O SENTIDO DO SÍMBOLO NA APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA EM ALUNOS DO 7ºANO DE ESCOLARIDADE[1]

Magda Nunes Pereira - Escola Básica Integrada da Amareleja, Portugal
magdanunespereira@sapo.pt

Manuel Joaquim Saraiva - Universidade da Beira Interior
e CIEFCUL, Portugal
msaraiva@mat.ubi.pt

Resumo: *Este artigo apresenta um estudo centrado no desenvolvimento do sentido do símbolo por alunos do 7ºano de escolaridade, focando-se na capacidade i) de ler e relacionar situações matemáticas usando símbolos e ii) de criar relações simbólicas na aprendizagem da álgebra, no tema equações. A metodologia adoptada foi do tipo qualitativo e interpretativo. A recolha dos dados incluiu registos escritos pela professora, a primeira autora do artigo, e relatórios escritos pelos alunos. Os momentos escolhidos para recolher os dados foram aqueles em que os alunos se envolveram na resolução de problemas, de explorações e investigações matemáticas, bem como as discussões que ocorreram a seu propósito. Os resultados apontam para uma aprendizagem dos alunos quanto à compreensão das estruturas e do simbolismo algébrico, e quanto à capacidade de representar ideias matemáticas recorrendo à visualização, usando esquemas e tabelas.*

Abstract: *This paper presents 7th grade students' development of the symbol sense, concerning the ability i) to read and to relate through symbols, and ii) to create symbolic relationships in learning algebra, studying equations. The methodology used in this study is qualitative and interpretative. The data include teacher's written notes and students' written reports, obtained through the problem solving, and the mathematical explorations and investigations, and discussions in the classroom, with the teacher's interventions. From the results it appears that the students develop the understanding of the structures and the algebraic symbols, and also that they develop the ability to represent mathematical ideas having recourse to the visualization, using schemes and tables.*

INTRODUÇÃO

Os alunos, em geral, apresentam dificuldades no estudo das equações e na resolução de problemas envolvendo equações e generalizações. A interpretação que eles fazem dos símbolos matemáticos é, muitas vezes, desprovida de sentido. Evidenciam, também, alguma dificuldade em estabelecerem relações entre os objectos algébricos. Em

[1] A investigação que serviu de base à elaboração deste artigo integra-se na Tarefa 1 (*Estimation, symbol sense and functions*) no projecto de investigação *Improving mathematics learning in numbers and algebra*, financiado pela FCT, MCTES, Portugal.

Portugal, é no 7º ano de escolaridade que se estudam as equações numéricas e literais do 1º grau. Este artigo sintetiza os primeiros resultados de um estudo iniciado no ano lectivo 2007/2008, com alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade. A professora da turma é a primeira autora deste artigo, e assumiu, também, o papel de investigadora. Pretende-se estudar o desenvolvimento do sentido do símbolo nos alunos durante a aprendizagem da álgebra, no tema equações, quanto à capacidade de ler e de relacionar através dos símbolos e quanto à capacidade de criar relações simbólicas.

O SENTIDO DO SÍMBOLO E O ENSINO-APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

O pensamento algébrico, para além da capacidade de cálculo, contempla a capacidade de trabalhar com estruturas matemáticas e de usar os símbolos algébricos na resolução de problemas. Alguns autores consideram que no pensamento algébrico se deve incluir o sentido do símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos – seja na descrição de situações e na resolução de problemas, seja na escolha dos símbolos e na sua manipulação flexível (Arcavi, A., 2005; Ponte, J. P., 2005). Trata-se de ter consciência de que pode haver sucesso criando relações simbólicas que expressem informação útil para resolver problemas, bem como recorrer aos símbolos apropriados e reconhecer o significado de uma solução matemática expressa através de simbolos, tendo em conta que o seu uso pode validar ou refutar conjecturas e resoluções.

