

LA REFLEXIÓN COMO VÍA DE APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

Carlos Baltazar Vicencio, Marta Elena Valdemoros Álvarez

CINVESTAV-IPN (México)

cbaltazarv@hotmail.com, mvaldemoros@cinvestav.mx

RESUMEN: Se reporta una investigación donde se aplica un programa de instrucción distinto al que tiene lugar en la escuela elemental (enseñanza experimental) con el propósito de inducir nociones básicas vinculadas a las fracciones en alumnos que no han tenido experiencia escolar con esos números. Las actividades giran en torno a la reflexión de los alumnos sobre las acciones realizadas. A partir de dicha reflexión, los alumnos lograron nombrar y escribir algunas fracciones como resultados de repartos. Se seleccionó un grupo de tercer grado de primaria de una escuela que pertenece al sector particular incorporado a la Secretaría de Educación Pública, localizada en una zona urbana de la Ciudad de México. Los instrumentos metodológicos que se consideraron en la investigación son: la observación, la entrevista y el programa de enseñanza experimental. Los resultados permiten distinguir cuatro maneras como los alumnos establecen la relación entre los componentes propios de las fracciones y la organización que hace de ellos en su pensamiento reflexivo.

Palabras clave: fracciones, reflexión, aprendizaje, reparto.

ABSTRACT: This research deals with a study where a teaching program that is different from the elementary school program (experimental teaching) is used. The aim of this work is to induce basic notions related to fractions in those students who have not had any school experience with this kind of numbers. The activities are focused on the students' reflection about the actions carried out. From this reflection on, the students could mention and write some fractions obtained after the distributions. A group of the third-grade students from a private primary school of the Public Education Department, located in the urban sector of Mexico City, was chosen. The methodological instruments taken for granted in this research were: the observation, the interview and the experimental teaching program. The results allow distinguishing four ways in which students establish the relationship between the fractions own components and how they organize them by means of the reflexive thinking.

Key words: fractions, reflection, learning, distribution.

■ Introducción

El estudio de las fracciones es la problemática que se aborda en la investigación reportada dado que la no comprensión de ese tipo de números contribuye a la distorsión de conocimientos de la aritmética que se tratan en la escuela primaria, así como a la distorsión de conceptos que se construyen en la secundaria y preparatoria.

La mayoría de las investigaciones que se han realizado sobre propuestas de enseñanza de las fracciones se enfocan principalmente en el diseño de actividades y materiales (concretos y virtuales) que puedan ayudar a los alumnos en la comprensión de los números fraccionarios (Lerman, 2014). Sin embargo, son pocas las investigaciones que se han centrado en la actividad mental y el pensamiento, en particular, del alumno en el aprendizaje de las fracciones. De acuerdo a la relevancia del problema y a los objetivos de nuestro estudio, nos centramos en dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿De qué manera la abstracción reflexiva contribuye a que los alumnos den sentido a las fracciones, en situaciones de reparto? ¿Cómo evolucionan las ideas de los niños acerca de las fracciones a partir de la reflexión realizada sobre sus acciones, en situaciones de reparto? Fijándonos los siguientes objetivos del estudio: a) Desarrollar una propuesta de enseñanza que permita promover la abstracción reflexiva de los alumnos para que den sentido a las fracciones en escenarios de reparto y b) Identificar lo que comunican los alumnos a partir de las reflexiones, individuales y colectivas, realizadas sobre lo que hacen al resolver tarea de reparto que originan fracciones.

Partimos de las circunstancias de reparto para inducir a los alumnos en el estudio de las fracciones porque esas situaciones son realizadas por ellos aún antes de iniciar su enseñanza escolar, y porque en el reparto se trabaja con una relación fundamental para la comprensión de la fracción, la relación parte-todo.

