

UNA APROXIMACIÓN A LA DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

John Jairo Gómez Morales
Cesar Augusto Martínez Gómez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2015

UNA APROXIMACIÓN A LA DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

John Jairo Gómez Morales
Cesar Augusto Martínez Gómez

Trabajo de grado para optar por el título de
Especialista en Educación Matemática

Asesora:

Nubia Soler

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BOGOTÁ
2015

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”

Dedicatoria

Dedico este trabajo principalmente a Dios por darme la fortaleza para afrontar este reto, a Sandra por su paciencia y constante ánimo y a mi hija Isabella por ser mi fuente de inspiración.

Jairo.

Dedico este proyecto a mi esposa Liliana Gómez y a mi hija Isabella pues son el principal combustible que motive el crecimiento integral y emocional de mi vida y a Dios toda mi gratitud por permitirlo.

Cesar.

AGRADECIMIENTOS

Un especial agradecimiento a I.E.D san Juan de Rioseco y a la I.E.R.D Chimbe por brindarnos la oportunidad y el espacio necesarios para implementar nuestra propuesta. A nuestros docentes de la especialización por su especial apoyo y constancia en estos dos semestres cargados de nuevas vivencias y de bastante conocimiento, a nuestros compañeros por hacer de este posgrado una gran experiencia.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Escuela de Educación

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Una aproximación a la derivada desde la variación y el cambio***, presentado por los estudiantes:

John Jairo Gomez Morales - 2015182008 - 11255126
Cesar Augusto Martínez Gomez - 2015182012 - 79163342

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado**, con **44** Puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2015.

JURADOS

Directora del Trabajo:

Profesora:


MARÍA RUBIA SOLER

Jurados:

Profesor:


ALBERTO DONADO

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado en Especialización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	UNA APROXIMACIÓN A LA DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO
Autor(es)	Gómez Morales John Jairo; Martínez Gómez Cesar Augusto
Director	Soler, Nubia
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 73 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ESTRATEGIA DIDÁCTICA, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS, FUNCIONES, VARIACIÓN, CAMBIO, DERIVADA, LINEAMIENTOS Y ESTÁNDARES CURRICULARES, PRUEBA Y ARGUMENTACIÓN.

2. Descripción
<p>La presente propuesta es una adaptación del instrumento utilizado en el trabajo realizado por Silvia Vrancken y Adriana Engler titulado “Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad” la cual fue rediseñada pensando en llevarla al aula con estudiantes del grado once de la Institución Educativa Rural Departamental Chimbe, del municipio de Albán, Las actividades permitirán analizar diversos escenarios de variación (qué magnitudes cambian, cómo y cuánto cambian), caracterizar variaciones entre las magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio, y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio y por ende con la derivación. Su presentación, desde diferentes representaciones, favorece el desarrollo de procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático, el de argumentación y visualización. En este trabajo de grado se describirán brevemente los aspectos teóricos y metodológicos que fundamentan el diseño de la secuencia de actividades y se presentaran algunos planteamientos obtenidos de su implementación a partir de la observación de las actividades desarrolladas por los estudiantes esperando motivarlos y movilizar sus concepciones. La discusión de los resultados obtenidos favorece la optimización de la secuencia.</p> <p>Este trabajo de grado de la especialización en educación matemática está basado en la inquietud de indagar acerca de la argumentación para abordar adecuadamente de manera certera y coherente la resolución de problemas matemáticos determinando una aproximación a la derivada mediante la variación y el cambio, a nivel de estudiantes de grado undécimo.</p>

