este autor la tecnología es una forma de conocimiento específico. En concordancia, Gay & Ferreras (1995) reconocen que la tecnología no se basa únicamente en conocimientos científicos, sino también en la experiencia, conocimientos empíricos y otros.

Adicionalmente, estos dos autores comentan que la relación entre ciencia y tecnología no es jerárquica, entre otras cosas debido a que las dos pueden producir conocimiento, aunque este sea de diferente tipo. Puesto que, mientras la ciencia se preocupa por la indagación para la formulación de teorías y leyes que permitan explicar y predecir comportamientos, la tecnología se encuentra en el campo de la acción, priorizando los procesos de explicación y modificación de acciones o situaciones que se validan en su ejecución en la vida real. De esta forma, es posible hablar de conocimiento científico y tecnológico como dos tipos distintos, provenientes de ramas que, aunque tienen métodos e intereses diferentes, se complementan mutuamente.

Además, en busca de desdibujar la idea de que la tecnología es subordinada de la ciencia, se puede observar que Gay & Ferreras (1995) citan el libro de Elide Gortari, “Indagación crítica de la ciencia y la tecnología”, el comentario de que “la tecnología no solamente es mucho más antigua que la ciencia, sino que su desenvolvimiento a lo largo de la historia ha tenido una influencia mucho mayor sobre el avance científico que la ejercida por este en las innovaciones tecnológicas”.

Esta idea, que diferencia a la tecnología de la ciencia y las ubica sin hacer alusión a jerarquías entre ellas, es más clara cuando se comprende que, como menciona Gay & Ferreras (1995), mientras la ciencia busca explicar el mundo que rodea al ser humano a partir de la creación de teorías, la tecnología se origina con la necesidad de responder al deseo de transformar el mundo y suplir las necesidades que le permiten una mejor relación con el entorno, priorizando las acciones de creación, transformación, fabricación, entre otras.

Frente a esto, Herchbach (1995), comenta que mientras “la ciencia se basa en la observación y predicción con el objeto de confirmar una teoría; la tecnología predice con el objeto de influir y controlar la actividad”. Es decir que se puede identificar su diferencia en la finalidad y metodología característica de cada una, puesto que, además de que los objetivos de la ciencia y tecnología son diferentes, la primera se basa en el método científico para producir sus conocimientos, mientras que la segunda puede acudir a la experimentación que permita estudiar, controlar y modificar una situación, o como lo describe Jorge Sábato y Michael Mackenzie al ser citados por Gay & Ferreras (1995), “Mientras que la ciencia emplea exclusivamente el método científico, que es el único que acepta como legítimo, la tecnología usa cualquier método (científico o no) y su legitimidad es evaluada en relación con el éxito que con él se obtiene”.

Esta última consideración de que la ciencia es caracterizada por el método científico y la tecnología por hacer alusión a cualquier otro método que garantice la eficacia, es necesario, a nuestro parecer, ampliarla teniendo en cuenta que no todas las ciencias se limitan al método científico para la creación y validación de conocimiento. Un ejemplo lo presentan las matemáticas, que es reconocida socialmente como una ciencia, y generó un cuerpo propio de conocimientos y métodos que soportan los procesos de generación y validación de nuevos conocimientos. Sin embargo, es necesario mencionar que las Matemáticas, aunque no acuden al método científico para su validación, su finalidad, como cualquier otra ciencia, es la creación de teorías consideradas verdades. Pero además, contienen un componente de conocimientos y procedimientos tecnológicos, que son caracterizados por el ejercicio reflexivo en búsqueda de la eficiencia, lo cual deja como resultado nuevos discursos para describir, sustentar, recrear, etc., conocimientos, técnicas y procedimientos.

2.3 SOBRE TÉCNICA Y TECNOLOGÍA

La técnica surge cuando el ser humano debe adaptarse o transformar el mundo que lo rodea para sobrevivir o mejorar su calidad de vida, puesto que sus herramientas y capacidades biológicas son insuficientes para enfrentar las situaciones de la naturaleza. Ésta idea coincide con la lo expuesto por Gonzalez & Hernandez (2000) quienes afirman que “el rol esencial de la técnica en el hombre es el de remplazar la dotación biológica de origen”, por lo cual afirman que, el ser humano se caracteriza por su uso obligado de técnicas.

En esta postura antropológica se indica que cuando el ser humano tuvo que satisfacer algunas necesidades, generó una serie de procedimientos que le permitieron cumplir sus objetivos particulares, y cuando él se hace consciente, de que la ejecución de dichos procedimientos le permite conseguir lo que pretendía, se puede considerar que generó una técnica.

En concordancia, Gay & Ferreras (1995) reconocen que la técnica es el conjunto de procedimientos que se efectúan al construir objetos o desarrollar mediciones y análisis; Además, involucran la pericia y creatividad que se manifiesta en la ejecución de dichas actividades. Con esto, los autores concluye que

> Técnica es el o los procedimientos prácticos que tienen como objetivo la fabricación de bienes (transformación consciente de la materia) o la provisión de servicios. La técnica implica tanto el conocimiento de las operaciones, como el manejo de habilidades, tanto las herramientas, como los conocimientos técnicos y la capacidad inventiva.

Estos mismos autores comentan que la ejecución de técnicas no es exclusiva del ser humano, puesto que los animales en su necesidad de supervivencia las desarrollan en forma instintiva y particular a cada especie. Sin embargo, con respecto a la humanidad, la técnica surge en la interacción con su entorno, y se caracteriza por ser "consciente, reflexiva, inventiva *y* fundamentalmente individual. El individuo la aprende *y* la hace progresar (…) Sólo los humanos son capaces de construir con la imaginación algo que luego pueden concretar en la realidad"

Así, por el carácter social del ser humano, la técnica supera la mera satisfacción de necesidades básicas para pertenecer a la cultura, a la cual también pertenece la tecnología. Sin embargo, Gay & Ferreras (1995) reconocen que existe la tendencia a reducir las tecnologías a técnicas, es decir que con frecuencia cuando se habla de tecnología se hace referencia únicamente a pasos consecutivos que permiten cumplir un fin específico tras la implementación de utensilios, e incluso se llega a insinuar que la tecnología son simplemente dichos aparatos o herramientas.

Pero para identificar las diferencias entre técnica y tecnología partiremos de la idea propuesta por Gay & Ferreras (1995), en la que se comenta que, la primera abarca al conjunto de conocimientos técnicos y herramientas, mientras que la segunda tiene en cuenta "conocimientos científicos, la estructura social, la infraestructura productiva y las relaciones mutuas que surgen. Podemos plantear que la tecnología es técnica más estructura (estructura económica, sociocultural, de conocimientos, etc.)". Se puede decir entonces que la tecnología es

> El conjunto ordenado de conocimientos, y los correspondientes procesos, que tienen como objetivo la producción de bienes y servicios, teniendo en cuenta la técnica, la ciencia y los aspectos económicos, sociales y culturales involucrados; el término se hace extensivo a los productos (si los hubiera) resultantes de esos procesos, los que deben responder a

> necesidades o deseos de la sociedad y como ambición contribuir a mejorar la calidad de vida.

Es decir que al hablar de tecnología se tienen en cuenta aspectos que trascienden a las técnicas y herramientas, puesto que se cuenta con una serie de discursos, conocimientos, procesos, etc., que justifican, describen y crean; estos discursos son basados en una estructura social, económica o cultural. Además se puede pensar que la tecnología no siempre hace referencia a objetos tangibles, puesto que involucra procesos y conocimientos.

Otra consideración que propone los autores frente a la distinción entre técnica y tecnología, es:

> En la técnica se habla de “procedimientos” (los procedimientos puestos en práctica al realizar una actividad), mientras que en la tecnología se habla de “procesos”, procesos que involucran técnicas, conocimientos científicos y también empíricos, aspectos económicos y un determinado marco sociocultural)

Teniendo en cuenta lo mencionado hasta acá, es posible observar que la técnica, en el ser humano, se establece cuando este genera, se apropia y se hace consiente de una serie de acciones que le permiten cumplir un fin específico, por lo cual se constituye cuando se intenta responder a la pregunta sobre ¿cómo hacer?, mientras que la tecnología hace referencia a los procesos en los que por medio de buscar la respuesta a la pregunta del ¿por qué hacerlo así?, se acude a técnicas, conocimientos científicos y/o empíricos, un marco sociocultural, entre otras cosas. Esto implica que la tecnología es un proceso, que aunque tiene incidencia en la realidad, es esencialmente mental, y que tiene como resultado la construcción, modificación, o mejoramiento de técnicas, recursos físicos, herramientas o conocimientos.

Entonces, cuando hablamos de tecnología hacemos referencia a algo que trasciende a las meras técnicas y herramientas, y que en el caso del ser humano, hacen parte de su cultura, de tal forma que mientras “desde un punto de vista biológico; evolución es la adaptación del organismo al medio ambiente; desde un punto de vista técnico-tecnológico evolución es adecuación del medio ambiente al organismo”.

2.4 SOBRE TECNOLOGÍA

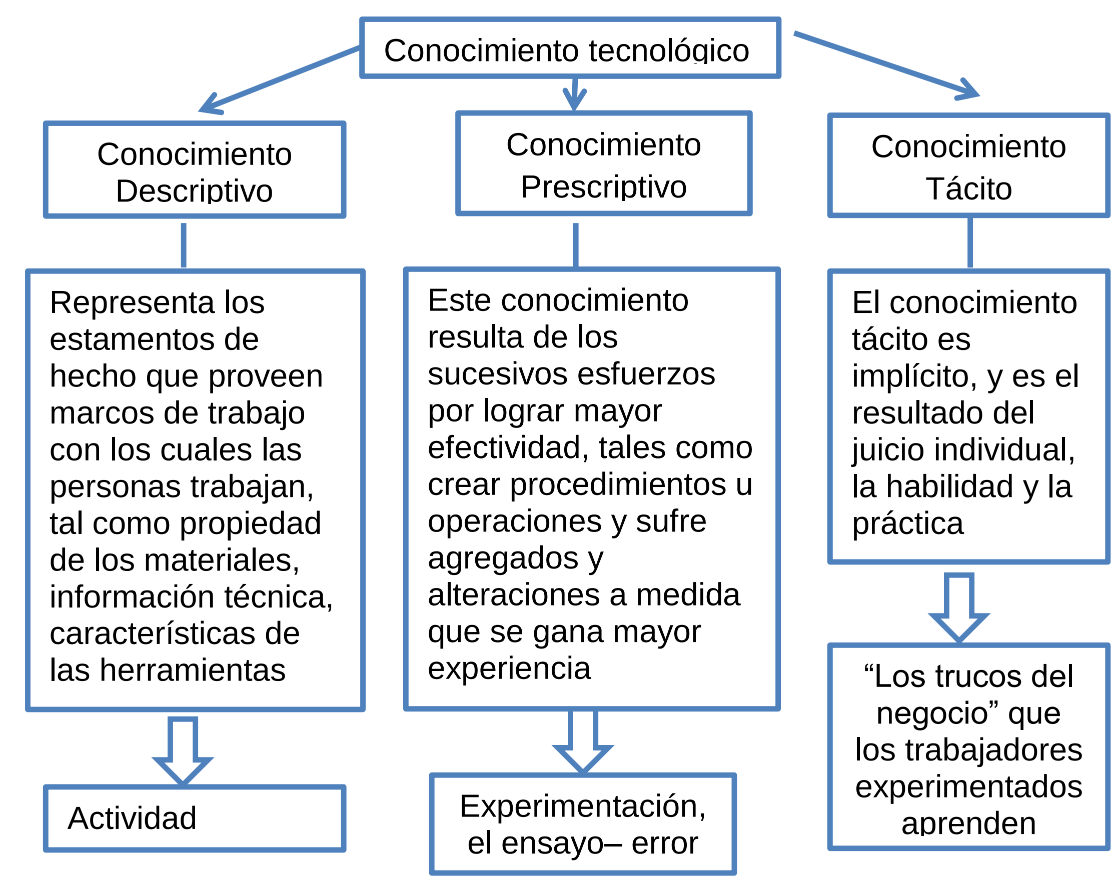
Retomando algunas ideas trabajadas en este capítulo es posible afirmar que la tecnología es el proceso que involucra el manejo de conocimientos de distinta índole, procedimientos, herramientas y cultura social, económica etc, de tal forma que permite la explicación, mejoramiento, control o formulación de cada uno de los aspectos que en ella (la tecnología) se relacionan. Esto implica que sus productos no son únicamente objetos tangibles, y no hay que limitar su comprensión al simple uso o existencia de técnicas o herramientas.

En concordancia con esta postura, en la que la tecnología abarca todos los recursos posibles para transformar el contexto físico, social, cultural, entre otros, Gay & Ferreras (1995), comentan que “La tecnología es la suma total de nuestros conocimientos, capacidades y habilidades para resolver problemas técnico-sociales”. Estos autores también comentan que los productos de la tecnología son más que objetos físicos, puesto que se puede hablar de tecnologías blandas y duras, de tal forma que:

> Las tecnologías “duras” son las que tienen como propósito la transformación de elementos materiales con el fin de producir bienes y servicios (…) Las tecnologías “blandas”, llamadas también gestiónales, se ocupan de la transformación de elementos simbólicos en bienes y servicios; su producto, que no es un elemento tangible, permite mejorar el funcionamiento de las instituciones u organizaciones en el logro de sus objetivos.

Por tanto, algunos de los productos de la tecnología están en el campo de las tecnologías blandas, en donde a partir de la manipulación de objetos simbólicos abstractos, se logra la formulación, modificación, mejora o control de los recursos

Grafico 1



tangibles y abstractos. Por esto es importante recordar que la tecnología es un proceso que genera conocimiento tecnológico, con respecto al cual Herchbach (1995) citando a Vincent (1984), indican la existencia de tres categorías del conocimiento tecnológico: el descriptivo, el prescriptivo y el tácito (ver Gráfico 1).

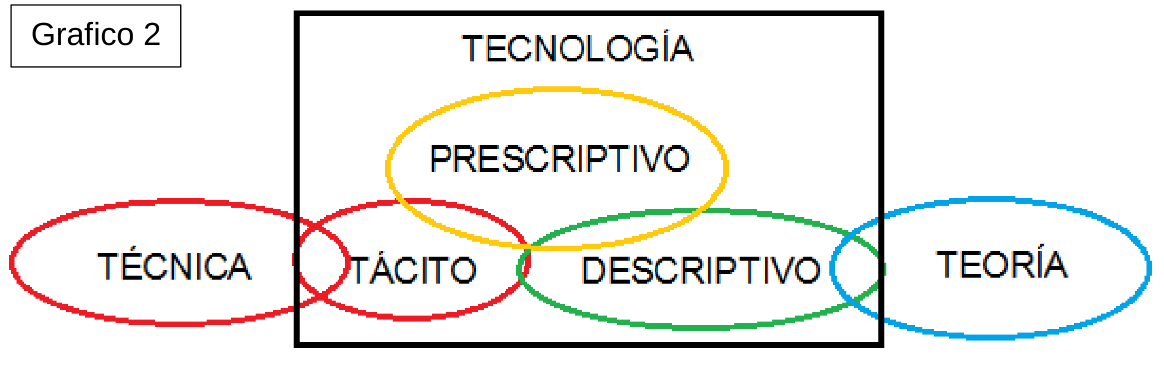
El conocimiento descriptivo representa los elementos que permiten la comprensión de los objetos o procesos involucrados en el desarrollo de un proceso tecnológico, de tal forma que está más ligado con marcos conceptuales que describen, explican o sustentan. Sin embargo, dichos conocimientos no son necesariamente de orden científico o teórico, puesto que puede tener grados inferiores de formalismo o basarse en actividades empíricas.

