PARADOJAS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

María M. Gea, Carmen Batanero, J. Miguel Contreras, Pedro Arteaga
Universidad de Granada. (España)
mmgea@ugr.es, batanero@ugr.es, jmcontreras@ugr.es y parteaga@ugr.es

RESUMEN: Se describe una propuesta de enseñanza sobre probabilidad, susceptible de implementar con estudiantes de secundaria o bachillerato. El propósito es analizar cómo una paradoja sirve como recurso didáctico para la enseñanza de la probabilidad, aportando dinamismo en la gestión del aula, a la vez que sirve para detectar dificultades y errores de los estudiantes al enfrentarlos a sus intuiciones en el desempeño del tema. Se complementa este trabajo con sugerencias metodológicas y otras paradojas de interés para la enseñanza del tema.

Palabras clave: paradojas, probabilidad, recurso, enseñanza, aprendizaje.

ABSTRACT: The research describes a teaching proposal about probability, which can be implemented with senior or junior high school students. The aim is to analyze how a paradox can be used as a didactic resource for probability teaching, providing dynamism to the classroom management whereas it is also useful to detect students' errors and difficulties when they are faced up to their own intuitions working with the topic. This work also proposes some methodological suggestions and other paradoxes of concern to teach the topic.

Key words: paradoxes, probability, resource, teaching, learning.

Introducción

El estudio de la probabilidad forma parte del currículo español desde la etapa de educación primaria (6-12 años), al igual que en otros muchos países; siendo un objetivo clave que los estudiantes realicen estimaciones sencillas basadas en la experiencia con situaciones aleatorias (Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014). La resolución de problemas se convierte en uno de los ejes principales de la actividad matemática, ya que cuando el estudiante se enfrenta a una situación problemática y trata de resolverla, pone en marcha sus capacidades de lectura, razonamiento y reflexión, planificación de la resolución, estrategias para poner en práctica, ejecución y revisión de procedimientos, comprobación de la solución encontrada y comunicación de la misma. Todo ello le permitirá ir progresivamente adquiriendo conocimientos más complejos, comprendiendo y haciendo uso de los conceptos fundamentales en que se basa el razonamiento probabilístico.

La tarea del profesor es diseñar situaciones de enseñanza para que el estudiante desarrolle su razonamiento probabilístico, a la vez que le permitan evaluar las intuiciones de sus estudiantes sobre el azar. Ortiz (1999) pone de manifiesto la dificultad de esta tarea, proponiendo la cooperación en los equipos de profesorado para facilitarla. En su investigación, centrada en el estudio de la presentación de la probabilidad en libros de texto de bachillerato, muestra el desequilibrio de situaciones problemáticas a favor de situaciones basadas en el cálculo (en la concepción clásica o laplaciana de probabilidad), donde se aplica el principio de indiferencia y se aplica un razonamiento combinatorio. Coincidimos con el autor en que estas actividades no cubren verdaderamente las diversas concepciones sobre probabilidad que los estudiantes deben comprender. Esta situación se hace más dificultosa cuando, al finalizar la etapa de educación secundaria (13-14 años), evaluamos a nuestro alumnado en la adquisición de capacidades en torno al azar y probabilidad tales como:

> Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. […] Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas. (MECD, 2015, p. 407).

El presente trabajo presenta una situación de enseñanza dirigida al alumnado de educación secundaria y bachillerato, que utiliza una paradoja de probabilidad como recurso didáctico. El propósito es mostrar la utilidad de este tipo de problemas paradójicos en la enseñanza de la probabilidad, que sirven para contextualizar ideas estocásticas fundamentales, a la vez que facilitan al profesor su gestión en el aula. Como indica Contreras (2011), estas propuestas de enseñanza permiten mostrar las intuiciones del alumno sobre el tema y facilitan la labor del profesor en identificar sus errores o concepciones sobre el mismo, posibilitando el diseño de un modelo de intervención más adecuado a su alumnado.