■ Marco Teórico

Piaget (2001) distingue dos tipos básicos de abstracción: la abstracción empírica y la abstracción reflexiva. Identifica a la abstracción empírica como la que el sujeto realiza a partir de las características que observa en los objetos o de sus acciones sobre las características materiales de esos objetos. Indica que la abstracción reflexiva es el proceso por el cual el sujeto construye conocimientos sistemáticos que se producen a partir de los conocimientos previos. También señala que la reflexión es una de las fuerzas motrices del desarrollo cognitivo de los sujetos. Entonces, si la reflexión es fundamental para esa evolución del pensamiento de los alumnos, se hace imprescindible que la abstracción reflexiva sea promovida desde la escuela. En el programa de enseñanza experimental motivo del estudio se parte de las abstracciones empíricas de los estudiantes para llevarlos, a través de preguntas planteadas por el investigador, hacia la reflexión sobre sus acciones, reflexión que les permitió desarrollar algunas nociones básicas respecto de las fracciones.

Para desarrollar el programa de enseñanza se considera el significado de la fracción como cociente. Respecto del conocimiento del número racional, Kieren (1983) afirma que éste es un contenido matemático complejo cuya construcción contiene algunas experiencias que comprenden herramientas del pensamiento como las particiones, la identificación de partes y la formación de equivalencias. El mismo investigador menciona que en la expresión a/b se encierran cinco constructos (significados de acuerdo a los autores de este escrito) de la fracción: cociente, medida, operador, razón y relación parte-todo. Él mismo define a la relación parte-todo como un todo que es cortado en partes iguales, y utiliza la idea de fracción para cuantificar la relación entre un número designado de partes y el todo. También Kieren (1983) afirma que existe una íntima correspondencia entre el constructo de cociente y la relación parte-todo, ya que ese significado de la fracción permite la cuantificación de los resultados cuando se divide una cantidad en un número determinado de partes.

Varias investigaciones (Kieren, 1983; Streefland, 1993; Lamon, 1996) sugieren que las acciones de reparto son una vía para la construcción de la fracción, dado que son acciones que los niños realizan con cierta familiaridad. Por lo anterior, en la investigación que se reporta, se hace uso de actividades de reparto para guiar las reflexiones de los alumnos.

Con las actividades de reparto se hace surgir la necesidad de realizar particiones. Con relación a la partición, Kieren (1983) la define como una equidivisión de una cantidad en un número dado de partes y la considera como la idea base para la relación parte-todo. Observa de este mecanismo de construcción tres aspectos importantes: primero, que es un tipo de clasificación o asignación basado en el criterio de igualdad y suficiencia, teniendo una génesis social en la acción de repartir; otro aspecto es la relación con el lenguaje que describe el acto y el tercero, muestra que para los niños la partición, el tamaño y la medida pueden ser bastante independientes. Por su parte, Lamon (1996) define a la partición como una operación que genera cantidad, basada en actividades intuitivas y el conocimiento informal del niño acerca del reparto equitativo, el que consiste en la determinación de particiones iguales y se ve como una operación de múltiples etapas: marcar objetos, cortarlos e indicar claramente la porción que le corresponde a cada persona.

De acuerdo con los principios de la matemática realista, Streefland (1993) afirma que cuando los estudiantes son iniciados a partir de experiencias ligadas a la realidad, ellos solos pueden cruzar el límite de las matemáticas para estructurar, simbolizar, esquematizar y muchas otras acciones más. De acuerdo con lo anterior, en el programa de enseñanza que se reporta se propusieron actividades cercanas a la cotidianidad de los alumnos participantes en la investigación. En el mencionado programa se propusieron tareas para que los alumnos dieran significado a algunas nociones básicas en torno a las fracciones, como la partición, la equivalencia y las unidades, así como para que ellos realizaran sus propias escrituras para dichos números.