Para Kieran (1992), muitas vezes as representações algébricas são apresentadas aos alunos como declarações generalizadas das operações realizadas na aritmética. É, para esta autora, uma abordagem procedimental, pela qual os valores numéricos são substituídos nas expressões algébricas para conduzirem a resultados de valores específicos. Desta forma, as expressões algébricas não são vistas como objectos com vida própria (vertente estrutural da álgebra), mas antes como expressões que têm apenas um valor numérico instantâneo. Kieran afirma que uma das grandes dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra está precisamente na não compreensão da sua faceta estrutural.

A transição que os alunos fazem da aritmética para a álgebra tem preocupado muitos educadores matemáticos (Sfard, 1991; Kieran, 1992; Rojano, 2002; Arcavi, 2005). Porém, e para muitos deles, tal como para os autores deste artigo, parte da estrutura e do simbolismo algébrico podem ser construídos a partir da experiência dos alunos com números, realçando os aspectos estratégicos e intuitivos (NCTM, 2007; Guzmán, 1996). O ensino destes aspectos é um processo complexo e, por vezes, de difícil explicação, por parte do professor, pois frequentemente "encontram-se no raciocínio menos consciente da própria actividade do professor" (Guzmán, 1996, p.35). Importa realçar ainda que, no que refere à representação de ideias matemáticas, a visão, ao produzir modelos mentais, leva a que o suporte visual apropriado tenha efeitos positivos na compreensão dos alunos e na resolução de situações problemáticas (Saraiva, 1992).

No estudo em que se baseia este artigo é defendida a ideia de que a resolução de problemas estimula o desenvolvimento do raciocínio matemático e desenvolve a criatividade na fase de procura de uma estratégia adequada à sua resolução (Matos e Serrazina, 1996; NCTM, 2007). Também é assumido que a resolução de tarefas de exploração e de investigação matemática "permite a formulação de conjecturas, a avaliação da sua plausibilidade, a escolha dos testes adequados para a sua validação ou rejeição, promovendo a procura de argumentos que demonstrem as conjecturas (...) e levantando novas questões para investigar" (Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes, 1999, p.71). Aceita-se, ainda, que inserir na aula tarefas de exploração e de investigação, devidamente seleccionadas, conjuntamente com tarefas de outro tipo, tais como os problemas e os exercícios, pode facilitar o desenvolvimento de raciocínios e a aprendizagem de processos matemáticos, nomeadamente os algébricos (Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M, e Ferreira, 1998; Ponte, J. P., Oliveira, H. & Brocardo, J., 2003; Pereira, 2004; Teixeira, 2005).

METODOLOGIA

Neste estudo seguiu-se uma abordagem metodológica qualitativa e interpretativa (Bogdan e Biklen, 1991; Lüdke e André, 1986; Ponte, 2002). A professora, a primeira autora deste artigo, assumiu em simultâneo a função de professora e investigadora. A recolha de dados, efectuada durante o 2º período do ano lectivo 2007/2008 numa das turmas do 7ºano que a professora lecciona, foi feita com base em relatórios escritos pelos alunos e em notas de campo registadas pela professora no seu diário de registos relativas às aulas sobre equações. Foram consideradas duas categorias de análise: i) ler, relacionar e representar raciocínios; e ii) criar relações simbólicas em contextos algébricos. Quer nos diálogos de sala de aula apresentados, quer nas resoluções dos alunos, são usados pseudónimos, preservando o anonimato de acordo com os pressupostos da metodologia adoptada.
A turma do estudo é constituída por quinze alunos e pertence a uma escola de uma vila do distrito de Beja (Baixo Alentejo, Portugal). Um aluno da turma está a repetir o 7ºano mas, actualmente, não revela dificuldades na disciplina de Matemática. Quatro alunos apresentam grandes dificuldades. Dois desses alunos dedicam-se à disciplina (a fim de superarem as suas dificuldades) e os outros dois dizem não gostar de Matemática e, consequentemente, não trabalharem o suficiente. Nos trabalhos em grupo, a turma foi dividida em 4 grupos; três com quatro alunos e um com três alunos. A formação dos grupos foi feita de acordo com as preferências dos alunos, de modo a minimizar conflitos e a maximizar o trabalho.