El conocimiento prescriptivo es el resultado de la búsqueda de la efectividad, y se complementa a medida que se gana mayor experiencia; se puede ver como la adquisición de conocimientos intelectuales pre-científicos, basados en la generalización del éxito de distintas técnicas. Este conocimiento se adquiere mediante la experimentación y el ejercicio de ensayo-error bien pensado, es decir que, a partir del reiterado uso de las técnicas y herramientas, se va adquiriendo este que está entre el conocimiento científico-teórico y el conocimiento meramente técnico.

El conocimiento tácito es el resultado de la actividad individual; es el menos aproximado a la formalidad del conocimiento científico–teórico, por lo cual es el más difícil de expresar, aunque los esquemas, diagramas o descripciones ayuden a explicarlo. Dicho distanciamiento del conocimiento formal es resultado de su amplia proximidad con la experimentación empírica, razón por la que es más subjetivo, desconocido e incluso protegido por sus poseedores. Sin embargo es necesario separarlo del conocimiento técnico, puesto que se adquiere tras el trabajo reiterado y bien pensado sobre las técnicas, en busca de regularidades y generalidades que permitan su modificación en busca de mejorarlas, es decir que es inmediatamente superior a los meros procedimientos del saber hacer primario.

Como se puede observar en el Grafico 2, el conocimiento tácito es más cercano al prescriptivo, y los dos están basados principalmente en conocimientos empíricos, más el primero que el segundo, a diferencia del conocimiento descriptivo que es más próximo al formalismo científico–teórico. Sin embargo, el conocimiento tácito vive en todos los niveles de formalismo, puesto que, aunque se desarrollen nuevos o mejores procedimientos, descripciones o justificaciones, siempre el sujeto que desarrolla alguna actividad tecnológica contará con percepciones subjetivas que le permitan desarrollar sus acciones en forma particular a sus habilidades, necesidades, intereses, etc.

Grafico 2



De este modo, entendemos que el conocimiento tácito, aunque es más próximo al saber de los procedimientos técnicos, está implícito transversalmente en todo conocimiento, dado que son habilidades que no se pueden enseñar desde la teoría; necesariamente tiene que acudir a la enseñanza visual y perceptiva del trabajo u actividad. Ligado a él se encuentra el conocimiento descriptivo, que cuenta con un mayor grado de formalismo y coherencia en las justificaciones o descripciones que realiza. Pero para llegar a este último, se debe pasar por el conocimiento prescriptivo, con el cual se consigue hablar de la reiteración y hacer una generalización.

Es decir que, el conocimiento descriptivo puede transmitirse desde la teoría, pero nunca estará completo sin el conocimiento tácito, pues sin el accionar no se puede saber si lo teórico o general aplica siempre de la misma manera única y mecánica. Es por eso que Herchbach (1995) indica que “las máximas técnicas, reglas, recetas y procedimientos, habitualmente se aprenden mejor en conjunción con la actividad, frecuentemente en el trabajo”. El autor también señala que “el conocimiento tecnológico es dinámico y su significado se construye y reconstruye al tiempo que los individuos se esfuerzan por resolver algo usando el conocimiento, ya sea este conceptual, analítico o manipulativo”, es decir que continuamente la tecnología permite la interacción de estos tres tipos de conocimiento, permitiendo pasar por cualquiera de ellos para su reconstrucción o modificación.

En la misma línea, Herchbach (1995) indica que el conocimiento científico puede categorizarse según algunos niveles, teniendo en cuenta que “el monto de conocimiento discursivo aumenta cuando crece y se complejiza el conocimiento tecnológico” (p 6). Así, él describe, en forma ascendente, los siguientes niveles:

- Artesanos o craft skills:

  Se refiere a los que ejercen un oficio y constituyen el nivel más bajo, la mayor parte de sus conocimientos son tácitos además de prescriptivos, y en un porcentaje menor hay conocimientos descriptivos incluidos. Dado el alto nivel de conocimiento tácito, la mejor manera de enseñar las habilidades de los artesanos es por medio de la observación, la imitación, el ensayo y error más que por medios discursivos (p 6).

- Las máximas técnicas:
  Consiste en generalizaciones sobre las habilidades aplicadas en hacer o usar tecnología. Las máximas técnicas, de todos modos, son usualmente incompletas sin el conocimiento tácito (poco reconocido) que acompaña el hacer actual. Por esta razón, las máximas técnicas, reglas, recetas y procedimientos, habitualmente se aprenden mejor en conjunción con actividad, frecuentemente en el trabajo (p 6).

- Las leyes descriptivas:
  Formulaciones generales y explícitas derivadas directamente de la experiencia. Porque derivan de la experiencia, se las nombra como leyes empíricas y en su mayoría son formuladas sobre la base de prueba y observación. Las leyes descriptivas no son todavía científicas porque carecen de teoría explicativa suficiente, a pesar de poder ser muy sofisticadas y usar fórmulas y ecuaciones matemáticas además de descripciones verbales. Las leyes descriptivas permiten, ellas mismas, la instrucción formalizada (p 6)

- Teorías tecnológicas:
  Que sistemáticamente relacionan una cantidad de leyes o proveen marcos de trabajo explicativos coherentes. Las teorías tecnológicas son aplicaciones de conocimiento científico a situaciones reales. (…) De todos modos, para decir que una teoría está incrementando parte del conocimiento tecnológico, no le resta importancia al conocimiento prescriptivo y tácito generado por medio de la experiencia práctica (p 6).

Ahora bien, Con el fin de recordar y aclarar algunas características de la tecnología, recurrimos nuevamente a Gay & Ferreras (1995) quienes reconocen que:

> Los problemas vinculados a la tecnología no son meramente técnico-científicos, sino también sociales. El objeto de la tecnología es la satisfacción de necesidades sociales concretas (…) La tecnología utiliza el método científico, comprende un saber sistematizado, y en su accionar se maneja tanto a nivel práctico como conceptual, en otras palabras, abarca el hacer técnico *y* su reflexión teórica (…) La tecnología también comprende una estructura conexa, e incluso una estructura profunda. Los conocimientos en que se basa constituyen una determinada estructura cognoscitiva, un marco mental, una cosmología social que actúa como un terreno fértil en el que pueden plantarse las semillas de determinados tipos de conocimientos para que crezcan y generen nuevos conocimientos.

Entonces, como conclusión parcial, reconocemos que la tecnología son los procesos en los que se involucran técnicas; conocimientos técnicos, científicos, empíricos; estructuras sociales y económicas, entre otros recursos tangibles y no tangibles, para solucionar problemas sociales mediante la producción de conocimiento tecnológico para la transformación, mejoramiento y/o creación de la ciencia, técnica o simplemente la realidad.

Dichos procesos son posibles gracias a la existencia, innata y desarrollada, de la capacidad de razonamiento mediante la manipulación de objetos abstractos que representan objetos concretos. Esto implica, que la tecnología, aunque tiene incidencias en el mundo físico, es un proceso mental.

2.5 DESCUBRIMIENTO, INVENCIÓN E INNOVACIÓN

Al abordar las relaciones y distinciones entre ciencia y tecnología, Gay & Ferreras (1995) señalan que mientras la primera avanza con el descubrimiento de hechos o leyes que explican los fenómenos, la segunda lo hace a partir de la invención o la innovación en el campo de los objetos, productos o procesos. Esto debido a que cuando se habla de descubrimiento se hace alusión a fenómenos ya existentes pero desconocidos, a diferencia de la invención que habla de algo nuevo por su tono de creación.

> Un descubrimiento es el hallazgo de algo que era desconocido, pero que existía. En nuestro campo de análisis podemos decir que es la puesta en evidencia de una estructura (una ley) de la naturaleza, Newton descubrió la gravitación universal (…) Invención es todo nuevo dispositivo, mecanismo o procedimiento concebido por el espíritu humano; en otras palabras es la acción y el efecto de encontrar la idea de un nuevo producto o procedimiento. Podemos decir también que la invención es la propuesta, de un nuevo medio técnico para obtener un resultado práctico

El autor también señala que, la invención es un proceso artístico y complicado puesto que depende de una buena planificación a partir de la aplicación de técnicas previamente conocidas. Además, comienza a ser socialmente útil en el momento en que se generan condiciones económicas y sociales que permiten su producción, uso o difusión.

Con respecto a la innovación Gay & Ferreras (1995) señalan que, en el campo técnico-tecnológico, se lleva a cabo cuando se agrega un invento a un proceso productivo, es decir que a partir de la incorporación de una invención en un proceso ya existente, se logra modificarlo en busca de mejorarlo. Sin embargo, señalan los autores, que no todas las invenciones llevan a innovaciones y no todas las innovaciones tienen éxito, puesto que en muchos casos las ideas e innovaciones nunca se llevan a cabo o quedan sin ser desarrolladas durante mucho tiempo, en espera de las condiciones sociales, culturales o económicas que las permitan, por lo cual, los autores señalan que:

> La innovación es el resultado de lo técnicamente posible con lo socioeconómicamente deseado o aceptado, y desde el punto de vista de la sociedad o de la producción, puede ser relativamente insignificante como potencialmente revolucionaria. La innovación es un hecho tecnológico.

Así, teniendo en cuenta que el descubrimiento es un hecho científico, mientras que la innovación e invención son tecnológicos, los autores afirman que “El proceso tecnológico es, en última instancia, un acto de creación. En el caso de la producción de objetos la tecnología se aproxima más al arte que a la ciencia”

2.6 SOBRE TECNOLOGÍA Y MATEMÁTICAS

Gascón (1998) aborda las nociones de técnica, tecnología de la técnica y teoría matemática al exponer la incidencia del enfoque antropológico en el desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas. Para esto, inicia indicando que este enfoque propuesto por Chevallard, acoge la idea de que la actividad matemática debe interpretarse como una actividad humana y no como la mera construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo.

Así, en primera instancia el autor acude a las ideas de “matemáticas institucionales” y “actividades matemáticas institucionales”, de tal forma que la matemática escolar es un caso particular de la primera y la enseñanza-aprendizaje escolar de las matemáticas es un caso particular de la segunda.

Bajo esta idea, Gascón (1998) define la noción de “obra matemática”, indicando que por ser esta el resultado de la acción humana, surge como respuesta a una serie de cuestiones y como medio para realizar tareas específicas dentro de determinada institución. Además, aclara que “Las cuestiones y las tareas problemáticas a las que responde una obra matemática acaban cristalizando en uno o más tipos de problemas” (p 11). Con el fin de una mejor comprensión, el autor indica que:

> por ejemplo, podemos considerar la obra matemática que responde, entre otras, a cuestiones del tipo: “¿Cómo obtener determinado objeto al menor precio posible?”, “¿Cómo alcanzar el mayor efecto posible con un determinado esfuerzo?”, “¿Cómo efectuar el máximo trabajo dentro de un tiempo dado?”, “¿Cómo obtener el máximo beneficio corriendo el mínimo riesgo?”, “¿Cómo construir una máquina que gaste el mínimo de energía para llevar a cabo cierto trabajo?”, “¿Cómo construir un recipiente cilíndrico de determinado volumen minimizando el gasto de materia prima?”, etc. Se

> trata de cuestiones que de una u otra forma se plantean en la institución escolar. (p 11)

Sin embargo, es importante aclarar que un tipo de problemas se caracteriza, no por la similitud en sus múltiples enunciados, sino por la existencia de una técnica matemática que pueda abordarlos y producir distintos problemas del mismo tipo. Además, dicha técnica debe surgir en la institución como una manera correcta, comprensible y justificada de hacer. Es decir que, según este autor, la técnica existe entre tanto haya en su entorno un “discurso interpretativo y justificativo de la técnica así como de su ámbito de aplicabilidad o validez” (p 12). A ese discurso se le llama tecnología, y además de justificar, describir y permitir la comprensión de la técnica, genera aportes que permiten modificarla con el fin de aumentar sus alcances, mejorándola e incluso promoviendo la creación de otras.

Esta idea coincide con las propuestas abordadas anteriormente sobre técnica y tecnología, puesto que se reconoce que la técnica responde a una serie de cuestionamientos que se abordan mediante la acción humana, la cual adquiere el estatus de técnica cuando el individuo se hace consciente de su estructura y pertinencia en un contexto o institución. Además, el proceso reflexivo, basado en una estructura social, económica y cultural, que se requiere para desarrollar un discurso adecuado sobre dichas técnicas, adquieren el carácter de tecnología al permitir la descripción, explicación y/o justificación.

En concordancia, Gascón (1998) indica que la tecnología también es representada en forma de proposiciones, que describen y justifican el alcance de una técnica, sus relaciones con otras, algunas generalizaciones y limitaciones, entre otras características de cada herramienta o técnica en Matemáticas. Además, con respecto a la noción de teoría, se reconoce que cuando se desarrolla tecnología de la tecnología de una técnica, se genera un discurso matemático lo suficientemente amplio y sólido para justificar e interpretar la tecnología de determinada técnica; de tal forma que la teoría ocupa por lo general un distanciamiento con la técnica, mayor que el que ocupa la tecnología, puesto que esta última en ocasiones hace parte de la actividad matemática en la que se usan las técnicas, mientras que la teoría con frecuencia está ausente de dichas prácticas y solo sale a relucir por expertos en momentos en los que la finalidad no es la mera realización de una acción, sino la justificación y análisis de procesos.

Esta afirmación coincide con los planteamientos abordados anteriormente sobre los tipos de conocimiento tecnológico propuestos por Herchbach (1995), debido a que se observa cómo el conocimiento tácito es más cercano a la técnica o el hacer, mientras que el concomimiento descriptivo, que se encuentra en un nivel superior por su mayor grado de discurso, es más cercano a la teoría. Además, nos permite recordar que la tecnología no es expresada únicamente por medio de objetos tangibles, debido a que mediante estructuras abstractas, que hacen parte de las tecnologías blandas, también se genera tecnología.

Con el objetivo de sintetizar estas ideas, Gascón (1998) se comenta que:

> Podemos decir, en resumen, que la matemática institucionalizada y, en particular, la matemática escolar, se organiza en obras matemáticas que son conjuntos estructurados de objetos matemáticos que surgen como respuesta a ciertas cuestiones planteables en el seno de dicha institución. Las obras matemáticas son así el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la *práctica matemática* que consta de *tareas* (materializadas en *tipos de problemas)* y *técnicas* útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el *discurso razonado sobre dicha práctica* que está constituido por dos niveles, el de las *tecnologías* y el de las *teorías*. Estos son, en definitiva, los elementos constitutivos de toda obra matemática (p 13).

