# RECORRIDO HISTÓRICO POR ALGUNOS PUZLES ARITMÉTICOS DE LÁPIZ Y PAPEL Y SU IMPORTANCIA EN EL AULA DE CLASE

GINA PAOLA ORTEGÓN AVILEZ
YESSICA MARÍA GALVIS RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2015

# RECORRIDO HISTÓRICO POR ALGUNOS PUZLES ARITMÉTICOS DE LÁPIZ Y PAPEL Y SU IMPORTANCIA EN EL AULA DE CLASE

GINA PAOLA ORTEGÓN AVILEZ
Cód. 2011140051
C.C. 1030.626.295
YESSICA MARÍA GALVIS RODRÍGUEZ
Cód. 2011140022
C.C. 1022.988.624

Trabajo de grado bajo la modalidad “interés personal del estudiante”, presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar el título de Licenciado de Matemáticas.

Asesora:
CAROLINA ROJAS CELIS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2015

# *Dedicatoria*

*A mis padres por todo su apoyo incondicional en este largo camino de aprendizaje.*

*A mi compañera Yessica Galvis Rodríguez por toda su ayuda y trabajo en equipo durante la realización de este trabajo.*

*A mi novio Luis Bernal por toda su comprensión, cariño y ánimo durante toda esta etapa.*

*Y Finalmente, a mi compañera fiel Katya quien me acompañó durante todas esas noches de desvelo y trabajo arduo para la culminación de este trabajo.*

*Gina Paola Ortegón Avilez.*

*A Dios y a mis padres quienes siempre me alentaron en este proceso, me llenaron de fuerza y fe para obtener un logro más en mi vida.*

*A mi compañera Gina Ortegón Avilez por su buen trabajo en grupo, dedicación y paciencia.*

*A Alexander Velásquez, ser incondicional en mi vida, quien me ha ayudado a crecer como persona y me ha dado su apoyo y paciencia a lo largo de este camino.*

*Finalmente dedico este trabajo a las personas que me dieron incondicionalmente su ánimo, en especial a las Ls.*

*Yessica María Galvis Rodríguez*

## AGRADECIMIENTOS

En primera medida agradecemos a la Universidad Pedagógica Nacional por darnos las bases y el impulso necesario para el desarrollo de este trabajo, con ayuda de su excelente cuerpo docente del Departamento de Matemáticas, quienes incentivaron y apoyaron nuestro carácter curioso e investigativo para llevar a cabo este trabajo de grado; a ellos también agradecemos las enseñanzas y aprendizajes, por permitirnos ser parte de la "educadora de educadores".

Como caso particular de este cuerpo docente agradecemos a la profesora Carolina Rojas Celis, por su apoyo, colaboración, dedicación, y entrega al dirigir este trabajo, en el que aprovechamos y comprendimos cada uno de sus aportes. Agradecemos a la profesora Lyda Mora Mendieta, por orientar la idea principal que conlleva esta trabajo, sin olvidar su apoyo académico y anímico. Por último respecto a los profesores del DMA, agradecemos al profesor Edgar Alberto Guacaneme por su ayuda incondicional a nivel académico, es especial a nivel bibliográfico.

Finalmente, agradecemos de manera especial a los profesores Carlos Zuluaga y a su respectivo equipo de trabajo de Colombia Aprendiendo, José Chamoso, Manuel García y José Rupérez, por darnos la posibilidad de adquirir conocimiento valioso respecto a los puzles matemáticos y su papel en el aula de clase.

**RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN**

| 1. Información General | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de Grado |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| **Título del documento** | Recorrido histórico de algunos puzles aritméticos de lápiz y papel y su importancia en el aula de clase |
| **Autor(es)** | Galvis Rodríguez, Yessica María; Ortegón Avilez, Gina Paola |
| **Director** | Rojas Celis, Carolina |
| **Publicación** | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 118 p. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional, UPN |
| **Palabras Claves** | PUZLES ARITMÉTICOS DE LÁPIZ Y PAPEL; EDUCACIÓN MATEMÁTICA; CONTEXTO DE AULA, HISTORIA DE LOS PUZLES; COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS; PENSAMIENTO NUMÉRICO, MATEMÁTICA RECREATIVA |

| 2. Descripción |
|---|
| En este trabajo se presentan 24 puzles aritméticos y lógicos de lápiz y papel, reconociendo en cada uno de ellos su historia, los conceptos matemáticos que contienen y los estándares básicos que potencian, todo encerrado en un determinado contexto de aula diseñado propiamente por el docente. Con este trabajo se puede concluir que los puzles a lo largo de su historia siempre han estado sumergidos en la cultura humana, los cuales han surgido a partir de dos finalidades, la primera de ellas es por medio de estudios matemáticos, como los cuadrados mágicos o los cuatro cuatros, y la segunda finalidad es como elemento lúdico en la educación matemática como el Kenken o los puzles de potencias y raíces seleccionados en este trabajo. Por otro lado, los puzles en el aula de clase ayudan a fortalecer temas específicos del currículo escolar, además de ser motivadores y de gran interés para el estudiante. |

| 3. Fuentes |
|---|
| En el desarrollo del presente trabajo se hizo uso de 11 libros, 14 artículos en general, 3 páginas |

web, 3 trabajos de grados y 2 grabaciones, de los cuales a continuación se destaca las 10 principales empleadas:

Chamoso, J., Durán, J., García, J., Lalanda, J., & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar Matemáticas. *Suma*, *47*, 47–58.

Comes, M., & Comes, R. (2009). Los Cuadrados Mágicos en Al-Ándalus. El tratado de Azarquiel. *Al-Qantara*, 137–169.

Corbalán, F. (2000). Algunos aspectos de la Matemática Recreativa. *Números*, (43-44), 121–124.

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática* (Universidad de Complutense). Madrid.

Gálvez, A., & Maldonado, A. (2012). *El papel de la historia de la Aritmética en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores (tesis de maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Gardner, M. (1985). *Mathematical Circus* (2a ed.). Madrid: Alianza Editores S. A.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Muñoz, J., Fernández, J., & Carmona, V. (1998). Jugando con potencias y raíces. *Números*, *33*, 27–38.

Pazos, J. (2004). ¿Xornadas de Matemática recreativa...? Sí..., por favor... En *Matemáticas Recreativas* (1a ed.). Caracas: Laboratorio Educativo.

Rupérez, J., & García, M. (2012). Juegos de lógica inductiva. *Números*, *81*, 67–76.

## 4. Contenidos

Este trabajo se compone de cuatro capítulos.

**Primer capítulo:** Se describen los aspectos generales del trabajo, los objetivos planteados, la metodología, los antecedentes desde un contexto netamente colombiano, sin olvidar los intereses personales y académicos del estudio comprendidos en las siguientes preguntas: ¿Cómo se pueden emplear los puzles aritméticos en el aula?, ¿estos ayudan al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante?, ¿los puzles fomentan el interés de los estudiantes hacia la clase de Matemáticas?, y ¿los puzles ayudan al desarrollo del pensamiento matemático?

**Segundo capítulo:** Se expone la parte conceptual que enmarca este trabajo bajo la mirada de la Aritmética Recreativa, una clasificación descrita por diferentes autores y la relación que hay entre el puzle y la educación matemática.

**Tercer capítulo:** Se describen los aspectos históricos de 11puzles aritméticos y lógicos, en los que se evidencia su empleo e importancia en la cultura y en las Matemáticas en diferentes partes del mundo a través de los tiempos.

**Cuarto capítulo:** Se clasifican los 24 puzles estudiados. Una de las clasificaciones empleadas es propuesta por los autores estudiados en el Capítulo 2 y la otra es invención de las autoras de este trabajo, en la que se apoyan con los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas, mostrando que los puzles pueden ser una situación problema incluida en un contexto de aula diseñado netamente por el docente.

**Conclusiones:** En este último capítulo se presentan todas las conclusiones y reflexiones obtenidas con la realización de este trabajo, con las que se da respuesta a las tres preguntas inicialmente planteadas para el desarrollo de esta investigación.

| 5. Metodología |
|---|
| Los 24 puzles aritméticos de lápiz y papel se estudiaron a partir de tres miradas: su historia, su clasificación y el tema matemático que potencian. Para desarrollar cada una de estas miradas se realizó una búsqueda exhaustiva en diferentes referentes bibliográficos en la que se encontraron artículos y documentos relacionados con puzles, en los cuales se realizó un filtro a través de una lectura detallada y la realización de sus respectivos resúmenes, de tal manera que se pudo identificar elementos claves para el desarrollo de las tres miradas. Además, se realizó contacto con varios autores quienes son conocedores de la temática a tratar, en la que se destaca las entrevistas hechas al profesor Carlos Zuluaga y las comunicaciones electrónicas con los profesores José Chamoso, Manuel García y José Rupérez; en estas conversaciones se realizaron preguntas que ayudaron a esclarecer dudas en el ámbito de características de los puzles en el aula, vocablo, significados, historia, entre otros. |

| 6. Conclusiones |
| --- |
| ✓ Los puzles a lo largo de su historia siempre han estado sumergidos en la cultura humana; estos han surgido a partir de dos finalidades, la primera de ellas es por medio de estudios matemáticos, como los cuadrados mágicos o los cuatro cuatros, y la segunda finalidad es como elemento lúdico en la educación matemática, como el Kenken o los puzles de potencias y raíces estudiados.<br>✓ De acuerdo con los profesores Muñoz, Fernández y Carmona (1998), todo docente con un poco de interés y motivación puede adaptar a temáticas específicas del currículo escolar cualquier elemento de su entorno; como caso particular los puzles que se encuentran comúnmente en revistas o periódicos como un elemento didáctico para llevarlo al aula de clase, ya que basados en su experiencia de aula, pueden afirmar que el empleo de estos puzles han resultado motivadores y de gran interés para los estudiantes, puesto que no son los típicos ejercicios monótonos que se llevan siempre al aula.<br>✓ Existe gran cantidad de puzles con un alto contenido matemático del currículo escolar, pero desafortunadamente se desconoce su existencia y su potencial en el enriquecimiento de diferentes habilidades para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que el estudio realizado a los mismos es poco divulgado.<br>✓ Los puzles estudiados en el presente trabajo, aunque influyen en el refuerzo de conceptos aritméticos, también contienen lógica, la cual es necesaria para el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que al intentar solucionar uno de estos puzles se deben poner en práctica diversas estrategias para su solución. |

| | |
| --- | --- |
| **Elaborado por:** | Yessica María Galvis Rodríguez y Gina Paola Ortegón Avilez |
| **Revisado por:** | Carolina Rojas Celis |

| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 01 | 12 | 2015 |

**TABLA DE CONTENIDO**

# ÍNDICE DE FIGURAS

# ÍNDICE DE TABLAS

## INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es reconocer que el empleo de los puzles aritméticos en el aula de clase es de gran importancia, puesto que el ser humano por medio de la actividad empírica que posee para recrearse adquiere conocimientos y enriquece diversas habilidades; bajo esta premisa el empleo de puzles aritméticos conlleva al refuerzo de diversos contenidos matemáticos y además promueve el desarrollo del pensamiento matemático en las diversas etapas del crecimiento humano. Cabe resaltar que las autoras de este trabajo bajo el término puzle incluyen juegos, pasatiempos, problemas, acertijos, entre otros, puesto que todos poseen un carácter lúdico, generando distracción y desarrollo determinadas habilidades.

Teniendo en cuenta la anterior descripción de puzle, se ha procedido a hacer cambio del título que se había establecido previamente al desarrollo de este trabajo, pues inicialmente se hablaba de pasatiempos, pero al encontrar en algunos documentos que no se discriminaba entre pasatiempo, juego, acertijo, entre otros, se decide abarcar un todo denominado puzle. También se reescribe el objetivo general, pues en el cuerpo del presente trabajo no se abarca en su totalidad el aporte didáctico que puede generar los puzles en el aula de clase. Finalmente se reescribe el tercer objetivo específico que hacía referencia a clasificar los puzles en el tipo de pensamiento matemático que desarrolla el estudiante; el cambio se hace a partir de dos posturas: la primera dado al enfoque aritmético de los puzles seleccionados y la segunda debido al trabajo realizado con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, al hacer un intento de clasificar los puzles aritméticos seleccionados de acuerdo a los estándares básicos del pensamiento numérico y sistemas numéricos.

Este trabajo se compone de cinco capítulos en los que se presentan los aspectos generales, fundamentos teóricos de la misma, desde el punto de vista de diversos autores como José Chamoso, Manuel García, José Rupérez, Carlos Zuluaga, Martin Gardner, entre otros; además de abarcar 24puzles desde tres miradas: historia, clasificación y los temas matemáticos que potencian, donde esta última mirada es invención de las autoras de este trabajo, apoyadas en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas(MEN 2006).

El primer capítulo contiene los aspectos generales del trabajo, los objetivos planteados, la metodología, y los antecedentes desde un contexto netamente colombiano, sin olvidar los intereses personales y académicos del estudio comprendidos en las siguientes preguntas: ¿Cómo se pueden emplear los puzles aritméticos en el aula?, ¿estos ayudan al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante?, ¿los puzles fomentan el interés de los estudiantes hacia la clase de Matemáticas?, y ¿los puzles ayudan al desarrollo del pensamiento matemático?, acompañadas además de un sentido histórico de los puzles en general y la historia de algunos puzles de los 24 seleccionados.

En el segundo capítulo se expone el contenido que enmarca la temática de este trabajo, siendo la Matemática Recreativa, específicamente desde la Aritmética Recreativa; una clasificación descrita y ejemplificada por diferentes autores; y la relación que hay entre el puzle y la educación matemática.

En el tercer capítulo se describen los aspectos históricos de 11 puzles aritméticos y lógicos, en los que se evidencia su empleo e importancia en la cultura y en las Matemáticas en diferentes partes del mundo a través de los tiempos; adicionalmente en algunos de ellos se observa su necesidad de aparecer como medio en la Educación Matemática.

En el cuarto capítulo se presentan los 24 puzles estudiados en dos clasificaciones. La primera de ellas, como ya se mencionó, es la clasificación propuestas por diversos autores; y la segunda clasificación, hace referencia al tema matemático que contiene cada uno de ellos, siendo propuesta por las autoras de este trabajo, y en la cual se abarcan dos características adicionales importantes: el nivel de escolaridad en el que pueden ser aplicados y los estándares básicos que se potencian en cada ciclo; dichas características tienen como base a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), mostrando que los puzles son una situación problema diseñada por el docente y perteneciente a un contexto de aula, para llevar a cabalidad el desarrollo del pensamiento matemático y el pensamiento lógico.

Para finalizar con este trabajo, se presentan algunas consideraciones y conclusiones a las que se llegó, con base en los objetivos propuestos y los elementos expuestos en los diferentes capítulos de este trabajo.

# CAPÍTULO I
# ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo de este trabajo de grado nace de un interés personal y académico por parte de las autoras. Desde lo personal, fue de interés conocer a fondo la relación existente entre los puzles y las Matemáticas, dado que en diferentes cursos de Didáctica de la Licenciatura en Matemáticas, algunos profesores generaban preguntas sobre las Matemáticas que pueden contener los puzles, y si es importante o no que sean llevados al aula de clase como herramienta de aprendizaje, y no solo como un elemento de entretención.

Desde lo académico, se despertó un interés por la Lúdica Aritmética, a partir del estudio del trabajo de investigación realizado por Gálvez y Maldonado (2012), basado en el papel de la historia en un curso de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra, orientado a maestros en formación. En dicho trabajo, los autores identifican cinco trazas desde las cuales estudian la Historia de la Aritmética, esto es a partir de: la Historia de los sistemas de numeración y numerales, Historia de los sistemas numéricos, Historia de la teoría de números, Historia de la logística e Historia del número. Sin embargo, a partir del estudio realizado, identifican además elementos propios de la historia de los puzles aritméticos, que no pueden ser ubicados en alguna de las trazas enunciadas anteriormente, por tanto proponen el estudio sobre una sexta traza a la que llaman Historia de la Lúdica Aritmética, la cual respalda el desarrollo del presente trabajo de investigación asentado en reconocer la importancia de llevar los puzles al aula de clase no solo como pasatiempo sino como un elemento que posee gran contenido matemático.

Dado a la sexta traza, Historia de la lúdica Aritmética y a los intereses previos, se identifican algunos aspectos importantes de los puzles desde su historia, haciendo énfasis en el campo de la Educación Matemática colombiana, a partir del inicio de la Matemática Recreativa, puesto que es de gran interés para este trabajo conocer la actividad que han tenido los puzles en la humanidad y su necesidad de aparecer en la educación matemática.

Para iniciar, los puzles son tan antiguos como la propia civilización, ya que a lo largo de la historia no hay un lapso en el que se hayan omitido en la cultura. Esta relación, el puzle con la cultura humana, es estudiada por medio de la enigmatología, en la que autores como Danesi (2003), han dado su respectivo aporte al cuestionarse por dicha relación a través de preguntas como ¿son los puzles una simple entretención o es un espejo que refleja necesidades de la vida humana?, ¿se podría considerar el puzle como un revelador de la estructura de la mente humana?, las cuales se destacan por su profundidad en la relación mencionada.

A lo largo de la historia de la enigmatología han surgido numerosos autores, entre los que se destaca: el trabajo contemporáneo de Martin Gardner (El decano mundial de la Matemática Recreativa), quien fue escritor de historia, soluciones y significados sobre puzles; David Singmaster, autor de *Chronology of Recreational Mathematics*[1], en la que se muestra una línea de tiempo desde el 2700 a. C., con la aparición de los dados y de los primeros poliedros, hasta los años noventa con la descripción de puzles, acertijos y problemas de diversos autores; Miguel de Guzmán, investigador más destacado de habla hispana, quien mostró la importancia en Colombia del juego en el aula, y Carlos Zuluaga, pionero de la Matemática Recreativa con el Proyecto Colombia Aprendiendo, entre otros autores, quienes por medio de su trabajo, dan muestra del por qué son tan importantes los acertijos, problemas, adivinanzas, juegos o, en general, los puzles para el ser humano, puesto que permiten recreación, desarrollo de habilidades, reconocimiento y aplicación de reglas, en algunas oportunidades el aprendizaje en equipo, entre otras, en las diferentes etapas y ambientes de la vida.

El estudio e importancia de los puzles fue poco notable en Colombia, debido al retraso que vivió por años la investigación en la Educación Matemática; por ende se presenta a continuación una breve descripción de algunos avances realizados en este tema, pues se considera que es una premisa relevante para el desarrollo de este trabajo.

Durante los años 60, se inicia la investigación de la Educación Matemática en Colombia con el Doctor Carlo Federici y el Profesor Hernando Silva Mojica, quienes son los encargados de

[1] Cronología de la Matemática Recreativa

introducir al país las ideas de Piaget sobre la Educación en Matemáticas y la Lógica; desafortunadamente estos trabajos fracasaron por razones políticas de aquel entonces. Más tarde en los años setenta, la misión francesa encabezada por Jena Parot, realizó algunos intentos de investigación sobre el aprendizaje de la "Nueva Matemática", la cual está basada en las ideas revolucionarias de Piaget. A mediados de los ochenta inicia a surgir diversas líneas investigaciones en Educación Matemática, logrando que se acepte por parte de los departamentos de Matemáticas de las universidades los proyectos y artículos sobre Educación Matemática (Vasco, 1998).

Una de la líneas de investigación que iniciaron a surgir a mediados de la década de los 80 fue la Matemática Recreativa, encabezada por el profesor Carlos Zuluaga en la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, con ayuda del colegio experimental de Colsubsidio; años más tarde, en 1997, el profesor Zuluaga inicia el proyecto de Colombia Aprendiendo en el Gimnasio Moderno de Bogotá, en el que se propone el empleo de puzles matemáticos para la creación de un ambiente que contribuya a finalizar con la creencia que las Matemáticas es una materia "difícil" (Zuluaga, s/f), permitiendo que los estudiantes tengan interés y motivación por las Matemáticas, puesto que se divulgan de manera entretenida y divertida los conocimientos, ideas o problemas matemáticos.

De acuerdo a lo anterior, al reconocer la escasez investigativa de la Educación Matemática en Colombia, y además identificar la relación entre la humanidad y los puzles, fue de interés para las autoras de este trabajo, estudiar el aporte de los puzles aritméticos de lápiz y papel en el desarrollo del pensamiento matemático. Para dar orientación al desarrollo del trabajo, se formularon preguntas como: ¿Cómo se pueden emplear los puzles aritméticos en el aula de clase?, ¿estos ayudan al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante? o ¿pueden generar interés en el estudiante por la clase de Matemáticas?, las cuales son respondidas a lo largo de este trabajo, a través de los objetivos que se desarrollaron, los cuales se enuncian a continuación:

### 1.1. Objetivo general

Determinar el aporte didáctico de algunos puzles aritméticos de lápiz y papel a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, así como su historicidad, a partir de consulta bibliográfica y de su interpretación.

### 1.2. Objetivos específicos

1. Establecer el origen de algunos puzles aritméticos de lápiz y papel, abordados desde las Matemáticas o la Educación Matemática, con el fin de reconocer el contexto donde surgió cada uno de ellos.
2. Identificar los temas matemáticos que se pueden abordar a través de puzles aritméticos.
3. Clasificar algunos de los puzles aritméticos de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).
4. Identificar y establecer algunas de las razones por las cuales es útil implementar puzles en la clase de Matemáticas.

### 1.3. Metodología

Partiendo de las preguntas que orientan este trabajo y los respectivos objetivos a cumplir, se han propuesto tres miradas en las que se abarcan los puzles aritméticos, estas son: historia, clasificación, y temas de las Matemáticas que potencian.

En la parte de historia, se estudió la de algunos de los puzles encontrados (Cuadrados Mágicos, Sudokus de Potencias, Kenken, Kakuro, los Cuatro cuatros, Puentes, entre otros, como se verá en el capítulo 3), en los que se identificó el contexto y la finalidad con la que surgió cada uno de ellos en distintas partes del mundo.

Para su clasificación, se hizo una organización detallada de los puzles estudiados, para esto se tomaron en consideración tres clasificaciones encontradas en los documentos propuestas por los profesores José Chamoso, Jesús Durán, Francisco García, Martín Lalanda y Mercedes Rodríguez (2004); José Rupérez y Manuel García (2012); y el Grupo Alquerque (2002), las cuales son: Conocimiento, Estrategia y Azar; Lógicos; y de Cálculo y de Ordenación, respectivamente.

Para encontrar los temas matemáticos que potencian, se estudiaron y resolvieron los 24 puzles y de acuerdo con la respuesta encontrada se explica a fondo qué tema de las Matemáticas se puede desarrollar o reforzar en el aula de clase, al presentarse en un ambiente apropiado, puesto que se deben esclarecer unas intenciones, objetivos y metodología específica, lo cual es diseñado por el docente[2]. De acuerdo con los temas enlistados, se realiza un paralelo con los estándares básicos[3] que se desarrollan y ayudan a potenciar el pensamiento numérico y sistemas numéricos en compañía del pensamiento lógico, siendo trasversal en este proceso.

Para llevar a cabo cada una de estas miradas, se propuso un cronograma de actividades a desarrollar en dos semestres. Durante este periodo se realizó una exhaustiva búsqueda en revistas electrónicas de Ciencia y Educación Matemática, bibliotecas públicas y bibliotecas de universidades, además de contactos directos con autores que han tratado la temática requerida, en las que se destacan algunas entrevistas realizadas con el profesor Carlos Zuluaga (Anexo 1 y Anexo 2), a quien se agradece por su amabilidad y disposición ante esta consulta, como una de las principales fuentes de consulta y apoyo bibliográfico suministrado por los profesores José Chamoso, José Rupérez y Manuel García, a quienes se expresa gratitud por tan valiosa ayuda.

Respecto a la búsqueda en revistas electrónicas realizadas por las autoras vía Internet y la visita personal en bibliotecas públicas de Bogotá, se produjo a su vez un filtro para seleccionar la información adecuada y pertinente a emplear, lo cual se dio por medio de una lectura detallada del material obtenido, elaborando sus respectivos resúmenes, y destacando elementos esenciales que se hallarán en este trabajo. Por otra parte la comunicación con los autores contactados se orientó en temas de tipo conceptual, es decir se realizaron preguntas que ayudaron a esclarecer dudas en cuanto a términos específicos, significados, historia, entre otros. En las entrevistas realizadas al profesor Zuluaga (2015a), se aclaró la línea de las Matemáticas en la cual está enfocado este trabajo, llamada Matemática Recreativa; también se establecieron

[2]Se denomina contexto de aula.
[3]Estándares en Matemáticas de acuerdo al documento Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuesto por el Ministerio Nacional de Educación (2006).

diferencias o similitudes entre juego y pasatiempo, concluyendo que estos elementos hacen parte delo que se conoce como **puzle**, nombre que se usa en este documento.

Con base en la información recolectada, se realizaron algunos esquemas tales como una red bibliográfica (Anexo 3) en la que se organizaron y se clasificaron los documentos más importantes a emplear; también se diseñaron cuadros en los que se organizaron veinticuatro (24) puzles basados en algunas clasificaciones y características expuestas por algunos profesores, además se empezaron a ubicar de acuerdo al tema matemático en el que puede proponerse como actividad de clase.

# CAPÍTULO II
# MARCO DE REFERENCIA

## 2.1. Matemática Recreativa

Como ya fue mencionado en el capítulo anterior, esta trabajo surge, por una parte del interés por el estudio de la sexta traza llamada “Historia de la lúdica Aritmética” propuesta en la tesis de maestría de Gálvez y Maldonado (2012), estudiada en el curso de Enseñanza de la Aritmética y el Álgebra, la cual se acordó en un comienzo llamarla la Línea de la Lúdica Aritmética; sin embargo, en las entrevistas realizadas al profesor Zuluaga (2015a), se asume como la Línea de la *Matemática Recreativa*, en la cual ubicamos este trabajo.

Dar una definición sobre Matemática Recreativa no es sencillo; sin embargo, Martin Gardner (1985) hace un acercamiento a la definición, como unas Matemáticas con un alto porcentaje lúdico, las cuales son las más adecuadas para captar el interés de los estudiantes durante la enseñanza. Afirma además, que la parte lúdica que hace recreativa a las Matemáticas posee muchas formas, por ejemplo, un problema a resolver, un juego de competencia, un juego de magia, una paradoja o simplemente matemática con alguna vuelta curiosa o divertida, las cuales deben dirigirse con un objetivo claro en la clase, para que los estudiantes tengan la oportunidad de crear las Matemáticas (origen de la palabra re-crear o volver a crear)[4], y no solo para “pasar el tiempo” a través de la recreación, entendida esta como sinónimo de diversión.

Las actividades que desde esta mirada se proponen en el aula de clases, logran, según Pazos (2004, p. 34) que:

- Las diversas partes de las Matemáticas se puedan unir entre sí y con otras áreas del saber, evitando rupturas, lo cual es perjudicial para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

[4](Corbalán, 2000, p. 121)

- Se permita la puesta en práctica de recursos intelectuales y estrategias diversas al intentar resolver problemas que se plantean en cualquier situación.
- Ayude a perseverar en la búsqueda de soluciones o de estrategias ganadoras al constituir para determinados alumnos un desafío e iniciarse en la introducción, la generalización, etc.
- Facilite al profesor una evaluación reguladora que permita suministrar a cada alumno, en todo caso, la ayuda pertinente para seguir avanzando en la construcción de su conocimiento matemático.
- Los estudiantes con bajo rendimiento escolar por cualquier motivo, se integren e incorporen a la actividad matemática, haciendo uso de situaciones abiertas de aprendizaje fuera del marco clásico, por el que no muestran interés.
- Contribuya a crear un clima relajado en clase que favorece los aprendizajes cooperativos y la regulación de comportamientos en situaciones espontáneas.

## 2.2. La Aritmética Recreativa

Es de aclarar al lector que a lo largo de este trabajo se hace referencia a la Aritmética Recreativa y no a la Lúdica Aritmética, puesto que, como se enunció en párrafos anteriores, la rama en la cual se ubica la presente investigación es la Matemática Recreativa, lo que da lugar a renombrar la sexta traza propuesta por Gálvez y Maldonado (2012), que dio fruto a este trabajo, como Historia de la Aritmética Recreativa.

Para empezar a escribir sobre Aritmética Recreativa, es necesario definir qué se entiende por esta, pero tal como sucede en la Matemática Recreativa, tratar de definirla es una tarea un poco compleja. Lo que sí es cierto, es que a partir de la caracterización dada por Gardner a la Matemática Recreativa, a continuación se presenta una aproximación de la Aritmética Recreativa descrita por las autoras de este trabajo:

> Se entiende por Aritmética Recreativa, como la aritmética que se presenta al estudiante de forma entretenida y divertida, captando el interés y disposición de este.