PROPOSTA PEDAGÓGICA

Na proposta pedagógica do estudo em que se baseia este artigo constam todas as tarefas de investigação, de exploração e de problemas cujo envolvimento dos alunos na sua resolução e discussão proporcionou à professora/investigadora a recolha dos dados. Tal proposta decorreu em 11 aulas de 90 minutos. Porém, os dados aqui apresentados referem-se apenas às aulas onde foram implementadas as tarefas sintetizadas no Quadro 1. Esta opção dos autores deve-se ao facto das conclusões aqui referidas serem preliminares e do estudo ainda estar a decorrer.

Foram propostas aos alunos tarefas de investigação, de exploração, de problemas e de exercícios – estes últimos extraídos do livro de texto adoptado pela escola. Houve tarefas formuladas em termos puramente matemáticos e tarefas semi-reais, no sentido de Skovsmose (2000) – reais, à primeira vista, mas na prática condicionadas a um contracto didáctico estabelecido com os alunos na aceitação das condições do enunciado dessa tarefa e que são relevantes para a sua resolução; por isso, são desprezadas muitas características reais dos objectos mencionados no enunciado e que seriam consideradas numa tarefa de cariz puramente real.

QUADRO 1 – *SÍNTESE DA PROPOSTA PEDAGÓGICA (DISTRIBUIÇÃO EM AULAS DE 90 MINUTOS)*

Tarefas e tipologia	**Tempo, data e modo de implementação**	**Acerca do enunciado das tarefas**	**Contextualização das tarefas**	
			Aulas antes	**Aulas depois**
O aniversário do João Investigação semi-real	***1ª aula*** 16/01/2008 (45 minutos: resolução em grupos) + (45 minutos: discussão na turma)	- O João faz uma festa de aniversário. Não sabemos quantos amigos vão à festa. Sabe-se que, no início da festa, os amigos encontram-se todos à porta da casa, e todos se cumprimentam entre si. A tarefa contém várias alíneas e pretende-se que os alunos relacionem o número de cumprimentos existentes no início da festa, dependendo do número de amigos.	O tema Sequências foi estudado no decorrer do 1º Período (Setembro/Dezembro)	Resolução e discussão da tarefa de investigação *À descoberta do valor das letras.*
À descoberta do valor das letras Exploração puramente matemática	***2ª aula*** 21/01/2008 (60 minutos: resolução e discussão na turma)	- Foi dada uma série de equações aos alunos, onde a incógnita era representada por uma letra determinada. O grau de complexidade das equações ia aumentando de alínea para alínea. Pretende-se que os alunos expliquem qual será o valor da letra em cada situação e como o alcançam.	Resolução e discussão da tarefa de investigação *O aniversário do João*	(30 minutos relativos à 2ªaula) + (45 minutos) Estudo dos princípios de equivalência (com base na tarefa *À descoberta do valor das letras*) recorrendo ao modelo da ‘neutralização/ balança’.
A torre dos ímpares Investigação puramente matemática	***6ª aula*** 30/01/2008 (tarefa que consta num teste de 90 minutos)	**1** **1 3** **1 3 5** **1 3 5 7** **1 3 5 7 9** **1 3 5 7 9 11** - A partir da tabela anterior pretende-se que os alunos descubram a regra que indique o valor da soma dos números de uma determinada linha do triângulo, em função do número da linha em causa.	(2×90 minutos) + (45 minutos) Explicitação/formalização dos conceitos: termo, membro, raiz ou solução de uma equação, equações equivalentes. Resolução de exercícios de consolidação (extraídos do manual dos alunos).	(2×90 minutos) + (45 minutos) Resolução de equações com parênteses. Correcção do teste de avaliação (com tarefa *A torre dos ímpares)*

Os mealheiros Problema semi-real	***11ª aula*** 20/02/2008 (45 minutos: resolução em grupos + 45 minutos: discussão na turma)	- O enunciado da tarefa é: "O Pedro e a Ana têm, cada um, o seu mealheiro. O Pedro tem 180 € e a Ana tem 120 €. A Ana gasta todas as semanas 5 € e o Pedro gasta todas as semanas 10 €. Daqui a quantas semanas têm o mesmo dinheiro no mealheiro?"	(90 minutos) + (45 minutos) Classificação de equações recorrendo a raciocínios efectuados na resolução da tarefa *À descoberta do valor dos símbolos.* Resolução de problemas geométricos usando equações (extraídos do manual dos alunos).	(90 minutos) Resolução de problemas envolvendo equações (extraídos do manual dos alunos)

RESULTADOS DO ESTUDO

Ler, relacionar e representar raciocínios

Na tarefa *O aniversário do João*, os alunos começaram por experimentar cumprimentar-se uns aos outros e registar em esquemas o número de cumprimentos que ia havendo à medida que o número de amigos aumentava (ver figura 1).