Las paradojas como recurso de enseñanza de la probabilidad

En la historia de la probabilidad han aparecido múltiples paradojas, algunas de las cuáles pueden utilizarse en su formulación elemental para introducir una dinámica de resolución de problemas en el aula (Borovcnik y Kapadia, 2014). El objetivo principal es motivar, a través de la experiencia, el diseño e implementación de actividades de enseñanza basadas en el uso de paradojas de probabilidad. Para ello, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Experimentar y resolver una actividad de probabilidad basada en una paradoja, debatiendo con los asistentes las estrategias y soluciones encontradas. Seguidamente, se llevará a cabo un análisis didáctico de la misma, que servirá para mostrar la riqueza de objetos matemáticos utilizados en la resolución de la actividad; las ideas fundamentales que se han desarrollado; así como las posibles dificultades que se han manifestado o se pueden encontrar en el proceso de resolución de la actividad.
2. Presentar resultados de investigaciones relacionadas con el uso de paradojas en la enseñanza, que muestren sesgos y errores que en la literatura se han evidenciado y que emergen en la resolución de este tipo de tareas.
3. Describir una metodología de enseñanza para el tema, fundamentada en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997), que centra la atención en la acción del estudiante y motiva el desarrollo de capacidades necesarias para su formación integral.
4. Mostrar y discutir otras paradojas presentes en la literatura, susceptibles de ser incluidas en la enseñanza de la probabilidad, que sirvan como recurso didáctico tal y como la que se plantea en este trabajo.

Descripción de la propuesta de enseñanza

La consecución de estos objetivos se ha llevado a cabo de manera secuencial, en dos sesiones de dos horas cada una. En primer lugar, se propuso la situación que se muestra en la Figura 1, basada en la paradoja de las tres cajas planteada por Joseph Bertrand (1822-1900), que Shannon y Weaver (1949) adaptaron tal y como se lleva a cabo en este curso. Se proporcionó el material a los asistentes y las tarjetas para que pudieran tocarlas y experimentar por sí mismos, y se llevó a cabo la simulación de esta situación, con la intención de facilitar la resolución de la misma y compartir entre todos las estrategias llevadas a cabo.

La simulación se desarrolló en fases de diez ensayos cada una, donde se fue completando una tabla de registro de datos como la que se muestra en la Figura 2. Fueron necesarias unas tres fases para alcanzar los objetivos previstos pero, si fuese necesario, en el aula con los estudiantes se pueden llevar a cabo más fases, e incluso dejar que ellos mismos lleven la experiencia a cabo.

Se toman 3 fichas (cartas) de la misma forma y tamaño, de las cuales una es roja por ambas caras; otra es azul por una cara y roja por la otra, y la tercera es azul por las dos caras.

El profesor coloca las tres fichas en una caja, que agita convenientemente, antes de seleccionar una de las tres fichas, al azar. Muestra, a continuación, una de las caras de la ficha elegida, manteniendo la otra tapada, pidiendo a sus alumnos que adivinen el color de la cara oculta.

Una vez hechas las apuestas, el profesor muestra la cara oculta. Cada participante que haya acertado en la predicción efectuada, consigue un punto.

Figura 1. Tarea fundamentada en la paradoja de la caja de Bertrand

	Resultados para cada ensayo efectuado									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color de la cara mostrada										
Color predicho de la cara oculta										
Color de la cara oculta										

Figura 2. Tabla de registro de los resultados en cada ensayo

Al finalizar la primera fase de diez ensayos, se explicó la estrategia elegida por cada uno de los asistentes y la puntuación obtenida siguiendo dicha estrategia. Se compartieron y discutieron las estrategias utilizadas, de modo que los participantes tuvieron ocasión de cambiar de estrategia para la realización del experimento en la siguiente fase o mantener la que habían seguido en la fase anterior. La siguiente fase sirvió para contrastar la efectividad de las estrategias utilizadas, así como las intuiciones que ya se habían manifestado en la discusión, al finalizar la fase anterior.