Sin embargo, aclara el autor que, aunque en una obra matemática se involucran distintos niveles de discurso, de tal forma que se especifiquen las técnicas, tecnologías o teorías, su caracterización viene dada por la función que desempeñe en la institución o la práctica matemática, de tal forma que un objeto matemático puede ser usado como técnica, tecnología o teoría, dependiendo del proceso que se esté desarrollando para suplir determinada necesidad, por lo cual no se puede definir el carácter de un objeto, sin estudiar la estructura de la actividad matemática en la que se le da vida. En palabras del autor significa que “Resulta, en definitiva, que el carácter teórico o práctico de un objeto matemático depende, en cada institución y en cada actividad matemática concreta, de la *función* que dicho objeto desempeñe” (Gascón, 1998, p 13). Es decir que:

> Lejos de ser independientes, los elementos constitutivos de una obra matemática están fuertemente interrelacionados entre sí: el desarrollo de las *técnicas* generan nuevos *tipos de problemas* y provoca nuevas necesidades *tecnológico-teóricas*. Éstas, a su vez, permiten *modificar las técnicas* ya establecidas, *interrelacionarlas con otras*, *generar nuevas técnicas* y, en definitiva, plantear y abordar nuevos *tipos de problemas*. (Gascón, 1998, p 13)

Adicionalmente, el autor aborda los momentos en el proceso de estudio de una obra matemática, e indica que cada uno hace referencia a una dimensión o aspecto de la actividad matemática, estos pueden permitirnos identificar en distintas situaciones acciones que involucran el trabajo con técnicas, tecnologías o teorías. Estos momentos son:

Primer encuentro: Es en el que los individuos identifican los objetos que les permiten enunciar problemas de un determinado tipo

Momento exploratorio: Es en el cual el individuo hace uso del pensamiento lógico para buscar formas de enfrentar el problema, de tal manera que acuda a técnicas matemáticas que conozca, aunque no se espera que sea capaz de explicarlas o justificarlas. Se supone además, que esta etapa lleve a bloqueos que solo se pueden superar con la familiarización de las técnicas que permitan su dominio.

Momento del trabajo de la técnica: Este complementa el momento exploratorio, y permite que el individuo logre dominar las técnicas exploradas, de tal forma que llegue a explicarlas, realice variaciones de las mismas, las relacione con otras técnicas e incluso pueda llegar a producir nuevas

Momentos de institucionalización y evaluación: Se concreta el conocimiento desarrollado sobre la técnica y se estudia su pertinencia, valides, eficacia, etc.

En forma complementaria, encontramos que Pérez et al. (s.f) aborda esta perspectiva indicando que dicho modelo se ha denominado *praxeología,* y es formada por dos aspectos relacionados: el aspecto de la *praxis* o del *saber hacer*, que se refiere a un cierto *tipo de tareas con sus técnicas* útiles para resolverlas, y el aspecto del *logos* o del *saber*, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los cuales reciben el nombre de *tecnología*, que sería el discurso razonado sobre la práctica.

Los autores también señalan que en la actividad matemática no hay *praxis* sin *logos* y tampoco hay *logos* sin *praxis*, puesto que las dos están unidas, y una organización matemática de este tipo, es una *praxeología matemática*. Además "los elementos constitutivos de una obra matemática están interrelacionados, el desarrollo de las técnicas, genera otros problemas y provoca necesidades tecnólogico-teóricas. Los teoremas constituyen teoría, de utilidad para justificar, a veces no adecuada para explicar" (Pérez et al. s.f, pág. 5), es decir que la técnica, tecnología y teoría, interactúan de tal forma que la existencia de uno permite la producción y mejora del otro, consiguiendo así nutrirse y autoformarse.

Entonces, luego de las consideraciones realizadas en este capítulo, establecemos, entre otras, las siguientes:

- La técnica hace alusión a los procedimientos que responden al cómo hacer y surgen del proceso humano de adaptación del entorno a sus necesidades.
- Las técnicas están basadas en conocimiento técnico, que hace alusión a la consciencia que se tiene de una serie de pasos que permiten llegar al cumplimiento de un objetivo específico.
- El conocimiento técnico es más cercano al conocimiento tecnología tácito, que al prescriptivo y descriptivo, este último es más cercano al conocimiento teórico de las ciencias.

- Las técnicas matemáticas atienden a un tipo de problema, y a una obra de la matemática institucional.
- Tecnología es el ejercicio reflexivo que se desarrolla en torno a las técnicas, y que permite la generación de un discurso que describe, justifica o permite la creación o mejoramiento de técnicas.
- La tecnología matemática hace alusión al discurso que describe y justifica distintos procedimientos matemáticos, y la tecnología de la tecnología adquiere el carácter de teoría.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS EN CUANTO A MÉTODOS MATRICIALES CON RESPECTO A SISTEMAS DE ECUACIONES

A continuación se mostrarán algunos métodos relevantes en cuanto a matrices, y teniendo en cuenta la perspectiva histórica se tratará de rastrear la esencia detrás de algunos métodos, partiendo desde la solución de sistemas de ecuaciones hasta algunos cálculos matriciales más relevantes de hoy en día. Para esto plantearemos algunas preguntas tales como: ¿por qué algunos métodos no prosperaron?, ¿cómo surge la transformación de un método?, ¿cuál método se considera el más eficiente?, ¿qué argumentos sustentan el cambio en algunos métodos?, ¿quién propuso en esencia el método?, y en busca de solucionarlas ampliaremos algunas menciones del capítulo uno.

Ahora bien, aunque existen documentos que tratan distintos métodos de solución de sistemas de ecuaciones y métodos matriciales de manera teórica haciendo un rastreo eficiente al respecto, por limitaciones de este trabajo, abordaremos reflexiones propias sobre los métodos y no consideraciones de otros autores. Sin embargo, creemos importante que el lector haga un estudio más profundo de lo sucedido en cada método aquí mencionado.

Así mismo, a lo largo del contenido del capítulo, se mostrarán algunas consideraciones en cuanto a tecnología haciendo énfasis en cada método, para caracterizarlos como técnica, tecnología o teoría a partir del análisis de su desarrollo desde la historia de las matemáticas.

Finalmente, es de aclarar que la manera en que se muestran los métodos y sus respectivos análisis no se ajusta a una forma cronológica, sino que se prioriza las relaciones de similitud entre ellos, permitiendo observar una aparente evolución conceptual entre métodos.

3.1 EN BUSCA DE UNA FÓRMULA PARA LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

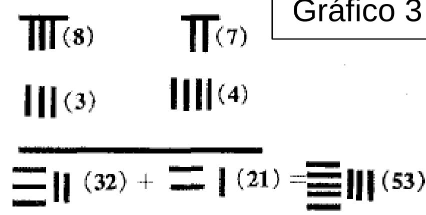
3.1.1 Ying Buzu (Demasiado y no suficiente)

En Tenorio & Martín (s.f) y Ji-huan (2002) se señala como en el texto Jiu Zhang Suan Shu (Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas) que es un texto que recopilaba todo el conocimiento matemático en China desde el siglo X a.C. hasta el siglo I a.C. Se presenta el séptimo capítulo titulado Ying Buzu (demasiado y no suficiente), en el cual se presentan 19 problemas que son solucionados con un caso especial de la regla de Cramer para la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se propone así un ejemplo que indica que:

> Hay una cosa de un precio desconocido y el pueblo de un número desconocido que compran juntos la cosa, si cada uno se le asigna 8 unidades de dinero, hay un excedente de 3, y si cada uno se le asigna 7 unidades de dinero, existe una deficiencia de 4. ¿Cuál es el precio y el número de personas? (Ji-huan, 2002)

Con respecto a este problema, el autor indica que se propone la siguiente solución (ver gráfico 3) acompañada de las respectivas indicaciones:

Gráfico 3



- Se ubican en la parte superior las cantidades asignadas a cada individuo que compra la cosa.
- Se ubica en la parte inferior a cada valor, la respectiva diferencia con respecto al valor del objeto (el excedente y el faltante).
- Luego suma los productos cruzados $(8 \times 4) = 32$ y $(7 \times 3) = 21$, para obtener como resultado $32 + 21 = 53$.
- Luego se determina la diferencia entre los valores de exceso y defecto $4 - 3 = 1$
- Enseguida se divide el resultado de la suma con el resultado de la resta $53 \div 1 = 53$ y ese valor representa la cantidad de personas que participan de la compra.

Finalmente, el autor señala que si a_1 y a_2 son las distintas cantidades de dinero que cada persona da para la compra, y c_1 y c_2 son el exceso y el defecto con respecto al precio real de la cosa. Entonces el valor real del objeto es dado por:

$$y = \frac{a_2 c_1 + a_1 c_2}{c_2 - c_1}$$

Y la cantidad de personas que participan de la compra es:

$$x = \frac{c_1 + c_2}{|a_1 - a_2|}$$

Cabe resaltar que las ecuaciones del ejercicio anterior pueden formularse con la nomenclatura actual, en donde y es el costo de la cosa que se va a comprar y x es la cantidad de personas que realizan la compra, a_1 y a_2 representan los dineros asignados por cada individuo, además c_1 y c_2.representa el respectivo exceso y defecto:

$$\begin{cases} a_1x = y + c_1 \\ a_2x = y - c_2 \end{cases} \text{ que es equivalente a } \begin{cases} a_1x - y = c_1 \\ a_2x - y = -c_2 \end{cases}$$

Es decir que:

$$\begin{cases} 8x = y + 3 \\ 7x = y - 4 \end{cases} = \begin{cases} 8x - y = 3 \\ 7x - y = -4 \end{cases}$$

Los valores a_1, a_2, c_1 y c_2 son números positivos.

Con el fin de aclarar la propuesta realizada por los chinos para la solución de sistemas de ecuaciones de 2×2, encontramos en Algarra et al (2004) otro ejemplo de un problema presentado en el capítulo Ying Buzu del texto chino, este ejemplo consiste en:

> Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarán 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedarán 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el costo de las gallinas? (Algarra, et al, 2004)

Para formular la solución se llamarán a_1 y a_2 a las contribuciones económicas de cada miembro del grupo de compradores, y a sus respectivos exceso y defecto (lo que sobra y lo que deben) c_1 y c_2. Así, se señala que los chinos proponen en su texto la siguiente estructura para dar la solución:

- Se ubican en la parte superior las cantidades asignadas a cada individuo que compra la cosa. Luego se ubica en la parte inferir a cada valor, la respectiva diferencia con respecto al valor del objeto (el excedente y el faltante) (ver gráfico 4).

Gráfico 4

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Cantidad asignada a cada comprador

Exceso y defecto con respecto al valor real del objeto

- Luego calcula los productos cruzados $(9 \times 16) = 144$ y $(6 \times 11) = 66$.

$$\begin{pmatrix} a_1c_2 & a_2c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 66 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

- Luego suma los productos cruzados 144+66 $= 210$ y los valores de exceso y defecto $11 + 16 = 27$

$$(a_1c_2 + a_2c_1) = 210 \qquad y \qquad (c_1 + c_2) = 27$$

De tal forma que, el costo total de las gallinas es:

$$y = \frac{a_2c_1 + a_1c_2}{a_1 - a_2} = \frac{210}{3} = 70$$

Y el número total de personas:

$$x = \frac{c_1 + c_2}{a_1 - a_2} = \frac{27}{3} = 9$$

Adicionalmente, los autores indican que el problema se puede formular como el siguiente sistema de ecuaciones, en el que x es el número de personas y y es el costo de las gallinas:

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = -c_2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 9x - y = 11 \\ 6x - y = -16 \end{cases}$$

En los dos casos ejemplificados es posible ver algunas regularidades, de tal forma que en ambos casos se presentan sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_1x = b_1y + c_1 \\ a_2x = b_2y - c_2 \end{cases} \textit{que es equivalente a} \begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = -c_2 \end{cases}$$

en donde el valor de c_2 hace alusión al dinero que falta para completar el costo de un objeto, además en los ejercicios abordados el valor de b_1 y b_2 es la unidad.

Se desconocen posibles discursos que sustentaran las propuestas del Ying Buzu, por lo que se puede observar que en los textos en los que se comunicaba el conocimiento matemático de la época, los chinos expresaban únicamente el conocimiento técnico del método, sobre el cual se priorizó únicamente un conocimiento tácito o prescriptivo, que carece de rigor teórico en la descripción y justificación. Entonces, en los planteamientos de los chinos es posible ver algunos inconvenientes con relación a la forma de formular y comunicar conocimiento matemático, puesto que se debía acudir a ejemplificaciones de situaciones particulares, lo cual muestra una deficiencia en el desarrollo de lenguaje formal para la comunicación basada en la generalización. Además los casos para los cuales se podía aplicar el método propuesto eran estructuralmente limitados, es decir que solo funcionaban para casos particulares de sistemas de ecuaciones 2×2.

3.1.2 **Regla del modo de Cardano**

Por otra parte, Cardano (1993) explica que en el "Ars Magna, se da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que llama "Regla de Modo". Para ejemplificarla el texto expone el siguiente ejercicio:

Siete pies de seda verde y tres de coste negro cuestan 72 denarios y, al mismo precio, dos de color verde y cuatro de coste negro cuestan 52 denarios. Deseamos conocer su precio.

Para lo cual se siguen los siguientes pasos:

> Divide la mayor longitud, es decir 7 pies, y el número de denarios, es decir 72, por la longitud más pequeña, es decir 3 y multiplica los cocientes por el número de pies asumido en el segundo caso, correspondiente al menor, y a partir del producto del número de pies restar de la longitud restante en el segundo caso respectivamente, y con el resto dividir la diferencia entre el precio, 2, y el producto. Dará como resultado el valor de la mayor longitud en el primer caso (Cardano, 1993).

Una interpretación actual de la propuesta sería la siguiente:

Acción	**Regla modo** **Caso particular**	**Regla modo** **Generalización**
Si se plantearan las ecuaciones en la actualidad tendríamos $$7x + 3y = 72$$ $$2x + 4y = 52$$ Con: $$x = \text{costo de un pie de seda verde}$$ $$y = \text{costo de un pie de seda negra}$$		Forma del sistema de ecuaciones. $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$ $$a_1 > b_1$$ $$a_2 > b_2$$
"Divide la mayor longitud, es decir 7 pies, y el número de denarios, es decir 72, por la longitud más pequeña, es decir 3" Escoger el valor mayor de la primera ecuación (7) y el número constante o total (72), y dividirlos entre el menor valor (3)	$$\frac{7}{3} \text{ y } \frac{72}{3}$$ Paso a fracción mixta $$2\frac{1}{3} \text{ y } 24$$	$$\frac{a_1}{b_1} \quad y \quad \frac{c_1}{b_1}$$
"multiplica los cocientes por el número de pies asumido en el segundo caso, correspondiente al menor" Se multiplican estos productos por la cantidad equivalente en la segunda ecuación (la equivalente a la que se dividió en la primera ecuación "4")	$$2\frac{1}{3}(4) \text{ y } 24(4)$$ $$9\frac{1}{3} \text{ y } 96$$	$$\frac{a_1}{b_1} \cdot b_2 \quad y \quad \frac{c_1}{b_1} \cdot b_2$$
"a partir del producto del número de pies, restar de la longitud restante en el	$$9\frac{1}{3} - 2 \quad \text{y} \quad 96 - 52$$	

segundo caso respectivamente” A estos productos se le resta las cantidades respectivas expuestas en la segunda ecuación (2 y 52).	$7\frac{1}{3}$ y 44	$\frac{a_1b_2}{b_1} - a_2 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1}$ $\frac{c_1b_2}{b_1} - c_2 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{b_1}$
“y con el resto dividir la diferencia entre el precio, 2, y el producto. Dará como resultado el valor de la mayor longitud en el primer caso” Se divide 44 por $7\frac{1}{3}$ y esto permite ver el precio de un pie de seda verde	$44 \div 7\frac{1}{3} = 6$	$\frac{\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{b_1}}{\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$
Y a partir de allí se puede calcular el precio de siete pies de seda verde, luego de tres pies de coste negro y finalmente precio de un coste negro Se remplaza el valor obtenido en la primera ecuación y se despeja la otra variable.	$(7 \cdot 6) + 3y = 72$ $42 + 3y = 72$ $3y = 30$ $y = \frac{30}{3}$ $y = 10$	$a_1\left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_1y = c_1$ $y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$

Luego de observar la descripción desarrollada por Cardano, es posible ver que él desarrolla un discurso que permite un acercamiento a la generalización de su propuesta. Además, muestra un claro ejemplo de reflexión sobre los procedimientos en la solución de sistemas de ecuaciones, que le permiten encontrar generalizaciones de la aplicación de técnicas, las cuales luego de comprenderlas le dejan modificar o formular procedimientos para hacerlos más eficientes y eficaces.