Este conocimiento aritmético puede presentarse a través de acertijos, problemas, juegos, etc., tal como lo muestra Yakov Perelman[5] (1954), en su obra titulada Aritmética Recreativa; en esta se comprenden, como su nombre lo detalla, diversos temas que se enmarcan a nivel de la Aritmética, tales como los números y las operaciones básicas, sistemas de numeración en diferentes bases, métodos para multiplicar y dividir, propiedades que cumplen algunos números, cálculo rápido, redondeo y aproximación de números, además de números gigantes y liliputienses. Algunos ejemplos de esta obra son:

> En los papeles de un matemático original fue hallada su autobiografía. Esta empezaba con las siguientes líneas: 'Acabé el curso de la universidad a los 44 años de edad. Pasó un año y siendo un joven de 100 años, me casé con una muchacha de 34 años'. 'La insignificante diferencia de edades, sólo 11 años que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 10 niños. Yo obtenía en total, al mes, 200 rublos, de los cuales, 1/10 parte se consagraba a mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 130 rublos al mes', y así sucesivamente (p. 45).

La resolución del anterior problema ha sugerido por el nombre del capítulo en el que aparece "un sistema no decimal de numeración"; es por eso que en el enunciado aparecen aparentemente tantas contradicciones, pero aun así es fácil darse cuenta del sistema de numeración en que están representados los números del original matemático. El truco está en la siguiente frase "después de un año (luego de los 44 años de edad) como un hombre joven de 100años... "; Si al adicionar una unidad el número 44 se transforma en 100, significa que la cifra 4 es la mayor en este sistema, y por tanto, la base del sistema es el 5. Al conocer la base en que está escrito, y transformando los números a base 10 ya no existen contradicciones en el enunciado, quedando de la siguiente manera: Acabé mis estudios en la universidad a los 24 años. Después de un año, siendo un joven de 25 años, me casé con una muchacha de 19 años. La insignificante diferencia de edades, 6 años, que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 5

[5]Yakov Perelman (1882 – 1942). Investigador y pedagogo soviético.

niños. De salario percibía en total, al mes, 50 rublos, de los cuales 1/5 parte la empleaba mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 40 rublos al mes.

¿Cómo averiguar cuántos días de vida tiene una persona?

El método que llevaría un calculista para averiguarlo es primero tomar la mitad de los años que posee una persona y se multiplica por 73, por ejemplo si esta tiene 24 años, el producto a realizar es $12 \times 73$, cuyo resultado es 876; a este último se le agrega un cero a la derecha, es decir esta persona tendría 8760 días. Este cálculo funciona a partir de que $365 \times 2 = 730$, donde cabe resaltar que no se toma los años bisiestos que haya vivido una persona, pero esto se arregla agregando a la operación anterior un cuarto de los años vividos, en este ejemplo sería 6 días más, por tanto el total de días vividos es 8766 (Perelman, 1954).

La Aritmética en el desayuno

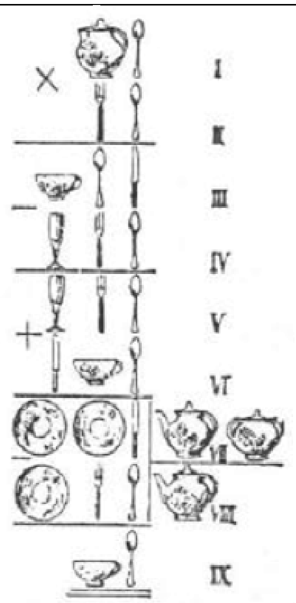



*Figura 1.*Aritmética en el desayuno

En la figura 1 hay una serie de operaciones con números, representados por los objetos de servicio de una mesa (el tenedor, la cuchara, el cuchillo, la jarra, la tetera, el plato); todos estos son símbolos los cuales sustituyen una cifra determinada. Pero ¿Cuáles son los números representados aquí? Aunque el problema parece ser muy difícil como si fuesen jeroglíficos, este problema es sencillo: los números aunque en diferente representación están escritos conforme al sistema decimal de numeración, además están siendo empleados en operaciones aritméticas, realizadas con los números denotados por ellos. Todo esto facilita la resolución del problema presentado (Perelman, 1954).

¿Con qué números se realizan las operaciones aritméticas, aquí indicadas? Para contestar esta pregunta, primero se consideran los tres primeros renglones en la imagen, y se podrá observar que cuchara $\times$ cuchara $=$ cuchillo; y en los renglones 3, 4 y 5, cuchillo $-$ cuchara $=$ cuchara es decir, que cuchara $+$ cuchara$=$ cuchillo. Con este razonamiento se puede preguntar ¿qué cifra da el mismo resultado al multiplicarse por sí misma que al duplicarse? Esta es únicamente el 2, porque $2 \times 2 = 2 + 2$. Así, sabemos ya que cuchara $= 2$ y, por lo tanto, cuchillo $= 4$, de manera similar se deducen la cifra de los demás utensilios de mesa.

## 2.3. Clasificación para los puzles

Al dar comienzo a este trabajo se pensó dar búsqueda a una clasificación general de todos los puzles aritméticos encontrados; sin embargo, dicha idea fue modificada a través de las conversaciones con el profesor Zuluaga (2015b), ya que al estudiar documentos y clasificaciones que proponen autores especialistas en la Matemática Recreativa, se reconoce que no existe una clasificación general para los puzles, sino que cada autor realiza una dependiendo de los intereses particulares que tenga en el momento. Sin embargo, dentro de la literatura consultada por las autoras de este trabajo se encontraron tres clasificaciones propuestas por diferentes profesores, las cuales se consideraron de utilidad para esta investigación y se emplearan para clasificar los puzles encontrados, que se describen a continuación.

### 2.3.1. Primera Clasificación (Ordenación - Cálculo)

La primera de estas clasificaciones está pensada en pasatiempos, propuesta por el Grupo Alquerque (2002), grupo de Sevilla, España, conformado por Juan Antonio Hans, José Muñoz Santoja y Antonio Fernández-Aliseda. Los autores clasifican los puzles en pasatiempos[6] de Ordenación y pasatiempos de Cálculo; los de *Ordenación* son aquellos puzles en los que hay que colocar los números en determinadas posiciones según unas reglas estipuladas, y los de *Cálculo* son aquellos puzles que pueden ser simples empleando sumas hasta llegar a operaciones más complejas.

[6] Pasatiempo es el nombre que usan los autores para referirse a los puzles que se describen en este trabajo.

Un ejemplo de puzles de ordenación es *Siete números de la Y griega* (figura 2), el cual consiste en colocar las cifras del 1 al 7 en el siguiente tablero, de tal manera que dos números consecutivos no estén juntos ni vertical, ni horizontal, ni diagonalmente.

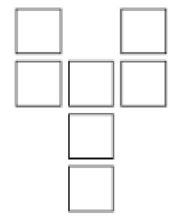


*Figura 2.* Siete números en la Y griega.
Copyright 2002 por Grupo Alquerque.

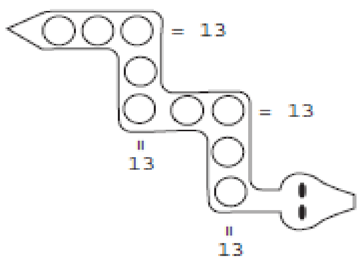



*Figura 3.* Serpiente súmica.
Copyright 2002 por Grupo Alquerque.

*La Serpiente Súmica (figura 3)* es un ejemplo de puzles de cálculo, el cual consiste en situar sobre los círculos de la serpiente del esquema los números del 1 al 9, de manera que cada línea de tres números, sume 13.

### 2.3.2. Segunda Clasificación (Conocimiento – Estrategia - Azar)

La segunda clasificación a considerar está pensada para juegos[7], propuesta por José María Chamoso, Jesús Durán, Juan Francisco García, Javier Martín Lalanda y Mercedes Rodríguez (2004), profesores españoles que se enfocan en la Didáctica de las Matemáticas. Ellos hacen la clasificación en Juegos de Conocimiento, Juegos de Estrategia y Juegos de Azar. Los puzles de *Conocimiento* son aquellos que utilizan en su desarrollo, uno o varios de los temas del currículo de Matemáticas; los puzles de *Estrategia* son aquellos que para conseguir su objetivo, el jugador debe elegir siempre una de las diversas posibilidades existentes; y por último los puzles de *Azar*, se caracterizan por tener un desarrollo completamente aleatorio, es decir estos depende del resultado que se consiga al lanzar un dado o extraer cartas de una baraja.

Un ejemplo de un puzle de conocimiento puede ser *Números y operaciones*, muy conocido por ser la sección matemática del popular concurso Cifras y letras de la Televisión Española; el puzle consiste en elegir seis tarjetas numeradas entre las quince disponibles y en generar un

[7]Nombre que los autores le asignan a lo que en este trabajo se denominan Puzles.

número de tres cifras aleatorio, el objetivo es conseguir dicho número de tres cifras o la mejor aproximación posible con los números de las seis tarjetas que posee cada jugador y las cuatro operaciones aritméticas elementales. Para ello se dispone de un tiempo máximo estipulado y las operaciones se pueden repetir mientras que los números sólo se pueden utilizar una vez. No es obligatorio utilizar ni todas las operaciones ni todos los números. Gana el jugador que consigue, en primer lugar, el número de tres cifras propuesto o, una vez finalizado el tiempo, su mejor aproximación.

Un ejemplo de puzle de *Estrategia* es *Intercambio de fichas* (figura 4) el cual recibe diversos nombres según los autores; consiste en un tablero con siete celdas cuadradas dispuestas en dos filas, formando un rectángulo de 2×3 casillas al que se agrega una casilla en una de las filas.

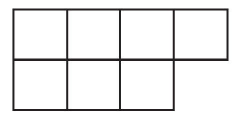


*Figura 4.* Intercambio de fichas.
Copyright 2004 por Chamoso et al.

Para comenzar a jugar se colocan tres fichas blancas en una fila y las tres negras en la otra, la casilla que sobresale en la fila superior queda vacía (figura 5).

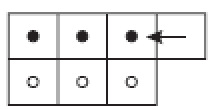


*Figura 5.* Inicio de intercambio de fichas.
Copyright 2004 por Chamoso et al.

Las fichas se mueven como el rey del ajedrez: una casilla en cualquier dirección, para ocupar un lugar vacío, pero no pueden coincidir dos en la misma casilla, el juego termina cuando las fichas blancas y negras han intercambiado sus posiciones (figura 6).

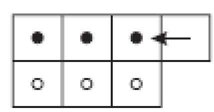


*Figura 6.*Movimiento de fichas, Intercambio de fichas.
Copyright 2004 por Chamoso et al

*Lu–lú* (figura 7), un juego tradicional de Hawái, el cual es un buen ejemplo de juego de azar al jugarse condados de dos caras (monedas) diferentes entre sí; para jugar se requiere de cuatro pequeños discos de unos 2,5 cm. de diámetro que, por una cara, no tienen ninguna señal y, por la otra, están divididos en cuadrantes con diferentes marcas, de la siguiente manera:

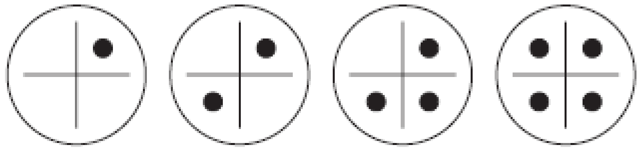


*Figura 7.*Lu–lú.
Copyright 2004 por Chamoso et al

Los jugadores, según un orden previamente establecido, lanzan los cuatro discos y cuentan los puntos que obtienen, si un jugador alcanza la máxima puntuación, 10 puntos, puede realizar otro lanzamiento, los discos que caen por el lado que no tiene nada marcado cuentan cero puntos, gana el primer jugador que alcanza o supera la puntuación que inicialmente se haya acordado.

Cabe resaltar que esta última categoría (azar) de la clasificación propuesta por Chamoso, Durán, García, Lalanda y Rodríguez, no se hará uso en este trabajo de puzles aritméticos, puesto que esta categoría hace referencia a puzles de tipo probabilístico.

### 2.3.3. Tercera Clasificación (Lógicos)

Como tercera clasificación, aunque está compuesta de una sola categoría, es propuesta por los autores José Rupérez y Manuel García Déniz (2012), profesores españoles que conforman el “Club Matemático” desde 1984, y se dedican a la investigación sobre el uso de juegos y puzles en el aula, la mate-magia, la resolución de problemas, entre otros, los cuales se enfocan en juegos de *Lógica*, que consisten en hallar la solución mediante la intuición y el razonamiento, sin la necesidad de conocer y emplear determinados conceptos, además son importantes en el desarrollo del pensamiento humano, puesto que consideran el empleo de concentración, relación de información, comunicación, e interpretación de instrucciones, logrando potenciar en el ser el sentido reflexivo, la capacidad de anticipar (intuir) algún resultado, la memorización, el razonamiento y la atención. A partir de las anteriores características del juego *Lógico* se da paso a considerarlo como otra clasificación, presentando un ejemplo de esto a continuación:
El juego de Puentes (figura 8) es un ejemplo de este tipo de puzle; el cual consiste en conectar cada isla por medio de puentes horizontales o verticales, pero los puentes no pueden cruzarse ni

atravesar las islas, y a cada isla solo le corresponde un número determinado de puentes el cual se encuentra en su interior, al final se debe tener un camino continuo que una todas las islas.

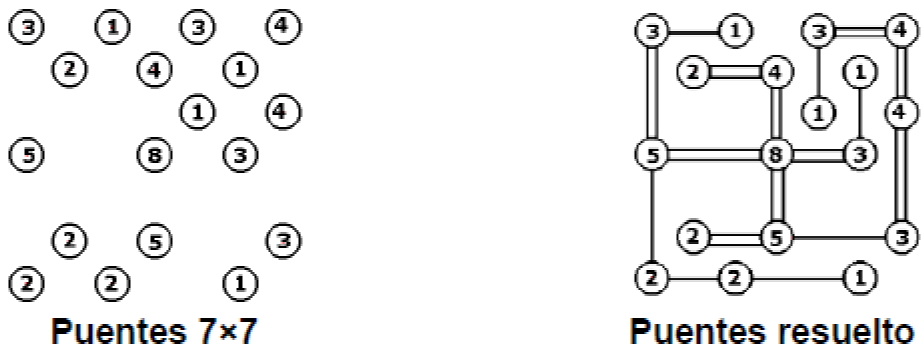



*Figura 8*. Puentes.
Copyright 2009 por Rojas

## 2.4. Los puzles y la educación matemática

### 2.4.1. Los puzles y las Matemáticas

Las Matemáticas han traído consigo a lo largo de su historia una parte lúdica, la cual ha significado que de allí se obtengan las mejores creaciones de esta ciencia (De Guzmán Miguel, 1992); al conocer esta estrecha relación, se centra el interés por conocer la importancia que conlleva el empleo de los puzles en la clase de Matemáticas.

Inicialmente, se considera que un puzle es un objeto lúdico, el cual le genera al ser humano distracción y la potencia de habilidades; adicionalmente la solución de un puzle conlleva a un tipo de dialéctica lúdica entre quien lo creó, el mismo puzle y quien intenta solucionarlo. Además, Las características esenciales que marca la actividad de interactuar con un puzle, según el sicólogo Huizinga (citado por De Guzmán Miguel, 1992), son:

- ✓ El ser humano al hacer uso de los puzles siente un sentido de liberación, de evasión y de relajación.
- ✓ El puzle no es broma, pues la peor acción del humano es no tomar en serio su puzle.

- ✓ El puzle, como una obra de arte, causa placer a través de su contemplación y de su ejecución.
- ✓ El puzle se desarrolla separado de la vida cotidiana tanto en el espacio como en el tiempo.
- ✓ El puzle está cubierto por cierto grado de dificultad, que en el momento de sobrepasarla se siente gran placer.
- ✓ El puzle genera fuertes lazos de afecto entre las personas que lo practican.
- ✓ El puzle por medio de sus reglas genera un nuevo orden en la vida, la llenan de ritmo y armonía.

Estas características están también sumergidas en la actividad matemática, ya que las Matemáticas son un elaborado puzle en sí mismas, es decir al realizar un análisis rápido se observa que los puzles cuentan con una serie de reglas y un número determinado de piezas que se rigen por dichas reglas, de igual forma pasa con cualquier teoría matemática, puesto que cuenta con unos axiomas que equivalen a reglas y unos objetos primitivos que equivalen a las piezas de un puzle.

Además, las Matemáticas y los puzles a nivel de su enseñanza poseen varias características en común, tal como lo describe Ferrero (2004): “las Matemáticas potencian y enriquecen la actividad mental del estudiante y son aptas para explorar el mundo real; y los puzles enseñan al estudiante a dar sus primeros pasos intelectuales, a potenciar su pensamiento lógico, su razonamiento, y su pensamiento crítico. Por esto los puzles son un buen camino para la enseñanza de las Matemáticas y son la base para formalizar a futuro el pensamiento matemático” (p. 13).

Ahora, esta relación resulta interesante cuando el docente se pregunta sobre cómo trasmitir a sus estudiantes el interés y el entusiasmo que generan las Matemáticas, lo cual al emplear esta relación (de las Matemáticas como puzle) se puede corresponder con los principales procesos asociados a la actividad matemática. Estos procesos se detallan a continuación:

**1.** Se debe tener en cuenta que la persona que desee desarrollar puzles irá adquiriendo algunas reglas simples, que en el momento de dominarlas, estas conducirán al éxito; del mismo modo pasa en las Matemáticas, bajo su axiomática se trabaja al inicio con lemas sencillos que ayudarán a resolver problemas simples de esta ciencia.

2. Al desarrollar puzles con una historia determinada se logra llegar a soluciones que los maestros del campo habían propuesto en su entonces, haciendo que el puzle sea más complejo y por lo tanto no se pueda usar simplemente las reglas dadas en un inicio. Esto en la actividad matemática, hace que el estudiante sienta suyos los teoremas que se han desarrollado a lo largo de la historia, y por ende haga uso de estos para solucionar situaciones confusas y delicadas.

3. Luego viene el desarrollo de puzles más sofisticados, en los que se acepta soluciones innovadoras y originales; lo cual hace referencia en Matemáticas a los problemas abiertos que existen en la teoría.

4. Por último, están aquellas personas que desarrolla nuevos puzles, con ideas y estrategias innovadoras; donde esto refiere en Matemáticas a crear nuevas teorías.

De este modo, los puzles y las Matemáticas han llevado sus caminos entrelazados, pues soluciones originales con una intención lúdica han llevado a la creación de nuevos pensamientos en la Historia de las Matemáticas, donde en esta relación ha quedado inscritos los nombres de grandes matemáticos que con sus aportes ayudaron a florecer esta ciencia. Algunos ejemplos tomados de *Juegos matemáticos en la enseñanza* (De Guzmán, 1984) son:

- Antoine Gobaud, propone el famoso problema del *Caballero de Meré*, el cual consiste en saber cómo son las apuestas de dos jugadores que deben alcanzar *n* puntos con los dados, el primer jugador ha obtenido *p* puntos y el segundo *q* puntos en sus primeras jugadas.
- Leibniz, gran amante de la actividad lúdica, expresa en una carta de 1715 lo siguiente "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente".
- Hilbert, da a luz un teorema que hace referencia a los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

De igual manera que los matemáticos en su ciencia, en el ámbito de la enseñanza ha tomado fuerza la idea que es importante considerar el empleo de los puzles en el aula, puesto que "[…] el gran beneficio de este acercamiento lúdico consiste en su potencia para transmitir al estudiante la forma correcta de colocarse en su enfrentamiento con problemas matemáticos" (De Guzmán Miguel, 1992). Tal importancia ha motivado a varios profesores a nivel mundial a proponer actividades en las que el principal medio de la clase son los puzles. A continuación se da muestra de algunas experiencias:

- ✓ El profesor Iván Rojas (2009) propone la utilización de juegos lógicos como medio para la enseñanza de las Matemáticas en los tres niveles de educación del Colegio Salesiano "Santa Rosa", estos juegos son[8] construir puentes, circuitos numéricos, sudoku < > y kenken, los cuales se emplean desde un punto de vista matemático como una nueva estrategia para lograr en los estudiantes un mejor aprendizaje e interés por la clase de Matemáticas. Se concluye que la aplicación de los juegos lógicos en la juventud salesiana orientó al cambio rutinario de clases convencionales. El profesor Iván proyecta la aplicación juegos lógicos en el aula en relaciones de enseñanza–investigación, y en los criterios de validación de resultados una vez aplicados los mismos.

- ✓ Los profesores Chamoso y Durán (2004), también han experimentado tanto en estudiantes como en docentes con tres puzles[9] (Números y operaciones, Intercambio de fichas y Lu–lú) que permiten manejar numerosos contenidos del currículum de Matemáticas, dado que se pueden adaptar a diferentes grados de escolaridad; además que dependiendo del curso en que se aplique, cada uno de ellos se puede llegar a aplicar y descubrir diferentes temáticas, también se pueden aplicar diversas estrategias para la resolución de problemas en el aula de clase. Se concluye después de la experimentación efectuada, con gran sorpresa, la gran cantidad de contenidos matemáticos que pueden surgir al trabajar con este tipo de puzles, siempre que se tenga interés en ello y se trabaje con suficiente profundidad. Otro aspecto llamativo es que particularmente con el puzle Lu-lú se puede, abarcar la

[8] Puzles descritos en el capítulo 4.
[9] Puzles descritos en el capítulo 2, en clasificación para los puzles.

mayor parte de los contenidos del currículum de Matemáticas relacionados con probabilidad. Con esta experiencia y el análisis respectivo se ha mostrado que los puzles pueden utilizarse para trabajar elementos del currículum de diversas formas.

- ✓ Los profesores José Muñoz Santoja, Jesús Fernández Domínguez y Virginia Carmona Soto (1998) idearon formas didácticas y divertidas de llevar las temáticas de Potenciación y Radicación al aula de clase por medio de la adaptación de algunos juegos matemáticos del grupo Azarquiel para el tema de Álgebra (Grupo Azarquiel, 1991, citado por Muños, Fernández, & Carmona, 1998), o pasatiempos sacados de la prensa en general, llevándolos al aula de clase. De esta manera, dichos profesores concluyen que todo docente con un poco de interés puede adaptar elementos del entorno como puzles por su contenido didáctico y llevarlos al aula en lugar de los ejercicios típicos y monótonos, ya que basados en esta experiencia de clase pueden afirmar que estos puzles han resultado interesantes y motivadores para los estudiantes.

- ✓ Los profesores Rupérez y García (2012) aunque no dan muestra de una experiencia de aula[10] como tal, proponen la utilización de cuatro puzles lógicos (Skedoodtable, Eleusis, Zendo y Mastermind) en su mayoría con material manipulable[11], los cuales pueden adaptarse en diferentes versiones más simplificadas, permitiendo su implementación en los últimos cursos de la primaria y los primeros años de la Educación Básica secundaria. Estos juegos aunque son conocidos, permanecen olvidados o solo se usan para jugar y pasar el tiempo sin ninguna importancia matemática; por ello, los autores hacen referencia a estos puzles, los cuales son presentados con algunas orientaciones didácticas para poder aprovechar el contenido matemático que poseen.

### 2.4.2. Los puzles y el interés del estudiante por las Matemáticas

Las personas siempre han despertado su interés hacia cualquier conocimiento de igual manera que un niño pequeño al explorar un nuevo juguete, lo observa con sorpresa y curiosidad y al

[10] Se hace referencia a los artículos consultados.
[11] Razón por la cual no son listados en este trabajo.

manipularlo empieza a descubrirlo; entonces, ¿por qué los maestros no aprovechan este espíritu curioso de descubrir que posee todo ser humano para aproximar al estudiante de forma positiva hacia las Matemáticas?

Sobre este tema, el principal autor que ha manifestado certeramente que esto es posible es Martin Gardner, quien presentó durante años de forma lúdica e interesante gran cantidad de puzles en su mayoría matemáticos, en sus columnas en la revista *Scientific American*; él siempre aseguró que la mejor forma de "despertar" a un estudiante es presentarle un puzle matemático o similares, los cuales usualmente el profesor de matemática deja de lado puesto que los considera frívolos o poco productivos.

A partir de esta creencia, varios puzles con alto contenido matemático (como los que se presentan en este trabajo) son dejados a un lado e incluso ni siquiera son conocidos por el docente o por el público en general, y por ende no se les hace un reconocimiento adecuado, a pesar que grandes profesionales del tema como Martin Gardner y Miguel de Guzmán han estudiado y asegurado que los puzles, y en particular los puzles matemáticos, por su condición lúdica permite al ser humano un momento de entretención y diversión; a demás durante el periodo que se interactúa con un puzle se propicia un ambiente de aprendizaje casi imperceptible permitiendo un aprendizaje significativo.

### 2.4.3. Pensamiento matemático

El ser humano desde el inicio de su desarrollo va adquiriendo diferentes habilidades (hablar, leer, escribir, calcular, entre otras), pero descubrir cómo se producen estos aprendizajes ha interesado a diversos investigadores de la educación; Fodor (1989, citado por Paredes & Rebellón, 2011) sostiene que la mente está compuesta de sistemas de datos de entrada, donde la información procedente del ambiente externo pasa por un sistema sensorial, que se encarga de transformar los datos poniéndolos en el formato que puede procesar cada sistema.

Por otro lado, Piaget (Paredes & Rebellón, 2011), el más conocido por sus estudios en las etapas del desarrollo humano, sostiene que todas las personas desde la infancia evolucionan y perciben el mundo en cada etapa de la vida de forma distinta. De acuerdo con esta teoría piagetiana de la comprensión del mundo, se distinguen tres etapas:

- ✓ *Nivel A:* cuando un niño está en este nivel sus creencias no le permiten una correcta lectura de la experiencia.
- ✓ *Nivel B:* en este nivel el niño realiza una correcta lectura de la experiencia, pero se equivoca cuando se le hace una contra sugerencia.
- ✓ *Nivel C:* el niño tiene muy claro la experiencia, y por tanto, no perece a la contra sugerencia.

Siguiendo con esta teoría, el niño comprende al mundo que lo rodea de la siguiente manera:

- ✓ Mejorando su sensibilidad a las contradicciones.
- ✓ Realizando operaciones mentales.
- ✓ Comprendiendo las transformaciones. (Conservación de la sustancia, del peso y del volumen).
- ✓ Aprendiendo a clasificar (colecciones figúrales, no figúrales, clasificación propiamente dicha)
- ✓ Aprendiendo a realizar series.
- ✓ Adquiriendo la noción de número.

Estas ideas de Piaget también sostienen que el niño en su desarrollo realiza clasificaciones, compara conjuntos de elementos y ejecuta muchas otras actividades lógicas. Para ello realiza operaciones que se describen en la teoría de conjuntos. Lo que se pretende con la enseñanza de los conjuntos es que el niño tome conciencia de sus propias operaciones.

Pero, después de la obra de Piaget, Constante Kamii seguidora de él, diferencia tres tipos de conocimiento: el físico, el lógico-matemático y el social. El conocimiento físico es un conocimiento de los objetos de la realidad externa; el conocimiento lógico-matemático no es un conocimiento empírico, ya que su origen depende de la mente de cada individuo; y el conocimiento social depende de la aportación de otras personas. Para adquirir el conocimiento físico y el conocimiento social se necesita del conocimiento lógico-matemático que el niño construye.

Las personas pueden deben construir el conocimiento lógico-matemático desde adentro, los algoritmos y el sistema de base diez han sido enseñados desde hace mucho tiempo como si la Aritmética fuera un conocimiento social o un conocimiento físico; ahora, si algunos niños comprenden los algoritmos y el sistema de base diez es porque ya han construido el conocimiento lógico-matemático que se necesita para esta comprensión.

Otro de los autores que han teorizado sobre el tema del desarrollo del pensamiento matemático es Vygotsky, cuya teoría está basada en el antecedente de que el desarrollo intelectual del niño no puede ser comprendido sin referenciar al mundo social en el que crezca. Dicho desarrollo no puede considerarse que se deba a solo el interactuar con otros sujetos de la sociedad, sino que también se debe tener en cuenta la interacción con determinados instrumentos que ayudan a mediatizar el conocimiento que se está adquiriendo.

Vygotsky considera al contexto sociocultural como aquello que llega a ser accesible para el niño a través de la interacción social con otros miembros de la comunidad, los cuales conocen las destrezas e instrumentos intelectuales; además, la interacción del niño con miembros competentes de su comunidad es una característica esencial del desarrollo cognitivo (Paredes & Rebellón, 2011).

Finalmente de acuerdo con los Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), el pensamiento matemático debe potenciarse por medio de la aplicación de contenidos para determinados sistemas matemáticos; donde dichos contenidos se emplean como herramientas para ayudar a desarrollar determinados pensamientos que constituyen el pensamiento matemático.