En el programa de enseñanza adquirieron especial relevancia los diálogos entre los niños, entre los niños y el investigador, así como el diálogo que el niño realiza con él mismo, con la intención de conocer lo que los estudiantes pensaban ante cualquier tarea. En estos diálogos fueron promovidas

las relaciones intrasubjetivas e intersubjetivas (Vygotsky, 1995); las primeras para que el alumno reflexionara sobre sus propias ideas y las segundas, para promover que los alumnos ratificaran o rectificaran sus ideas iniciales a través del intercambio de puntos de vista con sus iguales y con el investigador.

■ Método

Los sujetos del estudio

Se seleccionó un grupo de tercer grado de primaria, integrado por 16 niños de ambos sexos con edades entre 7 y 9 años. La escuela del grupo elegido pertenece al sector privado incorporada al Sistema Educativo Nacional y se encuentra ubicada en una zona del área urbana de la Ciudad de México.

■ Instrumentos metodológicos considerados en la investigación

Observación. Se observó 2 sesiones, una antes y otra después de la aplicación del programa de enseñanza experimental. El objetivo de la primera observación fue detectar las formas como los alumnos resolvieron tareas de reparto sin que se llegaran a generar fracciones. En la segunda observación se pretendió observar la forma como el programa de enseñanza experimental pudo influir en el trabajo de la profesora del grupo motivo de la investigación.

Entrevistas individuales. Fueron semiestructuradas y audiograbadas. Se aplicó a dos alumnos y a la profesora. Se realizaron en dos momentos de la investigación: antes y después de la aplicación del programa de enseñanza experimental. Las entrevistas iniciales con los alumnos se diseñaron siete tareas para indagar lo que hacen cuando se enfrentan por primera vez a situaciones que originan fracciones antes de iniciar su enseñanza escolar, incluyendo las formas como pueden expresar los resultados de esos repartos y con la maestra se pretendió averiguar sus ideas acerca de las fracciones, del reparto y de la reflexión. El objetivo principal de las entrevistas finales con los alumnos fue registrar los cambios que el programa de enseñanza hubiera potenciado, así como realizar retroalimentación (Valdemoros, 1997). En cuanto a la entrevista final con la maestra, se pretendió que valorara el programa de enseñanza que el investigador llevó a cabo con sus alumnos y averiguar las modificaciones que se hubieran dado en torno a las ideas de la docente sobre de la reflexión.

Programa de enseñanza experimental. El programa de enseñanza estuvo integrado por diez sesiones, de cuarenta a cincuenta minutos cada una, las cuales se desarrollaron en once intervenciones en el aula. En todas las sesiones, la intervención del investigador se enfocó principalmente en la promoción de las reflexiones de los estudiantes. En este programa de enseñanza se propusieron tareas donde surgieron fracciones propias e impropias usando medios y cuartos, con todos continuos y discretos.

■ Resultados

La observación

Los resultados obtenidos en la observación inicial revelan una enseñanza donde los alumnos tienen libertad para expresar sus ideas. La maestra limita la reflexión de los alumnos a la socialización de los resultados de los problemas y de las estrategias para encontrarlos. En cuanto a la observación final, los resultados permiten afirmar que la maestra fue influenciada en dos aspectos principales: en cuanto al tipo de problemas propuestos y respecto a la forma de promover amplias reflexiones en los alumnos. En este último aspecto, la docente realizó un seguimiento más cercano de las respuestas de los alumnos invitándolos de manera constante para que argumentaran sus respuestas y buscaran diversas formas de expresar sus ideas.

Las entrevistas

En las entrevistas iniciales, los alumnos lograron resolver las tareas de repartos desarrollados en todos continuos y discretos. Usaron las expresiones “mitad” y “pedazos” para referirse a los medios y cuartos de los todos continuos. Utilizaron el conteo y los números naturales para determinar los resultados de los repartos de todos discretos. En la entrevista inicial, la maestra reconoció a la fracción en la relación parte-todo y concibe a la reflexión de los alumnos como el intercambio de ideas para resolver una tarea, compartir sus estrategias de resolución y desarrollar nuevas nociones de fracción.