Así, logramos observar una generalización del método de sustitución para la solución de sistemas de ecuaciones 2×2, logrando determinar la solución del sistema sin la necesidad de trabajar con valores desconocidos, puesto que se limita a realizar operaciones únicamente con los coeficientes de las ecuaciones. Además el conjunto numérico que aborda es menos limitado que el trabajado por los chinos en el primer método propuesto. También se observa un mayor desarrollo en el lenguaje y estilo de presentación de las explicaciones, junto a una mayor gama de estructuras de sistemas de ecuaciones.

3.1.2 Regla de Cramer

Hasta el momento se ha trabajado, el método chino de exceso y defecto denominado “Ying Buzu”, y la “Regla del Modo” propuesta por Cardano, observando, ligeramente, cómo se manipulan niveles distintos de conocimiento tecnológico, además de los desarrollos tecnológicos que han implicado a nivel de técnicas, conocimiento, formalidad del discurso, lenguaje, grados de generalidad, abstracción, etc.

Ahora centraremos la atención en el método de Cramer, el cual desde nuestro parecer está más cercano a la teoría y por tanto ha hecho parte de grandes desarrollos tecnológicos. Sin embargo, antes de abordarlo recordaremos algunos sucesos significativos en el desarrollo de los determinantes, que Como ya mencionamos en el primer capítulo, aparece en Japón y Europa casi al mismo tiempo. Por otra parte, Rosales (2012) indica que “Leibniz también conocía que un determinante se puede expandir usando columnas, lo que hoy se conoce como la expansión de Laplace”, sobre esta encontramos que:

Se menciona en Polo (2014) que

> Leibniz hacia 1683, expuso, sin explicar cómo llegó a ella, la regla de reducción para sistemas cuyo número de ecuaciones supera en una unidad al de incógnitas (…) Esta regla está expuesta en un lenguaje discursivo, añadiendo un ejemplo con dos incógnitas en el que emplea una notación que prescinde de los coeficientes numéricos y refleja únicamente con dos dígitos las claves numéricas de su posición, el primero indica la ecuación, el segundo indica la incógnita a la que pertenece:

De tal forma, que por ejemplo, la propuesta de Leibniz para representar un sistema de ecuaciones 3×2 sería:

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

Mientas que en la actualidad lo representaríamos en la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0 \\ a_{30} + a_{31}x + a_{32}y = 0 \end{cases}$$

Sobre esto, Rosales (2009) indica que Leibniz argumentaba la solución del anterior sistema en la siguiente igualdad:

$$10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 = 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30$$

Lo que significa que en este sistema se puede suprimir una ecuación porque se verifica la siguiente condición, escrita como en la transcripción de Knobloch.

$$\left.\begin{array}{r} +10 \cdot 21 \cdot 32 \\ -10 \cdot 22 \cdot 31 \\ -11 \cdot 20 \cdot 32 \\ +11 \cdot 22 \cdot 30 \\ +12 \cdot 20 \cdot 31 \\ -12 \cdot 21 \cdot 30 \end{array}\right\} = 0$$

Que en terminología actual corresponde a la anulación del determinante del sistema: $|a_{ij}| = 0$

$$\begin{array}{c} +0,1,2 \\ -0,2,1 \\ -1,0,2 \\ +1,2,0 \\ +2,0,1 \\ -2,1,0 \end{array}$$

Polo (2013) indica que Leibniz para explicar el método señala que:

> "a una combinación se le asigna un signo arbitrario, y las que le siguen que difieren en dos, cuatro, seis, etc. coeficientes tiene signo opuesto al de ella; aquellas que difieren en tres, cinco, siete, etc. coeficientes tienen el mismo signo que ella" (p 31)

De esta propuesta es importante resaltar distintos aspectos, por ejemplo, el hecho de que Leibniz no usa coeficientes numéricos, sino dos dígitos, el primero mostrando en qué ecuación está, y el segundo a qué letra pertenece.

Por estos motivos, es posible identificar importantes desarrollos tecnológicos con respecto a la notación y el lenguaje, el cual atiende a procesos de generalización, puesto que Leibniz escribe sus ecuaciones sin hacer referencia a particularidades en los coeficientes que maneja, a diferencia de cómo se debía hacer con el método chino, en donde las ecuaciones que se podían solucionar tenían una estructura particular. Además, al usar la combinación de dos dígitos para señalar la ubicación de una cantidad en un sistema de ecuaciones, permite referirse a estos de una manera más precisa y eficaz, lo cual puede considerarse tecnología del tipo prescriptivo y descriptivo, puesto que se aleja de las aproximaciones primitivas de las ecuaciones y se refiere a ella con símbolos con nuevos significativos y niveles de abstracción.

Otro aspecto significativo es el uso exclusivo de los coeficientes en el proceso de solucionar sistemas de ecuaciones, puesto que en sus arreglos rectangulares la letra solo es usada como una forma de organización y no como un valor a manipular, es decir que su interpretación es más próxima a la de indeterminada, permitiéndole trabajar únicamente sobre los valores de los coeficientes.

Adicionalmente Polo (2013) indica que en 1730, Maclaurin escribió “Tratados de álgebra”. En donde en el capítulo XII se abordan dos teoremas, el primero lo explica (Ruiz) Señalando que:

Si se tiene el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

La solución y viene dada por:

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}$$

Sobre esto, Polo (2013) aclara que Maclaurin demuestra el primer teorema despejando x de la primera ecuación y reemplazando en la segunda, lo que da una ecuación lineal, de la que despeja y. Luego escribe la solución para x, que, dice según él se obtiene de la misma manera.

Para el segundo teorema, se suponen dadas tres cantidades desconocidas y tres ecuaciones, se llaman x, y y z los términos desconocidos; así que el sistema es:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases}$$

Entonces:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

Con esto, Polo (2013) aclara que para demostrar el segundo teorema, recurre al primero. Toma las parejas de ecuaciones, primera y segunda, primera y tercera, calculando de ellas la y, (Teorema 1), después de pasar los sumandos en z al segundo miembro; igualando las dos expresiones así obtenidas, obtiene una ecuación lineal en z que resuelve. Termina afirmando: "los valores de x e y se encuentran después de la misma manera y tienen el mismo denominador".

Finalmente, con respecto a Cramer, en Robertson (s.f) explica que él expone una regla general para sistemas $n \times n$ en su publicación "Introducción al análisis de curvas algebraicas" de 1750. Y lo hace motivado por el deseo de encontrar la ecuación de una curva plana que pasa a través de un número dado de puntos. Sobre lo cual, Polo (2013) menciona que para encontrar la cónica que pasa por los cinco puntos, se debió resolver un sistema de ecuaciones lineales 5×5.

Con esto, se observa ligeramente la forma en la que se llega a la formulación de la regla de Cramer, en donde es posible evidenciar cambios y aportes significativos. Puesto que por ejemplo, en la propuesta de Maclaurin se evidencian razonamientos similares a los que fundamentan al método de Cramer, haciendo uso reiterado de la sustitución para solucionar los sistemas de ecuaciones, pero también se observan algunas limitaciones sobre los procesos y justificaciones para sistemas de ecuaciones muy grandes, lo cual en la exposición de Cramer es solucionado presentando una generalización del método, aunque este sea sumamente extenuante por la cantidad de pasos y cálculos que habría que realizar.

Además, los recursos que usa Cramer para exponer su técnica indican un alto grado de manipulación simbólica, puesto que acude a distintas características y propiedades de las determinantes para escribir sus generalizaciones, lo cual es más claro si se observa una versión más actual del método, la cual basaremos en Grossman (1992), donde se explica la Regla de Cramer de la siguiente forma:

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \dots, x_n$ puede escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o de la forma abreviada

$$Ax = b$$

donde

A Es la matriz de coeficientes

x Es un vector columna de incógnitas.

b Es un vector de términos independientes.

El sistema es de Cramer si tiene tantas ecuaciones como incógnitas; en ese caso la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada.

Un sistema de ecuaciones es compatible determinado si tiene solución única.

Un sistema de Cramer es compatible determinado si y solo si

$$D = det\, A \neq 0$$

En ese caso, definimos la matriz A_j como la que se obtiene a partir de A sustituyendo la columna j por el vector b, esto es, si c_j es la columna j de A,

$$A = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz

$$A_j = \left(c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \dots, c_n\right)$$

Representamos por D_j el determinante de A_j

$$D_j = det\, A_j = det\left(c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \dots, c_n\right)$$

Entonces la solución del sistema viene dado por la denominada regla de Cramer

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots \ , x_n = \frac{D_n}{D}$$

Este discurso sobre el método está muy alejado de las interpretaciones primitivas sobre solución de sistemas de ecuaciones, es decir que se encuentra más cercano al discurso teórico que al técnico, puesto que su formulación está basada en una gran cantidad de características de los determinantes, que no se conocerían sin los procesos reflexivos que llevaron a estudiar, generalizar, modificar y formular distintas técnicas y procesos que permitían la solución de sistemas de ecuaciones. Además la presentación final acude a una tecnología simbólica que permite identificar con más precisión los datos que se desean manipular, sintetizar la presentación del método, generalizarlo para infinitos casos, e incluso construir nuevos conocimientos sobre los determinantes.

3.1.3 Algunas relaciones entre Ying Buzu, Regla del modo y Método de Cramer

Hasta el momento hemos abordado algunas consideraciones con respecto a los métodos Ying Buzu, Regla del modo de Cardano y metodo de Cramer. A continuación centraremos la mirada en torno a algunas relaciones entre los tres métodos, teniendo en cuenta su búsqueda de una fórmula para la solución de determinados sistemas de ecuaciones lineales.

Ahora bien, si se compara el trabajo desarrollado por los chinos en su séptimo capítulo de “Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas”, con la regla del modo de Cardano, se puede tener distintos aspectos en consideración, por ejemplo:

<table>
<tr><td>Método chino

Ying Buzu

(demasiado y no suficiente)</td><td>Propuesta de Cardano

Regla del modo

(la madre de las reglas)</td></tr>
<tr><td>Soluciona sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = -c_2 \end{cases}$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ valores positivos</td><td>Soluciona sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = c_2 \end{cases}$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Consideración: el Ying Buzu es limitado en la forma de los sistemas de ecuaciones que soluciona, mientras que el método de Cadano parece atender a una variedad mayor, lo cual permite hablar de un desarrollo en las técnicas usadas para solucionar sistemas de ecuaciones lineales de dos variables y dos incógnitas, puesto que las limitaciones son menores, dicho desarrollo es resultado de un proceso tecnológico y por lo tanto se reconoce como tecnología.</td></tr>
<tr><td>La explicación del método es únicamente a partir de algunos ejemplos de problemas contextualizados en cuentas sobre</td><td>La explicación del método se desarrolla a partir de ejemplos sobre el cálculo con objetos tangibles, sobre los cuales describe una serie de pasos para</td></tr>
</table>

objetos tangibles, sobre los cuales se describen una serie de pasos que permiten encontrar un par de valores que satisfacen las ecuaciones lineales.	determinar los valores que satisfacen las ecuaciones lineales. Adicionalmente se agrega una descripción que puede ser aplicada para cualquier tipo de sistemas de ecuaciones, en donde se presenta más claramente los pasos a seguir.
Consideración: en el capítulo séptimo de "Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas", las formas de explicación se limitan a la ejemplificación de la aplicación del método, mientras que en la regla del modo propuesto por Cardano, aunque se da gran importancia a los pasos que solucionan el sistema de ecuaciones, se agrega una serie de descripciones que permiten ver la fundamentación del método, lo cual permite estudiarlo y le da mayor credibilidad por disponer de una sustentación, aunque esta no se presente con un alto grado de formalidad.	
Usa una organización en forma de tablas, en la cual se ubican los coeficientes de las ecuaciones, y algunos de los resultados de las operaciones entre los mismos. Esta organización es similar a la estructura propuesta por Cramer en su método para solucionar sistemas cuadrados de 3×3 y 2×2, de tal forma que calcula los valores desconocidos a partir únicamente de las operaciones entre los coeficientes de la ecuación.	Se calcula el valor de las variables desconocidas mediante las operaciones entre los coeficientes de las ecuaciones; sin embargo no propone una organización específica para los mismos.
Consideración: los dos métodos se caracterizan por el uso exclusivo de los coeficientes de las ecuaciones, es decir que no acude a la manipulación de las variables, sin embargo el método chino tiene una forma de presentación visual que lo aproxima más al método de Cramer por su organización rectangular. De esta forma se diferencian por completo de los métodos caracterizados por el uso necesario de las variables, entre los cuales está por ejemplo los métodos de falsa posición o incluso los actuales métodos de sustitución, igualación y eliminación. Por esta razón presentan gran relación con la estructura de las matrices y el álgebra lineal. Como ya mencionamos, la Regla del modo tiene	

<table>
<tr><td colspan="2">directa relación con el método de sustitución, pero tras la aplicación de los pasos no es del todo evidente dicha relación, puesto que no acude a la acción de remplazar variables, puesto que no las manipula en forma directa.</td></tr>
<tr><td>Al finalizar la explicación del método Ji-huan (2002) indica que una posible generalización de los procedimientos propuestos en el Ying Buzu es:

Si a_1 y a_2 son las distintas cantidades de dinero que cada persona da para la compra, y c_1 y c_2 son el exceso y el defecto con respecto al precio real de la cosa, ante el sistema:

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = -c_2 \end{cases}$$
con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ valores positivos

El valor real del objeto es dado por:

$$y = \frac{a_2c_1 + a_1c_2}{c_2 - c_1}$$</td><td>De Cardano (1993) se puede observar que de un sistema de ecuaciones $2X2$ con la forma :

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = c_2 \end{cases}$$
Se deduce el valor de y mediante la expresión:

$$y = \frac{a_2c_1 + a_1c_2}{c_2 - c_1}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Consideración: En ambos casos se logra dar una fórmula para el cálculo de los valores desconocidos de un sistema de ecuaciones 2×2, en donde únicamente se manipulan los coeficientes de las ecuaciones. Las formulas a las que se llegan son similares, sin embargo, a la que se llega con la Regla del modo es más general que a la que se llega con el método chino, debido a que este es más limitado en la estructura de las ecuaciones que soluciona.