Estos pensamientos en resumidas cuentas son: el pensamiento numérico, dado por la Aritmética; el pensamiento espacial y métrico, dado por la Geometría, el pensamiento métrico y el variacional, dado por el Álgebra y el Cálculo; y el pensamiento aleatorio, dado por la

Probabilidad y la Estadística. Cada uno de estos pensamientos se desarrollan a partir de diversos procesos matemáticos, como modelar, comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos, y formular y resolver problemas, este último reúne a los anteriores procesos en diferente intensidad y diferentes momentos, puesto que conlleva a que los mismos estudiantes formulen, inventen y resuelvan problemas, lo cual es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático (MEN, 2006).

Otro factor importante para el desarrollo del pensamiento matemático es el pensamiento lógico, por su estrecha relación, ya que este último apoya y perfecciona el pensamiento matemático.

### 2.4.4. Pensamiento Lógico

De acuerdo con los Estándares básicos de Competencias Matemática (MEN 2006),y como ya se ha mencionado el pensamiento Matemático y el pensamiento Lógico están ligados, ya que uno influye en el desarrollo del otro, sin embargo, no puede creerse que las Matemáticas son las únicas que desarrollan el pensamiento lógico en los estudiantes, ya que este se debe ver favorecido por todas las áreas de la educación básica: por ejemplo en el aprendizaje del castellano y de las lenguas extranjeras, en la lectura de textos, en las ciencias naturales y sociales, entre otras.

Jean Piaget alrededor del siglo XX, estudió la manera de razonar de los adolescentes y propuso un conjunto de operaciones lógico-matemáticas; pero en sus estudios previos sobre lógica había propuesto que el pensamiento lógico actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones y que el pensamiento matemático se distingue del lógico porque habla sobre el número y sobre el espacio.

Por otra parte en cuanto al desarrollo del pensamiento Lógico por medio de puzles, Piaget (1947) presenta el siguiente concepto de pensamiento lógico en el que se afirma que "la lógica del niño no podía desarrollarse sin interacciones sociales porque es en estas situaciones interpersonales donde el niño siente la obligación de ser coherente...es estando con los demás cuando siente la necesidad de ser coherente de un momento a otro y de pensar en lo que debe decir para ser comprendido y creído [...]" (Paredes & Rebellón, 2011). Por esto es que los puzles aritméticos no se emplearan únicamente para que el estudiante juegue y se distraiga, si no que estos estarán orientados para estimular su capacidad de coordinar sus diferentes formas de pensar.

# CAPÍTULO III
# HISTORIA DE LOS PUZZLES

Tal y como se describe en la Introducción, los puzzles estudiados en esta investigación se abarcan a partir de tres miradas; la primera de ellas, lo que refiere a la historia, será descrita en este capítulo. Cabe resaltar que en dicho capítulo, solo se ha incluido alrededor de diez puzzles como muestra particular, pero no son los únicos que se pretenden presentar, como será visto en el capítulo cuatro.

## 3.1. Historia general

Aunquesuele creerse que en la Historia de las Matemáticas los matemáticos solo se enfocaban en la creación de conocimiento puramente científico, existen aportes en los que se conoce que los puzles matemáticos existen desde las primeras civilizaciones humanas, puesto que estos han tenido un papel místico, recreativo, pedagógico, entre otras finalidades sociales (Mohr, 1993, citado por Danesi, 2003), pues a partir de la diversidad cultural que se ha presentado, los puzles pueden cambiar de un lugar a otro, pero su esencia es la misma.

Desde la antigüedad, con los famosos matemáticos griegos (como Palamedes, Diofanto, entre otros), se observa que estos producían puzles que les ayudara a entender los conceptos básicos matemáticos y lógicos.

Mientras que a Palamedes se le atribuye la invención de los dados, a Diofanto se le atribuye el escrito de acertijos, como el que se presenta a continuación (Edumat, 2011, párr. 4):

> Para calcular dos números que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados sea 208. Los números desconocidos, en nuestra representación moderna, sería $10 + x$ y $10 - x$ y además $(10 + x)^2 + (10 - x)^2$. Se obtiene $x = 2$ y por tanto los números son 8 y 12.

Por otro lado, no solo es en Grecia donde se inicia el estudio de este tipo de actividades; en otras culturas como la china, o la arábiga, se consideraba que la organización y combinación de letras y números de manera estratégica y adecuada en forma de cuadrados, poseía propiedades y dones mágicos.

Seguido por la Edad Media, la *Era Dorada* de los puzles (Danesi, 2003), se conoce que el emperador romano Carlomagno se obsesionó tanto con los puzles que mandó a un hombre a crear varios de estos para divertirse; en total fueron cincuenta y seis puzles que se recopilaron en un manual llamado *Problemas adacuendos juvenes*[12], escrito por el inglés Alcuin. Finalmente por esta época, se da origen en 1202 a una de las obras más resaltadas, escrita por Fibonacci y denominada *Liber Abaci,* que incluye diversos puzles en los que se muestran formas fáciles de dar solución a problemas usando el sistema indo-arábigo, que en el sistema romano no se podrían llevar a cabo. Uno de estos problemas es (Ugarte, 2011):

> Dos hombres tienen la intención de hacer un largo viaje. Uno de ellos caminará 20 millas diarias. El otro hará una milla el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero y así sucesivamente agregando siempre una milla a lo recorrido el día anterior. ¿Cuántos días tardará el segundo viajero en alcanzar al primero? (p. 25).

En el periodo renacentista, los puzles entraron a su *Era de Oro* (Danesi, 2003). Alrededor del siglo XV, estos se emplearon como modelo explicativo de conceptos matemáticos, que a su vez fueron usados por grandes matemáticos de la época, tales como: Robert Recorde, Niccolo Fontana Tartaglia y Girolamo Cardano. Para el siglo XVII, se produjeron dos recopilaciones de puzles; por un lado se tiene a la obra titulada *Problèmes plaisants et delectables qui se font par les nombres*[13], escrita por el francés Claude-Gaspar Bachet de Mézirac en el año de 1612. Por otro lado, se tiene la obra *Mathematical recreationor a Collection of sundrie excellent problema as out of ancient and modern philosophers both useful and recreative*[14], escrita por Henry Van Etten, publicada en Francés en 1624, y posteriormente en Inglés en 1633.

[12] Preguntas para provocar jóvenes.
[13] Los problemas placenteros y deleitosos que se hacen con números.
[14] Recreación matemática o una colección de excelentes problemas de los filósofos antiguos y modernos a la vez útil y recreativo.

En la Edad Moderna, se presentaron las publicaciones de numerosos matemáticos, quienes usaban los puzles como medio para exponer sus ideas afines. Es el caso de Leonard Euler, quien promueve la Teoría de grafos, que años más tarde se convertiría en la Topología, en la que expuso el famoso problema de los puentes de Königsberg, que consistía en cruzar una única vez a pie los siete puentes que había en la ciudad y poder regresar al lugar de inicio.

En la Edad Contemporánea, para el siglo XIX, *Ladie's Diary* contempló una lectura diaria de puzles y acertijos de la historia; aunque el enfoque principal de la revista era asuntos relacionados con salud, educación, recetas y biografías de mujeres destacadas; la revista dejó de publicar en 1841. Durante este mismo siglo, el escritor y matemático Lewis Carroll llevó al puzle como arte, partiendo de la creación de escritos de cuentos-enigma, como lo son *Pillow Problems* en 1880 y *A tangled tale* en 1885.

Para finales del siglo XIX, se empezaron a considerar a los creadores de los puzles como profesionales del tema; algunos autores son: el americano Oswald Veblen, quien convirtió algunos puzles clásicos en pequeñas obras de consumo general; el americano Sam Lyod, quien en vida creó más de diez mil acertijos, los cuales tenían un alto nivel de exigencia, llevando a los degustadores de estos, a pasar gran número de horas para encontrar sus respectivas soluciones; y el francés Fraçois Edouard Anatole Lucas, quien es el famoso inventor de las *Torres de Hanói*, hizo tangible el trabajo de Cardano (Danesi, 2003, p. 52), descrito a continuación:

> Un monasterio de Hanói tiene tres estacas. En una hay colocados 64 discos de oro en orden descendente de tamaño –el más grande, al fondo, el más pequeño en lo alto–. Los monjes han recibido órdenes de Dios de trasladar todos los discos a la tercera estaca respetando el mencionado orden descendente. Un disco más grande nunca debe situarse encima de uno más pequeño. Pueden usarse las tres estacas. Cuando los monjes trasladen el último disco, la vida en el mundo acabará. ¿Por qué?

Posteriormente en el siglo XX, nacen dos reconocidos creadores de puzles. Por un lado está Martin Gardner, escritor de historia, soluciones y significados de los puzles; reconocido por llevar a los puzles al ámbito académico, realizando un detallado y organizado estudio de estos. Por otro lado está el lógico-matemático Raymond Smullyan, quien creó diversos puzles de lógica y de ajedrez diseñados para demostrar el pensamiento lógico. A este siglo también se le acredita la invención del cubo de Rubik en 1975 y el crucigrama en 1913, los cuales hacen parte cultural alrededor de todo el mundo.

Finalmente en los últimos años, a nivel mundial se han conformado numerosas asociaciones y páginas web, como REDEMAT, Grupo Alquerque, Canguro Matemático, The Puzle Museum, Colombia Aprendiendo, Grupo Azarquiel, entre otros, que se han encargado de la divulgación de los puzles.

A continuación se presenta la historia particular de 8 puzzles matemáticos, teniendo en cuenta que el puzzle denominado cuadrado mágico, es del que más se conocen estudios, de los cuales se describen algunos de ellos.

## 3.2. Cuadrados Mágicos

Los cuadrados mágicos son un puzzle que está conformado por el mismo número de casillas a lo largo y a lo ancho, donde se organizan los números iniciando por el 1, tal que al acomodar dichos números se debe mantener una suma igual entre columnas, filas y las diagonales principales del cuadrado; dicha suma recibe el nombre de suma mágica o constante mágica ($M_n$) la cual se define como:

$$M_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

Donde $n$ es el número de orden del cuadrado mágico; el orden de un cuadrado mágico se determina a través del número de casillas que posee por lado (Comes & Comes, 2009).

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 9 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline \end{array}\right\} 3$$

Figura 9. Cuadrado mágico de orden 3
Su suma mágica es $M_3 = \frac{3(9+1)}{2} = 15$

### 3.2.1. China

El primer ejemplo de cuadrado mágico que se ha conocido en la historia, es sin duda de origen chino (Boyer, 1999). Este registro en China ocurrió de una manera curiosa; cuenta la leyenda que los cuadrados mágicos fueron un regalo de una tortuga, la cual vivía en el río *Lo,* al emperador Yu el Grande, el cual controlaba el curso delos Ríos Lo y Amarillo

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

*Figura 10.* Cuadrado mágico de orden 3 en la antigua China

La tortuga llevaba en su caparazón los primeros nueve números naturales (conocidos en la actualidad), dichos números representaban un diagrama, en el que se destaca la combinación de las direcciones, obteniendo el mismo resultado referente a filas, columnas y diagonales; a este diagrama se le conoce como *Bagua* (Gálvez & Maldonado, 2012, p. 58).

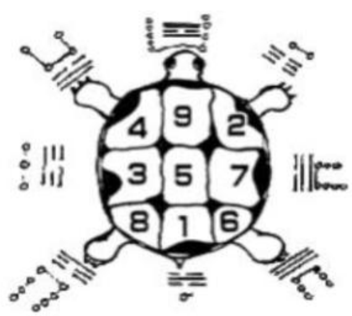



*Figura 11*. Bagua

Además se conoce que este tipo de modelo (organización por filas y columnas), llevó al autor de la obra *Nueve Capítulos* a resolver el sistema de ecuaciones

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26,$$

Colocando en un cuadrado los coeficientes de las anteriores ecuaciones de forma vertical,  y operandolas en forma de matriz:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 1 |
| 26 | 34 | 39 |

Reduciendo a,

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 |
| 0 | 5 | 2 |
| 36 | 1 | 1 |
| 99 | 24 | 39 |

Donde esta matriz representa el sistema de ecuaciones,

$$36z = 39$$
$$5y + z = 24$$
$$3x + 2y + z = 39$$

Del cual los valores de *x*, *y*, y *z* son, $\frac{345}{36}$ , $\frac{55}{12}$ y $\frac{13}{12}$ respectivamente.

### 3.2.2. Oriente Islámico

En el Oriente Islámico no se reconoce una fecha exacta de los inicios de los cuadrados mágicos; sin embargo, al observar en documentos y manuscritos de origen islámico, se identifican algunas características puramente matemáticas, puesto que dicho puzzle era denominado *"la disposición armónica de los números"*. Estos tratados datan desde el SigloX, por medio de $Ab\bar{u}l - Waf\bar{a}'al - B\bar{u}z\hat{y}\bar{a}n\bar{\imath}$ y $Ab\bar{u}`Al\bar{\imath}l - Hasanb.al - Hayta$, en los que se describela construcción de los cuadrados mágicos a partir de su tipo y orden.

Deacuerdo con Sesiano (Comes & Comes, 2009), se pueden clasificar a los cuadrados mágicos en tres categorías diferentes: **i)** Según el orden al que pertenezca, **ii)** según los métodos de contrucción y, **iii)** Según los métodos de construcción pero no necesariamente donde deba cambiar el tipo del cuadrado mágico. Cada uno de ellos se describe a continuación:

***i)*** *Según el orden al que pertenezca*: estos órdenes son: *impares*, de orden $2k + 1$; *parmente pares*, de orden múltiplos de 4 es decir, de la forma $4k$;e *imparmente pares* de orden múltiplo de 2 pero no multiplo de 4 es decir, $2(2k + 1)$.

***ii)*** Otra clasificacion está relacionada con *los Métodos de construcción* (figura12), estos son: *de magia simple **(a)***, los cuales únicamente cumplen los requisitos esenciales; *con bordes* ***(b)***, son aquellos en los que a pesar de que se vayan eliminando los bordes sucesivos siempre queda en el interior un cuadrado mágico, el orden menor para estos cuadrados debe ser 5; *los pandiagonales* ***(c)***, estos cuadrados además de poseer sumas mágicas en sus diagonales principales, también poseen estas sumas en las diagonales parciales[15]; y por último en esta categoría estan *los compuestos o compartimentados* ***(d)***, es decir, los cuadrados quese componende una serie de compartimentos, de los cuales cada uno es un cuadrado mágico y se cumple que $n = r \times s$, donde el total de cuadrados es $r^2$, cada uno de orden $s$ (Sesiano, 2003).

[15]Paralelas a una diagonal principal

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

(a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 43 | 39 | 38 | 40 |
| 49 | 15 | 16 | 33 | 30 | 31 | 1 |
| 48 | 37 | 22 | 27 | 26 | 13 | 2 |
| 3 | 14 | 21 | 25 | 21 | 14 | 3 |
| 8 | 18 | 24 | 23 | 28 | 32 | 42 |
| 9 | 19 | 34 | 17 | 20 | 35 | 41 |
| 10 | 45 | 44 | 7 | 11 | 12 | 42 |

(b)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 49 | 62 | 59 | 56 | 129 | 142 | 139 | 136 | 17 | 30 | 27 | 24 |
| 60 | 55 | 50 | 61 | 140 | 135 | 130 | 141 | 28 | 23 | 18 | 29 |
| 54 | 57 | 64 | 51 | 134 | 137 | 144 | 131 | 22 | 25 | 32 | 19 |
| 63 | 52 | 53 | 58 | 143 | 132 | 133 | 138 | 31 | 20 | 21 | 26 |
| 33 | 46 | 43 | 40 | 65 | 78 | 75 | 72 | 97 | 110 | 107 | 104 |
| 44 | 39 | 34 | 45 | 76 | 71 | 66 | 77 | 108 | 103 | 98 | 105 |
| 38 | 41 | 48 | 35 | 70 | 73 | 80 | 67 | 102 | 105 | 112 | 99 |
| 47 | 36 | 37 | 42 | 79 | 68 | 69 | 74 | 111 | 100 | 101 | 106 |
| 113 | 126 | 123 | 120 | 1 | 14 | 11 | 8 | 81 | 94 | 91 | 88 |
| 124 | 119 | 114 | 125 | 12 | 7 | 2 | 13 | 92 | 87 | 82 | 93 |
| 118 | 121 | 128 | 115 | 6 | 9 | 16 | 3 | 86 | 89 | 96 | 83 |
| 127 | 116 | 117 | 122 | 15 | 4 | 5 | 10 | 95 | 84 | 85 | 90 |

(d)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 13 | 12 |
| 14 | 11 | 2 | 7 |
| 4 | 5 | 16 | 9 |
| 15 | 10 | 3 | 6 |

(c)

*Figura 12*. Métodos de construcción atendiendo al tipo de cuadrado mágico

**(a)** El cuadrado mágico cumple esencialmente con las condiciones básicas.

**(b)** La suma mágica del cuadrado de orden 7 es $\mathrm{M}_7 = 175$; la suma mágica del cuadrado central de orden 5 es $\mathrm{M}_5 = 125$; y la suma mágica del cuadrado central de orden 3 es $\mathrm{M}_3 = 75$.

**(c)** La suma de las cuatro diagonales parciales es igual a la suma mágica de este cuadrado, es decir: $8 + 2 + 9 + 15 = 34$; $14 + 5 + 3 + 12 = 34$; $4 + 11 + 13 + 6 = 34$ y $10 + 16 + 7 + 1 = 34$.

**(d)** Cuadrado mágico de orden 12, tal que $\mathrm{r} = 3$ y $\mathrm{s} = 4$; de lo cual se poseen 9 cuadrados mágicos (complementos), cada uno de orden 4.

***iii)*** La última clasificación está relacionada con los *Métodos de construcción pero no necesariamente se debe cambiar el tipo del cuadrado mágico*, estos son:

- *El método de las diagonales complementarias* (figura 13), el cual consiste en rellenar mediante números consecutivos empezando con el 1 en la posicion central de la fila superior, y moviéndose en sentido superior derecho (↗) a través de cada diagonal complementaria. Al terminar de completar cada una de estas, el siguiente número se colocará debajo del último escrito anteriormente y se continúan llenando las diagonales.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | 5 | | | |
| 4 | | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | |

*(a)*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 8 | |
| | 5 | 7 | | |
| 4 | 6 | | | |
| 10 | | | | 3 |
| 11 | | | 2 | 9 |

*(b)*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

*(c)*

*Figura 13.* Método de construcción de las diagonales complementarias, cuadrado mágico de orden 5

(a) Se inicia colocando el número 1 en la casilla central de la primera fila, luego en sentido superior derecho (↗) se rellena cada diagonal.

(b) Al completar una diagonal, se escribe el siguiente número debajo del último colocado (corriendo una casilla), es decir como en la primera diagonal (verde) terminó con el número 5, debajo de este se colocará el 6, quien es el que sigue.

(c) Se sigue las intrucciones (a) y (b) hasta completar todo el cuadrado mágico.

- *El método del diamante o cuadrado oblicuo* (figura 14), consiste en incluir en el cuadrado a completar un cuadrado en forma de diamante. Los cuadrados mágicos construidos con este método presentan las siguientes características:

  - La cifra central es igual a $\frac{(n^2+1)}{2}$.

  - La cifra que le antecede en la fila central es igual a $n^2$ y la que le sigue es 1.

  - A partir del 1, se inicia a llenar el cuadrado mágico como el método de las diagonales complementarias (método anteriormente descrito); al completar una diagonal se corre dos casillas hacia abajo del último número colocado.

  - Finalmente se comprueba que las diagonales principales y complementarias del cuadrado oblicuo poseen la misma constante mágica.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | 25 | | |
| | | 13 | | |
| | | 1 | | |
| | | | | |

(a)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | |
| | 6 | 25 | | 3 |
| | | 13 | 2 | |
| | | 1 | | |
| | 5 | | | |

(b)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 18 | 7 | 21 | 15 |
| 17 | 6 | 25 | 14 | 3 |
| 10 | 24 | 13 | 2 | 16 |
| 23 | 12 | 1 | 20 | 9 |
| 11 | 5 | 19 | 8 | 22 |

(c)

*Figura 14.* Método de construcción del cuadrado oblicuo, cuadrado mágico de orden 5

*(a)* Se inicia colocando la cifra central es igual a 13. Luego se ponela cifra que le antecede en la filacentral, igual a 25, y la que le sigue es 1.

*(b)* A partir del 1 y en sentido superior derecho (↗)se inicia a rellenar las diagonales(Primer diagonal: 1, 2, 3, 4 y 5). Cuando se términa una diagonal, se mueve dos casillas hacia abajo del 5 y se escribe el 6.

*(c)* Al completar el cuadro mágico siguiendo el paso (b), se comprueba que el cuadrado oblicuo cumple un constante mágica en sus diagonales:

| | |
|---|---|
| Diagonales principales | 12+13+14 =39 |
| | 7+13+19 = 39 |
| Diagonales complementarias | 12+20+7 = 39 |
| | 6+14+19 = 39 |

- *El método de puntuación*[16] (figura 15), el cual está pensado para completar los cuadrados de orden parmente par, en particular el de orden 4; este método consiste en marcar con puntos las diagonales principales, y empezar a rellenarlas por medio de una suma repetitiva de constante $n+1$ para una diagonal, que inicia en 1, y $n-1$ para la otra diagonal, que inicia en $n$. Luego para rellenar las casillas en blanco, se inicia a escribir los números faltantes de menor a mayor, en la parte inferior derecha del cuadrado mágico hacia arriba y de derecha a izquierda.

| | | | |
|---|---|---|---|
| . | | | . |
| | . | . | |
| | . | . | |
| . | | | . |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 4 |
| | 6 | 7 | |
| | 10 | 11 | |
| 13 | | | 16 |

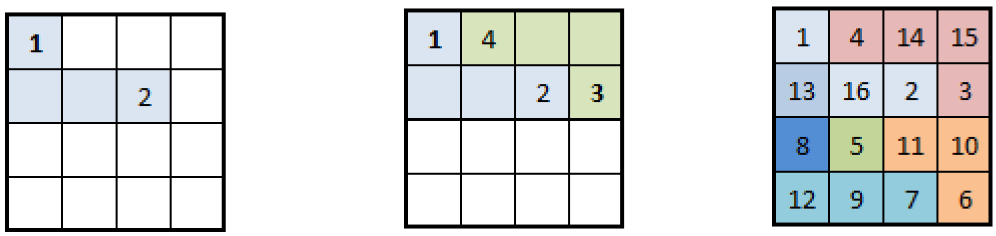
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

*Figura 15.* Método de construcción de puntuación, cuadrado mágico de orden 4.

La contante de la diagonal que inicia en 1 es 5, y la contante de la diagonal de que inicia en 4 es 3, puesto que $n = 4$.

[16]Este método puede adaptarse con facilidad a otros cuadrados parmente pares, también a cuadrados de orden imparmente par.

- *El método del salto de caballo* (figura 16), el cual implica la distribución de los números en las casillas empleando el movimiento del caballo, pieza del ajedrez. El caballo inicia en la casilla superior izquierda, y se mueve en las dos primeras filas, ocupando las casillas posibles; al términar dichas casillas se pasa a la tercera fila y se repite el proceso con las siguientes dos filas.




Desde el 2 no se puede hacer el movimiento del caballo entre las dos primeras filas, entonces se corre a la siguiente casilla y se pone el 3, luego se realiza el movimiento.

Como el 4 no puede hacer el movimientodel caballo, se corre a la siguiente casilla, que es el 1, y se realiza el movimiento del caballo hacia la tercera fila, colocando el 5.

Y asi se sigue el mismo proceso hasta completar el cuadrado.

*Figura 16.* Método de construcción salto de caballo

De esta forma como se puede observar, el inicio de los cuadrados mágicos era netamente matemático, pero desde el siglo XIII, se deja a un lado la ciencia que desarrolla estos puzzles, dando paso al misticismo, con autores persas enfocados en dicha temática. Un caso particular de esto fue la aparición de tratados como el de Muhammad Šabrāmallisī, en Egipto (aprox. 1600), con el cual indaga sobre otras figuras con poderes mágicos como los círculos con cuadrados inscritos, empleados como amuletos.

### 3.2.3. Occidente Islámico

Por esta misma época en el occidente islámico, a los cuadrados mágicos, particularmente los de orden del tres al nueve, se les adjudicaba una relación mágica con los siete planetas que eran observables a simple vista (Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Venus, Mercurio y Luna). La influencia de la magia, hacía que los habitantes de la época invocaran a los espíritus de los siete planetas, con la creencia de que estos podrían realizar cambios en su destino; esto refleja una de las diferencias que existen con la astrología, puesto que esta busca por medio de los astros conocer el futuro.

En la región al-Andalus (occidente islámico), es donde se conoce el primer documento acerca de este puzzle, el cual está relacionado con las virtudes mágicas que comparten los cuadrados mágicos y los siete planetas. A este documento se le conoce como el tratado de Azarquiel, de poco reconocimiento matemático en comparación con otros autores, puesto que Azarquieleraastrónomo y constructor de diversos instrumentos científicos de precisión como el astolabio[17], más no matemático. De los tratados de Azarquiel se conocen tres manuscritos, los cuales se encuentran en Viena, Londresy El Cairo.

Al estudiar el tratado de Azarquiel, se muestra parte de la influencia que posee los cuadrados mágicos con los siete planetas, a los cuales se les agrega la combinación de otros elementos pertenecientes al mundo animal, vegetal y mineral; además de agregarles datos calendáricos y astrológico–planetarios. Todo lo anterior conlleva a la construcción de talismanes con intenciones benéficas o maléficas; asimismo, siguiendo la tradición antigua, los talismanes se inscribirán en materiales de acuerdo con el planeta que se identifique, como: plomo, cobre rojo, cobre amarillo, estaño, oro, plata, así como cerámica, algodón o pieles de animales.

### 3.2.4. Europa

Teniendo en cuenta el desarrollo que se llevó en los paises islámicos, se conoce por medio de Jacques Sesiano (Comes & Comes, 2009) que la llegada de los cuadrados mágicos a Europa es de origen islámico, y cuyo contenido estaba relacionado con la magia, dejando a un lado cualquier cuestion matemática. Esto se debe a que el tratado de Azarquiel fue el que trascendió a Europa, aunque se tiene conocimiento que antes de este hubo dos tratados más, los cuales realizaban una relación directa de los cuadrados mágicos de orden 3 al 9, donde cada uno se relacionaba con un planeta de la época.

Uno de los personajes que más se destaca en Europa es el matemático griegoManuel Moschopoulos (siglo XIV), por ser el primero en estudiar los cuadrados mágicos en este continente y extenderlos portodo el mundo medieval, puesto que se han encontrado manuscritos de él, en los que muestra varios cuadrados de tipo parmente parese impares,

[17] Instrumento para precisar la posición y la altura de las estrellas sobre el horizonte.

otorgando el procedimiento general para construir estos tipos de cuadrados; también muestra un cuadrado de $6 \times 6$ pero en este caso no se observa el método por el cual lo obtuvo. Ademas publicó un libro el cual se basa en los descubrimientos del matemático árabe Al-Buni.

El eminente astrólogo Cornelius Agrippa (1486-1535) trabajó con las propiedades místicas de los cuadrados mágicos en Europa y creía que un cuadrado mágico de una sola casilla, representaba la eterna perfección de Dios; él también consideraba que un cuadrado de $2 \times 2$ no se podía construir, puesto que creía que esto era una prueba de la imperfecciónde los cuatro elementos de la tierra: aire, tierra, fuego y agua.

Pero los cuadrados mágicos no solo han cautivado a astrlogos, matemáticos y conocedores, el gran artista de la Reformaalemana Albrecht Dürer (1471-1528), estaba cautivado por las pautas misteriosas que existen entre los números, tanto así que en su grabado *“Melancolía”* (figura 17) en 1514, se incluye un dibujo de un cuadrado mágico de $4 \times 4$ (figura 18) con una suma mágica de 34. Este cuadrado de Dürer hipnotizó y encantó incluso a Leonard Euler quien lo estudió meticulosamente, mostrando un par de siglos después, que hay 880 maneras de construir un cuadrado mágicode cuarto orden.


*Figura 17.* Grabado “Melancolía” de 1514

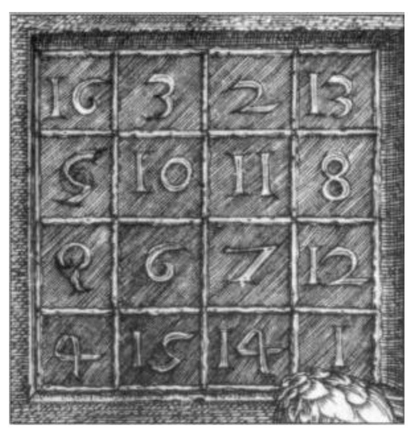



*Figura 18.* Cuadrado mágico de $4 \times 4$

## 3.3. Puzzles de Potencias y Raíces

Estos son unos de los puzles más contemporáneos que se conocen, datan del 1998 y se dan a conocer al mundo a través de la revista Números en su volumen 33, en donde los autores José Muñoz Santoja, Jesús Fernández Domínguez y Virginia Carmona Soto explican el origen y el motivo por el cual crear estos puzles.