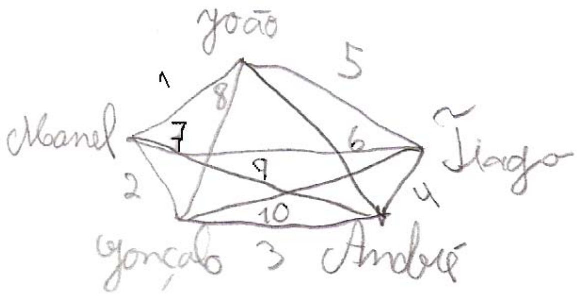
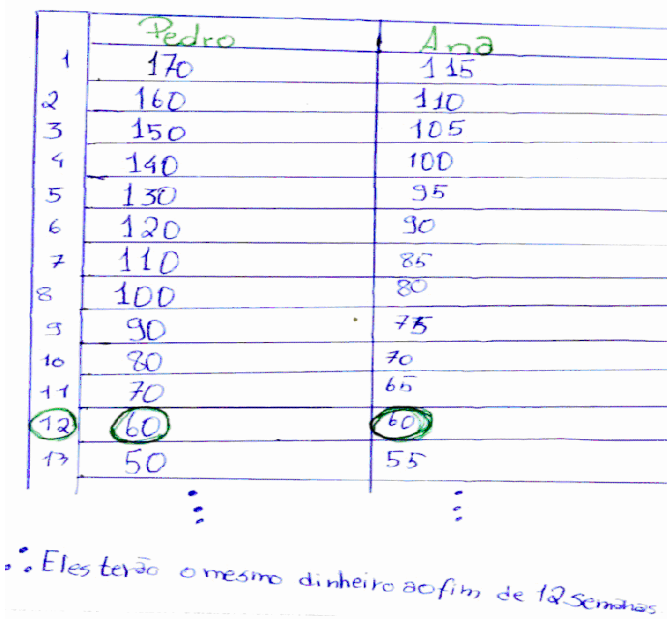


Figura 1: O esquema com nomes da tarefa *O aniversário do João, do grupo 1*

Na tarefa *Os mealheiros*, a construção de uma tabela permitiu que os alunos chegassem sozinhos à solução do problema (ver figura 2) – o que ainda não tinha acontecido até à resolução desta tarefa –, evidenciando alguma evolução referente à capacidade de escolha de uma representação de dados que encaminhe para a solução da situação matemática dada. De facto, nas tarefas anteriores, os alunos, apesar de representarem os dados da situação matemática que lhes era proposta, só chegaram à resolução da mesma na fase da discussão conjunta com a intervenção da professora.



	Pedro	Ana
1	170	115
2	160	110
3	150	105
4	140	100
5	130	95
6	120	90
7	110	85
8	100	80
9	90	75
10	80	70
11	70	65
12	60	60
13	50	55
⋮	⋮	⋮

∴ Eles terão o mesmo dinheiro ao fim de 12 semanas

Figura 2: Tabela da tarefa *Os mealheiros, do grupo 3*

Na resolução da tarefa *À descoberta do valor das letras*, resolvida antes da resolução de equações ter sido trabalhada com os alunos, as equações do tipo $8 \times g = 16$ ou $3 = 1 - j$ não criaram dificuldade. Porém, nas equações do tipo $1 + 2 \times f = 18$, as respostas não foram tão espontâneas. Assim, inicialmente, foi decidido (professora e alunos) que se escreveria a expressão de modo mais simples (omitindo o sinal $\times$, situação familiar aos alunos, pois já haviam trabalhado com sequências simples (ver Quadro 1)). Deste modo, a professora escreveu no quadro a equação $1 + 2f = 18$ e gerou-se o seguinte diálogo:

> **Mara:** Para conseguirmos descobrir o valor da letra f temos de experimentar muitos valores até chegarmos ao valor certo?
> **Professora:** Vamos começar por "eliminar/neutralizar o que está a mais".
> **Mara:** Como?
> **Professora:** Pretendemos saber o valor de f, logo temos de "neutralizar 1" e em seguida "neutralizar 2". O sinal igual é um equilíbrio que temos de manter. Como é que neutralizamos 1?
> **José:** Tiramo-lo.
> **Professora:** Como? Temos um sinal igual e se o tirarmos sem fazer mais nada perdemos o equilíbrio!
> **Isa:** Tiramos com sinal menos, subtraímos 1.
> **Professora:** E o equilíbrio?
> **Rosa:** Então, tiramos também 1 do outro lado do igual.
> **Professora:** Ficamos com: $1 - 1 + 2f = 18 - 1$. E agora? Podemos fazer contas?
> **José:** Sim, fica: $0 + 2f = 18 - 1$.
> **Professora:** $18 - 1$?
> **José:** É 17, claro!
> **Professora:** Ficamos assim com $0 + 2f = 17$. Podemos tirar o 0?
> **Cátia:** Podemos, 0 aí não faz nada, porque está a somar!
> **Professora:** Porque é o elemento neutro...
> **Cátia:** ... da adição.
> **Professora:** Sim, então temos $2f = 17$. Está quase!
> **António:** Ainda há um intruso para eliminar!
> **Professora:** Sim, quem dá sugestões para o neutralizar? Queremos um número que multiplicado por 2 dá 17.
> **Manuel:** Como o 2 está a multiplicar, vamos neutralizá-lo a dividir.

Professora: Como?
Manuel: Dividindo por 2. Ficamos com $2f \div 2 = 17 \div 2$.
Professora: E $2 \div 2$?
Isa: É 1.
Inês: E 1 é o elemento neutro da multiplicação!
Professora: Muito bem então $f = \frac{17}{2}$.

(Aula 21/01/2008)

A situação colocada foi mobilizadora da actividade dos alunos. A professora desempenhou um papel dinamizador de uma discussão colectiva, contribuindo, assim, para que os alunos pudessem ler e relacionar cada símbolo, em cada fase da resolução da equação em causa – tal como sucedeu com o processo de "neutralização/eliminação do que está a mais" (usado no diálogo) para a obtenção dos elementos neutro da adição e neutro da multiplicação, respectivamente, que conduziram à resolução da equação em causa.

Criar relações simbólicas em contextos algébricos

Na tarefa *O aniversário do João*, e face ao facto de nenhum grupo se manifestar para construir algum tipo de expressão simbólica que traduzisse a situação, a professora, aquando da discussão da resolução da tarefa, decidiu sugerir que se marcassem alguns valores (ver figura 3), dando origem à discussão em baixo transcrita:

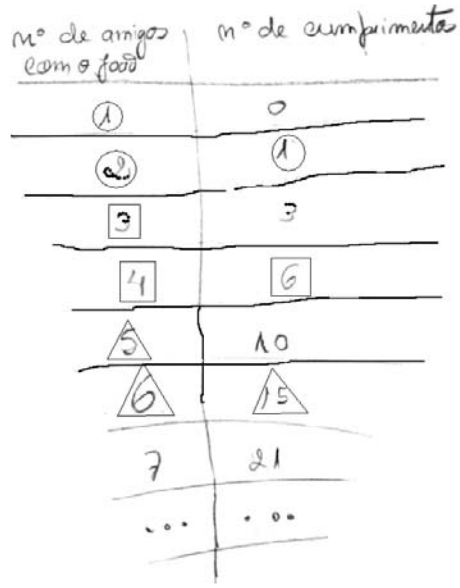


Figura 3: Tabela com valores destacados pela professora, no quadro

Professora: O que é que acontece aos valores dentro de circunferências? Podemos obter o *valor 1* da direita à custa dos valores da esquerda?
Marco: Já sei! Mas não! Pensei de repente que houvesse valores repetidos, mas só dá para o primeiro valor, para os seguintes já não