Tanto el Ying Buzu como la Regla del Modo presentan una gran relación con el método de Cramer, de tal forma que el método chino se puede interpretar como una aplicación particular de este, y la Regla del modo, parece ser generalizada y formalizada en la regla de Cramer. Lo anterior muestra cómo se desarrolló un importante avance tanto en lenguaje, como en el discurso que justifica y explica las técnicas. Dichos avances los consideramos tecnología por el proceso reflexivo que implicó y los resultados concretos a nivel de conocimiento, eficiencia, etc.</td></tr>
</table>

Por otra parte, si se tiene en cuenta la estructura del sistema de ecuaciones trabajado en el Ying Buzu, y resolverlo usando el método de Cramer obtendríamos que:

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = -c_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & -b_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot -b_2) - (a_2 \cdot -b_1) = -[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & -b_1 \\ -c_2 & -b_2 \end{vmatrix} = (c_1 \cdot -b_2) - (-c_2 \cdot -b_1) = -[(c_1 \cdot b_2) + (c_2 \cdot b_1)]$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot -c_2) - (a_2 \cdot c_1) = -[(a_1 \cdot c_2) + (a_2 \cdot c_1)]$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-[(c_1 \cdot b_2) + (c_2 \cdot b_1)]}{-[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]} = \frac{(c_1 \cdot b_2) + (c_2 \cdot b_1)}{(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-[(a_1 \cdot c_2) + (a_2 \cdot c_1)]}{-[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]} = \frac{(a_1 \cdot c_2) + (a_2 \cdot c_1)}{(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)}$$

Así, si comparamos los resultados anteriores con las expresiones deducidas de las propuestas realizadas por los chinos, que para los casos particulares de los ejemplos expuestos anteriormente $b_1 = b_2 = 1$ obtenemos que:

Caso especial de la aplicación de la Regla de Cramer	**Resultado de la propuesta de Ying Buzu**
$y = \frac{(a_1 \cdot c_2) + (a_2 \cdot c_1)}{(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)}$	$y = \frac{a_2c_1 + a_1c_2}{a_1 - a_2}$
$x = \frac{(c_1 \cdot b_2) + (c_2 \cdot b_1)}{(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)}$	$x = \frac{c_1 + c_2}{\lvert a_1 - a_2 \rvert}$

Por lo anterior es posible observar que la propuesta realizada por los chinos es similar al método de Cramer en la solución particular de sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = -c_2 \end{cases}$$

Con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ valores positivos.

Así, es posible observar la estrecha relación del método chino con la actual regla de Cramer, aunque se desconozca por completo de posibles discursos que sustentaran las propuestas del Ying Buzu.

En concordancia, al considerar el método propuesto por Cardano en su regla del modo, y gracias al discurso que lo sustenta, se puede ver una fuerte relación con la regla de Cramer de la siguiente forma.

<table>
<tr><th>Generalización de la propuesta de Cardano.</th><th>Método de Cramer</th></tr>
<tr><td colspan="2">Sea un sistema de ecuaciones 2×2 así:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Por ejemplo, primero se divide el coeficiente de la variable x, y la constante c en el coeficiente de la variable y.
<table><tr><th>Manipulación sobre el coeficiente de x</th><th>Manipulación sobre la contante c</th></tr><tr><td>$\frac{a}{b}$</td><td>$\frac{c}{b}$</td></tr></table>
Cada resultado anterior lo multiplica por el coeficiente de la variable y de la segunda ecuación.
<table><tr><th>Manipulación sobre el coeficiente de x</th><th>Manipulación sobre la contante c</th></tr><tr><td>$\frac{a}{b}e$</td><td>$\frac{c}{b}e$</td></tr></table></td><td>Se pueden encontrar los respectivos determinantes de la siguiente manera:
$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$
$$D = ae - bd$$
$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$
$$D_x = ce - bf$$
En donde los términos ae y ce son los que se van construyendo en los primeros tres pasos propuestos por Cardano</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>en su regla del modo.</td></tr>
<tr><td>A los anteriores resultados, restarle los valores respectivos de la segunda ecuación.
<table><tr><td>Manipulación sobre el coeficiente de x</td><td>Manipulación sobre la contante c</td></tr><tr><td>$\frac{a}{b}e - d$</td><td>$\frac{c}{b}e - f$</td></tr><tr><td>$\frac{ae - bd}{b}$</td><td>$\frac{ce - bf}{b}$</td></tr></table></td><td>Los términos bd y bf son los que se van construyendo desde los primeros tres pasos y se concluyen en los últimos dos propuestos por Cardano en su regla del modo.</td></tr>
<tr><td>La división entre la diferencia referida a las constantes y la diferencia referida a los coeficientes de la variable x, que resultaron del paso anterior, da como resultado el valor de la variable x.
$$x = \frac{\frac{c}{b}e - f}{\frac{a}{b}e - d}$$
Es decir:
$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$</td><td>Finalmente para encontrar el valor de x Cramer propone:
$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$
que es el mismo resultado encontrado por Cardano al desarrollar su último paso.</td></tr>
</table>

Esta relación nos lleva a pensar en que Cardano, en su época diseño un método para resolver sistemas de ecuaciones. Este método logró generalizarlo y publicó a modo general un algoritmo útil para resolver sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_1x - b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = c_2 \end{cases}$$

Su intención aparente era la formulación de la técnica, por lo cual se da tanta importancia a la serie de pasos, pero adicionalmente da a conocer el discurso que sustenta a su método. De dicho discurso es posible observar algunas aproximaciones o aplicaciones del que hoy conocemos como método de sustitución, haciendo uso de este como una técnica que le permite solucionar los sistemas de ecuaciones, y que luego de estudiar logra generalizar en una nueva técnica que resulta tener directa relación con el método de Cramer.

Así, con relación al método de Cramer es posible considerar que es una clara evidencia de desarrollo tecnológico, que como mínimo inicio con los chinos, de donde se carece información sobre estrategias de explicación teórico-formal, justificación, generalización simbólica, comunicación, etc. Aspectos que fueron siendo superados, por ejemplo con la aparición de la Regla del modo de Cardano, en la cual se propone nuevas formas de representación simbólica, manipulación de los valores y sobre todo un discurso que justifique los procedimientos y evidencie un proceso reflexivo y analítico que permite nuevos desarrollos, lo cual, desde nuestra postura, son características de la tecnología.

No obstante en las propuestas de Cardano aún se carecía de rigor en el discurso, pero al pasar el tiempo, con los aportes de Leibniz en la escritura matemática, los análisis entorno a las propiedades de las determinantes y los trabajos de Maclaurin sobre los métodos de solución de ecuaciones en las que se evidenciaba aproximaciones a generalizaciones del método de sustitución, se llega a atender gran cantidad de los aspectos que inicialmente no se lograron solucionar, llegando a la formulación de una técnica, con un discurso teórico tan sólido que en la actualidad es objeto de estudio. Es por todo esto que es posible evidenciar en el trabajo con determinantes un desarrollo tecnológico que parte de lo tácito y llega a lo teórico.

Sin embargo, es necesario mencionar que gracias a que la tecnología es un proceso dinámico y cíclico, en la que un objeto puede ser manipulado como teoría o mero conocimiento tácito dependiendo de su utilidad en el cumplimiento de los objetivos, se continua el estudio sobre la regla de Cramer, por lo cual en 1772, Laplace afirma que los métodos introducidos por Cramer y Bezout eran impracticables.

Luego se formula el trabajo de Cauchy que es el más completo de los primeros trabajos sobre determinantes. Él desaprobaba los primeros resultados y daba nuevos resultados propios. En 1826 en el contexto de formas cuadráticas en n variables, usó el término 'tableau' para la matriz de coeficientes. Él dio resultados sobre diagonalización de una matriz en el contexto de convertir una forma cuadrática a la suma de cuadrados. Cauchy también introdujo la idea de matrices similares (pero no el término) y mostró que si dos matrices son similares ellas tienen la misma ecuación característica. También probó, nuevamente en el contexto de formas cuadráticas, que toda matriz simétrica real es diagonalizable.

Así, llegamos a observar que aunque el método de Cramer resultó un avance de gran importancia, por la complejidad en su ejecución, se acude a otros procedimientos que aborden los aspectos de la eficiencia al momento de resolver sistemas de ecuaciones. Estos aspectos logran ser superados en el trabajo con matrices, puesto que a diferencia de las determinantes, que buscaban una fórmula para solucionar sistemas de ecuaciones, las matrices, con por ejemplo el método de Gauss y su álgebra de matrices, logra conservar la idea de desarrollar un proceso de solución que, aunque se rige por una serie de pasos, es flexible a los contextos en los que se use. Para comprender mejor esto, atenderemos a algunos métodos que se relacionan con algunos trabajos con matrices.

3.2 CON RESPECTO A MATRICES

3.2.1 Sistemas de ecuaciones en babilonia

En el documento de Polo (2013) se presenta un ejemplo tomado de una tablilla babilónica que plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos: en un terreno, un cuarto de su anchura más su longitud son siete manos y su longitud junto con su anchura hacen diez manos.

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación.

De esto, podemos inferir que pudo suceder lo siguiente:

El calculista de la época, interpreta que la longitud y la anchura están medida en manos, pero cada una en una cantidad de manos diferentes; con esto asume que:

$$1mano = 5$$

$$1m = 5$$

Asumimos que le da este valor de 5, porque es la mitad de 10 y se parte de una suposición inicial que las dos longitudes son iguales. Como el calculista toma de valor falso 5, concluye que multiplica este valor a los resultados de cada ecuación, obteniendo 35 y 50.

Encuentra la diferencia entre estos valores, es decir 15; y este valor lo divide entre la diferencia de los coeficientes de la primera ecuación:

$$15 \div \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

Es decir:

$$15 \div \frac{3}{4}$$

Se debe tener en cuenta varias cosas:

- No se propone un orden para operar entre las ecuaciones, pues para obtener el 15, se tomó el resultado multiplicado por cinco la segunda ecuación menos el resultado multiplicado por cinco de la primera ecuación; y para el caso de $\frac{3}{4}$, se tomó el coeficiente de la longitud (1) menos el coeficiente de la anchura ($\frac{1}{4}$), siempre buscando que los resultados sean positivos.
- Para el caso de la división, en la época no se realizaban divisiones como se entienden hoy en día, se buscaba en las tablas babilónicas, un número que multiplicado $\frac{3}{4}$ dé como resultado 15

De allí se concluye que el valor de la anchura es:

$$15 \div \frac{3}{4} = 20$$

En consecuencia el valor de la longitud es 30, que son los valores encontrados; aquí pensamos que el calculista comprende que estos valores encontrados son valores ampliados en cinco (5), ya que el valor de una mano es uno, y el asumió que valía cinco (5); por tanto, si continua el proceso y divide estos valores entre 5, encontraría que la anchura: $20 \div 5 = 4$ y la longitud: $30 \div 5 = 6$, que son los valores que satisfacen la ecuación inicial.

Aquí podemos observar que se tuvo en cuenta el valor de las manos, y a partir de allí se deduce el valor falso de la longitud y de la anchura, lo que produjo los valores falsos y permitió trabajar la ecuación sin manipular los datos desconocidos (longitud y anchura).

Guerra (2012) menciona otro ejemplo y este autor hace un análisis en cuanto al método de solución de este ejemplo es de mencionar que basado en estos argumentos, se dedujeron algunas cosas del ejemplo anterior.

Se presentan problemas de extensión de terrenos que llevan a plantear por ejemplo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$

cuya solución se alcanza por la falsa posición con valor inicial $x = y = 900$

Es decir, suponiendo que cada una de las parcelas es igual a 900 (la mitad de 1800);

$$x + y = 1800$$

Si $x = y = 1800 \div 2$ entonces bajo esta suposición, encuentra la diferencia de longitudes, (reemplaza en la primera ecuación) que para este caso es 150, así:

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500$$

$$\frac{2}{3}(900) - \frac{1}{2}(900) = 600 - 450 = 150 \neq 500$$

Para remediar el error de 350, pues $500 - 150 = 350$, el calculista reconoce que el error de $\frac{7}{6}$ (suma de $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$) de un valor se desconoce y que al ser sumado y restado al dato errado del inicio, dará las medidas buscadas. Dicho de otra forma, se trata de hallar el valor de a tal que:

$$\frac{2}{3}(x + a) - \frac{1}{2}(y - a) = 500$$

Es decir:

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{6}a = 500$$

Partiendo de la suposición inicial que $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 150$, se tiene:

$$\frac{7}{6}a = 500 - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y\right)$$

es decir:

$$\frac{7}{6}a = 500 - 150$$

Finalmente

$$a = 300$$

El calculista omite todo esto pensando que debe dividir los 350 por $\frac{7}{6}$ y para ello, se pregunta por cuánto debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350 y así encuentra la respuesta de 300.

Por último, suma y resta 300 a los 900 de la suposición inicial:

$$x = 900 + 300 = 1200$$

$$y = 900 - 300 = 600$$

Con estos dos métodos podemos ver que los babilonios podían solucionar algunos sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \ x + y = d \end{cases}$$

Para el caso del primer ejemplo, gracias a que se cuenta con el planteamiento retórico, podemos distinguir que no trabajan con las letras, sino con un dato adicional (manos) y a partir de esto obtienen los valores falsos en cada ecuación y pueden trabajar desde allí; con respecto al segundo ejemplo, por falta del planteamiento literal, el autor asume que se le da un valor falso a las letras (x, y) y a partir de allí sustenta la interpretación del calculista de la época.

Por tal razón, nos atrevemos a indicar que el método de falsa posición, consistía en dar un valor falso inicial a los términos desconocidos, basado en la idea que $x = y = \frac{d}{2}$ con este valor falso, reemplaza en la ecuación $ax + by = c$ y llega a un valor falso.

$$a\left(\frac{d}{2}\right) + b\left(\frac{d}{2}\right) = f$$

Al comparar el resultado obtenido y el resultado esperado, identifica que hay un desfase,

$$(c - f)$$

Pero este desfase incide en los valores iniciales falsos dados a la ecuación, así que para calcular todos los desfases se espera que:

$$(ax + by) - \left(a\frac{d}{2} + b\frac{d}{2}\right) = c - f$$

De donde se obtiene que:

$$a\left(x - \frac{d}{2}\right) + b\left(y - \frac{d}{2}\right) = (c - f)$$

Como se parte de un valor inicial para

$$x = \frac{d}{2}$$

$$y = \frac{d}{2}$$

Y bajo la hipótesis que el sistema no tiene solución con este valor, se debe encontrar el valor del desfase e, así que se tiene

$$x = \frac{d}{2} + e$$

$$y = \frac{d}{2} - e$$

Por tanto:

$$a\left[\left(\frac{d}{2} + e\right) - \frac{d}{2}\right] + b\left[\left(\frac{d}{2} - e\right) - \frac{d}{2}\right] = c - f$$

Operando se tiene que:

$$ae - be = c - f$$

Es decir:

$$e(a - b) = c - f$$

Como en la época de los babilonios se trabajaba con tablas de multiplicar, se debe buscar un número que multiplicado con $(a - b)$ del módulo de la multiplicación en ambos lados de la igualdad. Pero en términos actuales es:

$$e = \frac{c - f}{a - b}$$

Finalmente, se obtienen los valores que satisfacen el sistema de ecuaciones así:

$$x = \frac{d}{2} + \frac{c - f}{a - b}$$

$$y = \frac{d}{2} - \frac{c - f}{a - b}$$

De una forma muy básica se logra apreciar en este método la esencia del método actual conocido como eliminación, trabajando de alguna manera con las letras o números desconocidos. Con el análisis final, se puede evidenciar una relación ente los dos ejemplos, tales como:

- Se trabaja con el valor falso inicial de números iguales que se deducen del resultado de la segunda ecuación
- Se divide la diferencia entre el valor falso y el valor real entre la diferencia entre los coeficientes de la primera ecuación.