3. Fuentes

- CANTORAL, R.; FARFÁN, R.; CORDERO, F.; ALANÍS, J.; RODRÍGUEZ, R.; GARZA, A. Desarrollo del pensamiento matemático. México: Trillas, 2003.
- ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140.
- CANTORAL, R.; FARFÁN, R.; CORDERO, F.; ALANÍS, J.; RODRÍGUEZ, R.; GARZA, A. Desarrollo del pensamiento matemático. México: Trillas, 2003.
- DOLORES, C. La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. In: DOLORES, C.; MARTÍNEZ, G.; FARFÁN, R.; CARRILLO, C.; LÓPEZ, I.; NAVARRO, C. (Ed.). *Matemática Educativa: Algunos aspectos de la socio epistemología y la visualización en el aula*. México: Ediciones Díaz de Santos, 2007a. p. 169-204.
- Dolores, Crisólogo; Chi, Andrés; Canul, Eduardo; Cantú, Cristy; Pastor, Crispín, «De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática», *Unión*, 2009, 18, 41-57, ISSN 1815-0640.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de competencias*. Editorial Magisterio. Bogotá D.C. MEN.
- Posada, Fabián; Obando, Gilberto (ed.), *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, Módulo 2*, Medellín, Gobernación de Antioquia, 2006, ISBN 958-9172-81-4
- Toulmin, S.E. (2007), *Los usos de la argumentación*, Península, Barcelona
- VRANCKEN, S; ENGLER, A. (2008). *Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio*. Universidad nacional del Litoral. Argentina

4. Contenidos

El siguiente trabajo está dividido en 5 capítulos.

El primer capítulo hace referencia al planteamiento del problema, en este encontraremos el planteamiento del problema y los objetivos general y específicos propuestos para el proyecto.

En el segundo capítulo se encuentra el marco de referencia, donde se habla del pensamiento variacional y cómo a través de la variación se llega al concepto de derivada. También se habla sobre la argumentación el cual es el énfasis de la especialización

En el tercer capítulo se encuentra la metodología y como está diseñada la propuesta.

El cuarto capítulo hace referencia al análisis de resultados partiendo del diseño de momentos de clase, entendiéndose por momentos a instantes de la actividad con características en común. También se realiza una serie de comentarios basados en el análisis de los momentos

El quinto capítulo hace referencia a las conclusiones, las cuales se dividen en dos partes, la

primera hace mención a la relación directa con los objetivos generales y específicos del trabajo, y la segunda a aspectos generales recogidos a lo largo de todo el proyecto

5. Metodología

Con el propósito de identificar y describir cómo los estudiantes se aproximan a la noción de derivada mediante la resolución de problemas físicos relacionados con la variación y el cambio, se prepararon actividades, en las que además, se busca describir los argumentos logrados al desarrollar estos problemas y determinar si potencian la argumentación y aproximan a la noción de derivada.

La propuesta se implementó en la Institución Educativa Rural Departamental Chimbe del municipio de Albán. Esta secuencia se realizó con un grupo de estudiantes del grado once que oscilan entre los 15 y 18 años, a los cuales se les pidió que formaran grupos de 3 estudiantes para la solución de la misma. En este diseño, se consideró que pudieran resolver las distintas actividades apelando a sus conocimientos previos.

Teniendo como material de trabajo, las actividades en físico resueltas por los estudiantes, los audios de las discusiones que dentro de cada grupo generaban las actividades y de las socializaciones el análisis se dividió en conversaciones, a estas conversaciones con características en común se les denominó momentos, la información de cada momento quedó recogida dentro de una matriz cuya finalidad de análisis fue la de relacionar la información recogida con los propósitos establecidos para el trabajo, y se diseñó con base en 3 elementos que son: descripción general, descripción detallada y lo que sustenta la relación de éste momento con los objetivos planteados. Una vez se consideró que éstas matrices cumplieran con los requerimientos deseados fueron incluidas en el análisis del trabajo a manera de texto.