dá. Os valores dentro dos quadrados já não são como eu estava a pensar.
Manuel: Eu já descobri uma coisa, acho eu!
Professora: Diz lá, Manuel.
Manuel: 3×4 é 12. E $12 \div 2$ é 6. Acontece o mesmo para os valores que estão dentro dos triângulos. E para os outros valores também é igual.
Professora: Muito bem. E se tivermos um número muito grande de amigos, como é que podemos pensar?
Miguel: Da mesma maneira. Por exemplo faz de conta que há 1000 amigos. Para saber o número de cumprimentos é 999×1000. E depois dividimos por dois.
Professora: E se tivermos um número qualquer de amigos?
António: Então é esse número qualquer vezes o número antes desse e depois dividimos por dois.
Professora: Então, simplificando, se dissermos que esse número qualquer é *n*, como podemos determinar o número de cumprimentos?
Miguel: O número de cumprimentos é outro número qualquer, por exemplo *y*.
Professora: Assim, continuamos sem saber nada. Eu digo que foram *n* amigos à festa. Tu dizes que houve *y* cumprimentos. Conseguimos alguma informação?
Nelson: E com *n* também não sabemos nada, porque tínhamos de saber quantos amigos são *n*.
Professora: Como é que raciocinámos para 1000 amigos? Podemos raciocinar da mesma maneira para *n* amigos!
António: Mesmo sem sabermos quanto é *n*?
Rosa: Eu acho que já sei. É *n* vezes o número que está antes que é $n-1$.
António: Então e podemos multiplicar números sem sabermos quanto valem? E depois como é que sabemos o resultado?
Rosa: O resultado depende de quantos amigos são *n*.
Professora: Então usando a letra *n* o que é que resulta desse raciocínio?
Rosa: Com *n* amigos temos de fazer na mesma $(n-1) \times n \div 2$.
Professora *(registando no quadro)***:** Muito bem então se forem *n* amigos à festa vai haver $\frac{(n-1)\times n}{2}$ cumprimentos.
Nelson: Professora, faça lá no quadro com 11 amigos, por exemplo, para ver como é?
Professora: Então se forem 11 amigos à festa, vamos aplicar a expressão com *n* e obtemos
$\frac{(11-1)\times 11}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = \frac{110}{2} = 55$ cumprimentos.
António: Pois! E funciona! Vou experimentar para muitos amigos ...

(Aula 16/01/2008)

A discussão colectiva, em torno da tarefa dada, com a professora a dinamizá-la, promoveu a construção de uma forma de conjecturar o número de cumprimentos, qualquer que fosse o número de amigos - os alunos generalizaram, a partir das operações com números. Porém, mostraram necessidade de justificar essa generalização de modo aritmético, tal como explicita o diálogo, pois após a expressão $\frac{(n-1)\times n}{2}$, houve alunos que só lhe deram significado depois da concretização feita para n igual a um número determinado de amigos.

Na tarefa *A torre dos ímpares* (inserida num teste de avaliação escrito), alguns dos alunos explicaram o que acontecia ao valor da soma dos números de uma determinada linha, essencialmente através de linguagem natural, como se exemplifica na figura 4:

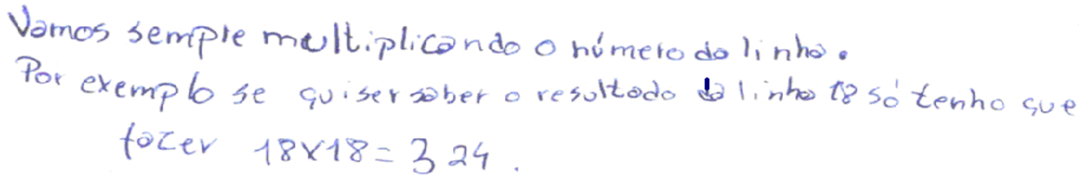


Figura 4: A resposta da Rosa, no teste

Porém, houve outros alunos que resolveram a questão designando o número de uma linha qualquer da torre por uma letra, parecendo ter construído uma relação simbólica com significado matemático (ver figura 5):