Sobre esta propuesta para la solución de sistemas de ecuaciones 2×2, se puede mencionar que:

- No se manipulan las representaciones del valor desconocido, por lo cual se le proporciona un valor que sea accesible de manipular para realizar los cálculos y poder determinar los errores.
- Para desarrollar las explicaciones y justificaciones del método, se acude a ejemplificaciones particulares de ejercicios en los que se manipulan objetos tangibles, de los cuales es posible identificar algunas regularidades sobre el proceso propuesto y la estructura del sistema de ecuaciones abordado. Sin embargo, se carece de un discurso que justifique los procedimientos o especifiquen la estructura de las ecuaciones trabajadas, razón por la cual reconocemos que el dominio de la técnica implica, a lo más, un conocimiento tecnológico tácito o prescriptivo, puesto que su nivel discursivo es más cercano a lo técnico que a lo teórico.
- Para desarrollar y exponer la solución de los sistemas de ecuaciones, se acudía en su mayoría a una descripción retórica de las acciones a realizar, razón por la cual es evidente una carencia en el desarrollo de lenguaje simbólico que permita abordar, representar, simbolizar, estudiar, etc.
- Esta técnica para la solución de sistemas de ecuaciones se fundamenta en la posibilidad de calcular la diferencia entre cantidades y ecuaciones mediante la resta de distintas cantidades de la misma cosa, de tal forma que se calcula la diferencia de elementos que hacen alusión a un mismo objeto. Lo cual se da porque en el sistema, la segunda ecuación tiene la forma $x + y = d$, lo que nos muestra un reconocimiento de que los valores de determinada variable podían ser anulados al restarse con una cantidad semejante de la misma variable, lo cual se puede entender como una aproximación al método de eliminación actual que trata de anular algunos coeficientes.

3.2.2 Método chino

Blyth (2002) menciona que en cuanto al método chino para resolver sistemas de ecuaciones, se muestra un ejemplo que se parece en enunciado a los mencionados por los babilonios:

Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo?

Para mostrar la solución de este sistema de ecuaciones, ocurrió algo extraordinario, dado que en esa época, el autor escribió instrucciones al lector, indicando que hacer paso a paso así:

Para resolver este problema, el autor coloca los coeficientes del sistema de tres ecuaciones lineales en una especie de "tablero contador".

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Multiplicar la primera columna por tres y restarle la tercera columna

0	2	3
4	3	2
8	1	1
39	34	39

Multiplicar la columna central por tres y restándola de la de la derecha las veces posibles

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Multiplicar por 5 la nueva primera columna y la nueva columna central es restada de ella las veces posibles

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Con esto, tenemos la solución para el tercer tipo de cereal.

$$36z = 99$$

De este modo se puede encontrar la solución para el segundo y por último para el primero por medio de la sustitución hacia atrás.
Es decir: teniendo el valor de z se reemplaza en la ecuación anterior

$$5y + z = 24$$

Una vez encontrado y se reemplaza en la primera ecuación y se obtiene el valor para x

$$3x + 2y + z = 39$$

Este método, conocido ahora como eliminación gaussiana, no se volvería a

retomar sino hasta inicios del siglo XIX.
Por tanto, se puede apreciar que los chinos podían resolver sistemas de ecuación de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Organizando los coeficientes en un tablero contador así:

a_3	a_2	a_1
b_3	b_2	b_1
c_3	c_2	c_1
d_3	d_2	d_1

Según Zambrano (2011) se puede inferir que: Si se titula e_1 a la primera columna que hace referencia a la tercera ecuación, e_2 la segunda columna que hace referencia a la segunda ecuación y e_3 la tercera columna que hace referencia a la primera ecuación, se puede deducir que:

- Se multiplica e_2 por el primer valor de e_3. Luego se resta e_3 a e_2, las veces necesarias para obtener un cero en a_{12} .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{vmatrix} \to (a_{13}e_2) - (a_{12}e_3) \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 29 & 39 \end{vmatrix}$$

- Se multiplica e_1 por el primer término de e_3, luego, se le resta e_3, para así obtener un cero en a_{11}.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 29 & 39 \end{vmatrix} \to (a_{13}e_1) - (e_3) \to \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 29 & 39 \end{vmatrix}$$

- Se multiplica por a_{22} a e_1, luego se le resta a_{21} veces e_2 para un obtener cero en a_{21}.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 29 & 39 \end{vmatrix} \to (a_{22}e_1) - (a_{21}e_3) \to \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 29 & 39 \end{vmatrix}$$

De donde se deduce el sistema de ecuaciones reducido, mencionado anteriormente.

En consecuencia, a diferencia de los babilonios, quienes intentaron darle un valor a lo desconocido (letras) para trabajar con cosas conocidas y luego deducir por ciertas técnicas el valor real de lo desconocido, los chinos trabajaron con los coeficientes de las ecuaciones, y además, encontraron una manera de organizar los coeficientes en un tablero organizador tal que los cálculos se presentaran de forma que en un solo elemento (tablero contador) se lograra distinguir tanto que letra acompaña el coeficiente, como las posibles operaciones que se pueden hacer entre coeficientes para reducir el sistema de ecuaciones y luego poder plantear una ecuación fácil de resolver para así por retroceso deducir de manera coherente los valores de las demás letras.

Este modo de organizar y trabajar con los coeficientes tiene la esencia con la que se trabaja hoy en día con las matrices, porque se olvida de la letra, se dedica de lleno a trabajar con los coeficientes. Además, si se piensa en cómo era el juego con los coeficientes, nos permitimos reflexionar sobre apartados tales como “restar tantas veces como sea posible”, lo que nos lleva a pensar que se suponía de antemano que la sustracción tiene un límite, y ese límite es cero, es decir que al llegar a este no puede seguir realizando el proceso de sustracción. Por tanto, los chinos sabían de antemano que el proceso de restar era con el objetivo de encontrar el coeficiente igual a cero para eliminar las variables, y en el proceso ellos identificaban que la forma de hacerlo, era multiplicando la columna, por el número que deseaban anular y de esta forma restar las veces necesarias de tal modo que la resta siempre fuera posible y se encontrara el cero.

Así, si por ejemplo pensáramos en los números enteros, lo expuesto anteriormente a nivel general en cuanto a la organización y la técnica funciona adecuadamente, si el objetivo es buscar un cero en cierto lugar específico del arreglo rectangular, pero como el objetivo, según las indicaciones en el método chino, es restar tantas veces como sea posible, este proceso podría llegar a ser infinito, interpretando el término “restar” como: quitar tantas veces como se pueda.

Además, esta manera de “sustracción” expuesta por el método chino, hace percibir que se trabajó de tal manera que los coeficientes se operen tal que a un elemento mayor se le reste un elemento menor, lo cual prima el trabajo con números naturales. Aunque este método al generalizarse en la actualidad, (como se expuso en el análisis del ejemplo), puede llegar a ajustarse al trabajo con números enteros y funcionaría de manera eficiente, pero es claro no fue un método que progresara en la historia.

Otro aspecto que también es muy similar a los actuales modos de trabajar con matrices en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, es la propuesta de buscar transformar el arreglo rectangular de tal forma que se triangula, es decir que se llena convenientemente con ceros una parte del cuadrado mágico. Con lo cual se logra trabajar con un sistema de ecuaciones equivalente al inicial y más sencillo de solucionar, mediante el ejercicio de despejar variables y sustituir en otra ecuación del sistema, este proceso es enorme mente parecida al Método de Gauss.

Otro aspecto en el que se asemeja el método de Gauss con el de cuadrados mágicos, es que en la consideración de multiplicar una columna por un valor específico y restarla tantas veces como sea posible de otra; ya que aunque Gauss tiene una propuesta más eficiente, se tiene la misma intención de eliminar coeficientes de variables específicas. Es decir que se logra una generalización del método de eliminación, en el cual se multiplica una ecuación por un valor especifico consiguiendo su ecuación semejante, para luego restarlas tantas veces como sea posible con el objetivo de eliminar determinada variable o visto de otra forma, se procura multiplicar convenientemente cada ecuación por separado para restarlas y eliminar las variables deseadas.

Así, es posible mencionar que el método chino carece de la exposición de un discurso que lo justifique, por lo que su dominio lo consideramos conocimiento tecnológico de tipo tácito o prescriptivo, es decir que está más cercano al conocimiento técnico que al teórico; pero en definitiva es más eficiente que el método propuesto por los babilonios, cuenta con una tecnología más desarrollada y simbólica, por lo que es posible realizar representaciones de los sistemas de ecuaciones acudiendo a objetos abstractos adicionales a lo retórico (arreglo rectangular de coeficientes). En consecuencia, lo caracterizamos como tecnología debido a que muestra un manejo simbólico que evidencia mayor desarrollo de abstracción en los procesos, lo cual es posible únicamente mediante el ejercicio de reflexión que prima en la tecnología.

Además, dejan como resultados tangibles un método fundamentado en la eliminación de variables a partir de la resta reiterada entre columnas que representan los coeficientes de ecuaciones de un sistema, por tanto nuevamente muestran un interesante grado de abstracción tras la posibilidad de manipular variables a partir del trabajo sobre los coeficientes.

3.2.3 Método de Bezout

Zambrano (2011) menciona que el método de Bezout para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en la introducción de ciertos factores indeterminados, a los cuales se asigna en tiempo oportuno valores que satisfagan a ciertas condiciones útiles. Para comprenderlo se aplicará primero a las ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{cases}$$

Se multiplica la primera ecuación por un factor indeterminado *m* y restando de la segunda:

$$(am - a')x + (bm - b')y = (km - k')$$

Para eliminar la y se anula su coeficiente

$$bm - b' = 0$$

De aquí se obtiene la ecuación de condición para el valor de *m*

$$m = \frac{b'}{b}$$

Reemplazando tenemos que:

$$\left(\frac{ab'}{b}-a'\right)x+\left(\frac{bb'}{b}-b'\right)y=\left(\frac{kb'}{b}-k'\right)$$

Llegando a:

$$x=\frac{kb'-k'b}{ab'-a'b}$$

Para eliminar *x*, se hace

$$am-a'=o$$

Por tanto

$$m=\frac{a'}{a}$$

Reemplazando nuevamente tenemos que:

$$\left(\frac{aa'}{a}-a'\right)x+\left(\frac{ba'}{a}-b'\right)y=\frac{ka'}{a}-k'$$

Obteniendo que:

$$y=\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}$$

Ante esto afirma Pombo mencionado por Zambrano (2011) que las fórmulas del denominador las forman las dos permutaciones de las letras a, b (coeficientes de las incógnitas), acentuadas en la segunda letra y separadas por el signo sustractivo. El numerador se forma por el denominador, cambiando por la k a la a para x (su coeficiente) y la b para y

Para las tres ecuaciones generales con tres incógnitas, se multiplican dos de ellas por dos factores indeterminados, se suman y luego de la suma se resta la tercera ecuación; esto es:

$$\begin{cases} ax+by+cz=k \\ a'x+b'y+b'z=k' \\ a''x+b''y+c''z=k'' \end{cases}$$

Multiplicar la primera ecuación por m y la segunda por n:

$$amx+bmy+cmz=km$$
$$a'nx+b'ny+b'nz=k'n$$

La suma de estas es:

$$amx+a'nx+bmy+b'ny+cmz+b'nz=km+k'n$$

Restándole a esta suma la tercera ecuación tenemos que:

$$amx+a'nx-a''x+bmy+b'ny-b''y+cmz+b'nz-c''z=km+k'n-k''$$

Así que:

$$(am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+b'n-c'')z=km+k'n-k''$$

Para hallar x se determinan los valores m y n suponiendo nulos los coeficientes de y y z. Las ecuaciones de condición son ahora:

$$x=\frac{km+k'n-k}{am-a'n-a''}$$

La idea implícita en este método está en: si se tienen d ecuaciones, se debe agregar un número indeterminado $(m, n, p, \ldots)$ a $d-1$ ecuaciones, luego se realizan una serie de operaciones para cuadrar las cuentas (que se anulen los coeficientes de las cantidades desconocidas) y después se pueden encontrar los números que cumplen la condición necesaria para anular el coeficiente de las letras o variables necesarias; así que esta es una idea más general que la de restar iteradamente cuantas veces como se pueda, (que era la idea en el método chino); por tanto se hace evidente una presentación generalizada del método chino, así que, de esta manera se amplió el universo numérico (trabajo con inversos) en el que se podía trabajar. Por tanto, se puede interpretar que el método chino se muestra cambiado en este método de Bezout. Dado que ya no se trata de restar tantas veces como pueda, ahora se trata de dar sentido a ese hecho e identificar, que se busca hacer algunos coeficientes nulos.

La esencia de trabajar solo con coeficientes está claramente identificada en este método, es decir que el objetivo es: no tener en cuenta las letras que representan el valor desconocido, (incógnitas) y preocuparse por los coeficientes los cuales al anularse, anulan la incógnita. Aunque este método, no organiza los coeficientes en un espacio aparte para trabajar aisladamente con ellos (así como el método chino), podemos intuir que tienen algunos procedimientos similares, tales como buscar que el coeficiente sea cero para anular la incógnita y así plantear ecuaciones fáciles de manipular y encontrar el valor de cada incógnita por sustitución hacia atrás, el motivo de que no trabaje aisladamente con los coeficientes, hace que no podamos afirmar si existe alguna conexión histórica entre estos métodos (Método chino y método de Bezout), pero sí existe un conexión en intención pero con técnicas diferentes.

El hecho de trabajar entre la ecuaciones también puede acercarse en parte al método de los babilonios, pues ellos en el caso en que se mencionan “las manos”, le daban un valor falso a la *mano*, para así evitarse trabajar con los valores desconocidos, y se trabaja sobre la ecuación y se llegaban a las conclusiones respectivas; pero es de tener en cuenta que son diferentes en el hecho que el método chino trabaja con un valor falso dado desde un principio, en cambio el método de Bezout trabaja con un elemento desconocido (*m*), y luego descubre cual es el valor que se ajusta para dar solución a la situación.

Además este método en resumen muestra la manera de encontrar el inverso aditivo de b utilizando a b', para justificar el hecho de que

$$bm - b' = 0$$

Así que suponemos que Bezout sabía que debía encontrar un número que anulara al coeficiente de la x o de y, o de z, según fuera el caso. Él sabía que este número existía y demostró el método para encontrarlo, trabajando de una manera implícita con los inversos aditivos y multiplicativos de los números. Bezout hace una reflexión en cuanto a su propio método: le da un argumento, lo generaliza y lo sustenta teóricamente desde las matemáticas, a diferencia del método chino que era una serie de instrucciones, ello nos orienta a pensar que con Bezout, se puede apreciar un conocimiento prescriptivo, ya que busca argumentar y generalizar su método como teoría en Matemáticas.

Además, con respecto a la forma de comunicarlo puede limitarse a indicar la fórmula para encontrar la solución a un sistema de ecuaciones utilizando solo los coeficientes, dado que todos los pasos que utiliza para determinar la forma generalizada de resolver un sistema de ecuaciones puede omitirse para el lector y así de esta forma si lo desea, aplique la fórmula como una herramienta para resolver sistemas de ecuaciones utilizando solo los coeficientes. Esto es lo que le da la esencia de tecnología a este método. En resumen Bezout, reflexionó en cuanto a su método, logró generalizarlo y comunicarlo a la comunidad matemática de la época de una manera sintética.