En las entrevistas finales, los estudiantes lograron expresar numéricamente, con fracciones propias e impropias, los resultados de repartos de todos continuos. Uno de ellos pudo usar las fracciones para determinar el resultado de un reparto de un todo discreto. Por su parte, la maestra dio muestras de ampliar su idea de las fracciones hacia el significado de cociente (ligado al reparto) y aceptó que los receptores no siempre son personas. Ella misma, identifica a la reflexión como parte importante del proceso de aprendizaje de los alumnos y destaca la importancia del docente como quien debe provocar esa reflexión a partir de preguntas en el transcurso de todas las actividades de aprendizaje de los alumnos.

■ Programa de enseñanza

Cuando los alumnos enfrentaron diversas situaciones que generaron fracciones, desarrollaron nociones alrededor de esos números, usando una cantidad variable de elementos y estableciendo diversas relaciones entre ellos. De esa manera se distinguieron los siguientes cuatro casos:

1. Con pocos o un único componente y escasa organización en el pensamiento reflexivo del niño. Los alumnos utilizaron pocos elementos para realizar sus elaboraciones y los organizaron usando pocas relaciones, sin embargo este logro no es trivial, requiere de grandes esfuerzos

por parte de los alumnos. Por ejemplo, cuando los alumnos lograron establecer la relación entre el numerador y el denominador para aceptar a la fracción como el número que cuantifica el resultado de un reparto. En este caso consideramos como elementos al numerador y al denominador, organizados de manera que se integraron en un solo número bajo la forma de fracción.

2. Con pocos o un único componente y alta organización en el pensamiento reflexivo del niño. Esta situación se refiere a las producciones de los alumnos cuando utilizaron pocos elementos pero con varias relaciones entre ellos. En este caso se consideran las reflexiones cuando los alumnos logran pasar de la expresión “la mitad” a “ $1/2$ ”. Los elementos que intervienen en esta situación son “la mitad” y “ $1/2$ ” considerando una serie de relaciones como la necesidad de partir un objeto para poderlo repartir y el uso de diversas formas de particiones, hasta la escritura fraccionaria de $\frac{1}{2}$, asignado a la relación entre el numerador y el denominador de la fracción como cociente (vinculado al reparto).
3. Con muchos componentes y una organización elemental en el pensamiento reflexivo del niño. Así, la mayoría de los alumnos logró transferir la relación entre el numerador y el denominador de una fracción dada a cualquier situación de reparto, propuesta como un problema, donde el niño generalizó a nuevas situaciones sin modificar la fracción. Por ejemplo, para la fracción $7/4$ propusieron los problemas: “En una dulcería hay 7 chocolates y 4 niños que se los quieren repartir justamente. ¿Cuánto le toca a cada uno?” y “Camila quiere repartir 7 pasteles entre 2 niños. ¿Cuántos pasteles le tocan a cada uno?”.
4. Con muchos componentes y alta organización en el pensamiento reflexivo del niño. Podemos distinguir el caso de la equivalencia entre los resultados de un mismo reparto, como cuando lograron desarrollar la equivalencia de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ (en una relación aditiva) con $\frac{3}{2}$ y con $1 \frac{1}{2}$. En este desarrollo se observa también el uso de pictogramas y líneas que relacionan el resultado del reparto que origina las fracciones motivo de esta denominación. Ver figura 1.