6. Conclusiones

El objetivo general fue identificar y describir cómo los estudiantes se aproximan a la noción de derivada mediante la resolución de problemas físicos relacionados con la variación y el cambio. Con respecto a este objetivo se puede decir, que con la propuesta elaborada se logró la formación de las ideas variacionales y la comprensión de los conceptos básicos del cálculo, especialmente de la derivada, en la mayoría de los alumnos que participaron en la experiencia pedagógica, ya que a medida que se desarrollaron las tareas propuestas los estudiantes iban argumentando sobre las diferentes variables que intervienen en el movimiento, estableciendo además de sus relaciones las diferencias existentes en cada caso en particular

El primer objetivo específico fue Describir los argumentos logrados por los estudiantes al desarrollar un problema físico que involucre variación y cambio. Respecto a este objetivo se detectó que no en todas las respuestas dadas se evidencia un proceso argumentativo, a pesar de esto, se observó que el desarrollo de las distintas actividades favoreció el surgimiento de algunos argumentos en torno a la variación.

El segundo objetivo específico fue determinar si las tareas que involucran procesos de variación y cambio potencian la argumentación y aproximan a la noción de derivada. Podemos mencionar que

la resolución, o el intento de solución de las distintas actividades fue significativo, los estudiantes lograron realizar en determinadas actividades procesos argumentativos, aunque se debe decir que guiados por el profesor.

Elaborado por:	Gómez Morales John Jairo; Martínez Gómez Cesar Augusto
Revisado por:	Soler, Nubia

Fecha de elaboración del Resumen:	3	12	2015
--	---	----	------

CONTENIDO

INTRODUCCION.....	12
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	14
JUSTIFICACIÓN	14
OBJETIVOS	16
OBJETIVO GENERAL	16
OBJETIVOS ESPECIFICOS.....	16
MARCO DE REFERENCIA	17
METODOLOGIA.....	24
ANÁLISIS	27
CONCLUSIONES.....	40
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	44
ANEXOS	47
ANEXO 1. Secuencia didáctica piloto.....	47
ANEXO 2. Secuencia didáctica final.....	52
ANEXO 3. Transcripciones de los momentos.....	59

INTRODUCCIÓN

Según los estándares curriculares, en Colombia se hace necesario pasar de una enseñanza orientada sólo hacia el logro del objetivo específico relacionado con el contenido de un área, a una enseñanza que oriente a apoyar a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas y ciudadanas. Por lo tanto, en la enseñanza de las matemáticas se asume la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, de tal suerte que se permita al grupo deliberar, conjeturar y tomar decisiones.

El desarrollo del pensamiento variacional es lento y complejo, además en las situaciones de aprendizaje se dan oportunidades para formular conjeturas, pruebas, generalizaciones y todo lo relacionado con el pensamiento lógico y el pensamiento científico.

El siguiente proyecto de grado se titula “una aproximación a la derivada desde la variación y el cambio”, consiste en una secuencia de actividades que se implementó en la Institución Educativa Rural Departamental Chimbe del municipio de Albán y busca generar nuevas estrategias de aprendizaje para que los estudiantes de grado once, además dar respuesta a la problemática planteada en los estándares curriculares del MEN puedan adquirir una mejor interpretación de la noción de derivada y obtener mayor riqueza en sus argumentos.

Esta propuesta es una adaptación del instrumento utilizado en el trabajo realizado por Silvia Vrancken y Adriana Engler titulado “Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad” la cual fue rediseñada pensando en el contexto de los estudiantes. Se ha realizado en 3 sesiones, la primera aborda el tema de movimiento rectilíneo uniforme en donde se contextualiza la situación tomando puntos de referencia conocido por los estudiantes como lo son Pantanillo,

Facatativá y Bogotá, en esta sesión se pretende que el estudiante centre su atención en las variaciones del movimiento en términos del tiempo, la observación de estas variaciones se da por medio algebraico donde consignaran datos en una tabla y por medio de una observación de la gráfica.

En la segunda sesión continua un ejercicio de movimiento rectilíneo uniforme, pero en éste, se busca que el estudiante retome y observe el concepto de proporcionalidad, por medio de la observación y de una tabla que se debe completar donde se evidencia este objeto matemático.