A pesar de ser pocas simulaciones (20 ensayos, según las dos fases realizadas), se consiguió evidenciar, de manera frecuencial, la validez de algunas estrategias. Tras la discusión de los resultados obtenidos después de la segunda fase, la mayoría de los participantes optaron por la estrategia correcta “mantener como color predicho el color mostrado”. Una tercera fase sirvió para contrastar su hipótesis sobre la mejor estrategia para ganar más puntuación y se animó a demostrar la estrategia ganadora, pudiendo con ello revelar razonamientos incorrectos o errores al justificar o argumentar las demostraciones aportadas.

Se resolvió la actividad entre todos los asistentes de diversos modos y haciendo uso también del diagrama de árbol. Además, se mostró a los participantes ejemplos de resultados de estudiantes de secundaria y bachillerato que habían puesto en práctica esta misma situación.

En la siguiente sesión, los participantes identificaron, de manera individual o en parejas, los objetos matemáticos (tipo de lenguaje, problemas, conceptos, propiedades, procedimientos y justificaciones) que se movilizaban en la resolución de la actividad, así como algunos posibles conflictos y dificultades que hubiesen encontrado o se pueden prever en los estudiantes en el desempeño de la misma. Una vez discutidos estos aspectos, se identificaron las ideas fundamentales que se deben trabajar en un curso de probabilidad, y que nuestros estudiantes deben ir adquiriendo de modo progresivo desde la educación primaria a la universidad. Como indica Batanero (2004), la mayoría de situaciones aleatorias permiten desarrollar estas ideas, y su conocimiento por parte del docente es vital, pues deben servir de guía para el desarrollo del currículo y el diseño de actividades de enseñanza. Basándonos en el trabajo desarrollado por Heitele (1975), se explicaron cada una de las ideas fundamentales (probabilidad; espacio muestral; independencia; regla de la suma; equidistribución y simetría; combinatoria; simulación; variable aleatoria; ley de los grandes números; y muestra) que se utilizaron para resolver la situación llevada a cabo.

Igualmente, se describieron las condiciones mediante las que el estudiante construye el conocimiento a través de la práctica matemática según la Teoría de Situaciones Didácticas abordada por Brousseau (1997). Se pone de manifiesto que el estudiante aprende haciendo matemáticas y resolviendo problemas. La motivación que este tiene por actuar ante el problema, de anticipar una respuesta, de ejecutar un plan de actuación y formular posibles estrategias de resolución, posibilita que el contexto, la cultura y sus ideas previas se movilicen para dar una respuesta. La comunicación en el trabajo colaborativo y su defensa en el debate con los compañeros posibilita el uso y desarrollo del lenguaje, donde, finalmente, la institucionalización de los saberes es significativamente recibida por los estudiantes, ya que la acomodación al nuevo saber ha sido asimilada gracias a su trabajo previo ante la situación (Brousseau, 1997).

Se finaliza compartiendo y planteando otros problemas interesantes, que permitan al estudiante seguir la metodología propuesta, y se complementa esta discusión con las posibles adaptaciones para llevar al aula dichas propuestas con alumnos de secundaria y bachillerato. Algunas de estas propuestas son: la paradoja del niño y la niña; el problema de Monty Hall; el juego de ruletas no transitivas o la paradoja de Simpson. De entre todas ellas, se describieron con más detalle la paradoja de Simpson y el problema de Monty Hall, dada su conexión a la realidad de los estudiantes de secundaria y bachillerato, para quienes van dirigidas.

Otras paradojas de interés para la enseñanza de la probabilidad

La paradoja de Monty Hall es la variante más conocida de la paradoja de las cajas de Bertrand (más que la paradoja del niño y la niña) y el hecho de estar inspirada en un concurso televisivo potencia la implicación y el interés del estudiante. La formulación más conocida de esta paradoja es la de suponer que estamos en un concurso en el que nos ofrecen escoger entre tres puertas, tras las cuales se esconden dos cabras y un coche (o un gran premio similar). Al escoger una puerta, se nos abre una de las otras no escogidas inicialmente, mostrándonos una cabra. El dilema surge cuando se nos vuelve a dar a elegir, si mantenernos en nuestra elección inicial, o bien, cambiar de puerta.