Su razón, motivar y crear una actitud positiva de los estudiantes hacia las Matemáticas; y para ello empleaban los juegos matemáticos similares a los del grupo Azarquiel para el tema de Álgebra (Grupo Azarquiel, 1991, citado por Muñoz, Fernández, & Carmona, 1998), o pasatiempos sacados de la prensa en general, siempre buscando sacarle el mayor provecho a estas actividades. Sin embargo, había un tema difícil de trabajar por este tipo de medios, dicho tema es la potenciación y la radicación. Así que para abarcar este tema los autores adaptaron los puzles que emplean en otras temáticas. Estas adaptaciones dieron como resultado los puzles que se describen a continuación, los cuales surgen de una necesidad netamente educativa, y se diferencian del puzle descrito en el apartado anterior (Cuadrados Mágicos), ya que estos surgieron más del ámbito cultural y del misticismo de la época, sin ningún interés en desarrollarlo para la educación.

### 3.3.1. Cuadrado Mágico de Potencias

| | | |
|---|---|---|
| $16$ | $1/2$ | $1$ |
| $1/8$ | $2$ | $?$ |
| $4$ | $8$ | $1/4$ |

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 2^4 & 2^{-1} & 2^0 & \to 2^3 \\ & 2^{-3} & 2^1 & 2^5 & \to 2^3 \\ & 2^2 & 2^3 & 2^{-2} & \to 2^3 \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \\ 2^3 & 2^3 & 2^3 & 2^3 & 2^3 \end{array}$$

*Figura 19.* Cuadrado Mágico de Potencias

Es un cuadrado mágico de $3 \times 3$ compuesto por diferentes potencias de 2; se le pide al jugador que escriba como potencias cada uno de sus términos y que luego compruebe que el producto de las filas, columnas, y diagonales es un mismo número, y para finalizar se les pregunta:

- ¿Cuál es la Suma Mágica?
- ¿Qué número debe ir en la interrogación para completar el cuadrado mágico multiplicativo?

### 3.3.2. Damero de Potencias

**1**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2$ | | $2^2$ | |
| | $2^4$ | | $2$ |
| $2^5$ | | $2^3$ | |
| | $2^2$ | | $2^4$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2$ | | $2^2$ | |
| | $2^4$ | | $2$ |
| $2^5$ | | $2^3$ | |
| | $2^2$ | | $2^4$ |

*Figura 20.* Damero de Potencias

Este puzle consiste en buscar un camino iniciando en cualquier casilla blanca de la fila inferior, y realizando únicamente movimientos en diagonal (como el alfil en el ajedrez), teniendo en cuenta que al moverse en sentido superior derecho (↗) se Multiplica y en en sentido superior izquierdo (↖) se Divide,  la idea es salir por las casillas superiores con un resultado igual al indicado.

$$\mathbf{2^2 * 2^3 = 2^5}$$

$$\mathbf{\frac{2^5}{2^4} = 2}$$

$$\mathbf{\frac{2}{2} = 1}$$

### 3.3.3. Enlosadas Radicales

**18**

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $-6$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{6}$ |
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{3}$ | $2\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ |
| | ↑ | |

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $-6$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{6}$ |
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{3}$ | $2\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ |

*Figura 21.* Enlosados Radicales

Este puzle es similar al anterior, hay que buscar un camino partiendo de la casilla inferior marcada, y teniendo en cuenta que en sentido superior (↑) se suma, en direccion izquierda (←) y derecha (→) se restan y en en sentido superior derecho (↖) y en en sentido superior izquierdo (↗) se multiplican, la idea es salir por las casillas superiores con un resultado igual al indicado.

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$\sqrt{12} * \sqrt{2} = \sqrt{24}$$

$$\sqrt{24} * \sqrt{6} = \sqrt{144} = 12$$

$$12 - (-6) = 12 + 6 = 18$$

### 3.3.4. Laberinto de radicales

Este puzzle consiste, al igual que en los dos anteriores, en buscar un camino partiendo de la casilla superior izquierda, pasando a una casilla lateral, superior o inferior, sabiendo que los radicales de ambas casillas tienen que ser equivalentes, hasta salir por la casilla inferior derecha.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{8}$ | $8^{1/2}$ | $4^{1/4}$ | $8$ |
| $\sqrt{2^3}$ | $2\sqrt{2}$ | $2 * 2^{1/2}$ | $4^{1/3}$ |
| $2^{2/3}$ | $\sqrt[4]{2^6}$ | $2^{3/2}$ | $\sqrt[4]{4^3}$ |
| $\sqrt[4]{16}$ | $4$ | $2^{6/4}$ | $\sqrt[4]{64}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{\sqrt{8}}$ | $\boldsymbol{8^{1/2}}$ | $4^{1/4}$ | $8$ |
| $\sqrt{2^3}$ | $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ | $\boldsymbol{2 * 2^{1/2}}$ | $4^{1/3}$ |
| $2^{2/3}$ | $\sqrt[4]{2^6}$ | $\boldsymbol{2^{3/2}}$ | $\sqrt[4]{4^3}$ |
| $\sqrt[4]{16}$ | $4$ | $\boldsymbol{2^{6/4}}$ | $\boldsymbol{\sqrt[4]{64}}$ |

*Figura 22.* Laberinto de Radicales

## 3.4.Kenken (けんけん)

El Kenken al igual que los puzzles mensionados antes surgen como recurso para la enseñanza y no como parte de la cultura como lo son los cuadrados magicos; el Kenken es un cuadrado cuyo orden (número de casillas por lado) puede variar de 3 a 9, es decir $3 \leq n \leq 9$. Este puzzle consiste en llenar todas sus casillas ($n^2$) con los números naturales del 1 a *n*, sin que estos se repitan a lo largo de sus columnas y filas; además los números deben ubicarse de tal manera como lo indique cada operación (suma, resta, producto, cociente) de una jaula.

| | | |
|---|---|---|
| 5+ | | 3- |
| 2/ | | |
| 1 | 6x | |

| | | |
|---|---|---|
| 5+ 3 | 2 | 3- 1 |
| 2/ 2 | 1 | 3 |
| 1 1 | 6x 3 | 2 |

*Figura 23.*Kenken de orden 3

El nombre original del Kenken es *el puzle Kashikoku Naru*, que significa el puzle que te hace más inteligente, pero se decidió llamarlo Kenken, donde *Ken* es sabiduria, por lo cual Kenken significa *Sabiduría al cuadrado* ("Kenken", 2015)

Este puzle fue desarrollado en Japón en el año 2004 por el profesor Tetsuya Miyamoto, cuyo objetivo era mejorar las habilidades matemáticas y lógicas de sus estudiantes. La idea principal era que ellos adquirieran un pensamiento independiente por medio del ensayo y error, la concentración y la perseverancia. Esto se debe a la filosfia que maneja Miyamoto, el Arte de la Enseñanza sin docencia.

Rápidamente el Kenken salió de las aulas y se popularizó en todo Japón, y pocos años después en todo el mundo. Fue en el 2009, cuando la empresa Nextoy LLC llevó este puzzle a los Estados Unidos, logrando su primera publicación en el New York Times, seguido de Chicago Tribune, The Times de Londres, revistas de aula escolar, entre otros. Finalmente, hoy en día el Kenken está popularizado a nivel mundial, su principal objetivo está en la educación.

El Kenken en la actualidad cuenta con su propio sitio web (www.kenken.com), dirigido por el profesor Miyamoto; allí se presentan diversos asuntos relacionados con este puzzle, en el que se resalta la posibilidad de jugar en línea; para esto primero se escoge el orden del Kenken (del tres al nueve), luego se escogen las operaciones que se desea que tengan las jaulas (suma; suma y resta; producto y cociente; o las cuatro operaciones básicas), y por último la selección de la dificultad (*Easiest, Easy, Medium, Hard y Experd*). Asimismo, cuenta con consejos prácticos para la solución del Kenken, los cuales David Levy (citado por "Kenken", 2015), experto en tecnología Kenken, describe a continuación:

**Kenken de cualquier orden**

- En una jaula $2\times$ con dos casillas, los únicos candidatos son los números 1 y 2.
- En una jaula $3\times$ con dos casillas, los únicos candidatos son los números 1 y 3.
- En una jaula $3\times$ con tres casillas en forma de L, los números deben ubicarse como

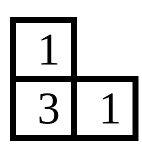



*Figura 24.*Jaula 3× con tres casillas en forma de L

- En una jaula $4+$ con dos casillas, los números a colocar son 1 y 3.

- En las jaulas $4+$ y $2\times$ con tres casillas en forma de L, los números se ubican como

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | 1 |

*Figura 25.*Jaulas 4+ y 2× con tres casillas en forma de L

- En las jaulas $5\times$ y $5/$ con dos casillas, los números a colocar son 1 y 5.
- Una jaula $5\times$ de tres casillas y en forma de L, los números se deben colocar como

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 5 | 1 |

*Figura 26.*Jaula de 5× de tres casillas y en forma de L casillas

- En una jaula $6+$ con tres casillas en una fila o columna, los números a colocar son 1, 2 y 3.
- En una jaula $6\times$ con tres casillas en una fila o columna, los números a colocar son 1, 2 y 3.
- En una jaula $7+$ con tres casillas en una fila o columna, los números a colocar son 1, 2y 4.
- En una jaula $10\times$ con tres casillas en una fila o columna, los números a colocar son 1, 2 y 5.
- En una jaula $15\times$ con dos casillas, los números a colocar son 3 y 5.
- En una jaula $15\times$ con tres casillas en una fila o columna, los números a colocar son 1, 3 y 5.
- En una jaula $20\times$ con dos casillas, los números a colocar son 4 y 5.
- En una jaula $20\times$ con tres casillas en una fila o columna, los números a colocar son 1, 4 y 5.
- En un Kenken de orden 3 y con una jaula de forma L, para hallar $4\times$, los números se deben colocar como

| | |
|---|---|
| 2 | |
| 1 | 2 |

*Figura 27.* Jaula en forma de L para hallar 4×

**Para kenken de orden 4**

- En una jaula con $3 -$ con dos casillas, los números a colocar son 1 y 4.
- En una jaula con $6 +$ con dos casillas, los números a colocar son 2 y 4.
- En una jaula con $7 +$ con dos casillas, los números a colocar son 3 y 4.
- En las jaulas con $4 \times$ y $4/$ con dos casillas, los números a colocar son 1 y 4.
- En una jaula con $6 \times$ con dos casillas, los números a colocar son 2 y 3.
- En una jaula con $8 \times$ con dos casillas, los números a colocar son 2 y 4.

**Para kenken de orden 5**

- En una jaula con $4 -$ con dos casillas, los números a colocar son 1 y 5.
- En una jaula con $6 \times$ con dos casillas, los números a colocar son 2 y 3.
- En una jaula con $9 +$ con dos casillas, los números a colocar son 4 y 5.
- En una jaula con $8 +$ con dos casillas, los números a colocar son 3 y 5.
- En una jaula con $8 \times$ con dos casillas, los números a colocar son 2 y 4.
- En una jaula con $12 \times$ con dos casillas, los números a colocar son 3 y 4.
- En una jaula con $12 \times$ con tres casillas en la misma fila o columna, los números a colocar son 1, 3 y 4.
- En una jaula con $60 \times$ con tres casillas en la misma fila o columna, los números a colocar son 3, 4 y 5.

**Para kenken de orden 6**

- En una jaula con $5 -$ con dos casillas, los números a colocar son 1 y 6.
- En una jaula con $11 +$ con dos casillas, los números a colocar son 5 y 6.
- En una jaula con $10 +$ con dos casillas, los números a colocar son 4 y 6.
- En una jaula con $15 +$ con tres casillas en la misma fila o columna, los números a colocar son 4, 5 y 6.
- En una jaula con $18 \times$ con dos casillas, los números a colocar son 3 y 6.
- En una jaula con $18 \times$ con tres casillas en la misma fila o columna, los números a colocar son 1, 3 y 6.

- En una jaula con $14 +$ con tres casillas en la misma fila o columna, los números a colocar son 3, 5 y 6.
- En una jaula con $120 \times$ con tres casillas en la misma fila o columna, los números a colocar son 4, 5 y 6.

### 3.5. Los Cuatro Cuatros

El problema de los cuatro cuatros consiste en escribir cualquier número natural dado, empleando exactamente cuatro cuatros, acompañados de los signos de las operaciones básicas matemáticas $(+, -, \times, \div)$. Por ejemplo, el número 2 se puede escribir como:

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

**<u>Nota</u>:** Debe tenerse en cuenta que al escribir un número, visualmente se debe poder observar cuatro cuatros, por eso es aceptable usar $\sqrt{4}$ (raíz cuadrada de) puesto que el 2 del índice no se observa a simple vista, tal como se verá más adelante.

Este puzzle al parecer fue publicado por primera en 1881, en un semanario inglés de divulgación científica llamado Knowledge (Gardner, citado por Poniachik, 1982); donde posiblemente de ahí o de futuras publicaciones lo tomó el escritor brasileño César de Souza e Melo, más conocido como Malba Tahan (1985), para su libro *El hombre que calculaba*.

Esta obra describe que Beremiz (personaje principal del libro), al ver el nombre de una tienda "los cuatro cuatros", le recordó el famoso problema matemático, iniciando por dar la solución a los números del cero al diez, presentados a continuación:

$0 = 44 - 44;$

$1 = \frac{44}{44};$

$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4};$

$3 = \frac{4+4+4}{4};$

$4 = 4 + \frac{4-4}{4};$

$5 = \frac{4 \times 4 + 4}{4};$

$6 = 4 + \frac{4+4}{4};$

$7 = \frac{44}{4} - 4;$

$8 = 4 + 4 + 4 - 4;$

$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4};$

$10 = \frac{44-4}{4}$

Pero esto no termina en 10, en 1943 el estadounidense Blanton Culver Wiggin obtuvo una expresión, con la cual se puede obtener cualquier número natural $N$, esta es:

$$N = -\log_{\sqrt{4}}\left(\log_{\sqrt{4}}\left(\sqrt{\ldots N \ldots \sqrt{4 \times 4}}\right)\right)$$

Donde entre las raíces azul y naranja van $N$ raíces cuadradas más, es decir en total hay $N + 2$ raíces cuadradas al calcular un número. Dicha fórmula se encontró en el libro *The surpri seattack in Mathematics* de L. A. Graham. Con esta fórmula por ejemplo para $N = 5$ quedaría:

$$N = -\log_{\sqrt{4}}\left(\log_{\sqrt{4}}\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4 \times 4}}}}}}}\right)\right)$$

Entre la raíz azul y naranja hay 5 (N) raíces cuadradas, para tener un total de 7 (N + 2) raíces cuadradas. Ahora resolviendo:

$$N = -\log_{\sqrt{4}}\left(\log_{\sqrt{4}}(1{,}021897149)\right)$$
$$N = -\log_{\sqrt{4}}(0{,}03125)$$
$$N = 5$$

Suele presumirse que el matemático Alberto Manuel Reynaud, encontró una expresión en la que se puede calcular cualquier número natural con solo tres cuatros, lo cual se obtiene quitando un 4 del radicando y suprimiendo una raíz cuadrada de la fórmula anterior; por ejemplo para $N = 4$, se tendría la siguiente expresión:

$$N = -\log_{\sqrt{4}}\left(\log_{\sqrt{4}}\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}}\right)\right)$$

Nótese que se ha eliminado un 4 del radicando, tal como se había descrito anteriormente, además el número de raíces negras (raíces entre las raíces naranja y azul) ya no es igual a $N$ sino a $N - 1$. Resolviendo:

$$N = -\log_{\sqrt{4}}\left(\log_{\sqrt{4}}(1{,}04427378)\right)$$

$$N = -\log_{\sqrt{4}}(0{,}0625)$$

$$N = 4$$

### 3.6.Kakuro (かくろ)

El Kakuro (figura 28) es un puzle que consiste en una cuadrícula con casillas negras y blancas. Las casillas blancas deben contener un número natural del 1 al 9, tal que al sumarlos verticalmente u horizontalmente dé como resultado el número que se encuentra en las casillas negras, ya sea en la parte superior o a la izquierda respectivamente. Además no puede haber números iguales en casillas consecutivas.

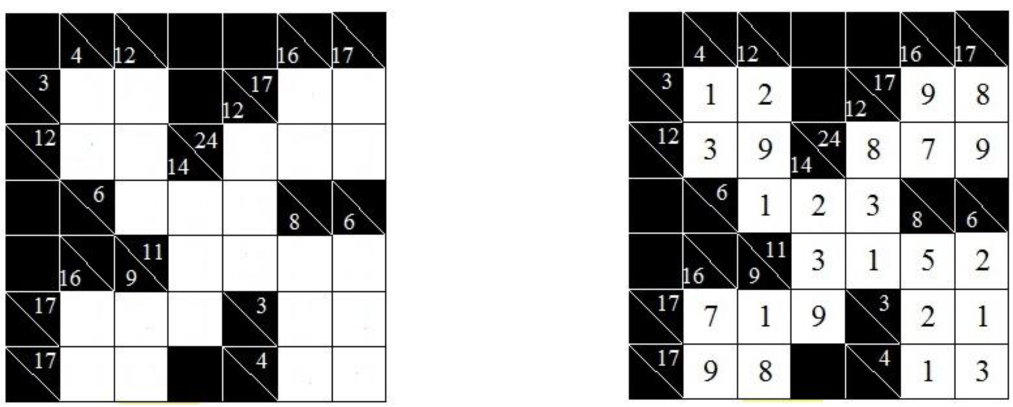


*Figura 28.*Kakuro 7x7

En este puzle, existen bloques (casillas de una misma suma) mágicos, es decir que poseen una característica especial, la cual depende de la cantidad de casillas que contenga un bloque y del resultado que se esté pidiendo en la suma. A continuación se presenta algunas formas para llenar bloques:

Tabla 1. Bloques Mágicos del Kakuro

| Suma | Casillas | Sumandos |
|---|---|---|
| **3** | 2 | 1 + 2 |
| **4** | 2 | 1 + 3 |
| **16** | 2 | 7 + 9 |
| **17** | 2 | 8 + 9 |
| **6** | 3 | 1 + 2 + 3 |
| **7** | 3 | 1 + 2 + 4 |
| **23** | 3 | 6 + 8 + 9 |
| **24** | 3 | 7 + 8 + 9 |
| **10** | 4 | 1 + 2 + 3 + 4 |
| **11** | 4 | 1 + 2 + 3 + 5 |
| **29** | 4 | 5 + 7 + 8 + 9 |
| **30** | 4 | 6 + 7 + 8 + 9 |
| **15** | 5 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 |
| **16** | 5 | 1 + 2 + 3 + 4 + 6 |
| **34** | 5 | 4 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **35** | 5 | 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **21** | 6 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 |

| Suma | Casillas | Sumandos |
|---|---|---|
| **22** | 6 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 |
| **38** | 6 | 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **39** | 6 | 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **28** | 7 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 |
| **29** | 7 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 |
| **41** | 7 | 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **42** | 7 | 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **36** | 8 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 |
| **37** | 8 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 |
| **38** | 8 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 |
| **39** | 8 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 |
| **40** | 8 | 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **41** | 8 | 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **42** | 8 | 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **43** | 8 | 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **44** | 8 | 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |
| **45** | 9 | 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 |

El Kakuro, inicialmente llamado *sumas cruzadas* es de origen estadounidense. Según la introducción del libro *Will Shortz Presents Easy Kakuro: 100 Addictive Logic Puzles* (citado por, "Conceptis Puzzles", 2015), data desde 1950 con una publicación en la edición de abril/mayo de *Puzles de crucigrama Oficiales* por Dell Publishing Company, siendo uno de los puzles lógicos en cuadrícula más antiguo. A mediados de la década de 1960, por medio de Dell se realiza una publicación general en todas las revistas de puzles.

En 1980, este puzle es llevado a Japón gracias a Maki Kaji, presidente de Puzles Nikoli, dándole el nombre de *Kasan Kurosu*, haciendo alusión a las palabras "adición" y "cruz"; seis años más tarde, en 1986, puzles Nikoli cambia el nombre a Kakuro, una expresión abreviada usada en este país. Hoy en día, este puzle es publicado en más de 100 revistas y periódicos en todo Japón, obteniendo el segundo lugar en el ranking de los puzles, seguido del Sudoku, aunque cabe resaltar que durante los años de 1986 a 1992 el Kakuro ocupó el primer lugar.

### 3.7. Hashiwokakero[18] (はしをかけろ)

Este puzle (figura 29) es de forma rectangular, posee en su interior algunas islas (círculos) con un determinado número natural; consiste en conectar estas islas por medio de puentes, donde la cantidad de puentes que posee cada isla depende del número que esta posea. Las reglas son:

- Los puentes solo van en sentido vertical u horizontal.
- Los puentes no se pueden cruzar entre sí.
- Dos islas no se pueden conectar por más de dos puentes.
- Al terminar de unir las islas, se debe pasar de una isla a otra por medio de los puentes.

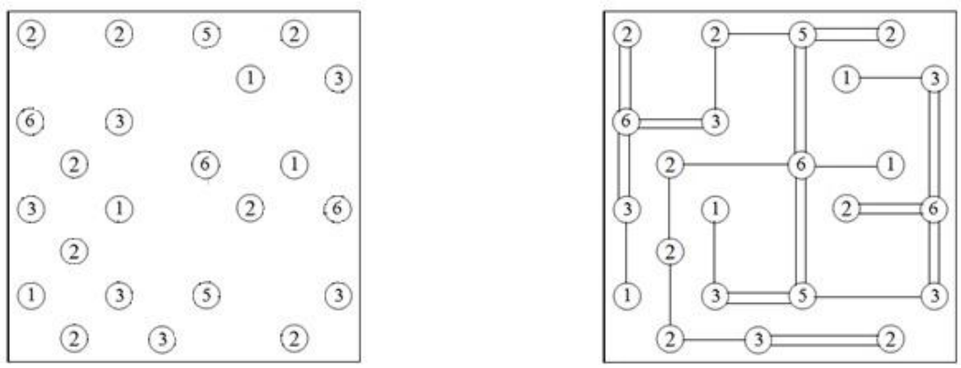


*Figura 29.* Hashiwokakero

El Hashiwokakero, también conocido como Bridges para países de habla inglesa, *Ai-ka-ai* para países como Francia, Dinamarca, Países Bajos y Bélgica, y simplemente *Hashi* (はし) en Japón. Este puzle fue publicado en la edición 31 de *Puzle Comunication Nikoli* en 1990, aunque se presume que Nikoli lo publicó con anterioridad en su número 28 en diciembre de 1989 ("Conceptis Puzzles", 2015).

### 3.8. Los cocos y el mono

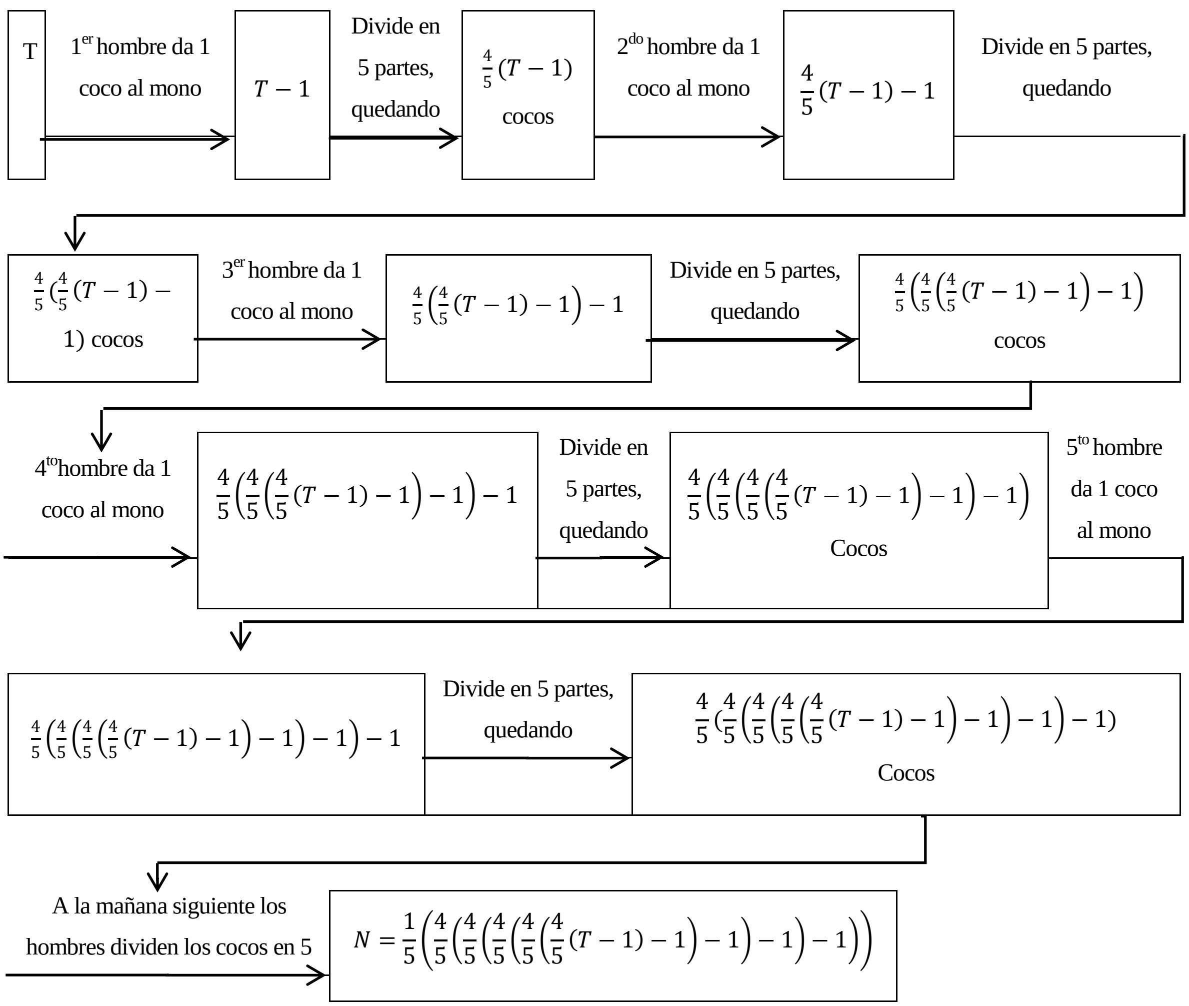
El enunciado del problema de los cocos y el mono dice así:

> Cinco hombres y un mono naufragaron en una isla desierta. Los hombres pasan el primer día recogiendo cocos para la comida. En la noche un primer hombre despierta desconfiado y divide la cantidad de cocos en cinco partes iguales, tomando la suya, y

[18] Puentes

regalando un coco sobrante al mono. Al poco tiempo, un segundo hombre despierta y decide dividir los cocos en cinco montones, dando al mono un coco sobrante. Así sucesivamente, los otros tres hombres hicieron lo mismo, obteniendo siempre un coco sobrante, el cual era para el mono. A la mañana siguiente, los cinco náufragos decidieron tomar su respectiva parte de los cocos sin tener sobrantes. ¿Cuál es la cantidad mínima de cocos que había inicialmente recolectados?

Existen varias soluciones para este problema como se verá más adelante; por ahora se dará una muestra de una solución que requiere operaciones básicas, y ensayo y error, esta es: El enunciado de este problema describe una determinada secuencia, tomando a $T$ como el total de cocos y a $N$ como el número de cocos con la que quedó cada hombre en el reparto de la mañana, se tiene que:



Para encontrar quien es *T*, se puede invertir el anterior proceso, es decir:

$$T = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((5N)\frac{5}{4}\right)+1\right)\frac{5}{4}\right)+1\right)\frac{5}{4}\right)+1\right)\frac{5}{4}\right)+1\right)\frac{5}{4}\right)+1$$

Ahora, a partir del ensayo y error se dan valores enteros positivos a *N*, donde el número positivo más pequeño que cumple con las condiciones es $N = 204$, siendo $T = 3121$. Pero este método puede llegar a ser algo tedioso.