En la tercera y última sesión se trabajaron relaciones de razones de cambio con las pendientes de las rectas secantes y tangente de una curva procurando que el estudiante visualice el paso a recta tangente por medio de sucesivas rectas secantes, además, que evidencie, por medio de una tabla lo que sucede con la velocidad media cuando la razón de cambio del tiempo tiende a cero, es decir la rapidez, concepto que será el punto de llegada del desarrollo de la actividad, para dar paso a la conclusión ,que conlleva a la derivada. Teniendo en cuenta lo expuesto, se sostiene que el planteo en el aula, de situaciones que requieran el desarrollo de argumentos y estrategias variacionales puede favorecer la comprensión significativa del concepto de función y colaborar al desarrollo del pensamiento y lenguaje Variacional de los estudiantes.

En los capítulos siguientes se describe la metodología realizada, que se centra en la transcripción de la información que se obtuvo y su respectivo análisis, seguido de las conclusiones.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

JUSTIFICACIÓN

La matemática juega un rol importante cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y las variaciones que se producen. El cálculo tiene reconocida su importancia porque permite encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos. En particular, la derivada permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Sin embargo, en el sistema educativo se han priorizado, en general, procesos de construcción y validación formales así como los aspectos algorítmicos. Artigue (1995) manifiesta que la enseñanza universitaria del cálculo, aunque tenga otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica, o en la aplicación de métodos tradicionales de demostración matemática.

De esta manera, si bien se logra que los estudiantes deriven, integren o calculen límites elementales, no son capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas. Al respecto, Dolores (2007b, p. 1) expresa que los estudiantes “[...] difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto”.

Con base en esto, la siguiente propuesta presenta un diseño que propone actividades para estudiantes de grado once en donde se evidencie el aprendizaje de la noción de derivada por medio de un problema físico, más específicamente el concepto de velocidad instantánea.

Tal vez el aporte de este estudio, como ejercicio de verificación, pueda contribuir a identificar la relación existente entre las características o elementos de la variación y el cambio, que se describirán más adelante y si éstas, involucradas en

un problema o tarea propuesta logran a través de la argumentación aproximar a la noción de la derivada y de si también reflejan tal vez una visión objetiva las fortalezas en términos de manejo de los conceptos de los estudiantes que presentan en la tarea.

De acuerdo con el MEN (2006), la contribución de la matemática a los fines generales de la educación corresponde entre otros aspectos, aportar a la formación por medio del desarrollo de competencias argumentativas:

“Esto implica reconocer que hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad (p. 48).”

Es por esto que se hace necesario implementar cierto tipo de tareas que generen procesos de argumentación, en el sentido que se pretende verificar hasta donde ciertas actividades permiten promover la construcción de argumentos fuertes, dando herramientas a los estudiantes a la hora de presentar y validar un resultado, este proyecto busca acercarse a través de ellas a la noción de la derivada con base a las tareas propuestas enfocadas en la variación y el cambio.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Identificar y describir cómo los estudiantes se aproximan a la noción de derivada mediante la resolución de problemas físicos relacionados con la variación y el cambio.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

Describir los argumentos logrados por los estudiantes al desarrollar un problema físico que involucre variación y cambio.

Determinar si las tareas que involucran procesos de variación y cambio potencian la argumentación y aproximan a la noción de derivada.

MARCO DE REFERENCIA

Este trabajo está fundamentado en la base teórica del pensamiento y lenguaje Variacional y en la argumentación, de acuerdo a esto, se darán unos conceptos claves para el desarrollo de la nuestra propuesta.

El pensamiento y lenguaje Variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (CANTORAL et al., 2003, p. 185).

Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, la variación y los infinitesimales. Esta etapa se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo, en interacción constante con problemas geométricos y físicos.