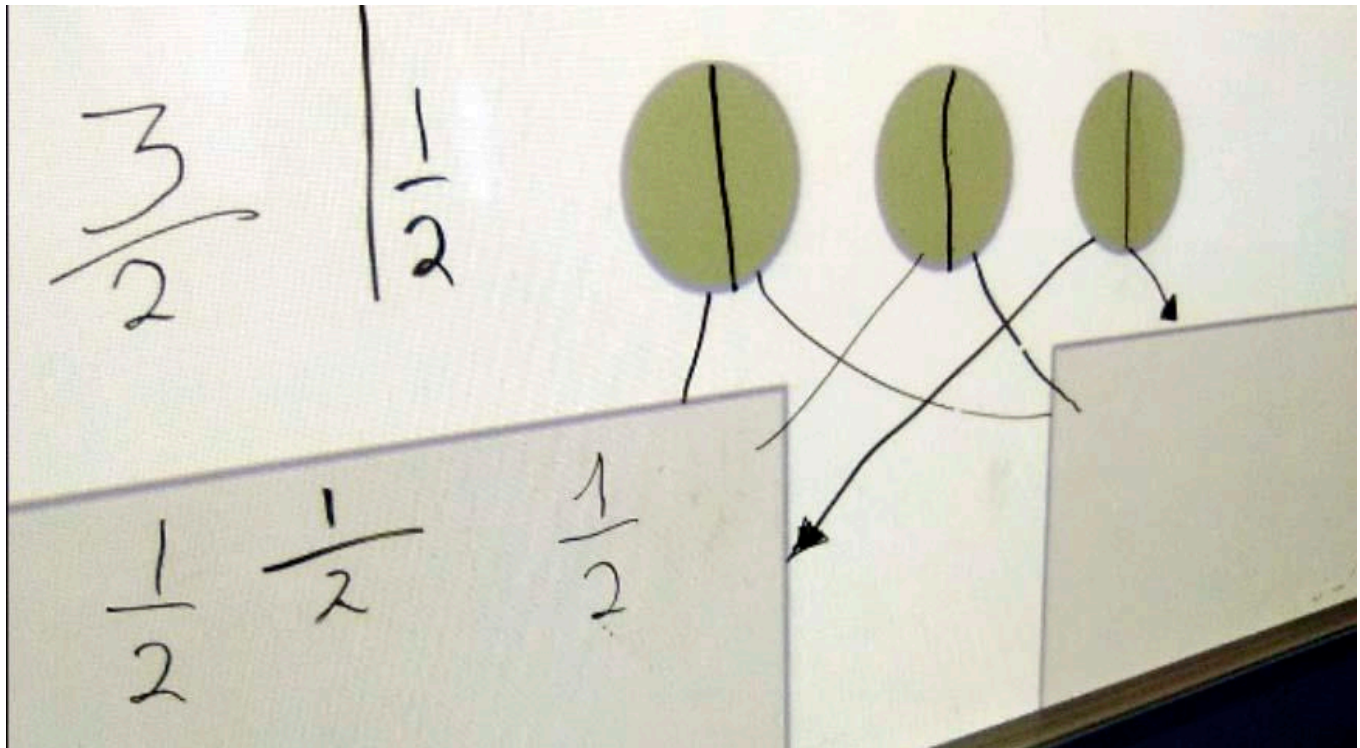


Figura 1. Expresiones fraccionarias para el resultado de repartir 3 objetos entre 2 destinatarios.

Otros resultados obtenidos en torno a las reflexiones, pensamientos intuitivos y notaciones de los alumnos, fueron:

- Pudieron descartar la idea de un par de números naturales en beneficio del reconocimiento del número de la forma a/b como un número por sí mismo y de una naturaleza diferente a la de los números naturales.
- Identificaron a las fracciones como un número que representa el resultado de un reparto.
- Propusieron sus propias formas de escribir las fracciones. Así propusieron las siguientes escrituras para la fracción $\frac{1}{2}$: a) "3", donde establecieron una relación aditiva entre el número de objetos por repartir y el número de destinatarios; b) "12", donde usaron una yuxtaposición de números naturales: objetos (1) y destinatarios (2), dejando de lado el valor posicional de las cifras; y c) "1-2" donde distinguieron que el número de objetos por repartir (1) y el número de destinatarios (2) deben ser distinguidos de alguna manera.
- Logaron escribir de diversas formas el resultado de un mismo reparto.
- Designaron de modo personal a los números fraccionarios, como "números repartidores", "números cortadores", "números medios" y "números locos" (enfaticando tácitamente un cambio de sentido respecto a los números naturales). El alumno que los nombra "números locos" dio

evidencia que se niega a reconocer a las fracciones como números que pueden ser menores que 1, en un hondo arraigamiento con los números naturales (coincidiendo con lo planteado por Streefland, 1993), suponiendo con ello que este niño se niega a reconocer a otros números diferentes a los que él conoce. Ver figura 2.