Entonces, al tener en cuenta el método chino y el de los babilonios, es posible evidenciar un importante desarrollo con relación a la eficiencia, puesto que se omite la idea de restar reiteradamente, para buscar el número, que al multiplicarlo por determinada ecuación, garantice la eliminación de algunas variables deseadas luego de realizar las respectivas restas. Además, el manejo de un lenguaje simbólico de mayor grado de abstracción permite una mejor generalización, descripción y sustentación del método. También se observa la superación de muchas limitaciones del método chino con respecto a los valores que se usaban, puesto que desde la propuesta de Bezout, el manejo con los inversos es menos limitado por las Matemáticas de la época. Todos estos aspectos nos permiten caracterizar este método como tecnología prescriptiva que se aleja del conocimiento técnico y se acerca a lo teórico.

3.2.4 Método de eliminación gaussiana

Gauss fue el primero en usar el término (no el concepto) “determinante” en su obra *“Disquisitiones Arithmeticae”* publicada en 1801 aunque no corresponde al concepto que hoy usamos. El trabajo de Gauss estuvo centrado en mínimos cuadrados y presentó su método “*eliminación gaussiana*” sin conocer sobre la teoría de matrices.

Para empezar aclararemos que todo sistema lineal como el presentado en (1),

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

puede ser escrito como una ecuación matricial $Ax = b$, donde A es la matriz formada por los coeficientes de las ecuaciones lineales, x se refiere a la matriz columna compuesta por las incógnitas del sistema y b la matriz columna formada por las constantes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

El método de eliminación gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones lineales expresado como $Ax = b$, inicia considerando la matriz aumentada $[A \vdots b]$, seguidamente a esta matriz se le aplican operaciones elementales entre renglones para transformarla y conseguir una matriz equivalente por renglones $[C \vdots d]$ Una vez se escriba la matriz $[C \vdots d]$ en la forma $Ax = b$ se debe utilizar una sustitución hacia atrás, obteniendo de esta forma el conjunto solución del sistema.

Es de notar que Gauss presenta sistemas de ecuaciones cuadrados y rectangulares, que es diferente a lo trabajado por Cramer con los determinantes. Este método permite ampliar la variedad de sistemas de ecuaciones que se puede solucionar, optimizando la técnica de Gauss para resolver diversos sistemas de ecuaciones lineales, y se enfoca en un método a seguir para resolver los sistemas, pero no se trata de encontrar una fórmula general para encontrar soluciones.

Inicialmente para empezar a trabajar en un sistema similar a (1), usualmente se escribe la matriz aumentada así:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Además, se debe tener en cuenta una serie de acciones válidas para poder trabajar con este método, por ejemplo: al multiplicar o dividir las expresiones algebraicas en ambos lados de la igualdad de una ecuación entre un número diferente de cero se obtiene una ecuación nueva y válida. Por otra parte si se suma un múltiplo de una ecuación a otra ecuación del mismo sistema el resultado es otra ecuación válida. Por último, si se intercambian dos ecuaciones de un sistema, lo que se obtiene es un sistema equivalente. Estas tres operaciones, cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, reciben el nombre de “operaciones elementales de renglón”.

Las tres operaciones elementales de renglón son:
- i) Multiplicar (o dividir) un renglón por (entre) un número distinto de cero
- ii) Sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón.
- iii) Intercambiar dos renglones.

Al proceso de aplicar las operaciones elementales de renglón con el propósito de simplificar una matriz aumentada se le llama “reducción por renglón”.

Recordemos que el método chino trataba de triangular la matriz, buscando ceros para reducir el sistema de ecuaciones, y no se preocupaba por lo que sucediera en la diagonal. En el método de Bezout se buscaba la anulación de los coeficientes, es decir, si se organizara en una matriz, se esperaría encontrar ceros en la diagonal; a diferencia del método de Gauss, que se muestra como buscar “unos” en la diagonal de la matriz. Se puede interpretar que esto sucede para facilitar el proceso algorítmico entre las filas ya que cuando se multiplique con el término que considere pertinente multiplicar y lo reste la primera vez, de inmediato podamos obtener el cero que se necesita para anular los coeficientes pertinentes.

Dadas estas aclaraciones mostramos un ejemplo para demostrar este proceso, dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Se puede escribir la matriz A, una matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema se puede escribir como matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Para efectos de la comprensión, utilizaremos la notación explicada en el texto Álgebra Lineal (Grossman, 1992, pág. 10):

1. $R_i \to cR_i$ significa “sustitúyase el $i-ésimo$ renglón por el $i-ésimo$ renglón multiplicado por c”.
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa “sustitúyase el $j-ésimo$ renglón por la suma del $j-ésimo$ renglon y el $i-ésimo$ renglón multiplicado por c”
3. $R_i \leftrightarrows R_j$ significa “intercámbiense los renglones i y j”

4. $A \longrightarrow B$ indica que las matrices aumentadas A y B son equivalentes, es decir, que los sistemas a los cuales representan tiene la misma solución.

Teniendo en cuenta esto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

De lo cual se deduce, así como con el método chino, el siguiente sistema de ecuaciones equivalente al planteado al iniciar este ejemplo es:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

Y por sustitución hacia atrás o retroceso, se logra deducir los números que satisfacen el sistema de ecuaciones.

Con esto, se puede ver que estas operaciones entre renglón, son una generalización entre lo realizado por los chinos e implícitamente se encuentra detrás el método de Bezout, pues, ya no se solicita restar iteradamente hasta donde se pueda, sino que se busca que al multiplicar por un número adecuado se modifiquen los coeficientes hasta que se anulen unos. En particular que nos permitan llegar a un sistema de ecuaciones equivalente que se puede solucionar coherentemente por retroceso.

Con esto podemos deducir que cuando nos referíamos al método chino de matrices, trabajábamos en un universo numérico limitado, pues solo podíamos restar ciertos números una cantidad limitada de veces; con este método actual de eliminación gaussiana, el universo numérico se amplia de manera radical, pues se pueden realizar operaciones de multiplicación y división, todo con un objetivo principal: hacer que desde un principio el coeficiente a_{11} sea 1, idea que no se había escuchado con ninguno de los métodos mencionados anteriormente, dado que el método chino hacía referencia a restar tantas veces como pueda, y el de Bezout indicaba que se debía incorporar una letra a los coeficientes, luego realizar las respectivas operaciones y en determinado momento identificar cuál es ese número para que el coeficiente se anule. En cambio, Gauss dice que se debe buscar que todos los números en la diagonal de la matriz se vuelvan 1, dado que al tener este coeficiente convertido en 1 facilita y optimiza el trabajo para anular los demás coeficientes necesarios para obtener un sistema de ecuaciones equivalente y fácil de solucionar por retroceso.

Se logra evidenciar que lo que hace de manera implícita Gauss, es aplicar lo que hacía directamente Bezout, es decir buscar el número, para concluir, que se debe restar y dividir por dicho número con el objetivo de anular los coeficientes. Pero en el método actual se espera que el calculista que aplique el método de eliminación gaussiana deba acudir a sus cálculos mentales para determinar cuál es el número que se ajusta de manera tal que anule los coeficientes que debe anular o transformar en uno. En consecuencia, lo que hace Gauss es generalizar el método de Bezout, con la modificación de transformar la primera ecuación para obtener un 1 en el primer término, para facilitarle el procedimiento al calculista.

De esta manera se puede deducir que se evolucionó del método de cuadrados mágicos y el de Bezout al método de eliminación gaussiana, pero ahora bajo el cuestionamiento de ¿por qué cambio esta técnica? Podemos decir que Gauss hace más eficiente los procesos de los métodos de los chinos y Bezout, e inferimos que el manejo que le da Bezout a los coeficientes buscando los inversos aditivos y multiplicativos, Gauss lo asumió como algo evidente para su época, porque en la época de Gauss el campo numérico permitía reconocer de forma precisa el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de cualquier número. Por esta razón se hace uso de todo lo realizado por Bezout pero se oculta ante la matemática actual. Conjuntamente, Gauss rescata del método chino, el reducir los coeficientes hasta llegar a un sistema de ecuaciones equivalentes que le permita resolver por retroceso y encontrar los valores de las letras o incógnitas que satisfacen el sistema de ecuaciones. Además, este método Gauss lo generalizó, lo institucionalizo y expandió, al determinar los casos en que se hace evidente cuando un sistema es indeterminado, cuándo tiene solución única y cuando tiene infinitas soluciones.

Entonces, de este método son evidentes los desarrollos con relación al discurso que lo sustenta, en el cual se muestra avances con relación al lenguaje usado, los argumentos abordados, el distanciamiento de lo tácito y prescriptivo para centrarse en el conocimiento tecnológico descriptivo muy cercano al teórico. Las mejores consideraciones con respecto a la estructura de los sistemas de ecuaciones, la eficacia en la cantidad y dificultad de pasos a desarrollar, entre otras cosas. Por lo cual, este método es un claro ejemplo de tecnología que resulta del ejercicio reflexivo cuando se basa en el método chino y lo eleva a teoría.

3.2.5 **Método De Gauss-Jordan**

Este método es llamado así en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y el ingeniero, también alemán, Wihelm Jordan (1844-1899). Este método consiste en que la matriz de coeficientes se reduce por renglones a la forma escalonada por renglones reducida, “a diferencia del método de eliminación gaussiana que indica que la matriz de coeficientes se reduce por renglones a la forma escalonada por renglones, se resuelve para la última de las incógnitas y luego se utiliza la sustitución hacia atrás a fin de resolver para las demás incógnitas” Grossman (1992, p. 15). Es decir se trata de continuar el proceso que se realiza en la Eliminación Gaussiana hasta intentar dejar solo unos "1" en la diagonal y ceros "0" en los demás espacios, con el fin de identificar de manera inmediata los valores que satisfacen la ecuación, evitando pasar por el sistema de ecuaciones sencillo que se puede solucionar por retroceso.

Es de mencionar, que el método de Gauss-Jordan o el de eliminacion gaussiana, permite al calculista la flexibilidad de aplicarlo según su conveniencia, siguiendo el método aquí expuesto de buscar los unos "1" para la diagonal en primera estancia, o puede acudir a sus procedimientos conceptuales para buscar primero los ceros "0" de la triangulación de la matriz. Lo que consideramos digno de resaltar, es el cómo este método puede asumirse de diferentes maneras, pues nunca ha dejado de lado el conocimiento tácito que lo rodea, desde la particularidad del método chino, como la idea de buscar ceros "0" brindada por Bezout.

Para responder la cuestión sobre Cuál de los dos métodos (Gauss o Gauss-Jordan) es más útil, Grossman (1992, p.16) indica que según el caso, si se utiliza una computadora para resolver sistemas de ecuaciones, el preferido es el método de la eliminación gaussiana ya que requiere menos operaciones elementales de renglón. Por otra parte, hay ocasiones en las que es esencial obtener la forma escalonada por renglones reducida de una matriz; en tales casos, el método preferido es el de la eliminación de Gauss-Jordan.

De manera general el método de Gauss-Jordan se trata de que: sea el sistema $m \times n$, (es decir m ecuaciones lineales con n incógnitas) está dado por:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n
\end{gathered}$$

Grossman (1992) indica que "en el sistema todas las áreas $a$es y las $b$es son números reales dados. El problema consiste en encontrar todos los conjuntos de n números, denotados por $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, que satisfaga todas y cada una de las m ecuaciones del sistema. El número a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la $i-ésima$ ecuación".

El sistema se resuelve escribiéndolo como una matriz aumentada y luego reduciendo por renglones la matriz (realizar las operaciones pertinentes para obtener unos en la diagonal) hasta llevarla a su forma escalonada por renglones reducida.

Comenzaremos dividiendo el primer renglon entre a_{11} [operación elemental del renglon (i)]. Si $a_{11} = 0$, entonces las ecuaciones se reacomodan de tal manera que, con dicho reacomodo, $a_{11} \neq 0$. A continuacion se emplea la primera ecuación con el objeto de eliminar el término que contiene x_1 en cada una de las demás ecuaciones [utilizando la operación elemental del renglón (ii)]. Luego, la nueva segunda ecuación se usa para eliminar todos los términos que contengan x_2 en todas las demás ecuaciones. Este proceso se continúa hasta que ocurra una de tres situaiones:

i) La última de las ecuaciones diferentes de cero indica que $x_n = c$ para alguna constante c. Entonces el sistema tiene una solución única o bien un número infinito de soluciones, por ejemplo para una matriz 3×3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & c \end{array}\right]$$

ii) La última ecuación diferente de cero es $a'_{ij}x_j + a'_{ij+1}x_{j+1} + \cdots + a'_{ij+k}x_n = c$, donde c es alguna constante y por lo menos dos de las $a$es son diferentes de cero. Dicho en otra forma, la última ecuación es una ecuación lineal con dos o más variables. En tal caso, existe un número infinito de soluciones. (por ejemplo en una matriz 3×3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & d & e & c \end{array}\right]$$

iii) La última ecuación es $0 = c$, donde $c \neq 0$. Entonces no existe solución. En este caso se dice que el sistema es inconsistente, mientras que en los casos (i) y (ii) al sistema se le llama consistente. (por ejemplo en una matriz 3×3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$

Con respecto a este método, es necesario mencionar que se logra una ampliación del método de Gauss, logrando "completarlo" en cuanto a procedimientos y discurso. Además, es evidente que está ligado directamente con la teoría, por lo cual su domino está más alejado de las interpretaciones primitivas de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones, aunque es innegable, como se mencionó en el segundo capítulo, que el uso del método implica siempre un conocimiento tácito.

Entonces, el método de Gauss-Jordan es un máximo con relación a tecnología, y aborda la mayoría, por no decir que todos, los aspectos que se tuvieron y dejaron de tener en cuenta en los métodos anteriormente descritos. Como la historia nos permite evidenciar, con Gauss se revive el método chino, y mediante un proceso reflexivo se teorizó y expandió esta idea para solucionar sistemas de ecuaciones utilizando solo los coeficientes de una manera ordenada y eficiente además se amplió la utilidad del método matricial al indicar la manera en que se puede determinar si un sistema tiene solución única, infinita o es indeterminado; por tanto, lo percibimos como un avance tecnológico en cuanto al método chino y el método de Bezout.

El método de Bezout puede aplicarse en la actualidad, pero cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones 4×4 en adelante, los procedimientos pueden llegar a ser muy extensos y en vez de simplificar un proceso, puede llegar a complicarlo. Por eso el organizar en matrices y limitar el trabajo de los coeficientes a tres operaciones elementales entre renglones, ayuda a facilitar los procedimientos y permite que el proceso sea reiterativo tantas veces como ecuaciones se tenga. Además el método de Gauss no olvida que se está dentro de un sistema de ecuaciones, y ya sea que se aplique el método de eliminación de gauss o el método de Gauss-Jordan, el sistema de ecuaciones siempre está presente.

Por tanto, a pesar que la matriz se trabajó como una técnica para resolver algunos sistemas de ecuaciones en la época de los chinos, podemos considerarla como tecnología en la época de Gauss, debido a que se muestra como: una manera más eficiente, simplificada y generalizada de resolver sistemas de ecuaciones, lo cual se presentó desde la época de los babilonios en cuanto a sistemas de ecuaciones. Esto se argumenta debido a que existe reflexión en torno al método utilizado por los chinos y Bezout para teorizar, consiguiendo una generalización que se ajusta a un universo numérico más amplio; un universo que concibe los números negativos, los números fraccionarios, el inverso aditivo y el inverso multiplicativo y muchos aspectos más que en las antiguas culturas no se habían podido tener en cuenta. Todo esto es lo que genera tecnología en los sistemas de ecuaciones, tecnología apreciada como matrices para solucionar sistemas de ecuaciones.