El origen del cálculo está relacionado con los incrementos y las cantidades de cambio. El estudio de la variación en los fenómenos dinámicos es lo que condujo en sus comienzos al estudio de la derivada y al desarrollo del análisis. Los procesos de medir, cuantificar y establecer leyes para el cambio y la variación están en el origen de la noción actual de derivada y su evolución histórica.

La incorporación de elementos variacionales y el otorgamiento de significado a los distintos elementos relacionados a la variación en estudio favorecerán la construcción de la derivada. En un sentido más amplio, influirán positivamente en el desarrollo del pensamiento Variacional de los alumnos, y, también, de su lenguaje Variacional, en tanto sean capaces de comunicar sus ideas (TESTA, 2004; DOLORES, 2007b; BUENDÍA; ORDÓÑEZ, 2009).

Como parte del pensamiento matemático, el pensamiento y lenguaje Variacional se relacionan con el estudio de las estrategias y acciones que los estudiantes utilizan cuando se enfrentan a situaciones que requieren el análisis del cambio. Cantoral y Farfán (2003, p. 185) expresan que: "El pensamiento y lenguaje Variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales." Por otro lado, en los estándares básicos de competencias desarrollados en Colombia por el Ministerio de Educación Nacional (2006, p. 66) se señala:

"[...] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos."

En el mismo documento se manifiesta que uno de los propósitos de cultivar el pensamiento Variacional es construir, desde la educación primaria, distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, más adelante, del cálculo diferencial e integral. Este tipo de pensamiento tiene un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y la matemática misma. Interesa, entonces, identificar las características del pensamiento y lenguaje Variacional y la forma en que se desarrolla. Cabrera (2009, p. 55) expresa que este tipo de pensamiento se caracteriza por *"proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, a partir de las intuiciones y concepciones de los estudiantes, las cuales se trabajan y hacen*

evolucionar a través de situaciones problemas". De esta manera las nociones de variación y cambio son fundamentales en el pensamiento y lenguaje Variacional, centrándose en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando lo que cambia, cuantificando ese cambio y analizando cómo se dan esos cambios

Para favorecer su desarrollo se debe procurar el planteo de situaciones variacionales, entendiéndolas como el conjunto de problemas que requieren de un tratamiento Variacional tanto desde el punto de vista de las funciones cognitivas de quienes las aborden como desde la perspectiva matemática y epistemológica. Su resolución implica el análisis de distintos estados del cambio y la utilización de argumentos y estrategias variacionales, los cuales permiten el entendimiento y la explicación de los procesos de variación involucrados en los fenómenos de cambio. Una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando "hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p. 464).

En relación con los procesos cognitivos implicados, las situaciones deben ser tales que los alumnos no necesiten sólo recurrir a la memoria para responderlas, sino que los conduzcan a que validen, modifiquen o construyan argumentos. El tratamiento y conversión entre distintas representaciones será de fundamental importancia para el entendimiento de las situaciones de variación. Al respecto, Posada y Obando (2006, p. 16) manifiestan:

"El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación "gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales, para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se

hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión."

El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los rasgos esenciales que caracteriza al pensamiento Variacional. Vasco (2003) señala que este estudio implica la apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otras y da la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional. De esta manera las nociones de variable y función constituyen la base de la matemática de la variación y el cambio.

El desarrollo de este pensamiento, a lo largo de nuestro trabajo estará conectado con la argumentación, de la cual mencionaremos lo siguiente:

La argumentación es un discurso dirigido a un receptor con el fin de justificar una opinión partiendo de hechos o datos y razonando los criterios sobre los que se decide la adecuación de la opción elegida. La argumentación aparece ligada, por tanto, a los conceptos de justificación y explicación, tal como ya señalan Perelman y Olbrech-Tyteca (1994), tomando a Jorba (1998, p.48), se tiene que:

“Justificar es producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad con la finalidad de modificar el valor epistémico de una tesis en relación al corpus de conocimientos en que se incluyen los contenidos objeto de esta tesis”

Esto hace que, en el desarrollo de una argumentación, que va dirigida a la justificación, no baste con producir argumentos, sino que sea necesario someterlos a un examen de aceptabilidad. Duval (1999) utiliza los criterios de pertinencia y fuerza para decidir sobre la aceptabilidad de un argumento.