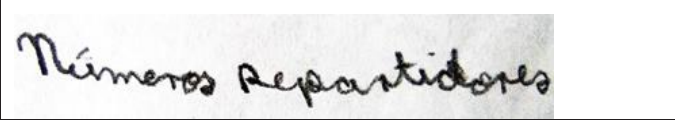
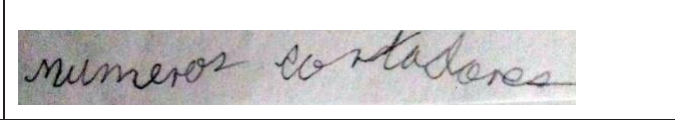
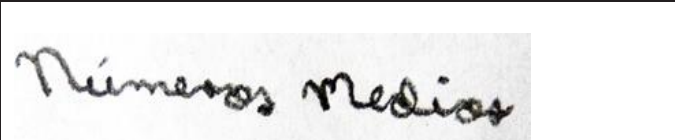
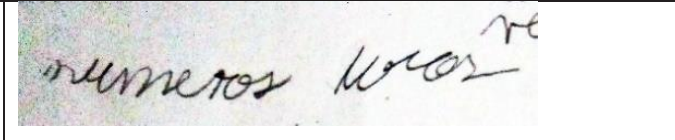
	
	

Figura 2. Nombres asignados por los alumnos a las fracciones.

■ Conclusiones

Los resultados obtenidos a través de los diálogos entre los alumnos y con el investigador, así como de los registros sobre las producciones de los estudiantes, permiten aseverar que las nociones básicas asociadas a las fracciones resultan difíciles para los alumnos que no han tenido experiencia escolar con ese tipo de números.

El uso de pictogramas (Valdemoros, 1997) es un recurso muy utilizado por los alumnos para establecer relaciones entre los distintos elementos que intervienen en el otorgamiento de sentido a las fracciones.

Los constantes diálogos permitieron a los alumnos reflexionar sobre sus actos y sus pensamientos. Esto los llevó a enriquecer sus estrategias de resolución así como a desarrollar las nociones básicas que en torno a las fracciones se pretendieron desplegar durante el programa de enseñanza.

Los alumnos transitan entre la abstracción empírica y la abstracción reflexiva realizando un movimiento en espiral dialéctica durante la construcción de algunas nociones básicas alrededor de las fracciones. En ese tránsito van de manera constante a sus experiencias para anticipar lo que pueden hacer al resolver nuevos problemas. Aunque, es necesario reconocer que en esa espiral ascendente se pueden presentar tránsitos regresivos, como pudimos observar en algunos momentos de la experiencia.

Podemos aseverar que la reflexión aporta elementos importantes para que los alumnos que se inician en el estudio de las fracciones logren identificarlas como números que cuantifican los resultados de una gran diversidad de repartos.

■ Referencias bibliográficas

- Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on mathematical Education*. Birkhauser Boston, E.E.U.U.
- Lamon, S. (1996). Partitioning and unitizing. *Proceeding of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 233-239.
- Lerman, S. Ed. (2014). Rational Numbers. *Encyclopedia of Mathematics Education*. 473-474, London, UK: Springer.
- Piaget, J. (2001). *Studies in Reflecting Abstraction*. 1-27 y 303-322, New York, E.E.U.U.: Taylor and Francis.
- Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 109-135.
- Valdemoros, M. (1997). Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones. Estudio de caso. *Educación Matemática*, 9, 5-17, México, México: Iberoamérica.
- Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. 197-229, Barcelona. España: Paidós.