Gardner (1987) en su obra titulada *The seconds cientific american book of Mathematic Puzles & Diversions*, proporciona una solución en términos generales, cuando en el reparto de la mañana no hay cocos para el mono; esta es:

$$\text{Número de cocos} = (1 + nk)n^n - (n - 1) \rightarrow \quad \text{Para } n \text{ impar}$$
$$\text{Número de cocos} = (n - 1 + nk)n^n - (n - 1) \rightarrow \quad \text{Para } n \text{ par}$$

Donde *n* es la cantidad de hombres y *k* hace el papel de parámetro; en este caso es igual a cero.

$$\text{Número de cocos} = 5^5 - (5 - 1)$$
$$\text{Número de cocos} = 3121$$

Según Gardner (1987), Ben Ames Williams publicó este acertijo titulado *Cocos* en la revista *The Saturday Evening*, el 9 de octubre de 1926. Cabe resaltar que Williams no es el autor legítimo de este puzle[19], pero fue quien lo modificó para hacerlo más confuso al lector, tal como se describió anteriormente. Además Williams olvidó publicar la respuesta de la historia, conllevando en la primera semana de publicación que recibiera más de dos mil cartas con la posible solución.

[19] En la versión antigua, cuando se hace la división de cocos a la mañana siguiente, los náufragos obtienen un coco sobrante; en la versión de Williams no hay sobrantes.

A lo largo de la historia, este enunciado (versión antigua) ha obtenido diversas soluciones, que se presentan enseguida.

### 3.8.1. Ecuaciones Diofánticas

Ante todo, este problema es catalogado como un problema diofántico por el tipo de ecuaciones que se plantean en primera instancia para su solución. En la versión antigua, se plantean las siguientes seis ecuaciones, donde $N$ es la cantidad total de cocos recolectados, y $F$, es la cantidad de cocos que le corresponde a cada hombre al hacer la repartición en la mañana:

$$N = 5A + 1$$
$$4A = 5B + 1$$
$$4B = 5C + 1$$
$$4C = 5D + 1$$
$$4D = 5E + 1$$
$$4E = 5F + 1$$

De estas ecuaciones, por medio de métodos algebraicos se obtiene la ecuación diofántica con dos incógnitas:

$$1024N = 15625F + 11529$$
$$N = \frac{(1024 \times 15F + 265F) + (1024 \times 11 + 265)}{1024}$$
$$N = 15F + 11 + \frac{265F + 265}{1024}$$

La anterior ecuación se vuelve algo engorrosa para solucionar, ya sea por medio del ensayo y error, o bien, por fracciones continuas; sin embargo con esta ecuación se llego a que $N = 15621$ cocos.

### 3.8.2. Cocos Negativos

Esta respuesta suele atribuirse al físico P. A. M. Dirac, profesor de la Universidad de Cambridge, pero este a su vez dice que tomó dicha solución de J. H. C. Whitehead, profesor de Matemáticas de la Universidad de Oxford. A este último, Gardner preguntó sobre dicha solución, Whitehead responde que la tomó de alguien más; dejando Gardner este asunto a un lado (Gardner, 1987).

Lo que es cierto, es que el primero que haya pensado en *cocos negativos,* debió estar razonando de la siguiente manera:
Se sabe que la cantidad original de cocos fue repartida seis veces, cada una de estas en cinco cantidades iguales de cocos, es decir $5^6$ o $15625$. Por lo que es cierto afirmar que si se obtiene cualquier solución *N*, entonces $N \pm 5^6$ también lo será.
Ahora, realizando un poco de ensayo y error, se observa que una respuesta negativa puede ser $-4$; esto es porque el primer hombre tomo los $-4$ cocos y le dio 1 al mono, quedándole $-5$, procediendo a dividir esta cantidad en 5 partes iguales y a tomar la que le corresponde, quedando $-4$ cocos, que es la cantidad inicial de cocos; y así sucesivamente con los otros cinco repartos.

Para obtener una solución en términos de números enteros positivos, cabe emplear la afirmación anteriormente realizada, puesto que se sabe que $-4$ es una solución, por lo cual $-4+5^6$ lo será, es decir 15621.

### 3.8.3. Cocos azules

Cocos azules es una solución alternativa a la de cocos negativos. Fue publicada por el profesor retirado Norman Anning de la Universidad de Michigan, en el Instituto de Ciencias y Matemáticas en 1912 (p. 520).

Esta solución consiste en pintar cuatro cocos de azul y separarlos de la cantidad original de cocos. Como se vio anteriormente la cantidad mínima de cocos de la que se puede extraer una quinta parte y repetir el mismo proceso cinco veces es $5^6$. Para el primer hombre, se retiran los cuatro cocos azules de $5^6$ y se divide en cinco, obteniendo $5^5-1$ y un resto de 1, el cual es el coco que se da al mono; luego se regresa los cuatros cocos azules quedando $4 \times 5^5$ cocos, número que es divisible por 5. Para el segundo hombre, se retira nuevamente los cuatro cocos azules y se divide en cinco, obteniendo $4 \times 5^4 - 1$, y un resto de 1, coco que se le da al mono. Así sucesivamente se realizan los siguientes cuatro repartos.

### 3.9. Nonograma

Existen dos clases de Nonogramas, el Nonograma a blanco y negro, y el Nonograma colorido, cada uno puede poseer un tamaño $N \times M$.

El Nonograma a blanco y negro (figura30), es una cuadricula de $N \times M$ la cual tiene números al lado izquierdo y parte superior, que hacen referencia a los bloques que se deben sombrear (color negro) en las filas y columnas respectivamente, siendo ubicados de acuerdo al orden de los números exteriores. Cuando hay más de dos números especificados en una misma fila o columna, las casillas sombreadas deben estar separadas por lo menos por una casilla en blanco.

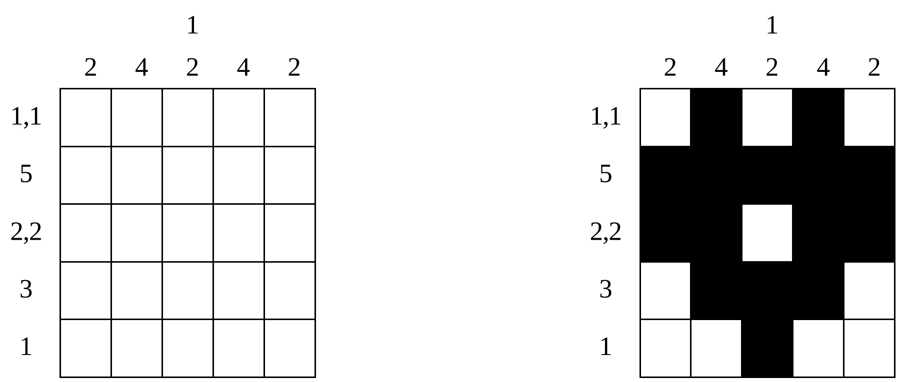



*Figura 30.* Nonograma a blanco y negro

Los Nonogramas coloridos (figura31) siguen las mismas reglas del Nonograma a blanco y negro, teniendo en cuenta que los bloques del mismo color deben ir separados por lo menos por una celda blanca, y los bloques de diferente color pueden o no estar separados por celdas blancas. El color de cada bloque lo define el color con el que es dado cada número.

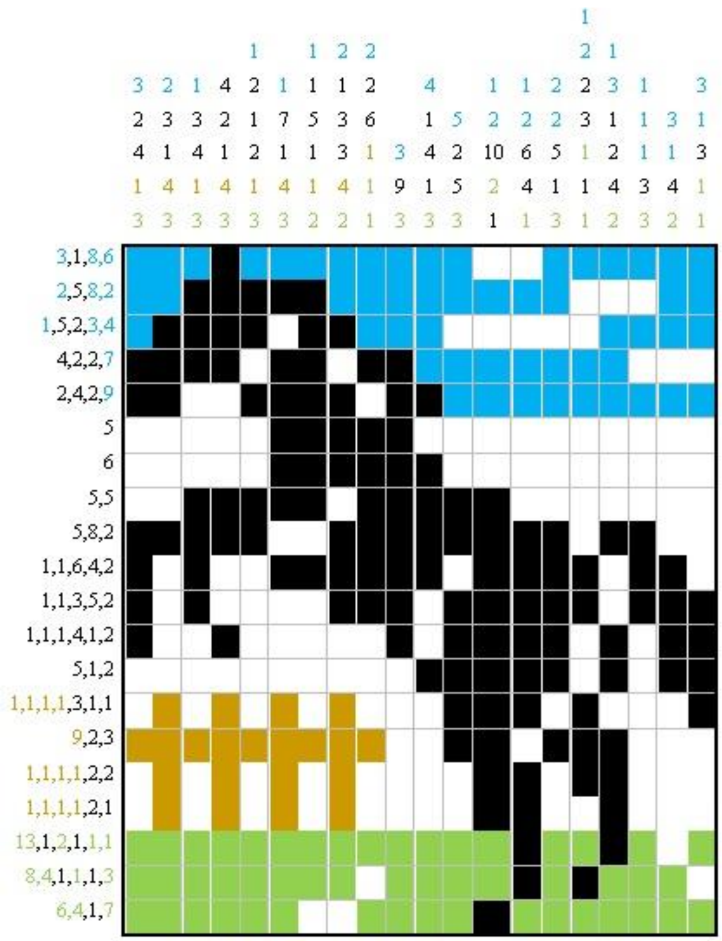



*Figura 31*. Nonograma colorido

El diseñador gráfico japonés Non Ishida, ganó una competencia en Tokio con el diseño de imágenes por medio de cuadrículas empleando diversas luces (activas y desactivadas) de rascacielos, en 1987. Para este mismo año, el profesional japonés de puzles Tetsuya Nishio, inventaba el mismo puzle, sin tener ningún conocimiento del trabajo realizado por Ishida.

Al siguiente año, 1988, Non Ishida publica tres ejemplos de este puzle, bajo el nombre de *Window Art Puzles*, el cual más adelante Nishio cambió por el nombre de *Oekaki Logic*, que significa *dibujo lógico.* En 1990, James Dalgety en el Reino Unido, nombró a este puzle como nonograma, después que Ishida y el periódico *The Sunday Telegraph* iniciaran su publicación semanalmente (Conceptis Puzzles, 2012, citado por Oliveira, 2013).

El Nonograma se expandió rápidamente por el mundo en países como Estados Unidos, Suecia, África del sur, Israel, entre otros; después que Ishida publicara el primer libro dedicado a este puzle en Japón en 1993, y al poco tiempo *Sunday Telegraph* publicó otro libro titulado *The book of nonogramas* en Reino Unido.

En 1998, *The Sunday Telegraph*, lanza una competencia para escoger un nombre más propicio para el Nonograma, dicho nombre ganador fue *Griddler*, escogido por los lectores del periódico. En los últimos años, la popularidad del tipo de estos puzles ha crecido significativamente, al punto que los puzles japoneses tengan páginas web y revistas que se dedique a la publicación de solo estos.

# CAPÍTULO IV
# CLASIFICACIÓN

En este capítulo se encuentra una selección de 24 puzles de lápiz y papel, a partir de los cuales se dará desarrollo a la segunda y tercera mirada, denominadas clasificación y temas matemáticos que potencia respectivamente. Inicialmente para la segunda mirada (clasificación), se presentará un cuadro con los puzles clasificados de acuerdo con las categorías estipuladas por algunos autores, las cuales se hicieron mención en el capítulo 2. En la tercera mirada (temas matemáticos que potencia), se categorizan estos puzles dependiendo del tema matemático que potencian, además de especificar qué estándar básico se puede abordar por medio de cada puzle; esta clasificación es producto del estudio e investigación realizada por las autoras para la elaboración de este trabajo.

## 4.1. Importancia de los puzles en la clase de Matemáticas.

Las Matemáticas, tal como se ha descrito anteriormente en este trabajo, traen consigo una parte lúdica, lo cual ha permitido obtener grandes invenciones de esta ciencia. En este trabajo hay un interés por reconocer la importancia de los puzles en el aula de clase, particularmente aquellos que hacen empleo de la Aritmética a través del uso de lápiz y papel. Para esto, en concordancia con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), en toda actividad matemática se debe tener en cuenta tres contextos, estos son: *Contexto de aula,* el cual está compuesto con paredes, ventadas, pupitres, normas de clase y la situación problema diseñada por el docente encargado del aula para abarcar algún tema matemático; *Contexto institucional,* este hace referencia a las instalaciones del colegio, a la comunidad, al PEI, etc.; y *Contexto sociocultural,* conformado por la comunidad, local, nacional e internacional.

De acuerdo con lo anterior, se ha querido dar muestra que los puzles aritméticos de lápiz y papel hacen parte del *contexto de aula*, siendo la situación problema de este, puesto que deben ser llevados con objetivos específicos y una metodología apropiada, dado que los estudiantes que pertenecen a un mismo curso poseen sus respectivas características actitudinales y académicas; además los puzles tienen buenos aportes en la parte emocional y afectiva del estudiante, tal como se específica en la figura 32 (Grupo Alquerque, 2015).

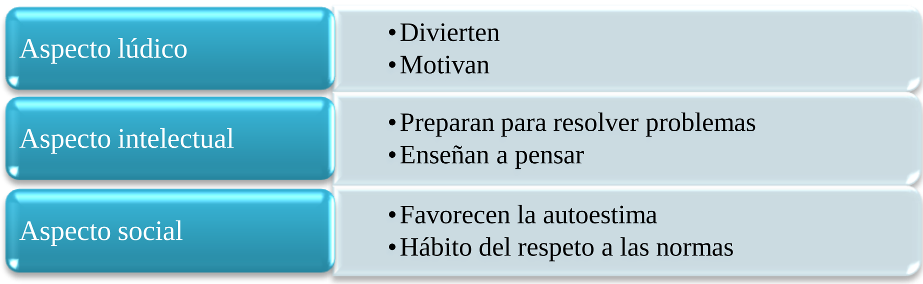



*Figura 32*. Aspectos del puzle en el aula

Los puzles también abarcan un contexto más amplio que el anteriormente descrito, este es la cultura (contexto sociocultural), puesto que en esta el puzle habita desde tiempos inmemorables dado a la estrecha relación que posee con la humanidad, tal como se observó en el capítulo de historia con los puzles allí referidos.

Por otro lado, se ha considerado que los puzles aritméticos, como parte del contexto de aula, son buena estrategia en el proceso de aprendizaje, puesto que están bajo un objetivo claro de clase, en este caso, potenciar el pensamiento numérico y de sistemas numéricos al cumplirse algunos de los estándares básicos en competencias en Matemática de esta área, sin dejar a un lado el pensamiento lógico. Adicionalmente dicho contexto promueve el uso de algunos procesos generales de la actividad matemática, como ayuda para el proceso de aprendizaje, obteniendo todos estos elementos relacionados entre sí como se observa en la figura 33.

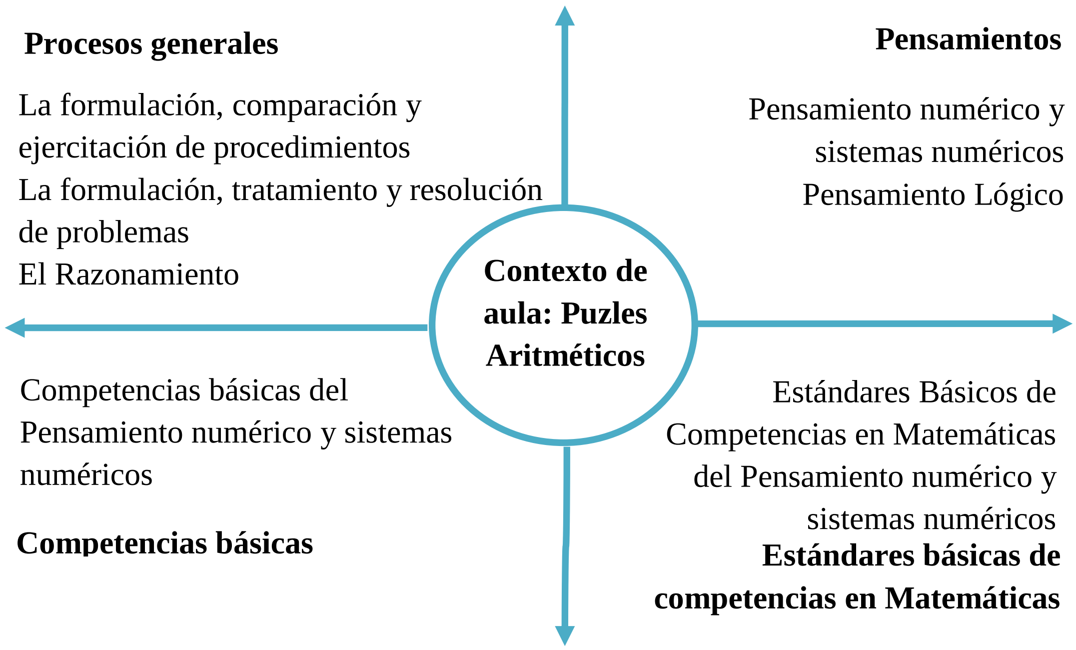



*Figura 33*. Elementos en el contexto de aula

De estos elementos, se sigue por describir las competencias básicas y los procesos generales, teniendo en cuenta que la descripción de los pensamientos y los estándares básicos se hará más adelante en este capítulo, específicamente en la clasificación de los puzles aritméticos por temas.

**Competencias básicas**

Los Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) muestra una noción de competencia, siendo esta el empleo de conceptos, proposiciones y estructuras matemáticas como herramienta eficaz, donde se ponen en práctica determinados tipos de pensamiento lógico y pensamiento matemático dentro y fuera de la institución educativa.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se presenta una noción más amplia de Competencia como:

> Conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras las cuales se relacionan de manera apropiada

> para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores (p. 49).

Por tanto, de acuerdo con lo anterior, las competencias en Matemáticas no se logran por generación espontánea, sino que requieren de contextos de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas las cuales sean significativas para el estudiante y que posibiliten avanzar a niveles más y más complejos de competencia.

**Procesos Generales**

Esta noción ampliada de competencia que se presenta en los Estándares está relacionada con el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo. Por tanto, implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender, lo cual permite precisar algunos procesos generales presentes en la actividad matemática, tales procesos son:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las Matemáticas mismas.
- Utilizar diferentes representaciones o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas.
- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas.
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

En los procesos listados anteriormente se describen los cinco procesos generales contemplados en los Lineamientos (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; modelar, razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos de la educación matemática). Cabe resaltar que en el contexto de puzles aritméticos se hace énfasis en solo tres (figura33), los cuales se describen brevemente a continuación:

La formulación, tratamiento y resolución de problemas. Es un proceso que a partir de una buena selección de problemas por parte del docente se crea un contexto de aula; es decir al seleccionar los puzles aritméticos como situación problema para los estudiantes, estos últimos se ven inmersos en el contexto de los puzles, conllevando a que busquen estrategias para su solución, como también verifiquen e interpreten esos resultados razonablemente.

La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. Este proceso comprende la ejecución de algoritmos de forma segura y eficiente; para este caso varios de los puzles presentados requieren realizar algún tipo de algoritmo, es su mayoría enfatizan en operaciones aritméticas.

Por último, el razonamiento. Su desarrollo conlleva a saber dar explicaciones de un proceso realizado, además de argumentar o rechazar diversas conclusiones. Con los puzles aritméticos este proceso se reconoce a medida que un estudiante prueba diferentes estrategias, y es capaz de dar argumentos matemáticos y lógicos para aceptarlas como válidas o rechazarlas definitivamente al llegar a resultados que no concuerdan con las reglas estipuladas del puzle.

## 4.2. Cuadro de Clasificación General

En la tabla 2, se encuentran clasificados todos los puzles que se trabajan en este capítulo, incluyendo los 11 puzles que se mencionaron en el capítulo 3. Esta clasificación se basa en diversos autores como se mencionó en el Marco de Referencia, en la que se proponen las siguientes categorías para los puzles:

El Grupo Alquerque(2002)propone las siguientes categorías:

- **Ordenación:** puzles en los que hay que colocar los números en determinadas posiciones según unas reglas estipuladas.
- **Cálculo:** puzles que pueden ser simples empleando sumas hasta llegar a operaciones más complejas.

Los autores Chamoso, Durán, García, Lalanda y Rodríguez (2004) proponen las siguientes categorías:

- **Conocimiento:** puzles que utilizan en su desarrollo, uno o varios de los temas del currículo de Matemáticas.
- **Estrategia:** puzles en los cuales, para conseguir su objetivo el jugador debe elegir siempre una de las diversas posibilidades existentes.

Y para finalizar los autores Rupérez y García (2012) proponen la siguiente categoría:

- **Lógicos:** puzles que al resolverlos se pone en práctica la interpretación de instrucciones, la intuición, la memorización, la reflexión y el razonamiento, sin depender necesariamente de un conocimiento previo específico.

Para emplear esta clasificación en los 24 puzles aritméticos de lápiz y papel estudiados en este trabajo de grado, se procedió en primera medida a resolver cada uno de estos, de tal manera que se pudo identificar cada una de las características que se ponen en práctica y que se deben tener en cuenta para satisfacer las reglas que rigen a cada puzle y así poder resolverlo. A partir estas características identificadas y teniendo en cuenta la descripción de cada una de las categorías anteriormente listadas se presenta la siguiente tabla de clasificación, en la que se aclara que hay puzles que se conciben en dos categorías, dado a las particularidades de su solución:

*Tabla 2*. Cuadro de clasificación General

| CLASIFICACIÓN GENERAL DE LOS PUZZLES | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **#** | **Nombre** | **Conocimiento** | **Estrategia** | **Lógicos** | **Cálculo** | **Ordenación** |
| **1** | Siete números en la Y griega | | | X | | X |
| **2** | La rueda Numérica | X | | | X | |
| **3** | El triángulo que suma igual | X | | | X | |
| **4** | El cuadro de números | X | | | X | |
| **5** | Ocho números en línea | X | | | X | |
| **6** | Pares e impares en una suma | X | | | X | |
| **7** | La serpiente súmica | X | | | X | |
| **8** | El producto con nueve números | X | | | X | |
| **9** | Kenken (けんけん) | X | | X | X | |
| **10** | Cuadrados Mágicos | X | | | X | |
| **11** | Cuadrado Mágico de Potencias | X | | | X | |
| **12** | Damero de Potencias | X | | | X | |
| **13** | Enlosados Radicales | X | | | X | |
| **14** | Laberinto de Radicales | X | | | X | |
| **15** | Juego de Fichas | | X | X | | |
| **16** | Sudoku <,> | X | | X | X | |
| **17** | El problema de los Cuatro Cuatros | X | | | X | |
| **18** | Kakuro(かくろ) | X | | | X | X |
| **19** | Hashiwokakero -Puentes (はしをかけろ) | X | X | X | | |
| **20** | Los cocos y el mono | X | X | | X | |
| **21** | Nonograma | | | X | | |
| **22** | Circuito Numérico | | X | X | | |
| **23** | Sujico (すじこ) | X | | | X | |
| **24** | Gallinas y conejos | X | X | | X | |

### 4.3. Clasificación de acuerdo con el tema matemático que potencia

Los puzles nombrados en este capítulo están enmarcados bajo dos tipos de pensamiento, estos son el pensamiento matemático y el pensamiento lógico, teniendo en cuenta que "[…] el pensamiento lógico apoya y perfecciona el pensamiento matemático" (MEN, 2006); por esta misma razón se ha decidido incluir algunos puzles netamente lógicos, ya que estos ayudan y son necesarios para que el estudiante sea capaz de generar diversas estrategias para abarcar una determinada situación bajo unas premisas dadas. El resto de puzles están enmarcados en el pensamiento matemático, los cuales por ser puzles aritméticos y teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), potencian específicamente el pensamiento numérico y sistemas numéricos.

**Pensamiento numérico**

Este pensamiento hace referencia a la Aritmética desde el sentido numérico y el sentido operacional, estos entendidos como la comprensión profunda del sistema de numeración decimal y sus características para desarrollar estrategias en la resolución de problemas, desde las habilidades y destrezas numéricas entendidas, como la comprensión de su modelación, sus propiedades y sus relaciones, y desde las comparaciones, entre otros; es decir el pensamiento numérico es la comprensión que una persona posee sobre el número y las operaciones, junto con la habilidad que tiene para usar de forma flexible esta comprensión, y así realizar juicios matemáticos, además de desarrollar estrategias útiles para manejar números y operaciones (Mcintosh, 1992, citado por MEN, 1998). De esta manera, el ser humano va adquiriendo de forma gradual el pensamiento numérico a medida que hace empleo del número y da significado a este en diversos ambientes.

**Estándares básicos**

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas deben entenderse como procesos de desarrollo de competencias que progresan gradual e integralmente, con el fin de ir superando niveles de complejidad cada vez mayores en el tratamiento de las competencias matemáticas. Los estándares presentados por el Ministerio de Educación Nacional (2006) poseen las siguientes características:

- Los estándares seleccionan los niveles de desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático
- Cada estándar tiene énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática (descritos anteriormente en este capítulo).

- Los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados, conocidos como ciclos, los cuales dan mayor flexibilidad a la distribución de actividades a lo largo del proceso educativo y apoyan al docente en la organización de sus clases para lograr así un aprendizaje significativo.

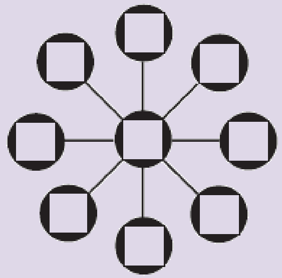
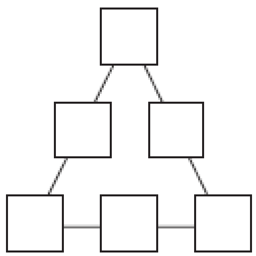
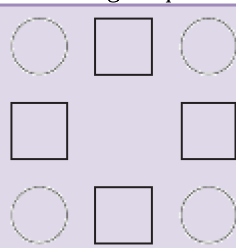
Con base en los pensamientos y los estándares básicos, a continuación se presentan los puzles agrupados en tres categorías (Operaciones Básicas en los Números Naturales, Radicación y Potenciación de los números Reales, y Puzles Lógicos) de acuerdo al tema matemático que potencian, los cuales fueron identificados a partir de la investigación exhaustiva realizada en diferentes revistas y textos especializados, además del análisis individual y la resolución de cada puzle, atendiendo a sus características de solución..

### 4.3.1. Cuatro operaciones básicas en los Números Naturales

Los puzles que se describen a continuación (tabla 3), se calcifican en esta categoría ya que durante el proceso de resolución y análisis llevado a cabo por las autoras se percataron que estos pueden desarrollar y enriquecer en el estudiante una o más de las cuatro operaciones básicas en el conjunto de los números naturales, y además realizando un paralelo con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas se puede sugerir que estos puzles se empleen en cierto grado de escolaridad y puede que estos potencien los siguientes estándares correspondientes a los ciclos 1, 2 y 3, y que por su importancia en la actividad matemática no se deben perder en el ciclo 4 y 5:

- Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.