Un argumento se acepta o se rechaza considerando dos criterios, a saber su fuerza y su pertinencia. La pertinencia de un argumento es la relación entre los contenidos de la afirmación y del argumento que la justifica, teniendo que ocurrir que los contenidos semánticos se sobrepongan.

La fuerza de un argumento depende de dos factores. Por un lado, un argumento tendrá fuerza si no se le puede oponer otro argumento: debe resistir un contra argumento, es decir, “no tener réplica”. Por otro lado, un argumento tendrá fuerza en función del valor epistémico que tenga para la persona a la que se dirige: puede ser positivo (evidente, necesario, auténtico...) o negativo (absurdo, posible, inverosímil...). Un argumento que resiste objeciones y que tiene un valor epistémico positivo es un argumento fuerte. Un argumento de este tipo suele implicar la adhesión a la tesis, tanto por parte de otros como de uno mismo.

Siguiendo a Toulmin (2007), sostenemos que los estándares empleados para evaluar argumentos dependen del campo argumentativo al que nos refiramos, es decir, del contexto en el que se inscribe la práctica en cuestión. Los términos que se usan para calificar los argumentos son propios y particulares de esta práctica y su contexto; es decir, son invariantes respecto al campo de argumentación.

Aunque hasta aquí se ha procurado distinguir la explicación de la argumentación, coincidimos con Duval (1999) en que no es posible establecer una línea neta entre ambas prácticas: no es siempre posible decidir si estamos frente a una argumentación o frente a una explicación en función de las características intrínsecas de una proposición.

Coincidimos también con Duval en que ciertos tipos de conectivos son “marcadores habituales”; de modo que los discursos argumentativos “suelen” incluir conectivos argumentativos (también, pero, sin embargo, aunque, etc.) y los discursos explicativos “suelen” incluir conectivos organizativos (porque, en consecuencia, por lo tanto, etc.). Para nuestro estudio, este hecho ha sido considerado tanto en el diseño del instrumento de recogida de datos como en el análisis de los datos.

La palabra demostración se utiliza en distintos contextos con diversos sentidos. A veces estos diversos sentidos y matices se reconocen mediante el uso de términos tales como explicación, argumentación, prueba, etc. Aunque en todos ellos se pueda reconocer una idea común, la de justificar o validar una afirmación (tesis) aportando razones o argumentos; sin embargo, las diferencias en los tipos de situaciones en que se usan, sus rasgos característicos y los recursos expresivos puestos en juego en cada caso pueden ser, de hecho, diferentes. Estas diferencias en las situaciones y prácticas argumentativas indican sentidos distintos del concepto de demostración o bien diversos objetos demostración según el modelo onto semántico adoptado.

Balacheff (1987) utiliza el término explicación como idea primitiva de la cual deriva las de prueba y demostración. Para este autor, la explicación es un “discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado”. Balacheff propone reservar el término prueba para las “explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado” (p. 148). Según esto, para que una explicación sea una prueba ha de ser vista o reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo. El uso que hace Balacheff de explicación difiere del de Duval (1993).

Este autor distingue entre explicación y argumentación por el valor epistémico diferente de las razones aportadas en cada caso: “en la argumentación se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento” (Duval, 1993, p. 40). Consideramos, no obstante, que la idea de explicación de Balacheff puede asimilarse a la noción de argumentación de Duval.