Es decir los dos grandes métodos que trascendieron en cuanto a la reflexión, teorización y transformación del método de trabajo con determinantes con respecto a otros, fueron los determinantes de Cramer y las matrices de Gauss-Jordan, entendiendo en resumen que: los determinantes buscan una fórmula para resolver sistemas lineales cuadrados a partir del cálculo del determinante de la matriz y Gauss-Jordan con el arreglo matricial y las operaciones entre filas y números busca resolver sistemas de ecuaciones tanto cuadrados como rectangulares.

Por tanto, el método de determinantes busca una fórmula para resolver sistemas lineales cuadrados, pero este se vuelve complicado y muy difícil de manipular a partir de sistemas 4×4. Al contrario de las matrices que logran desarrollar un proceso de comprensión en el arreglo matricial haciendo más eficiente la técnica de encontrar determinantes y solucionar sistemas de ecuaciones, principalmente porque no se enreda con el trabajo con sistemas de ecuaciones y puede ajustarse a sistemas lineales rectangulares. En consecuencia, en lo referente a eficiencia, eficacia y dominio de la técnica, el método de Gauss-Jordan es mejor que el método de determinantes; además el método de Gauss-Jordan nos permite identificar cuándo un sistema es indeterminado, cuándo tiene infinitas soluciones y cuándo tiene única solución, a diferencia del método de determinante. Por lo tanto las matrices son un avance tecnológico en cuanto a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

CAPITULO 4.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES.

a. Sobre Técnica Tecnología:

La técnica surge con los procesos de atender las necesidades del ser humano, mientras que la tecnología se desarrolla cuando la cognición le permite comprender, explicar, formular y comunicar procesos. Además, la tecnología puede tener distintas representaciones (físicas y abstractas) siempre que se preocupe, más que por el desarrollo de una teoría, por la generación de conocimiento real en la praxis.

En el ser humano, se establece que cuando se genera, se apropia y se hace consciente de una serie de acciones que le permiten cumplir un fin específico, se está haciendo referencia a la técnica, la cual se orienta cuando se intenta responder a la pregunta del ¿cómo hacer?, mientras que la tecnología hace referencia a los procesos en los que se busca la respuesta a la pregunta del ¿por qué hacerlo así?, así que orientado por este cuestionamiento, se acude a técnicas, conocimientos científicos y/o empíricos en un marco sociocultural, entre otras cosas, por tanto, la tecnología es un proceso, que aunque tiene incidencia en la realidad, es esencialmente mental, y que tiene como resultado la construcción, modificación o mejoramiento de técnicas recursos físicos, herramientas y/o conocimientos.

El análisis, la reflexión, el mejoramiento y la teorización en torno a la técnica, hace que hablemos de tecnología y al referirse a esta se tienen en cuenta aspectos que trascienden a las técnicas y herramientas, puesto que se cuenta con una serie de discursos, conocimientos, procesos, etc., que justifican, describen y crean; estos son basados en una estructura social, económica o cultural. Además se puede pensar que la tecnología no siempre hace referencia a objetos tangibles, puesto que involucra procesos y conocimientos. Es decir, la tecnología hace referencia a los procesos en los que se involucran técnicas, conocimientos técnicos, científicos o empíricos, estructuras sociales o económicas, entre otros recursos tangibles o no tangibles, para solucionar problemas sociales mediante la producción de conocimiento tecnológico para la transformación, mejoramiento y/o creación de la ciencia, técnica o simplemente la realidad.

La transformación de la realidad es un proceso posible gracias a la existencia, innata y desarrollada, de la capacidad de razonamiento mediante la manipulación de objetos abstractos que representan objetos concretos. Esto implica, que la tecnología, aunque tiene incidencias en el mundo físico, es un proceso mental.

b. Sobre matriz y determinante como tecnología.

Un conocimiento que es de interés particular en este trabajo, son las Matemáticas, las cuales son una ciencia que, aunque cuenta con conocimientos y procedimientos propios para la construcción y validación, hacen parte y es resultado de un continuo proceso reflexivo en el que interaccionan el conocimiento técnico, tecnológico y teórico, en distintos momentos, con diferentes niveles de formalización y con variadas finalidades. Una rama de las matemáticas es el álgebra lineal, y dentro de ella se particularizan los sistemas de ecuaciones y las matrices.

Históricamente en lo referente a algebra lineal, primero se contemplaron métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, que carecían de un discurso que los describiera y justificara, por lo que se basaban en conocimiento tecnológico tácito (métodos de falsa posición, cuadrados mágicos, exceso y defecto, etc.). Este se fue transformando en conocimiento prescriptivo a medida que se generaban procesos reflexivos en busca de la generalización, eficiencia, mejor dominio y explicación, de los métodos inicialmente usados; por lo cual se realizaron importantes avances con relación al lenguaje, la simbolización, la argumentación, entre otros aspectos (Cardano, Leibniz, Bezout, etc.), que luego de reflexionarse en búsqueda de mejorarlos, llegaron a su máximo esplendor como conocimiento tecnológico descriptivo e incluso teórico (Cramer o Gauss).

Cuando el lenguaje se transforma, como en el caso de Leibniz, permite referirse a elementos particulares en Matemáticas de una forma general, lo que indica que la comunicación se presenta de una manera más precisa y eficaz, lo cual puede considerarse tecnología del tipo prescriptivo y descriptivo, puesto que se aleja de las aproximaciones primitivas y presenta símbolos con nuevos significativos y niveles de abstracción. Por ejemplo, la regla de Cramer resulta de un proceso de reflexión en el cual, en búsqueda de una fórmula para solucionar sistemas de ecuaciones, se acude al trabajo sobre los coeficientes del mismo. Dicho trabajo se inicia con los chinos en su método de exceso y defecto, también se aborda en el trabajo de Cardano sobre la Regla del modo, Leibniz sobre resultantes, entre otros. Además, en cada nuevo desarrollo se evidencia avances con respecto al lenguaje simbólico, la formalidad de los argumentos abordados, los procesos descriptivos y de justificación entre otros aspectos que encuentran su clima en la teoría del algebra lineal. Es decir que la regla de Cramer es evidentemente resultado de un proceso tecnológico que inicia con conocimiento tácito y llega a la teorización.

Con respecto al método de Cramer, que fue un avance de gran importancia, pero por la complejidad en su ejecución en diversos casos era impracticable. Además presentaba limitaciones con respecto a los tipos de sistemas de ecuaciones que podía solucionar. Sin embargo, estos aspectos logran ser superados cuando se trabaja con matrices, ya que a diferencia de las determinantes (que buscaban una fórmula para solucionar sistemas de ecuaciones), las matrices, como por ejemplo el método de Gauss y su álgebra de matrices, logran conservar la idea de desarrollar un proceso de solución que aunque se rige por una serie de pasos, es flexible a los contextos en los que se use, además amplía el espectro de sistemas de ecuaciones que puede solucionar, puesto que no se limita a sistemas cuadrados. Adicionalmente, permite identificar con un número finito de pasos si un sistema tiene solución, y en el caso de tenerla indica en forma evidente las soluciones.

En consecuencia, las matrices son resultado de un proceso reflexivo de distintas culturas en diferentes momentos históricos, de tal forma que evidencian notorios desarrollos en los que se pasa del trabajo con variables a la solución de sistemas de ecuaciones a partir de los coeficientes de la misma, haciendo cada vez más eficiente varios procedimientos como el de las operaciones entre ecuaciones de un sistema (por ejemplo con respecto a los procedimientos de Bezout), o la aplicación del método de eliminación (por ejemplo en la eliminación de Gauss).

Además, supera aspectos que limitaban el trabajo con determinantes al permitir trabajar con sistemas rectangulares, acortar la cantidad de pasos para solucionar el sistema, permitir evidenciar con más facilidad cuándo no tiene solución entre otras cosas. Por estos motivos es necesario reconocer la matriz como el fruto de un proceso tecnológico, que inicia con conocimiento tácitos de distintas técnicas y llega a consolidarse como conocimiento teórico del álgebra lineal.

Es decir que las matrices y determinantes cuentan con un enorme discurso teórico que las describe y sustenta. Sin embargo, en la actualidad se puede ver la organización matricial como una herramienta para trabajar con sistemas de ecuaciones, para por ejemplo, hablar del método de Gauss o del método de Cramer como una técnica para desarrollar las matrices, desconociendo de estos elementos su inmenso discurso teórico.

Finalmente, a medida que las matemáticas se fueron desarrollando a partir de estudiarse a sí misma, fue estableciendo nuevos avances tecnológicos, que en ocasiones incluso permitieron distintas miradas de procesos similares, o distintas formas de abordar un mismo problema, lo que resaltó la importancia de ver a las matemáticas como resultado de procesos reflexivos humanos, llenos de verdad y subjetividad.

c. Reflexión:

Con este trabajo se abordaron algunos métodos usados en la solución de sistemas de ecuaciones y por lo tanto fundamentales para el desarrollo del álgebra lineal, los cuales fueron comparados y analizados en busca de identificar si se pueden o no considerar tecnología en las Matemáticas, o más particularmente, en la solución de ecuaciones. Así, fue posible que viéramos los métodos, que a veces abordamos en algunos cursos como simples algoritmos, como procesos reflexivos que no desconocían un contexto espacio-temporal específico es decir, que es evidente que cada idea matemática fue resultado de la acción humana y su importancia radica en los desarrollos evolutivos de las técnicas, que en su momento particularmente histórico fueron tecnología o avance tecnológico según haya si fue una reflexión en torno a una técnica hasta llegar a teorizarla (avance tecnológico), o el trabajo en una técnica particular que resalta en esencia los mismos aspectos matemáticos que otra técnica, aunque no se hayan basado teóricamente entre ellas para estructurarse (tecnología).

Sin embargo, en algunas ocasiones, insistimos en enseñar y aprender estas Matemáticas como un conjunto de reglas ajeno a la historia y la humanidad, transmitiendo resultados de la reflexión y omitiendo procesos que desarrollan pensamiento útil para las Matemáticas y la vida. Entonces, es posible identificar que, al menos, lo que respecta a matrices son en su mayoría tecnologías, que conviven con técnicas, pero de las que es fundamental el proceso reflexivo, por lo cual es posible pensar en mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje reconociendo ese componente tecnológico para priorizarlo sobre la mera técnica, que en ocasiones ni siquiera se replica bien.

Por lo tanto, invitamos a los docentes de matemáticas, a que reflexionen sobre lo importante de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que estamos promoviendo, para que nuestros alumnos, no se queden únicamente manipulando conocimientos tácitos, y no por la falta de teoría, sino por el desconocimiento de la misma.

BIBLIOGRAFÍA

Algarra Loópez, M. N., Borges Hernández, C. E., García Dorta, I., & Hernandez Negrín, V. &. (16 de octubre de 2004). *http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf.* Recuperado el 15 de agosto de 2014, de paginaspersonales.deusto.es: http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

Blyth T.S & Robertson, E. F. (2002). *Basic linear algebra* (Segunda edicion ed.). London: Springer.

Cabañas, J. J. (12 de Noviembre de 2011). *Scribd.* Recuperado el 15 de Octubre de 2014, de Scribd: http://es.scribd.com/doc/72487050/Aplicacion-de-Matrices-en-Ingenieria

Cardano, G. (1993). On the rule of method. En G. Cardano, *Ars Magna or the Rules of Algeba* (T. R. Witmer, Trad., Segunda ed., págs. 180-181). Ney York: The MIT.

García Moreno, F. (2004). La relación ciencia y tecnología en la sociedad actual. Análisis de algunos criterios y valores epistemológicos y tecnológicos y su influencia dentro del marco social. *Argumentos de razón técnica: revista española de ciencia tecnología y sociedad, y filosofia de la tecnologia*(N° 7), 105 - 148.

García Moreno, F. (2004). La relación ciencia y tecnología en la sociedad actual. Análisis de algunos criterios y valores epistemológicos y tecnológicos y su influencia dentro del marco social. *argumentos de razón técnica: revista española de ciencia tecnología y sociedad, y filosofia de la tecnologia*(N° 7), 105 - 148.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1*(52), 7-33.

Gay, A., & Ferreras, M. A. (1995). La ciencia, la técnica y la tecnología. En A. Gay, & M. A. Ferreras, *La Educación Tecnológica, Aportes para su implementación* (págs. 71 - 89). Buenos Aires, Argentina: CONICET.

Góngora, A. R. (2009). Evolución Histórica del Concepto de Matriz. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 2-20.

González, A. A. (2012). *PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Gonzalez, V. W., & Hernandez M, L. H. (2000). Tecnología y técnica: tres perspectivas. *Energía y Corporación, IX*(1), 6-19.

Grossman, S. I. (1992). *Álgebra lineal.* Mexico: McGRAW-Hill.

Guerra, A. A. (2012). *PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Herchbach, D. R. (1995). La tecnológia como conocimiento: implicancias para la educación. *Technology as Knowledge* .

Herchbach, D. R. (1995). La tecnológia como conocimiento: implicancias para la educación. *Technology Education, 7*(1).

http://www.robertnowlan.com/. (s.f.). *A Cronicle of Mathematical People By Robert A. Nowlan.* Recuperado el 2 de Septiembre de 2014

Ji-huan, H. (2002). ANCIENT CHINESE ALGORITHM: THE YING BUU SHU (METHOD OF SURPLUS AND DEFICIENCY) VS NEWTON INTERATION METHOD. *Applied mathematics and mechanics. English edition, vol 23*(N° 12).

Luzardo, D. &. (2006). Historia del Algebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14*(2), 153-170.

Pérez, N. H., Mellincovsky, D. C., Barrozo, M. E., Páez, H., & Pekolj, M. (s.f.). *TÉCNICA Y TECNOLOGÍA, REFLEXIONES ENTORNO A ECUACIONES E INECUACIONES.* San Luis.

Plata, U. N. (s.f.). Control Moderno - Ingenieria Electróica . *Ejercicio Resuelto 3: Teorema de Cayley-Hamilton*.

Polo, Y. Á. (2014). *Introducción del álgebra lineal en España y en Colombia durante la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX.* Logroño: Universidad de la Rioja.

Robertson, J. J.-E. (s.f). *palillo.usach.* Recuperado el 10 de Marzo de 2014, de http://palillo.usach.cl/Pamela/historia.htm

Rosales Góngora, A. (2009). Evolución histórica del concepto de matriz. *revista digital matemática, educación e internet, 9*(2).

Rosales Ordóñez, G. (2012). *Diseño e implementación de talleres para la enseñanza y aprendizaje del álgebra matricial y solución de sistemas de ecuaciones lineales con Scilab.* Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Ruiz, A. (s.f.). *http://www.centroedumatematica.com*. Recuperado el 5 de mayo de 2014, de http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/Indice.htm:

http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte6/Cap20/Parte04_20.htm

Tenorio Villalón, Á., & Martín Caraball, A. (s.f). Introducción del álgebra lineal en la economía: una aproximación histórica. En M. C. Departamento de Economía (Ed.), *XIX jornadas ASEPUMA – VII encuentro internacional n°19: 0101.*

Zambrano, L. E. (2011). *Planteamiento y Solución de Problemas de Ecuaciones, Usando Estrategias y Métodos Propuestos en el Desarrollo Histórico de la Teoría de Ecuaciones.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.