*Tabla 3*.Cuadro de clasificaciones: Cuatro operaciones básicas en los Números Naturales[20]

| Nombre | Gráfica | Descripción | Observación |
|---|---|---|---|
| **La rueda numérica (Alquerque, 2002)** |  *Figura 34*. Rueda numérica | Sitúa los números del 1 al 9 en los cuadros del tablero, de forma que todas las líneas de tres números sumen 15. | Este puzle se puede trabajar con niños de primaria, es decir ciclos 1 y 2, preferiblemente en grados de 2° a 4°. |
| **El triángulo que suma igual (Alquerque, 2002)** |  *Figura 35*. Triángulo que suma igual | Distribuye las cifras del 1 al 6 en el tablero, de forma que la suma de cada lado del triángulo sea la misma. | Este puzle se puede trabajar con niños de primaria, es decir ciclos 1 y 2, preferiblemente en grados de 2° a 4°. |
| **El cuadro de números (Alquerque, 2002)** |  *Figura 36*. El cuadro de números | Coloca los ocho primeros números en el tablero, de forma que cada número que esté en un cuadrado, sea la diferencia de los que están en los círculos a sus lados. | Este puzle se puede trabajar con niños de primaria, es decir ciclos 1 y 2, preferiblemente en grados 2° y3°. |

[20]Anexo 4: Respuestas Cuatro operaciones Básicas en los números Naturales

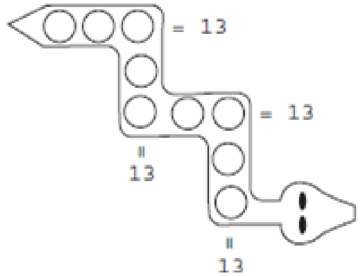
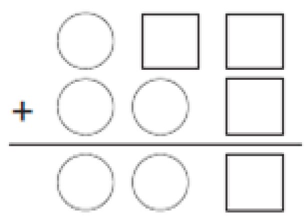
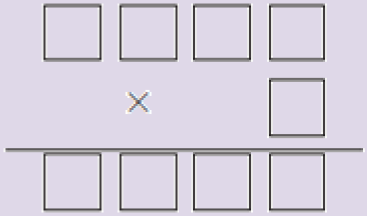
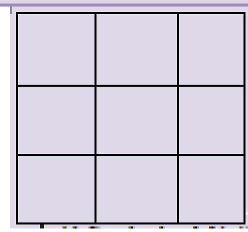
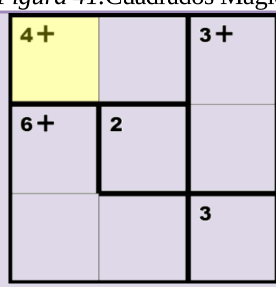
<table>
<tr><th>Nombre</th><th>Gráfica</th><th>Descripción</th><th>Observación</th></tr>
<tr><td>La serpiente súmica (Alquerque 2002)</td><td>

Figura 37. Serpiente Súmica</td><td>Sitúa sobre los círculos de la serpiente los números del 1 al 9, de manera que cada línea de tres números, sume 13.</td><td>Este puzle se puede trabajar con niños de primaria, es decir ciclos 1 y 2, preferiblemente en grados de 2° a 4°.</td></tr>
<tr><td>Ocho números en línea (Alquerque 2002)</td><td>
Figura 38. Ocho números en línea</td><td>Coloca las cifras del 1 al 8 en los cuadros de la siguiente línea, de forma que la diferencia, en un orden o en otro, entre dos números vecinos, no sea nunca menor que 4.</td><td>Este puzle se puede trabajar con niños de primaria, es decir ciclos 1 y 2, preferiblemente en grados de 3° a 5°.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Como se observa este puzle posee una condición adicional, se trata de la relación “menor que 4”, lo cual fomenta el siguiente estándar de los ciclos 1 y 2:<br>- Resuelvo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) y propiedades de los números naturales y sus operaciones.</td></tr>
<tr><td>Pares e impares en una suma (Alquerque 2002)</td><td>
Figura 39.Pares e impares en una suma</td><td>Con los números del 1 al 9 realiza la suma que aparece en el tablero, colocando los números pares en los cuadrados y los impares en los círculos.</td><td>Este puzle se puede trabajar con niños de primaria, es decir ciclos 1 y 2, preferiblemente en grados de 3° a 5°.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Este puzle fomenta otro estándar en los ciclos 1 y 2, a partir de identificar los números pares y los números impares:<br>- Resuelvo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades números (ser par, ser impar, etc.) de los números naturales y sus operaciones.</td></tr>
</table>

| Nombre | Gráfica | Descripción | Observación |
|---|---|---|---|
| **El producto con nueve números (Alquerque 2002)** | <br><br>*Figura 40.* El producto con nueve números | Coloca las cifras del 1 al 9 sobre el tablero, de forma que el producto resultante sea correcto. | Este puzle se puede trabajar con niños de primaria en el ciclo 2, es decir en los grados 4° y 5°. |
| En este puzle se potencia además otro estándar, ya que para su solución se debe tener en cuenta la relación “ser múltiplo” de un número, en este caso del multiplicador:<br>- Resuelvo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) y propiedades de los números naturales y sus operaciones. | | | |
| **Cuadros Mágicos (Comes & Comes 2009)** | <br>*Figura 41.*Cuadrados Mágicos | El objetivo es rellenar un cuadrado con números del 1 al 9 de tal manera que la suma de cada fila, columna y diagonal sea exactamente el mismo valor. | Este puzle se puede trabajar desde el segundo ciclo hasta el último ciclo, dado que tiene diferentes configuraciones de tamaño y tipos de construcción, como se observó en el capítulo 3. |
| **Kenken [3x3 Suma] (Rojas 2009)** | <br><br>*Figura 42.*Kenken [3 × 3,Suma] | El objetivo es rellenar la cuadrícula a fin de que cada fila y cada columna contengan los dígitos del 1 al 3, sin repetirse. Los números deben estar ubicados según la operación y el resultado presentados en cada sector. | Este puzle se puede trabajar desde el primer ciclo hasta el último ciclo, dado que tiene diferentes configuraciones de tamaño y de operaciones básicas. Para ver más variedades de Kenken ir a: http://www.kenkenpuzzle.com/play_now |

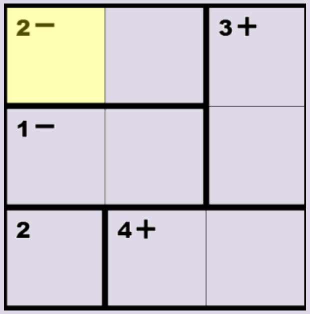



*Figura 43.* Kenken [3 × 3, Suma y Resta]

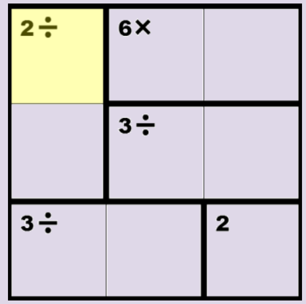



*Figura 44.* Kenken [3 × 3, Multiplicación y División]

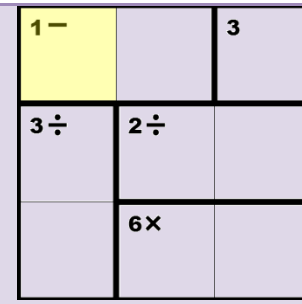



*Figura 45.* Kenken [3 × 3, Suma, Resta, Multiplicación y División]

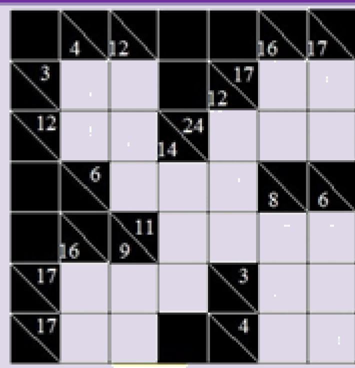
Este puzzle potencia la descomposición de números en sumandos y factores, lo cual se debe inculcar desde el ciclo 1, este es:

- Resuelvo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

| Nombre | Grafica | Descripción | Observación |
|---|---|---|---|
| **Los Cuatro Cuatros** | $2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$ | Consiste en escribir cualquier número natural dado, empleando exactamente cuatro cuatros, los cuales pueden ser operados mediante las las operaciones básicas matemáticas $(+, -, \times, \div)$ | Este puzle se puede trabajar desde el segundo ciclo, dado que puede adaptarse a cada nivel de escolaridad, dependiendo de las operaciones que se deseen potenciar y a la vez permitan la resolución del problema, puesto que las cuatro operaciones básicas no son las únicas a emplear, tal como se muestra a continuación: |
| $2 = \frac{4}{\sqrt[4]{4 \times 4}}$ | $2 = \frac{\sqrt{4^4}}{4 + 4}$ | $2 = \frac{4! - (4 \times 4)}{4}$ | Se presentan diversas formas de representar el número dos, mostrando los diferentes niveles que puede tener este puzle, empleando una mayor variedad de operaciones que se trabajan en diferentes grados. Adicionalmente con este problema, se puede influenciar en los estudiantes la jerarquización de las operaciones y el uso de paréntesis. |

Este puzle fomenta otro estándar en el segundo y en tercer ciclo:

- Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
- Resuelvo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.

| Nombre | Gráfica | Descripción | Observación |
|---|---|---|---|
| **Kakuro (かくろ)** | <br>*Figura 46*. Kakuro **7** × **7** | Consiste en una cuadrícula con casillas negras y blancas. Las casillas blancas deben contener un número natural del 1 al 9, tal que a sumarlos verticalmente u horizontalmente dé como resultado el número que se encuentra en las casillas negras, ya sea en la parte superior o a la izquierda respectivamente. Además no puede haber números iguales en casillas consecutivas. | Este puzle se puede trabajar desde el primer al último ciclo, dado que tiene diferentes configuraciones de tamaño, teniendo en cuenta que al colocar números cada vez mayores en las casillas negras, mayor será la dificultad de solución. |

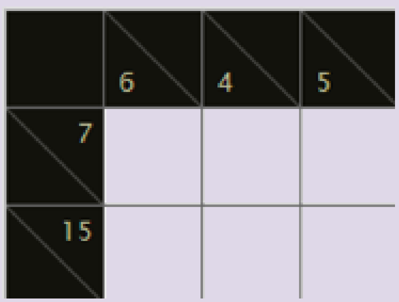



*Figura 47*. Kakuro 3 × 4

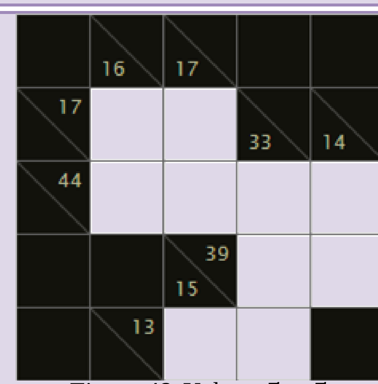
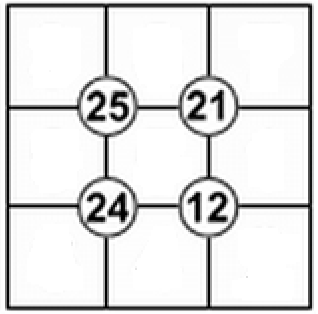



*Figura 48*. Kakuro **5** × **5**

Otro estándar a potenciar con el Kakuro, hace referencia a la descomposición de números por medio de sumandos, la cual es unarelación entre números:

- Resuelvo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

| Nombre | Gráfica | Descripción | Observación |
|---|---|---|---|
| **Sujiko (すじこ)** | <br>*Figura 49.*Sujico | En un arreglo de $3 \times 3$, en el cual se debe colocar los números del 1 al 9 sin repetir alguno, tal que al sumar los cuatro números correspondientes que rodean a un círculo dé como resultadoal sumar el número que está allí establecido. | Este puzzle se puede adecuar a diferentes ciclos de escolaridad, preferiblemente desde el ciclo 2, puesto que el nivel de dificultad puede variar de acuerdo a las pistas iniciales que se entreguen. A continuación vemos algunos puzzles con diversos niveles de dificultad: |

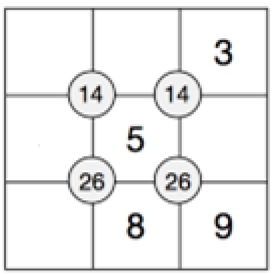


*Figura 50.* Sujiko con pista en la casilla del centro

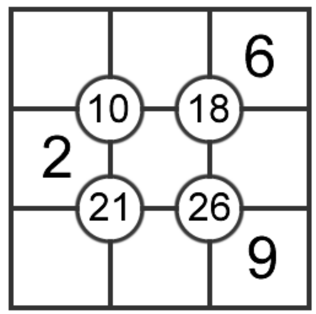


*Figura 51.* Sujiko sin pista en la casilla del centro

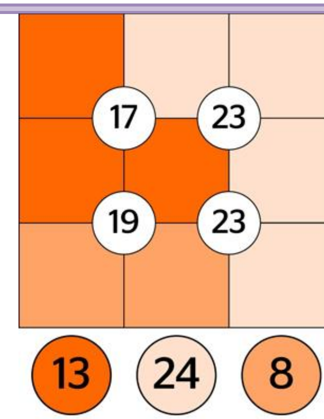


*Figura 52.*Sujiko sin pistas en el tablero, pero los números colocados en casillas del mismo color deben sumar lo indicado en la parte inferior.

Un estándar adicional a potenciar con el Sujiko, hace referencia a la descomposición de números por medio de sumandos, la cual es unarelación entre números:

- Resuelvo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

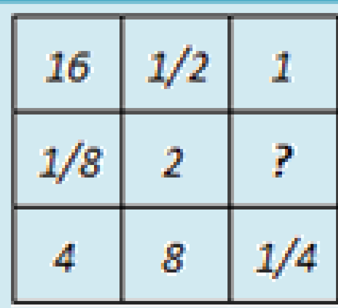
| Nombre | Descripción | Observación |
|---|---|---|
| **Los cocos y el mono** | Cinco hombres y un mono naufragaron en una isla desierta. Los hombres pasan el 1$^{er}$ día recogiendo cocos para la comida. En la noche un 1$^{er}$ hombre despierta desconfiado y divide la cantidad de cocos en 5 partes iguales, tomando la suya, y regalando un coco sobrante al mono. Al poco tiempo, un 2$^{do}$ hombre despierta y decide dividir los cocos en 5 montones, dando al mono un coco sobrante. Así sucesivamente, los otros tres hombres hicieron lo mismo, obteniendo siempre un coco sobrante, el cual era para el mono. A la mañana siguiente, los cinco náufragos decidieron tomar su respectiva parte de los cocos sin tener sobrantes.<br>¿Cuál es la cantidad mínima de cocos que había inicialmente recolectados? | Este puzle se puede trabajar desde el primer ciclo, preferiblemente desde tercero, puesto que puede adaptarse para trabajarse en primaria con 2 o 3 hombres y en grados superiores se puede trabajar con 4 o 5 hombres. |
| Este puzle potencia adicionalmente dos estándares relacionados con la teoría de números, estos son:<br>- Ciclo 3: Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.<br>- Ciclo 5: Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. | | |
| **Las gallinas y los conejos** | En una granja se crían gallinas y conejos. En total hay 50 cabezas y 134 patas ¿Cuántos animales hay de cada clase? | Este puzle se puede trabajar desde el primer ciclo, preferiblemente desde 3°, puesto que puede adaptarse el número de cabezas y patas de acuerdo al nivel de escolaridad. |
| Este puzle potencia adicionalmente dos estándares relacionados con la teoría de números, estos son:<br>- Ciclo 3: Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.<br>- Ciclo 5: Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. | | |

### 4.3.2. Potenciación y Radicación en los números Reales

Los puzles que se describen a continuación (tabla 4), desarrollan y enriquecen en el estudiante principalmente las operaciones de la Potenciación y Radicación y sus respectivas propiedades en el conjunto de los números Reales; se pueden aplicar en el aula a partir del cuarto ciclo, por esta razón los estándares que potencian este grupo de puzles son:

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación para representar situaciones matemáticas y para resolver problemas.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.

*Tabla 4.*Cuadro de clasificaciones: Potenciación y radicación en los números reales[21]

| Nombre | Gráfica | Descripción |
|---|---|---|
| **Cuadrado mágico de potencias (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)** | <br>*Figura 53.* Cuadrado Mágico de potencias | La idea es escribir las potencias de 2 que aparecen en el cuadrado como potencia y comprobar que el producto de las diagonales, filas y columnas da lugar a un mismo número. ¿Cuál es ese número? ¿Qué número debe ir en la interrogación para completar el cuadrado mágico multiplicativo? |

[21]Anexo 5: Respuestas potenciación y radicación en los números reales

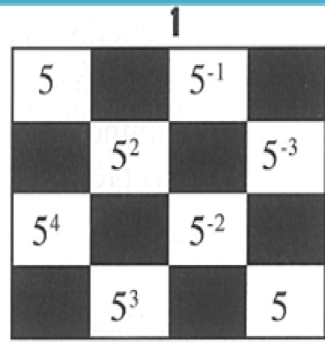
<table>
<tr><th>Nombre</th><th>Gráfica</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>Damero de Potencias (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)</td><td>

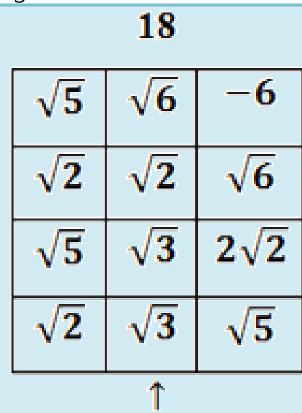
Figura 54. Damero de Potencias</td><td>Partiendo de cualquier casilla blanca de la fila inferior, buscar un camino, realizando el movimiento del alfil, sabiendo que moverse en diagonal hacia la izquierda (↖) divide y moverse en diagonal hacia la derecha (↗) multiplica, hasta salir por una de las casillas superiores con un resultado igual al indicado.</td></tr>
<tr><td>Enlosados radicales (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)</td><td>

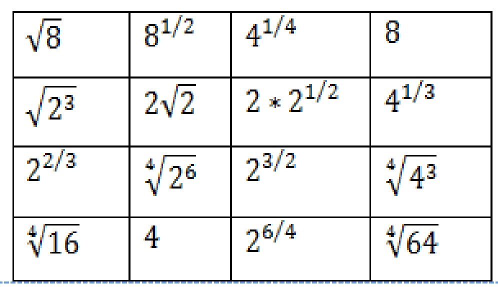
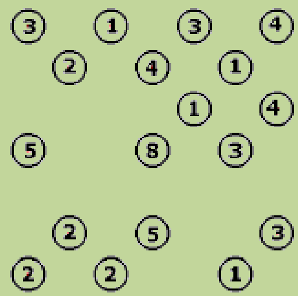
Figura 55. Enlosados Radicales</td><td>Partiendo de la casilla inferior marcada, y teniendo en cuenta que moverce hacia arriba (↑) suma,moverve hacia los lados (← y →) restan y moverse endiagonal (↖ y ↗) multiplican, la idea es salir por las casillas superiores con un resultado igual al indicado.</td></tr>
<tr><td>Laberinto de radicales (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)</td><td>

Figura 56. Laberinto de Radicales</td><td>Partiendo de la casilla superior izquierda, pasando a una casilla lateral, superior o inferior, sabiendo que los radicales de ambas casillas tienen que ser equivalentes, hasta salir por la casilla inferior derecha.</td></tr>
</table>

### 4.3.3. Lógicos

Los puzles que se describen a continuación poseen la característica de desarrollar y reforzar en el estudiante el pensamiento lógico, el cual, como se ha dicho anteriormente ayuda a potenciar el pensamiento numérico y sistemas numéricos, formando un importante lazo, pues “la lógica es la juventud de las Matemáticas y las Matemáticas la madurez de la lógica” (Rusell, citado por Paredes & Rebellón, 2011).

*Tabla 5.*Cuadro de clasificaciones: Lógicos[22]

| Nombre | Gráfica | Descripción | Aplicación en el aula |
|---|---|---|---|
| **Hashiwokakero (はしをかけろ) (Rojas 2009)** | <br>*Figura 57.* Hashiwokakero | Este puzle está formado por un rectángulo el cual posee en su interior algunas islas las cuales tienen un número natural; consiste en conectar las islas por medio de puentes, la cantidad de puentes que posee cada isla depende del número que esta posea. Los puentes no se pueden cursar ni tampoco ir en diagonal. | Este puzle puede adaptarse a varios niveles de escolaridad, preferiblemente desde 4°, dado que al igual que en puzles anteriores tiene diferentes configuraciones de tamaño lo cual conlleva a que a mayor tamaño, mayor dificultad en su resolución. |

22 Anexo 6: Respuestas Lógicos

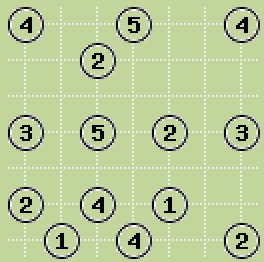


*Figura 58.* Hashiwokakero 7 × 7

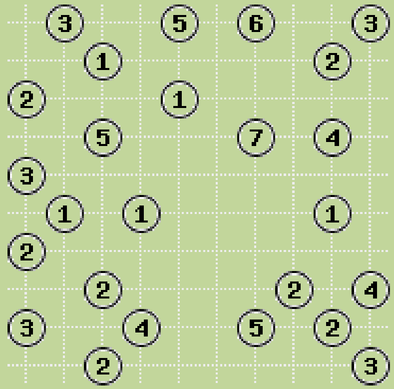


*Figura 59.* Hashiwokakero 10 × 10

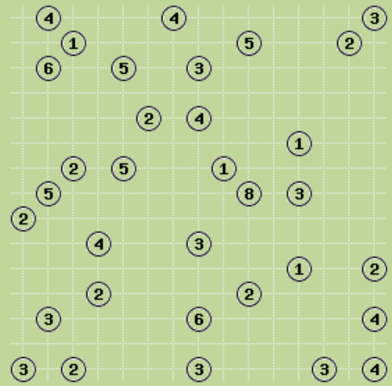


*Figura 60.* Hashiwokakero 15 × 15

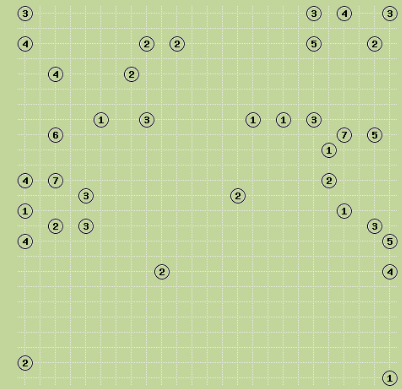
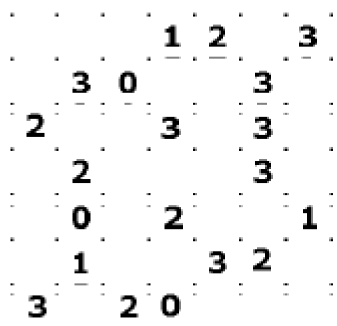


*Figura 61.* Hashiwokakero 25 × 25

Este puzzle aunque es de lógica, manifiesta una característica, la cual es el significado que posee el número de cada isla de acuerdo a su contexto, esto es el número como conteo; por esto potencia el siguiente estándar:

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).

| Nombre | Gráfica | Descripción | Aplicación en el aula |
|---|---|---|---|
| **Circuito Numérico (Rojas 2009)** |  *Figura 62.* Circuito numérico | El objetivo es unir puntos a través de líneas horizontales o verticales de modo tal que se forme un único circuito cerrado. Cada número indica la cantidad de líneas que lo deben rodear. Las casillas vacías pueden estar rodeadas por un número arbitrario de líneas, y las líneas no pueden cruzarse ni formar ramas separadas. | Este puzle se puede ubicar en todos los ciclos de escolaridad, preferiblemente desde 2°, puesto que se puede configurar el tamaño de la cuadrícula, donde a mayor tamaño mayor dificultad. |

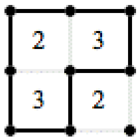


*Figura 63*. Circuito numérico 2×2

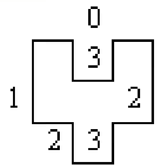


*Figura 64*. Circuito numérico 4×4

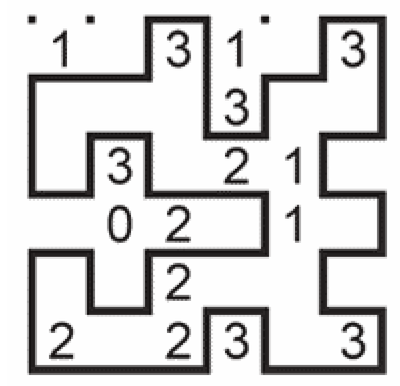


*Figura 65*. Circuito numérico 6×6

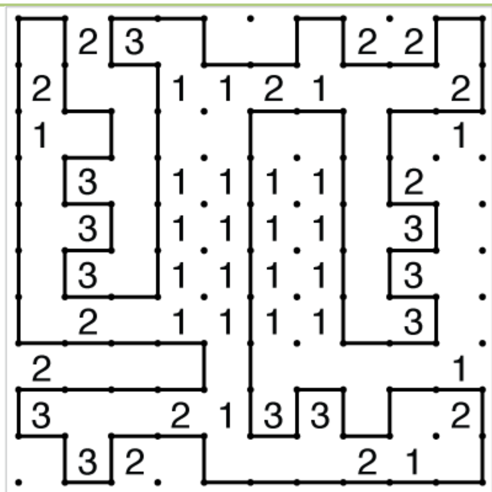
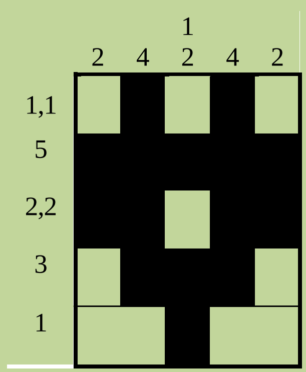


*Figura 66*. Circuito numérico10×10

Este puzzle aunque es de lógica, manifiesta una característica, la cual es el significado que posee el número de cada casilla de acuerdo a su contexto, esto es el número como conteo; por esto potencia el siguiente estándar:

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).

| Nombre | Gráfica | Descripción | Aplicación en el aula |
|---|---|---|---|
| **Nonograma a blanco y negro** |  *Figura 67*.Nonograma Blanco y negro | El nonograma a blanco y negro, tiene números al lado izquierdo y en la parte superior de la cuadrícula, los cuales hacen referencia a los bloques a colorear que van en las filas y columnas respectivamente; ubicados de acuerdo al orden de los números. Cuando hay más de dos números especificados en una misma fila o columna, las casillas rellenadas deben estar separadas por lo menos por una casilla blanca. | Este puzle al igual que los anteriores puede adaptarse a diferentes grados de escolaridad dependiendo de la configuración de tamaño que se emplee, ya que puede adaptarse desde un tamaño de 25 casillas (5 × 5). A mayor tamaño, mayor uso de números en una misma fila y una misma columna. |

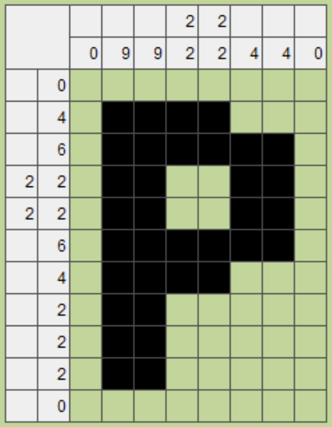


*Figura 68.*Nonograma Blanco y negro 11 × 8

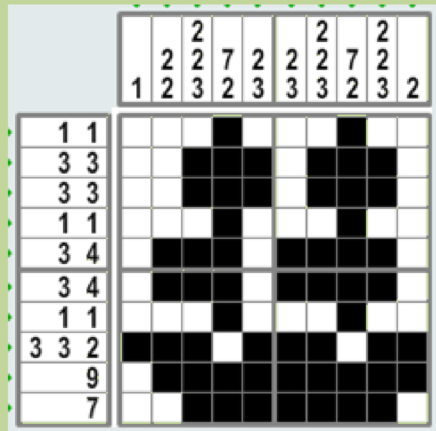


*Figura 69.*Nonograma Blanco y negro 10 × 10

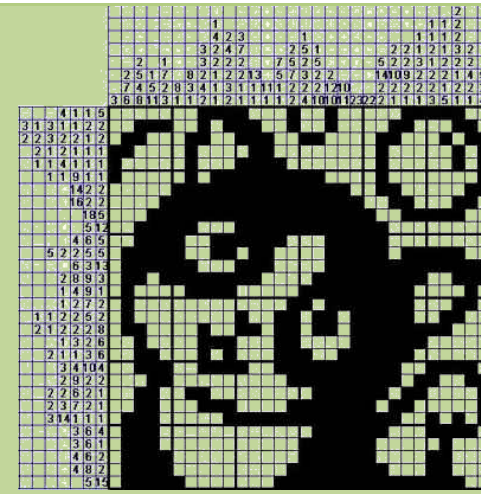
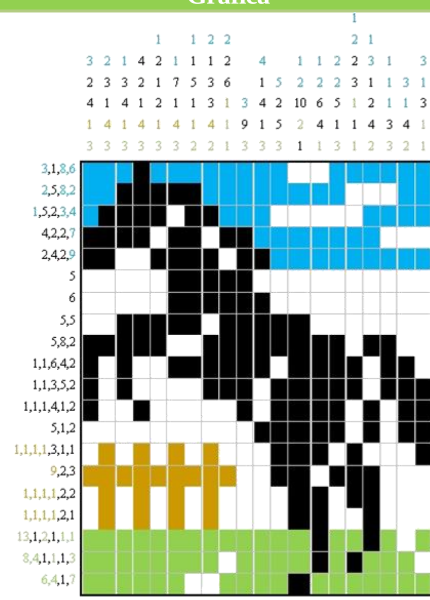
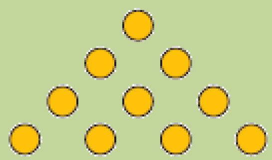
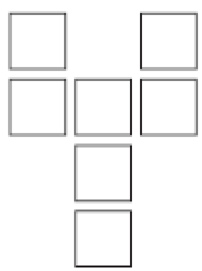


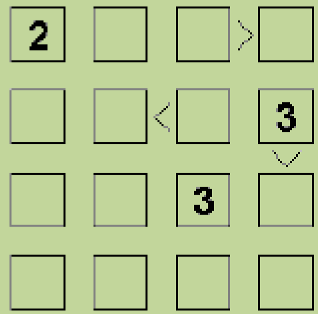
*Figura 70.*Nonograma Blanco y negro 30 × 30

| Nombre | Gráfica | Descripción | Aplicación en el aula |
|---|---|---|---|
| **Nonogramas coloridos** |  *Figura 71.* Nonograma Colorido | Los nonogramas coloridos siguen las mismas reglas del nonograma a blanco y negro, teniendo en cuenta que los bloques del mismo color deben ir separados por lo menos por una celda blanca, y los bloques de diferente color pueden o no estar separados por celdas blancas. El color de cada bloque a colorear lo define el color con el que es dado cada número. | Los nonogramas se pueden presentar con colores, los cuales se pueden adaptar en diferentes niveles de escolaridad, pero por tener esta nueva condición aumenta su dificultad, por lo cual se recomienda aplicar preferiblemente en secundaria. |

El nonograma adicional a la logica, manifiesta una característica, la cual es el significado que posee el número en cada fila y columna de acuerdo a su contexto, esto es el número como localización; por esto potencia el siguiente estándar:

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).

| Nombre | Gráfica | Descripción | Aplicación en el aula |
|---|---|---|---|
| **Juego de Fichas (Gairín & Muños 2006)** |  *Figura 72.* Juego de Fichas | Con 10 fichas circulares iguales hemos formado el triángulo de la Figura 79. ¿Cuál es el menor número de fichas que hay que mover para que el triángulo quede invertido? | Este puzle se puede implementar desde el primer ciclo, preferiblemente desde 1°. Al expandir a grados superiores se puede ir aumentando la cantidad de fichas para formar triángulos más grandes y de igual manera tratar de invertirlos, de esta manera en los cursos más superiores se puede intentar sacar una fórmula general a partir de la regularidad que se cumple triángulo a triángulo. |
| **Siete números en la Y griega (Alquerque 2002)** |  *Figura 73.* Siete números en la Y griega | Coloca las cifras del 1 al 7 en el siguiente tablero, de manera que dos números consecutivos no estén juntos ni vertical, ni horizontal, ni diagonalmente. | Este puzle se sugiere emplear en niños de 2° grado de escolaridad, el cual comenzará a desarrollar el pensamiento lógico empleando prueba y error para resolverlo. |

<table>
<tr><th>Nombre</th><th>Gráfica</th><th>Descripción</th><th>Aplicación en el aula</th></tr>
<tr><td>Sudoku <> (Rojas 2009)</td><td><br>Figura 74. Sudoku < ></td><td>El objetivo es rellenar la cuadrícula a fin de que cada fila y cada columna contengan los dígitos del 1 al 4, sin repetirse. Los números deben estar ubicados según el signo mayor que (>)o menor que (<) que se indica en las casillas.</td><td>Este puzle se puede emplear desde segundo ciclo hasta el último ciclo, dado que cuenta con diferentes dificultades dependiendo del tamaño y de los números guía que posea el puzle.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Otro estándar a potenciar con el Sudoku <>, es referido al orden de los números, lo cual influye en la relación de números:<br>- Resuelvo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) y propiedades de los números naturales y sus operaciones.</td></tr>
</table>

# CAPÍTULO V
# CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de este trabajo, a través del estudio de diferentes fuentes bibliográficas, así como las distintas entrevistas y encuentros que se dieron con profesores reconocidos en el campo por sus estudios en la Matemática Recreativa, se dan respuesta a las preguntas declaradas inicialmente (*i.e.* ¿pueden los puzles generar interés en el estudiante por la clase de Matemáticas?, ¿estos ayudan al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante?, ¿Cómo se pueden emplear los puzles aritméticos en el aula de clase?), las cuales permitieron orientar el desarrollo del presente trabajo.