Balacheff y Duval usan el término demostración con significados similares: una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. En matemáticas, un enunciado se asume convencionalmente como verdadero, o bien se deduce de los que le preceden con la ayuda de reglas de deducción tomadas de un conjunto de reglas bien definido cuya validez es socialmente compartida. Para Duval (1993), el objeto de la demostración es la verdad y, por tanto, obedece

a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, obedeciendo a criterios de pertinencia.

Una distinción importante es la que hace Krummeheuer (1995), siguiendo a Toulmin, entre argumentos analíticos y sustanciales. Los primeros son característicos de las deducciones lógicas correctas, siendo tautológicos, esto es, un aspecto latente de las premisas se elabora visiblemente, pero no añaden nada a la conclusión que no fuera ya una parte potencial de las premisas. Los argumentos sustanciales, por el contrario, expanden el significado de las proposiciones en la medida en que relacionan apropiadamente un caso específico a éstas por actualización, modificación o aplicación.

Desde un punto de vista cognitivo, las relaciones entre razonamiento y argumentación consideramos que son las que se establecen entre un constructo y sus indicadores empíricos. Balacheff (1987, p. 148) define el razonamiento como la “actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos”.

Desde nuestro punto de vista, esta actividad intelectual, que no puede reducirse meramente a la manipulación de informaciones, da origen a las prácticas argumentativas personales o institucionales, que constituyen su dimensión ostensiva y comunicacional. Al mismo tiempo, el razonamiento se desarrolla por medio de dichas prácticas, de modo que el estudio del razonamiento está constitutivamente ligado al estudio de la argumentación.

METODOLOGIA

Con el propósito de identificar y describir cómo los estudiantes se aproximan a la noción de derivada mediante la resolución de problemas físicos relacionados con la variación y el cambio, se prepararon actividades, en las que además, se busca describir los argumentos logrados al desarrollar estos problemas y determinar si potencian la argumentación y aproximan a la noción de derivada.

Con respecto a las representaciones gráficas de las funciones, Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009) señalan: “Un acercamiento mayor entre las prácticas humanas cotidianas y las actividades escolares podrían fortalecer el desarrollo de las habilidades sobre interpretación y elaboración de gráficas” (p. 44). De acuerdo con esta postura, se hizo una adaptación del instrumento utilizado en el trabajo de Silvia Vrancken y Adriana Engler “una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad”.

Inicialmente, se tomó la secuencia original y se revisó punto por punto, identificando de ésta manera las preguntas que generaban argumentación en los estudiantes, ésta secuencia se contextualizo al entorno y a cada pregunta se le asignó un propósito en términos de los objetivos del trabajo. Estas adaptaciones se tomaron como prueba piloto y se implementaron en la Institución Educativa Departamental San Juan de Rioseco del municipio del mismo nombre, ver anexo 1, de allí se realizaron de nuevo varias adaptaciones pues se evidencio que algunas preguntas no propiciaban de una manera fluida la argumentación en los estudiantes, ver anexo 2. Finalmente y después de realizados los cambios pertinentes, la propuesta se implementó en la Institución Educativa Rural Departamental Chimbe del municipio de Albán. Esta secuencia se realizó con un grupo de estudiantes del grado once que oscilan entre los 15 y 18 años, a los cuales se les pidió que formaran grupos de 3 estudiantes para la solución de la misma. En este diseño, se consideró que pudieran resolver las distintas actividades apelando a sus conocimientos previos.

El grado once al que se aplicó la secuencia es un grupo formado por 14 estudiantes, por ser una institución rural y además oficial la mayoría de ellos provienen de veredas cercanas y son transportados al colegio por medio de rutas escolares. Previo al inicio de la implementación de éste proyecto, los estudiantes estuvieron de acuerdo en participar de él, ya que fueron motivados por la idea de llegar paralelamente, por un camino distinto a la clase de cálculo, a un tema en común, que en el cronograma de contenidos aparece como derivación.