El cambiar de puerta aumenta nuestra probabilidad por ganar el coche (o un gran premio similar), lo que supone una solución contraintuitiva pues, es muy común encontrar respuestas en donde se piensa que es indistinto, mantenerse o cambiar de puerta. Algo que supone una motivación e interés en nuestros estudiantes es ligar nuestra enseñanza con los medios de comunicación, como es la televisión. Visualizar con nuestros alumnos en clase series televisivas y películas donde esta paradoja se ha presentado supone un incentivo a la enseñanza. Por ejemplo, la paradoja de Monty Hall ocupa lugar en la famosa serie "Numbers" (https://www.youtube.com/watch?v=pqJBTWoIkbA) o también en la película "21 Black Jack".

La paradoja de Simpson o efecto de Yule-Simpson, muestra la necesidad de analizar el fenómeno que se produce, en el estudio de la asociación entre variables, cuando no se controla el efecto de una tercera variable. El efecto de esta tercera variable no controlada (o de confusión) puede incluso cambiar el sentido de la asociación entre las variables de estudio. El ejemplo que se propuso mostraba los resultados del control de alcoholemia realizado a hombres y mujeres con motivo de estudiar la efectividad de una campaña realizada para concienciar a la población de los peligros del alcohol.

En el análisis previo a la campaña, realizado a 600 conductores, el 21,66% de los conductores presentaba una tasa de alcohol superior al límite permitido. Tras la realización de la campaña, habiendo analizado la tasa de alcohol a otros 600 conductores, el 23,33% de ellos presentaba una tasa de alcohol superior al límite permitido. La conclusión de que la campaña ha sido un fracaso es susceptible de ser analizada bajo la mirada del efecto de la variable del sexo, ya que si nos detenemos en la muestra analizada: antes de la campaña, entre 500 conductoras y 100 conductores, el 20% y el 30%, respectivamente, dieron niveles por encima del límite permitido. Después de la campaña, entre 100 conductoras y 500 conductores, el 15% y el 25%, respectivamente, dieron niveles por encima del límite permitido. De este modo, considerando la variable sexo, podemos concluir que la campaña fue un éxito.

Un ejemplo muy interesante, también discutido entre los asistentes, fue el propuesto por Engel y Sedlmeier (2011) en cuanto al estudio de asociación entre el tiempo que un estudiante está matriculado en una titulación universitaria (por semestres) y el salario percibido en el primer año de empleo, como se muestra en la Figura 3.

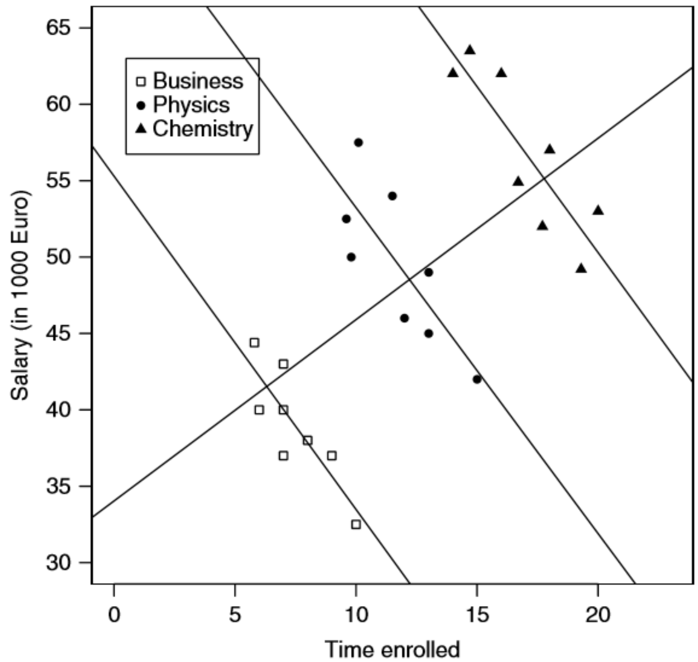

Figura 3. Tiempo matriculado hasta la graduación (en semestres) y salario en el primer año de empleo (en miles de Euros) (Engel y Sedlmeier, 2011, p.249)