En primera instancia al estudiar los puzles aritméticos de lápiz y papel, se logra identificar que estos son una situación problema diseñada por el docente y pertenece al contexto de aula, el cual debe ser ajustado a las necesidades de los estudiantes, tanto actitudinales como académicas, puesto que en dicho contexto se da la posibilidad de potenciar diversos temas matemáticos de forma que los estudiantes ni lo perciban. Además el contexto de aula debe tener objetivos claros, una metodología apropiada y fundamentada en resolución de problemas, el empleo de estrategia, entre otros (García & Rupérez,2015).

Este contexto de los puzles, puede abrir un camino para que el estudiante manifieste afinidad por la clase de Matemáticas, ya que de acuerdo con los profesores Muñoz, Fernández y Carmona (1998), dicho proceso inicia por involucrar el interés y la motivación del docente, para que este adopte a temáticas específicas del currículo escolar cualquier elemento de su entorno; como caso particular los puzles que se aprecian comúnmente en revistas y periódicos, como elemento didáctico del aula de clase, ya que basados en su experiencia de aula afirman que el empleo de estos puzles han resultado motivadores y de gran interés para los estudiantes, puesto que no son los típicos ejercicios monótonos que se llevan siempre al aula.

Los puzles al no ser ejercicios monótonos, conllevan a que su empleo sea de gran importancia en las clases de Matemáticas. Esta afirmación, estudiada desde su historia, permite comprender la riqueza matemática que contienen, ya que por ejemplo, los cuadrados mágicos, o los cuatro cuatros, han surgido desde estudios propiamente Matemáticos; el Kenken y los puzles de raíces y potencias, han surgido según lo estudiado, desde el campo de la Educación Matemática.

La clasificación que se realizó como propuesta de las autoras, permitió identificar a los puzles estudiados como elementos que favorecen y enriquecen temas como las operaciones básicas en los Naturales y la radicación y potenciación en los números Reales. Este reconocimiento, permitió, en primera medida, observar la importancia que tiene su inclusión en el aula de clase, ya que aporta al desarrollo de Estándares Básicos de Competencias Matemáticas estipuladas por el Ministerio de Educación Nacional (2006); y segundo, cómo aportan también al desarrollo del pensamiento matemático, ya que cualquier puzle que se proponga permite un desarrollo del pensamiento lógico, puesto que al intentar solucionarlos se deben poner en práctica diversas estrategias que conlleven a su solución, y con ayuda de las competencias en Matemáticas generan desarrollo específicamente en el pensamiento numérico y sistemas numéricos.

Finalmente a modo de reflexión, aunque existen gran cantidad de puzles con un alto contenido matemático del currículo escolar, se desconoce su existencia y su potencial en el refuerzo de diferentes habilidades para el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que el estudio realizado a los mismos es muy poco. O en otra instancia, al realizar un pequeño taller a estudiantes y docentes en el 4$^{to}$ Encuentro de Matemática Juvenil 2015, llevado a cabo en el Colegio Abrahán Lincoln de Bogotá, se evidenció que a pesar de que se reconoce que estos puzles enriquecen diferentes conocimientos matemáticos del currículo escolar, muy pocos los llevan al aula o los han trabajado como herramienta complementaria de la clase, puesto que en su mayoría ignoraban la existencia de los mismos.

Desafortunadamente por el tiempo tomado para el desarrollo de este trabajo, hizo falta la realización de algún tipo de experiencia en aula, la cual pudiese emplearse para comprobar algunas de las hipótesis, en particular a la clasificación realizada por las autoras denominada tema matemático que potencia y ciclo en el que se sugiere, en la que se probaría lo referente al ciclo de escolaridad en el que puede ser empleado cada uno de estos puzles estudiados. Dicha propuesta queda abierta para las autoras o lectores de este trabajo de grado, interesados en estudiar la pertinencia de los cursos en los que fueron propuestos incluir cada uno de los puzles estudiados.

## BIBLIOGRAFÍA


Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editores S. A.

Chamoso, J., Durán, J., García, J., Lalanda, J., & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, *47*, 47–58.

Comes, M., & Comes, R. (2009). Los Cuadrados Mágicos en Al-Andalus. El tratado de Azarquiel. *Al-Qantara*, 137–169.

Conceptis Puzzles. (2015). Recuperado el 6 de octubre de 2015, a partir de www.conceptispuzzles.com

Corbalán, F. (2000). Algunos aspectos de la Matemática Recreativa. *Números*, (43-44), 121–124.

Danesi, M. (2003). Acertijos Matemáticos e Imaginación: Una Visión Viquiana de la enigmatología. (V. Orquín, Trad.), *15*(16), 49–64.

De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza (pp. 10–14). Presentado en Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Santa Cruz de Tenerife.

De Guzmán Miguel. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática* (Universidad de Complutense). Madrid.

Edumat. (2011). Matemáticas Educativas. Recuperado el 6 de octubre de 2015, a partir de http://matematicaseducativas.blogspot.com.co/2011/03/diofanto.html

Ferrero, L. (2004). *El Juego y la Matemática* (5a ed.). Madrid: La Murralla.

Gálvez, A., & Maldonado, A. (2012). *El papel de la historia de la Aritmética en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores (Tesis de Maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

García, M., & Rupérez, J. (2015, octubre 6). Puzzles en la Educación Matemática. Recuperado a partir de https://outlook.office365.com/owa/#path=/mail

Gardner, M. (1985). *Mathematical Circus* (2a ed.). Madrid: Alianza Editores S. A.

Gardner, M. (1987). *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*. Chicago: Universidad de Chicago Press.

Grupo Alquerque. (2002). Juegos numéricos. *Suma*, *39*, 107–109.

Grupo Alquerque. (2015). Grupo Alquerque. Recuperado el 6 de octubre de 2015, a partir de www.grupoalquerque.es

Kenken. Puzzles that make you smarter. (2015). Recuperado el 6 de octubre de 2015, a partir de www.kenkenpuzzle.com

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá.

Muñoz, J., Fernández, J., & Carmona, V. (1998). Jugando con potencias y raíces. *Números*, *33*, 27–38.

Oliveira, C. (2013). *Uma investigação de Algoritmos Exatos e Metaheurísticos aplicados ao Nonograma*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Paredes, D., & Rebellón, M. (2011). *Jugar y sus implicaciones en el pensamiento matemático (Tesis de pregrado)*. Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Pazos, J. (2004). ¿Xornadas de Matemática recreativa...? Sí..., por favor... En *Matemáticas Re-creativas* (1a ed.). Carácas: Laboratorio Educativo.

Perelman, Y. (1954). *Aritmética Recreativa*. Editorial Estatal de Literatura Infantil.

Poniachik, J. (1982). Breve visita a los cuatro cuatros.

Rupérez, J., & García, M. (2012). Juegos de lógica inductiva. *Números*, *81*, 67–76.

Sesiano, J. (2003). Construction of Magic Squares Using the Knight's Move in Islamic Mathematics, *58,* 1–20. http://doi.org/10.1007/s00407-003-0071-4

Tahan, M. (1985). *El hombre que calculaba*. Madrid: Europa Ediciones.

Ugarte, A. (2011). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci*.

Vasco, C. (1998). La investigación en Educación Matemática en Colombia (pp. 41–50). Presentado en Primer Simposio Internacional de Educación Matemática, Bogotá.

Zualaga, C. (2015a). *Primera entrevista al profesor Carlos Zuluaga*. Bogotá.

Zualaga, C. (2015b). *Segunda entrevista al profesor Carlos Zuluaga*. Bogotá.

Zuluaga, C. (s/f). Proyecto Matemática Recreativa. Colombia aprendiendo. Colombia Aprendiendo.

# ANEXOS

**Anexo 1: Primera entrevista al profesor Carlos Zuluaga**

**Tiempo total entrevista: 46 min, 42 segundos.**

**Entrevistado:** Carlos Zuluaga

**Cargo:** Director de Colombia Aprendiendo

**Fecha:** miércoles 18 de marzo de 2015

**Lugar:** Instalaciones de Colombia Aprendiendo, Bogotá Colombia.

**Tiempo transcrito: 15:12 min a 18:00 min**

**Yessica Galvis (YG):** Precisamente algo así nos ha pasado en la búsqueda porque iniciamos por ejemplo, la primera búsqueda que hicimos fue en bibliotecas y comenzamos con pasatiempos en Matemáticas… entonces nos sale un sin fin de pasatiempos, por lo que cada autor denomina pasatiempo.

**Carlos Zuluaga (CZ):** Por ejemplo esa es otra cosa que es interesante en un trabajo como esos, entonces la palabra pasatiempo. La palabra pasatiempo tiene un significado cultural, ¿ya? Incluso muchas personas aquí creen ah un pasatiempo, ah eso es para perder el tiempo, eso es para el que está aburrido o el que no tiene nada que hacer ¿sí?, pero por ejemplo uno encuentra desafío, encuentra acertijo, uno mira los autores; seguramente allá en la Pedagógica hay libros de Editorial Gedisa, debe haber algunos; allá entre las revistas que llegaban de didáctica, yo no sé cuál estará llegando ahora, antes llegaban las de Inglés, de Estados Unidos, ya como que eso no volvió porque en Colombia el Inglés se fue perdiendo, hoy en día se está recuperando, pero hubo una época que nadie cogía algo en Inglés.

Esa es la otra parte, dentro la bibliográfica por ejemplo, ¿qué puede encontrar uno en una biblioteca?, o ustedes entrar a las editorial es directamente, ¿entones las editoriales qué ofrecen? Por ejemplo en la época de los años 80 había una editorial que era la Or, y la Or se dedicó a traducir una cantidad de libros de Matemática Recreativa. O sea es que el concepto es Matemática Recreativa, todo eso de lúdica son cosas inventadas dentro de la

Matemática, que esa es otra cosa que hay que precisar que se llama Matemática Recreativa, o sea la Matemática Recreativa es una rama de las Matemáticas, ¡muy seria! En nuestra cultura, lo que es Latinoamérica y eso se le ha dado muy poca importancia, en cambio si uno mira otro mundo, como el mundo de habla inglesa allá la aprecian muchísimo, entonces uno de los grandes maestros que ahí es obligado nombrar en Martin Gardner, tanto que él recibió de la comunidad internacional el nombre, es un título honorifico que es el decano de la Matemática Recreativa a nivel mundial ¿ya?, ¿sí?

**Tiempo transcrito: 19:06 min a 21:01 min**

**(CZ):** Lo otro es mirar también un poquito que temas toca la Matemática Recreativa, entonces la Matemática Recreativa tiene un poco de puntos de contacto por ejemplo con la magia, o sea los juegos de cartas, la mayoría de juegos de cartas están basados en conceptos matemáticos, bien sea ya el nueve que tiene muchas propiedades, o teoría de grupos ¿sí?, entonces tiene que ver eso.

Lo que decía usted, la Matemática Recreativa históricamente ha tenido también puntos de contacto con las creencias del ser humano, o sea cuando el ser humano no entiende algo entonces busca un apoyo muchas veces religioso. Entonces en la época en que se manejaba esos cuadrados mágicos de esa manera la mayoría de la gente no sabía Matemáticas, por eso la gente creía eso, porque habían unas personas que eran los astrólogos y la mayoría de los astrólogos eran matemáticos, los grandes matemáticos han sido astrólogos, por ejemplo Kepler, él era el astrologo oficial del rey donde él vivía, entonces cada año entre su trabajo tenía que ir allá donde el rey y hacerle la carta astral, este año los astros lo van a favorecer cuídese de no sé cuánto, todas esas ¿ya? Pero lo que ustedes van a hacer es Matemática Recreativa, eso no existe lúdica Matemática, eso es puro invento que lo pusieron a veces en los documentos oficiales, la lúdica.

---

**Tiempo transcrito: 29:06 min a 33:07 min**

**CZ:** Entonces lo que les decía al comienzo, en nuestra cultura, es una cultura que no juega, aquí el juego no tiene mucho peso; valdría la pena no más decir bueno cuántos almacenes de juegos hay, entonces usted mira Pepe Ganga vende cositas y se concentra más en otras cosas, las novedades para los niños eso de transformes, lego, lego es importantísimo para preescolar y toda la vida, quien arme un lego cada vez más complejo es una persona que está demostrando un gran talento, el desarrollo del pensamiento geométrico y visual; o sea hay juegos de eso tipo que son muy valiosos en la educación, por ejemplos los rompecabezas de esos de las 1000 fichas, todo eso hace parte de lo que es Matemática Recreativa. Pero uno va a una tienda a otro país y por ejemplo el cubo de Rubik entonces uno encuentra 100 variantes diferentes ¿ya?, y ese juego se ha desarrollado mucho, todo eso pertenece a la historia de la Matemática Recreativa, o sea el juego más exitoso de la historia es el cubo de Rubik y acá en Colombia tuvo una época una especie de fiebre en los años por ahí 75 o 80, después como que se calmó y ahora otra vez estamos viendo en los colegios concursos con el cubo de rubik, han salido variantes muy bonitas; ahí debajito de la Pedagógica en la 15 entre 74 y 75 , ahí hay un almacén dedicado, ahí hay un muchacho que es calculista rápido, él va a los colegios y hace demostraciones.

Miren otro tema interesante de la Matemática Recreativa, los calculistas rápidos, eso está en la historia de la Matemáticas, hubo una época que eso era una profesión, usted aprendía calculo rápido y podía trabajar en una universidad como calculista porque en esa época no habían calculadoras no habían máquinas para calcular. Gauss por ejemplo es uno de los grandes ejemplos de calculista rápido. A Gauss en la universidad le dijeron, profesor Gauss la universidad le puede costear una calculista rápido, porque Gauss trabajaba en física y astronomía, y Gauss dijo no no no yo calculo solo.

Entonces esto es muy amplio, tan amplio que ni nosotros mismo podemos dominar estos temas, pero nos alegra mucho que en el mundo haya muchísima gente trabajando en Matemática Recreativa, o sea yo creo que llegará acá toda esa influencia de la Matemática Recreativa, tiene que llegar al aula porque es la única manera que se puede enseñar Matemáticas, jugando. La forma como se ha venido haciendo ha fracasado, ¿si ve usted que la mayoría de la gente odia las Matemáticas?, hay un mito en la sociedad, no es mito, pero los mitos son muy perjudiciales porque es lo que la gente cree, que las Matemáticas son difíciles, que son imposibles; nadie está diciendo que las Matemáticas son fáciles y gratis, hay que esforzarse pero no son imposibles y lo que se dice hoy que todos los niños deben aprender Matemáticas, pero estamos en una situación en que ese no es el resultado.

---

**Anexo 2: Segunda entrevista al profesor Carlos Zualuaga**

**Tiempo total entrevista: 72 min, 29 segundos.**

**Entrevistado:** Carlos Zuluaga

**Cargo:** Director de Colombia Aprendiendo

**Fecha:** miércoles 8 de abril de 2015

**Lugar:** Instalaciones de Colombia Aprendiendo, Bogotá Colombia.

**Tiempo transcrito: 00:00 min a 06:20 min**

**Carlos Zuluaga (CZ):** Interesante ¿no?, si hay muchos nombres, es que hay muchos nombres dentro del tema de la matemática recreativa ¿no?, entonces se utiliza la palabra acertijo, o sea esa es una buena parte del trabajo, entonces ustedes pueden buscar eee… por ejemplo los orígenes ¿no? en inglés, como se llaman los libros en inglés, entonces por ejemplo en ingles la palabra calve es P U Z Z L E S ¿sí? PUZZLE ¿sí? y con esa palabra puzle ellos cubren todo, el problema es que en español, por ejemplo la palabra puzle no es traducible, entonces esa es una parte interesante puede ser una parte interesante del trabajo que es la lingüística ¿no?, que como de acuerdo a la cultura ¿sí? se van creando las palabras ¿no?, ustedes van a encontrar también que si ustedes comparan autores van a encontrar en el habla inglesa miles de personas que escriben sobre el tema, en cambio en el área de nuestra lengua materna son muy poquitos, los libros son contados en las manos ¿sí? exacto… entonces eso que es pasatiempo, que es acertijo, que es desafío, que es reto ¿sí?, en español las utilizamos indiferentemente ¿no? para referirnos muchas veces a lo mismo ¿no?, entonces seguramente uno va a encontrar a un autor que le pone el título de pasatiempo a algo que otro lo llama desafío o que otro lo llama reto ¿sí?, entonces si uno mira los idiomas pues se dan esas mismas cosas, en ingles la palabra PUZZLE es muy global ¿no? pero por ejemplo uno encuentra en libros que tienen la palabra CHALLENGE que es desafío ¿sí?, encuentra la palabra RIDDLE que quiere decir adivinanza pero también quiere decir algo enredado ¿sí? un desafío mental, eso es una parte interesante y eso si ya hoy día es fácil porque ustedes pueden entrar a internet y van a encontrar hay la cantidad de… y si uno va a otro idioma alemán o francés le va a pasar exactamente lo mismo…

**Yessica Galvis (YG):** entonces podríamos hablar…

**CZ:** Pero todo eso lo cubre la Matemática Recreativa, o sea lo que si podemos afirmar ¿sí? es que la matemática recreativa cubre todo eso, entonces ustedes podrían investigar un poco que es la matemática recreativa o sea dentro del esquema o el organigrama de las matemáticas no exacto… Entonces esta la palabra por ejemplo otra palabra clave que si es internacional no pero es del inglés GAME, game incluso en Matemáticas hay una cosa que se llama teoría de juegos.

**YG:** Si

**CZ:** Exactamente, pero esa teoría de juegos se ocupa de muchísimas cosas y tiene muchas aplicaciones ¿no? entonces, es que todos esos temas dan para hacer un trabajo.

**YG:** Si pues…

**CZ:** Cada uno un trabajo diferente, pero ustedes si pueden tocar ese tema ¿no? o sea. Sería muy difícil decir que es un pasatiempo, o sea nadie no he visto el primer autor que diga pasatiempo es esto y juego es esto.

**YG:** Es que precisamente nos pasó eso, porque uno de los documentos que nosotras tenemos define las características que posee el juego. Y hay una página en internet del grupo Alque…

**Gina Ortegón (GO):** Alquerque

**CZ:** Alquerque de España

**YG:** Si señor, donde ellos dan las características de pasatiempo. Pero si hacemos la relación es que son muy…

**CZ:** Es parecida.

**YG:** Son muy idénticas solamente que dan…

**CZ:** Claro es que eso es subjetivo ¿sí? es subjetivo ¿sí?, y entonces ahí viene la cosa, o sea es muy diferente hablar de un juego de mesa o sea el juego como algo social si, por ejemplo el parques, entonces usted se va a poner a comparar el parques y el ajedrez, o sea son dos juegos pero ambos son muy diferentes cierto, ¿sí? Eso huy eso se mete uno en un campo… ya, exactamente. Pero es interesante ¿no? de todas maneras es una buena pregunta ¿no?, pero ustedes pueden buscar por ejemplo en internet o en un diccionario sinónimos de juego y vamos a encontrar una gran cantidad de… ¿sí?

**YG:** Si.

**CZ:** Exacto.

**YG:** Entonces hay estaríamos hablando de…

**CZ:** Pero no hay nadie, yo no conozco el primer libro, incluso se mete uno en un problema al tratar de precisar esos límites ¿no?

**YG:** entonces, ¿podríamos estar hablando de sinónimos?
**CZ:** Si o sea, si exactamente sinónimos… es posible ¿no? cabe cabe la… ¿sí? son palabras muy, se utilizan ¿no? y los autores las utilizan indistintamente.

**YG – GO:** Mmm…

**CZ:** Entonces claro que ustedes pueden ir a la teoría Matemática de los juegos y haya van a encontrar con mucha precisión lo que es un juego en esa teoría ¿sí? o sea además porque lo tienen que hacer así ¿no? tienen que definir muy bien para poderlos estudiar.

**YG:** si claro, o sea ya… ya teniendo como… esa afirmación de que podríamos estarnos refiriéndonos a lo mismo, entonces ya sería como determinar qué tipo de actividad es la que estamos buscando de juegos y de pasatiempos.

**CZ:** Si pero digamos que es la Matemática Recreativa la que estudia todo eso

**YG – GO:** Si

---

**Tiempo transcrito: 26:24 min a 34:15 min**

**CZ:** Que más ¿qué más hicieron?

**YG:** Eee…, bueno de los documentos que tenemos, hay unos autores que nos ofrecen… bueno empezando tenemos dos artículos, uno se refiere a la palabra pasatiempo el otro se refiere a la palabra juego.

**CZ:** Si

**YG:** Eee… en cada uno de los artículos los autores nos ofrecen una clasificación para cada nombre, entonces por lo menos para los juegos nos ofrecen una clasificación que hay juegos de conocimiento, estrategia, azar y lógicos y de pasatiempo que hay pasatiempo de cálculo y de ordenación.

**CZ:** Mmm…

**YG:** Entonces, pues con esa clasificación es con la que nosotras hemos estado jugando hasta ahora, entonces nuestra pregunta es si ¿existe otro tipo de clasificación?

**CZ:** Claro, o sea hay un libro de Corbalán de España, dedicado solo a los juegos, ese libro apareció… ¿en la Universidad no está la Editorial Síntesis la Colección?

**YG:** Si y no, toda la colección completa no está.

**CZ:** ¿Ya no está?

**YG:** No, y hemos mirado, hay precisamente hay un libro de puzles…

**GO:** Puzles, juegos y pasatiempos

**YG:** Y pasatiempos.

**CZ:** Exactamente

**YG:** Ese es el que hemos ido a preguntar y no, no lo tienen

**CZ:** ¿No está?

**YG – GO:** No señor

**CZ:** y no han ido a la biblioteca del Gimnasio Moderno

**YG – GO:** No señor

**CZ:** Haya estaban completos, esos esos los trajeron de España son… vayan a la biblioteca Gimnasio Moderno, y haya pregunten por los libros de… si. Si haya hay un librito de eso y el otro autor se llama creo que es Luis Corbalán.

**(…)** El profesor sale de la sala aparentemente a buscar un libro (28:20 – 29:20)

**CZ:** Corbalán, Corbalán con B larga no Corbalán.

**(…)** El profesor dialoga con otro colega (29:45 – 30:32)

**CZ:** Si el librito ese de la editorial eso se llama editorial Síntesis ¿no? el de… si ese si estaba haya en el Gimnasio, y el de Corbalán ¿no?… el de Corbalán estaba en la biblioteca, o sea la otra biblioteca donde pueden consultar es en la Luis Ángel Arango… no sé si en la Biblioteca de la Universidad Distrital… Pero eso sería una cosa muy muy compleja ¿no? la clasificación de los juegos eso ¿no?, si hay gente que ha intentado eso pero...