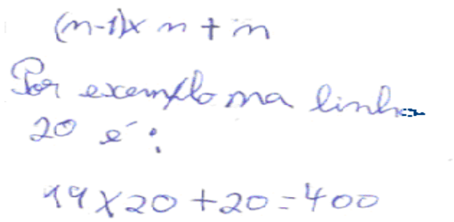


Figura 5: A resposta do Manuel, no teste

A resolução apresentada na figura 5 é análoga à usada em resoluções anteriores. Há alguma evidência de que os alunos "transportam" os processos utilizados anteriormente, realçando a importância que tem a experiência matemática vivida por eles.

CONCLUSÃO

Os primeiros resultados do estudo indiciam uma evolução no desenvolvimento do sentido do símbolo nos alunos. De facto, os esforços mobilizados a fim de que os alunos percebam o significado de cada símbolo em cada fase da resolução de uma tarefa matemática parecem contribuir para o entendimento da estrutura e do simbolismo algébrico em que tal símbolo se insere, como mostram as discussões das tarefas *À descoberta do valor das letras* (onde os alunos leram e relacionaram cada símbolo, em cada fase da resolução da equação dada) e *O aniversário do João* (onde os alunos generalizaram, a partir das operações com números, apesar da necessidade evidente do recurso à aritmética para dar significado à generalização algébrica) – o que é concordante com Arcavi (2005), Kieran (1992) e Ponte (2005).

A representação de ideias matemáticas, usando esquemas, tabelas, ou ambos, seguida da sua exploração usando a visualização, parece sistematizar o raciocínio dos alunos, facilitando a exploração da tarefa (como evidenciam as duas discussões apresentadas), e encaminhando a resolução para a sua apresentação simbólica (tal como a generalização da tarefa *O aniversário do João)* – esta conclusão é concordante com Saraiva (1992).

Tarefas que estimulem a actividade matemática dos alunos, como as de investigação e exploração, acompanhadas de discussões mediadas pela professora, parecem promover a experimentação de estratégias matemáticas já desenvolvidas a novas situações, como é evidente no transporte feito da experiência matemática vivida aquando da resolução da tarefa *O aniversário do João* para a resolução apresentada à situação do teste de avaliação – conclusão concordante com Silva *et al*. (1999), Ponte (2003), Ponte *et al*. (1998), Pereira (2004) e Teixeira (2005).

REFERÊNCIAS

Arcavi, A. (2005). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavarro (Orgs.) *Números e Álgebra na aprendizagem e na formação de professores (pp. 29-48)*. Lisboa: SEM-SPCE.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1991). *Investigação Qualitativa em Educação – Uma introdução à Teoria e aos Métodos.* Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra: Ensayos de Visualización en Análisis Matemático.* Madrid: Ediciones Pirámide.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school álgebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 349-419). New York, NY: Macmillan.

Lüdke, M. & André, M. E. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Matos, J. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM .

Pereira, M. (2004). *As Investigações Matemáticas no Ensino-Aprendizagem das Sucessões- Uma experiência com alunos do 11ºano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado. Covilhã: UBI.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: A.P.M.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003* (pp.25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M & Ferreira, C. (1998). O trabalho de um professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante, Vol. 7(2)*, pp.41-70.

Ponte, J. P., Oliveira, H. & Borcardo, J. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh &D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143-161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Saraiva, M. J. (1992). Raciocínio Visual. Parente pobre do raciocínio matemático? In *Educação e Matemática Nº21*, 1992 (pp.3-5). Lisboa: APM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J. & Abrantes, P. (1999). O Currículo de Matemática e as Actividades de Investigação. *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para Investigação.* Bolema, Ano 13, Nº14 (pp. 66-91): 2000.

Teixeira, A. (2005). *Tarefas de investigação matemática no currículo do 7ºano do 3ºciclo do ensino básico*. Dissertação de Mestrado. Covilhã: UBI.