En este ejemplo, los titulados que mayor tiempo de matriculación poseen (por semestres) son, por orden, las titulaciones en química, física y económicas. Y los salarios percibidos, en el primer año de empleo al finalizar sus estudios en dichos estudios, suelen tener una variabilidad similar, aunque los salarios percibidos por los titulados en química suelen ser mayores que los titulados en física, y éstos aún mayores que los titulados en económicas. El efecto que se observa es que, al reunir a todos los estudiantes en el mismo análisis, tal y como se publicó en un periódico alemán, existe una correlación positiva entre estas dos variables (tiempo de matriculación y salario percibido), pero que, realmente, se manifiesta negativa y fuerte cuando estudiamos estas variables según cada una de las titulaciones analizadas.

Reflexión final

Este trabajo describe una propuesta de enseñanza diseñada para estudiantes de secundaria y bachillerato, haciendo uso de una paradoja como recurso didáctico para la enseñanza de la probabilidad. Diversas preguntas dirigen la experiencia para motivar la discusión sobre las estrategias de resolución utilizadas, a la vez que se ponen a prueba las ideas que se poseen sobre el tema.

En base al trabajo desarrollado por Heitele (1975), se explicaron cada una de las ideas fundamentales que se utilizaron para resolver la situación propuesta y cómo poder identificar el grado de adquisición de estas ideas en nuestros estudiantes pues, como indica Batanero (2004), es vital que el docente conozca el desarrollo de estas ideas en sus estudiantes ya que deberán ir evolucionando de manera gradual a lo largo de su formación.

Igualmente, se aportan sugerencias metodológicas fundamentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), bajo la premisa de que el estudiante aprende resolviendo problemas, que se considera un eje vertebrador en las directrices curriculares en España (MECD, 2015).

La situación llevada a cabo, y otras más que se sugieren, muestran cómo las paradojas promueven un aprendizaje significativo del tema, aumentando la motivación de nuestro alumnado, y movilizando el uso de ideas previas que, de manera constructivista, permitirán a nuestros estudiantes facilitar su aprendizaje (Lesser, 1998; Konold, 1994). Como sugiere Contreras (2011), se trata de trabajar las intuiciones en probabilidad de nuestros estudiantes, que son en su mayoría erróneas, y si no se detectan pronto, posteriormente serán más difíciles de erradicar.

La formación del profesor en todos estos aspectos es fundamental, ya que debe servir de guía a sus alumnos, para permitirles que actúen y anticipen sus respuestas, que formulen sus estrategias y discutan sus resultados. Con ello pensamos, que este tipo de actividades son útiles en cursos de formación dirigidos al profesorado pues, al mismo tiempo que le sirven para su profesión, se ponen ellos mismos ante una situación problemática, que les puede servir para aumentar sus conocimientos sobre probabilidad.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (MEC), Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? En J. A. Fernandes, M. V. Sousa y S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística. Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., Gea, M. M., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *14*(2). http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). From puzzles and paradoxes to concepts in probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 35-73). New York: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990*. London: Kluwer.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Universidad de Granada.

Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En Batanero, C., Burrill, G. F. y Reading, C. (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). Dordrecht: Springer.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, *87*(4), 232-235.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, *20*(1), 10-12.

M.E.C.D. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte). (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato*. Madrid: Autor.

Shannon, C. E. y Weaver, W. (1949). *A mathematical model of communication. Urbana*. IL: University of Illinois Press.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.