**(…)** El profesor dialoga con otro colega (31:12 – 31:34)

**CZ:** Corbalán, el si tiene un libro sobre juegos ¿sí?… y van a darse cuenta hay de qué juegos según el autor ¿sí?… son cosas…a veces es un juego donde no hay ningún material concreto sino grafico ¿sí? Entonces por ejemplo ¿el Sudoku que es? ¿Un pasatiempo? ¿Es un juego? ¿Es un… un entretenimiento? y fíjense la palabra pasatiempo…

---

**Tiempo transcrito: 39:32 mina 41:14 min**

**YG:** Igualmente con la clasificación o sea lo ideal sería…

**CZ:** Claro, es que no, eso es imposible para mí, no sé si para el compadre me tiene alguna referencia…

**Compadre (Cmp):** Dime

**CZ:** Clasificación de los Juegos

**Cmp:** …

**CZ:** O sea es que hay tantos juegos que…

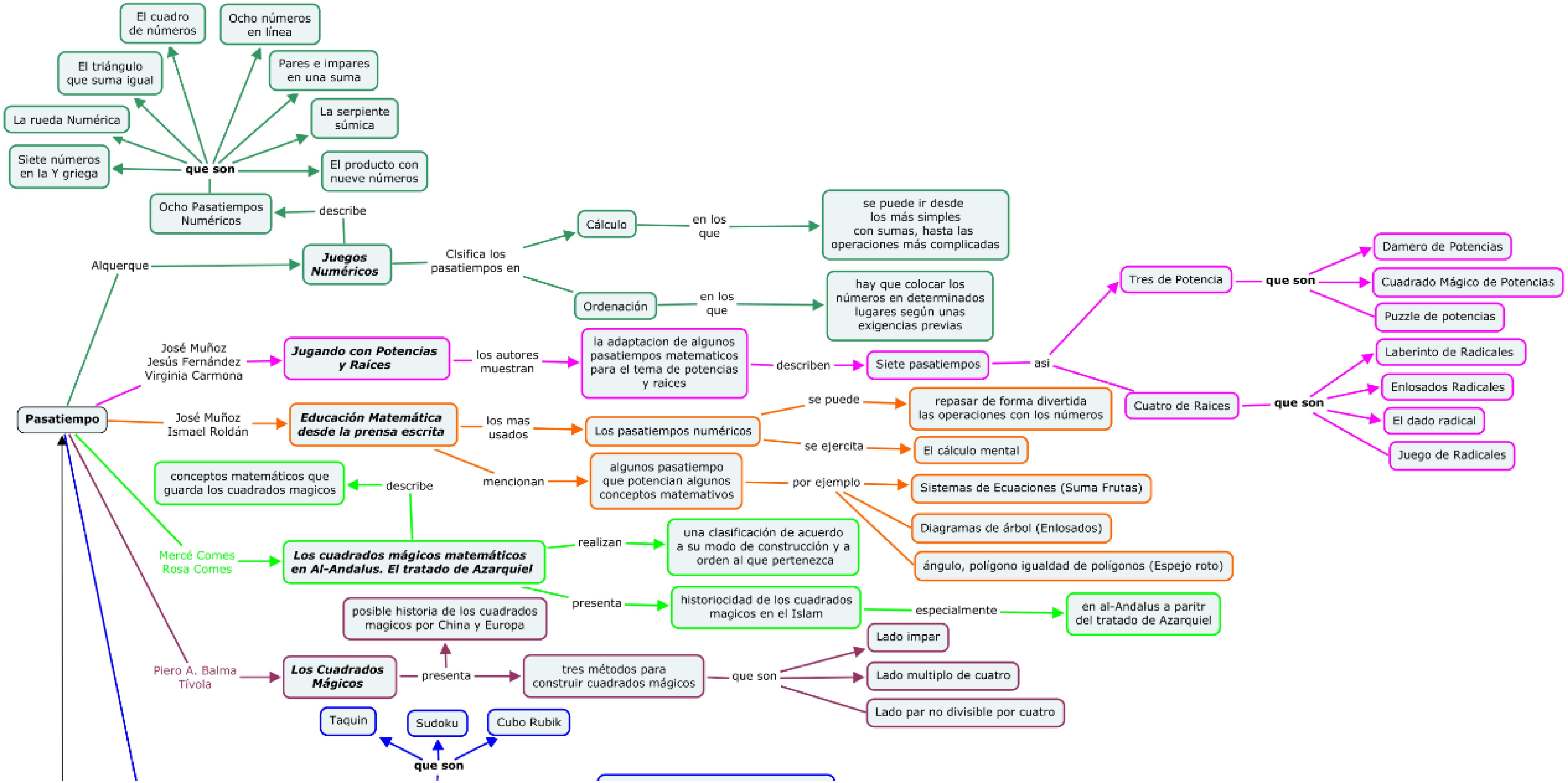
**Cmp:** Es que esas cosas, digamos no están, como no están mirando o están orientadas digamos en esquemas académicos, para hacer digamos un Trabajo de grado, y resulta que esto no como que no funciona aquí de esa manera, o sea son como… no cumplen con ese estándar sin decir que no cumplir ese estándar…

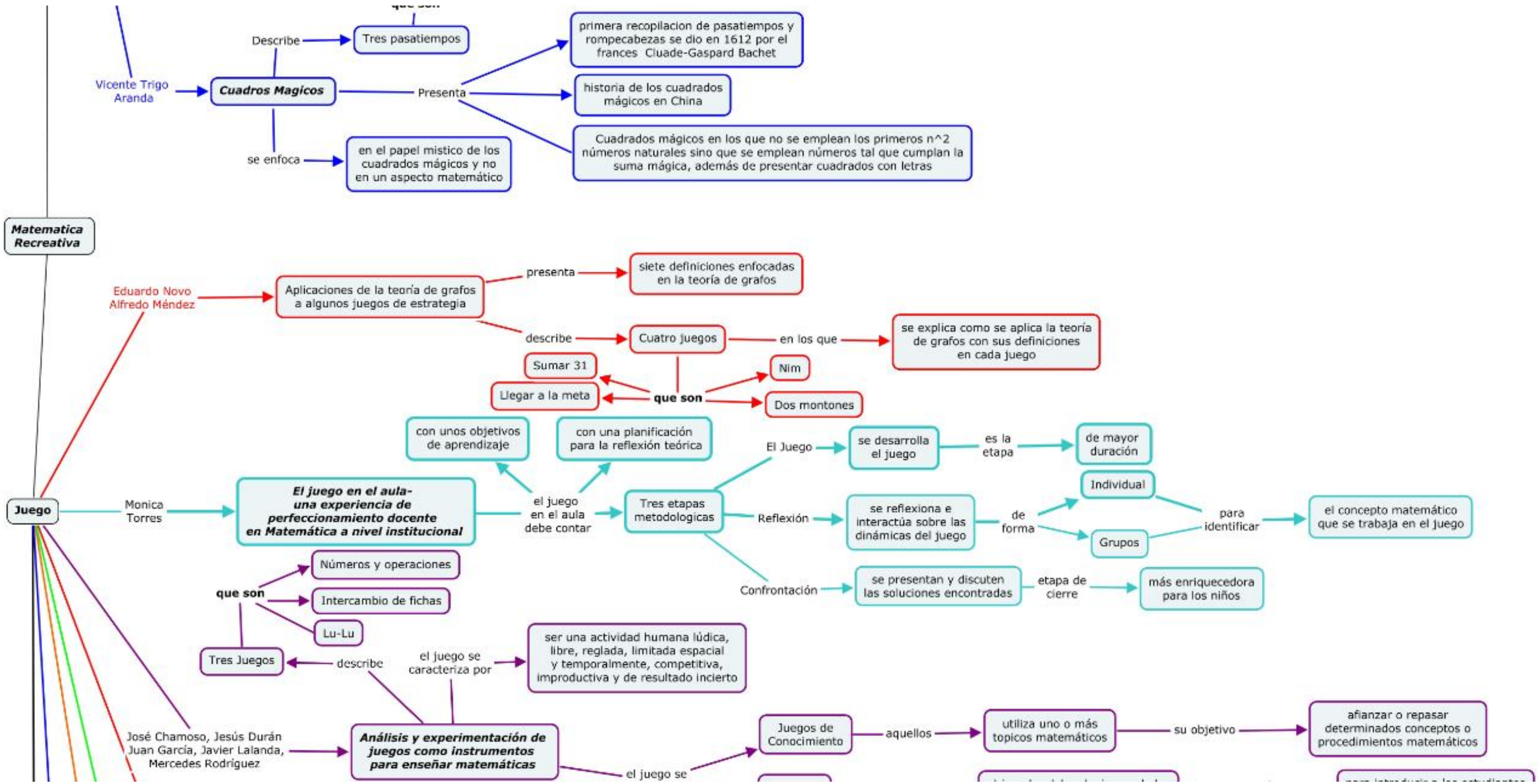
**CZ:** es que es tan amplio el tema, o sea es que es impresionante es que el juego abarca todas las culturas o sea todas las culturas han desarrollado juegos ¿no? Es que por ejemplo uno cogiera el ajedrez ¿no?, entonces usted en ajedrez dice ¿no? es que el ajedrez es lo mismo en todo lado y no, mire la forma como juegan los rusos, a la forma como juegan los indios, a la forma como juegan otros maestros, es diferente y han desarrollado escuelas para aprender y para jugar ajedrez eso no es lo mismo. Eso es muy amplio el tema ¿no?, es muy amplio, muy amplio, entonces ustedes deben ir mirando haber de ahí que si… por el ejemplo el de Miguel este artículo de Miguel de Guzmán es muy bueno y les va a dar luces ahí, pero para hacer un trabajo como el de ustedes toca un tema muy muy…

**YG:** Muy reducido

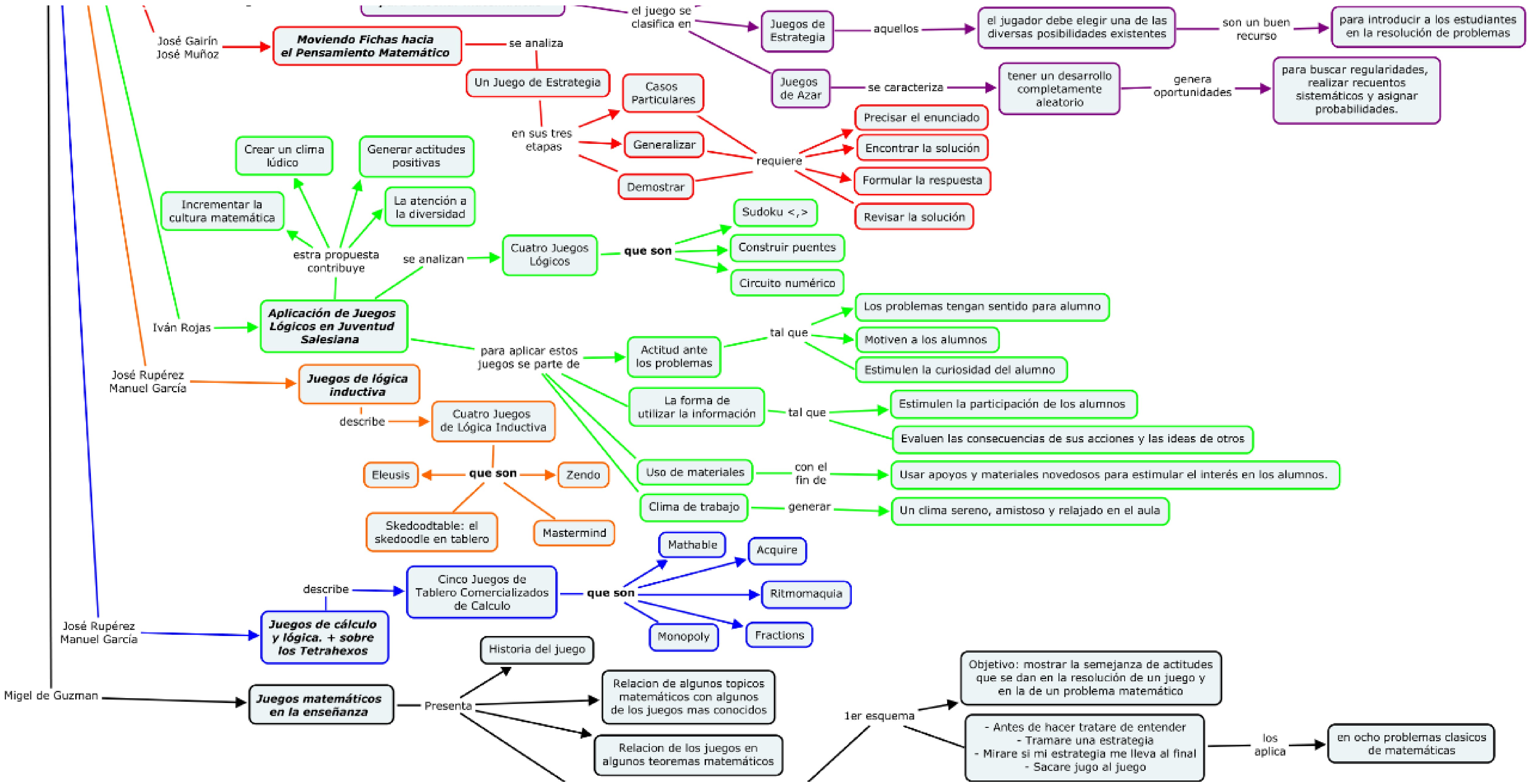
**CZ:** Muy concreto ¿no? muy concreto, muy concreto.

## Anexo 3: Red bibliográfica

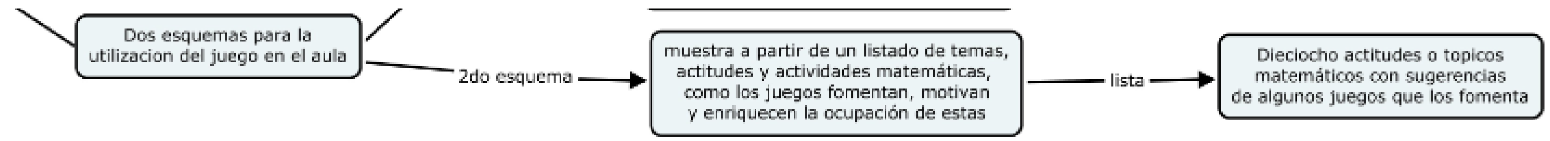




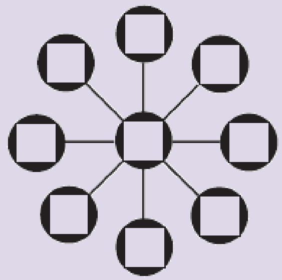
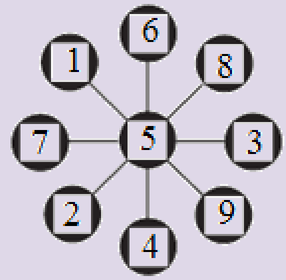
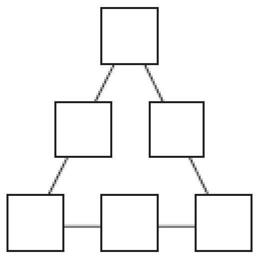
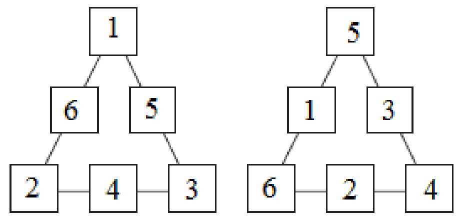
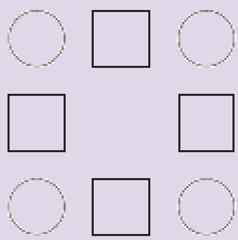
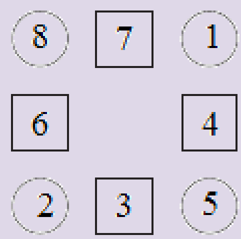
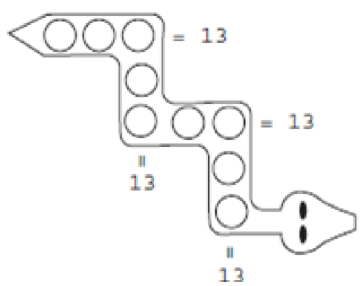
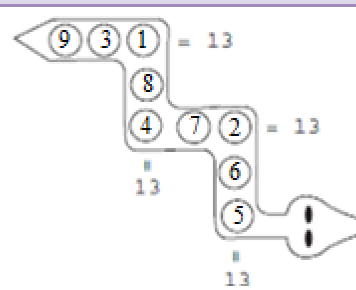
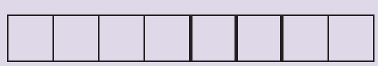
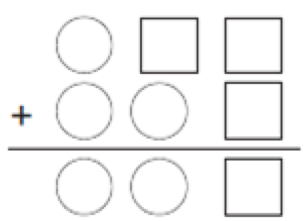
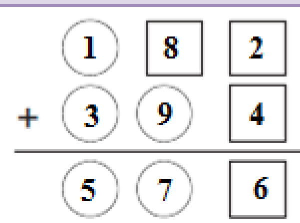
que son
Describe
Tres pasatiempos
primera recopilacion de pasatiempos y rompecabezas se dio en 1612 por el frances Cluade-Gaspard Bachet
Vicente Trigo Aranda
Cuadros Magicos
Presenta
historia de los cuadrados mágicos en China
Cuadrados mágicos en los que no se emplean los primeros n^2 números naturales sino que se emplean números tal que cumplan la suma mágica, además de presentar cuadrados con letras
se enfoca
en el papel mistico de los cuadrados mágicos y no en un aspecto matemático
Matematica Recreativa
Eduardo Novo Alfredo Méndez
Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia
presenta
siete definiciones enfocadas en la teoría de grafos
describe
Cuatro juegos
en los que
se explica como se aplica la teoría de grafos con sus definiciones en cada juego
Sumar 31
Llegar a la meta
que son
Nim
Dos montones
con unos objetivos de aprendizaje
con una planificación para la reflexión teórica
El Juego
se desarrolla el juego
es la etapa
de mayor duración
Juego
Monica Torres
El juego en el aula-una experiencia de perfeccionamiento docente en Matemática a nivel institucional
el juego en el aula debe contar
Tres etapas metodologicas
Reflexión
se reflexiona e interactúa sobre las dinámicas del juego
de forma
Individual
Grupos
para identificar
el concepto matemático que se trabaja en el juego
Confrontación
se presentan y discuten las soluciones encontradas
etapa de cierre
más enriquecedora para los niños
que son
Números y operaciones
Intercambio de fichas
Lu-Lu
Tres Juegos
describe
el juego se caracteriza por
ser una actividad humana lúdica, libre, reglada, limitada espacial y temporalmente, competitiva, improductiva y de resultado incierto
José Chamoso, Jesús Durán Juan García, Javier Lalanda, Mercedes Rodríguez
Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas
el juego se
Juegos de Conocimiento
aquellos
utiliza uno o más topicos matemáticos
su objetivo
afianzar o repasar determinados conceptos o procedimientos matemáticos

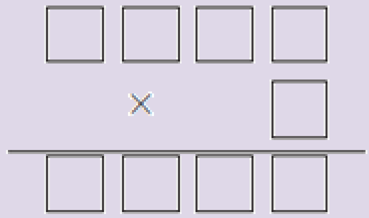
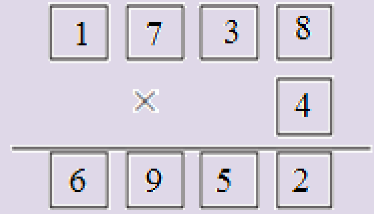
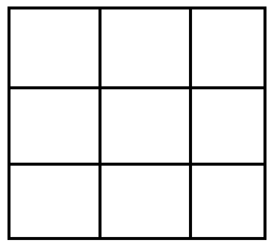
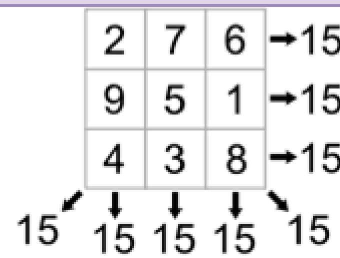
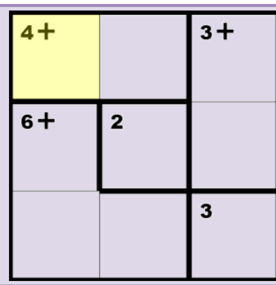
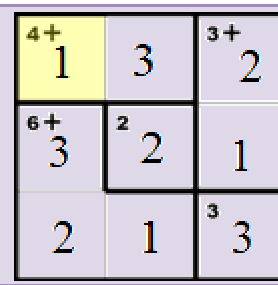
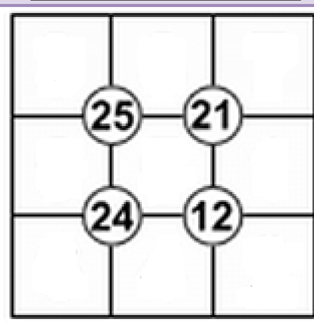
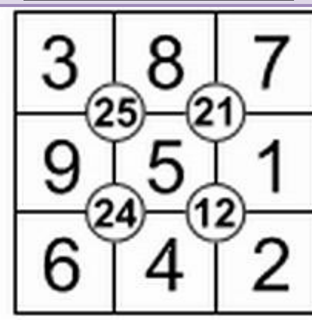
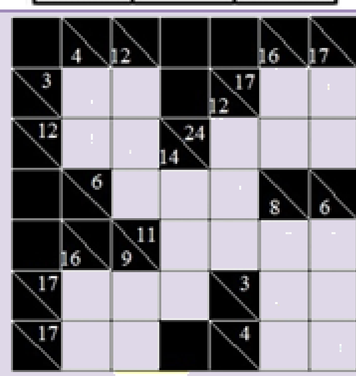
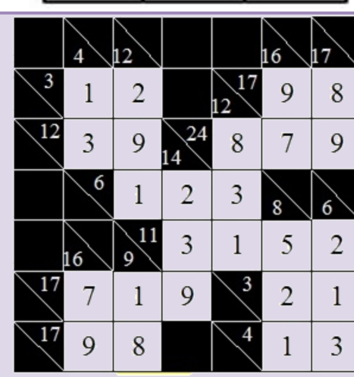


el juego se clasifica en
Juegos de Estrategia
aquellos
el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes
son un buen recurso
para introducir a los estudiantes en la resolución de problemas
Juegos de Azar
se caracteriza
tener un desarrollo completamente aleatorio
genera oportunidades
para buscar regularidades, realizar recuentos sistemáticos y asignar probabilidades.
José Gairín
José Muñoz
Moviendo Fichas hacia el Pensamiento Matemático
se analiza
Un Juego de Estrategia
en sus tres etapas
Casos Particulares
Generalizar
Demostrar
requiere
Precisar el enunciado
Encontrar la solución
Formular la respuesta
Revisar la solución
Crear un clima lúdico
Generar actitudes positivas
Incrementar la cultura matemática
La atención a la diversidad
estra propuesta contribuye
se analizan
Cuatro Juegos Lógicos
que son
Sudoku <,>
Construir puentes
Circuito numérico
Iván Rojas
Aplicación de Juegos Lógicos en Juventud Saleslana
para aplicar estos juegos se parte de
Actitud ante los problemas
tal que
Los problemas tengan sentido para alumno
Motiven a los alumnos
Estimulen la curiosidad del alumno
La forma de utilizar la información
tal que
Estimulen la participación de los alumnos
Evaluen las consecuencias de sus acciones y las ideas de otros
Uso de materiales
con el fin de
Usar apoyos y materiales novedosos para estimular el interés en los alumnos.
Clima de trabajo
generar
Un clima sereno, amistoso y relajado en el aula
José Rupérez
Manuel García
Juegos de lógica inductiva
describe
Cuatro Juegos de Lógica Inductiva
que son
Eleusis
Zendo
Skedoodtable: el skedoodle en tablero
Mastermind
Mathable
Acquire
describe
Cinco Juegos de Tablero Comercializados de Calculo
que son
Ritmomaquia
Monopoly
Fractions
José Rupérez
Manuel García
Juegos de cálculo y lógica. + sobre los Tetrahexos
Historia del juego
Migel de Guzman
Juegos matemáticos en la enseñanza
Presenta
Relacion de algunos topicos matemáticos con algunos de los juegos mas conocidos
Relacion de los juegos en algunos teoremas matemáticos
1er esquema
Objetivo: mostrar la semejanza de actitudes que se dan en la resolución de un juego y en la de un problema matemático
- Antes de hacer tratare de entender
- Tramare una estrategia
- Mirare si mi estrategia me lleva al final
- Sacare jugo al juego
los aplica
en ocho problemas clasicos de matemáticas


Dos esquemas para la utilizacion del juego en el aula
2do esquema
muestra a partir de un listado de temas, actitudes y actividades matemáticas, como los juegos fomentan, motivan y enriquecen la ocupación de estas
lista
Dieciocho actitudes o topicos matemáticos con sugerencias de algunos juegos que los fomenta

## Anexo 4: Respuestas Cuatro operaciones Básicas en los números Naturales

| Nombre | Gráfica | Respuesta |
|---|---|---|
| La rueda numérica (Alquerque, 2002) |  |  |
| El triángulo que suma igual (Alquerque, 2002) |  |  |
| El cuadro de números (Alquerque, 2002) |  |  |
| La serpiente súmica (Alquerque 2002) |  |  |
| Ocho números en línea (Alquerque 2002) |  |  |
| Pares e impares en una suma (Alquerque 2002) |  |  |

| Nombre | Gráfica | Respuesta |
|---|---|---|
| El producto con nueve números (Alquerque 2002) |  |  |
| Cuadros Mágicos (Comes & Comes 2009) |  |  |
| Kenken [3x3 Suma] (Rojas 2009) |  |  |
| Sujiko (すじこ) |  |  |
| Kakuro (かくろ) |  |  |

## Anexo 5: Respuestas Potenciación u Radicación en los números Racionales

| Nombre | Gráfica | Respuestas |
|---|---|---|
| Cuadrado mágico de potencias (Muñoz, Fernández & Carmona 1998) | (ver tablas abajo) | (ver tablas abajo) |
| Damero de Potencias (Muñoz, Fernández & Carmona 1998) | (ver tablas abajo) | (ver tablas abajo) |
| Enlosados radicales (Muñoz, Fernández & Carmona 1998) | (ver tablas abajo) | (ver tablas abajo) |
| Laberinto de radicales (Muñoz, Fernández & Carmona 1998) | (ver tablas abajo) | (ver tablas abajo) |

**Cuadrado mágico de potencias (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)**

Gráfica:

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 1/2 | 1 |
| 1/8 | 2 | ? |
| 4 | 8 | 1/4 |

Respuestas:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $2^4$ | $2^{-1}$ | $2^0$ | $\rightarrow 2^3$ |
| | $2^{-3}$ | $2^1$ | $2^5$ | $\rightarrow 2^3$ |
| | $2^2$ | $2^3$ | $2^{-2}$ | $\rightarrow 2^3$ |
| $\swarrow$ $2^3$ | $\downarrow$ $2^3$ | $\downarrow$ $2^3$ | $\downarrow$ $2^3$ | $\searrow$ $2^3$ |

**Damero de Potencias (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)**

Gráfica:

1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | | $5^{-1}$ | |
| | $5^2$ | | $5^{-3}$ |
| $5^4$ | | $5^{-2}$ | |
| | $5^3$ | | 5 |

Respuestas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **5** | | **$5^{-1}$** | |
| | **$5^2$** | | **$5^{-3}$** |
| **$5^4$** | | **$5^{-2}$** | |
| | **$5^3$** | | **5** |

**Enlosados radicales (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)**

Gráfica:

18

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $-6$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{6}$ |
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{3}$ | $2\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ |

↑

Respuestas:

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{6}$ | $-6$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{6}$ |
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{3}$ | $2\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ |

**Laberinto de radicales (Muñoz, Fernández & Carmona 1998)**

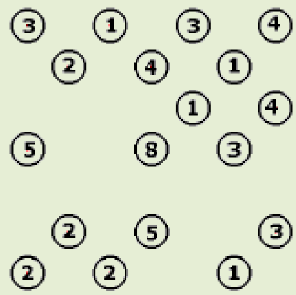
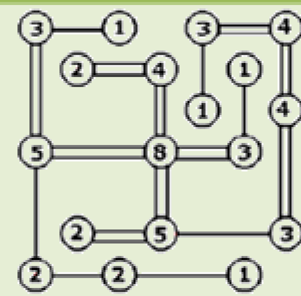
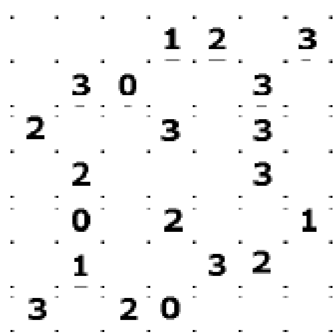
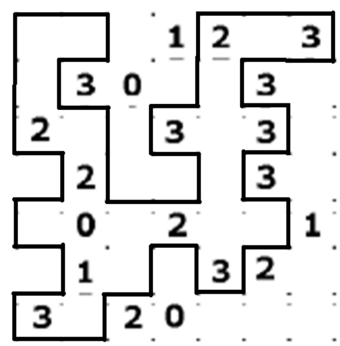
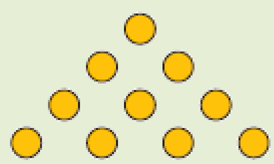
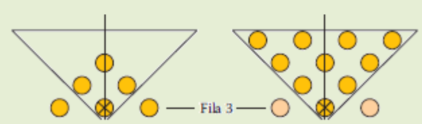
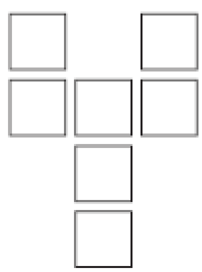
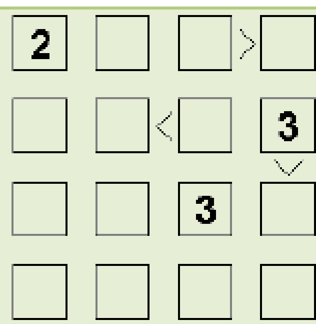
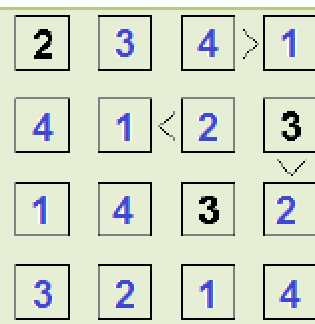
Gráfica:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{8}$ | $8^{1/2}$ | $4^{1/4}$ | 8 |
| $\sqrt{2^3}$ | $2\sqrt{2}$ | $2 * 2^{1/2}$ | $4^{1/3}$ |
| $2^{2/3}$ | $\sqrt[4]{2^6}$ | $2^{3/2}$ | $\sqrt[4]{4^3}$ |
| $\sqrt[4]{16}$ | 4 | $2^{6/4}$ | $\sqrt[4]{64}$ |

Respuestas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **$\sqrt{8}$** | **$8^{1/2}$** | $4^{1/4}$ | 8 |
| $\sqrt{2^3}$ | **$2\sqrt{2}$** | **$2 * 2^{1/2}$** | $4^{1/3}$ |
| $2^{2/3}$ | $\sqrt[4]{2^6}$ | **$2^{3/2}$** | $\sqrt[4]{4^3}$ |
| $\sqrt[4]{16}$ | 4 | **$2^{6/4}$** | **$\sqrt[4]{64}$** |

## Anexo 6: Respuestas Lógicos

| Nombre | Gráfica | Respuestas |
|---|---|---|
| Hashiwokakero (はしをかけろ) (Rojas 2009) |  |  |
| Circuito Numérico ((Rojas 2009)) |  |  |
| Juego de Fichas (Gairín& Muños 2006) |  |  |
| Siete números en la Y griega (Alquerque 2002) |  |  |
| Sudoku <> (Rojas 2009) |  |  |