Una vez finalizada cada actividad se realizó una socialización, en donde cada grupo aportó su solución y la manera como llegó a ésta, se intentó resaltar los aspectos variacionales, se corrigieron y se complementaron las distintas respuestas. Esta socialización, con los logros, dificultades y errores observados fue utilizada más adelante para el desarrollo del análisis de una manera objetiva, ya que sirvieron de insumo para determinar los momentos en que se evidenció que los estudiantes argumentaban y a partir de allí determinar de manera más detallada cómo se acercaban a los propósitos iniciales del trabajo.

Distintos elementos dan cuenta del desarrollo del pensamiento variacional. Estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. Es en este sentido que nos referimos a los argumentos de tipo variacional. Decimos que una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (CANTORAL; MOLINA; SÁNCHEZ, 2005).

Teniendo como material de trabajo, las actividades en físico resueltas por los estudiantes, los audios de las discusiones que dentro de cada grupo generaban las actividades y de las socializaciones, se procedió a realizar una revisión profunda a cada elemento recogido, se realizó una transcripción de ésta información con el fin de realizar una lectura más específica y objetiva de ésta, ver anexo 3. Seguido a esto se identificaron los fragmentos en donde se evidenció

argumentación junto con las nociones de cálculo que allí se encontraron, se dividieron por características en común, es decir por las conversaciones generadas a partir de una pregunta de las actividades propuestas, dentro de las cuales están “¿en que trayecto es más rápido el automóvil?” haciendo referencia a la primera actividad, “¿Qué sucede con la velocidad media cuando t_1 se acerca a t_0 ?” haciendo referencia a la cuarta actividad, entre otras. Va la pena aclarar que después de realizada la revisión del material recogido se evidencio que no todas las preguntas generaron argumentación. A estas conversaciones con características en común se les denomino momentos, la información de cada momento quedo recogida dentro de una matriz cuya finalidad de análisis fue la de relacionar la información recogida con los propósitos establecidos para el trabajo, y se diseñó con base en 3 elementos que son: descripción general, descripción detallada y lo que sustenta la relación de éste momento con los objetivos planteados. Una vez se consideró que éstas matrices cumplían con los requerimientos deseados fueron incluidas en el análisis del trabajo a manera de texto.

ANÁLISIS

Para analizar la información, se tuvieron en cuenta las producciones escritas de 5 grupos de trabajo así como de los videos y audios que se grabaron por equipos y durante las socializaciones de cada actividad. Seguido a esto y como primer paso en el análisis, se presentan los momentos uno a uno con los 3 elementos mencionados en el capítulo anterior que son: descripción general, descripción detallada y lo que sustenta la relación de éste momento con los objetivos planteados. Como segundo paso se describe de forma detallada las observaciones que se hicieron a los momentos y que permitieron alcanzar los objetivos del trabajo de grado.

A continuación se mencionan los momentos:

Momento 1.

Descripción general:

Por grupos hallaron los valores correspondientes en cada trayecto y luego se discute sobre el trayecto en que el automóvil fue más veloz, se presenta un desacuerdo parcial por una lectura errónea de la gráfica por parte de un grupo, el cual es superado por la intervención de los demás grupos.

Descripción específica:

Argumentación: un grupo afirma que en un trayecto específico la rapidez es 50 por 23 minutos. Otros grupos manifestaron inmediatamente que no era acertada la afirmación porque ese grupo había interpretado de manera inadecuada la gráfica, dijeron que la distancia había sido 50 km en media hora lo que permitía ver que la velocidad era 100 km por hora.

Variación:

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

Hay argumentación porque los estudiantes de los otros grupos presentan un garante que determina la falsedad de la afirmación hecha por el grupo inicial.

Se evidencia aspectos relacionados con la variación porque los estudiantes relacionan las variables de distancia y tiempo en los diferentes trayectos para hablar de rapidez.

Momento 2.

Descripción general:

El profesor viene preguntando con respecto a la actividad 1 acerca del momento en que el automóvil fue más veloz respecto a los diferentes trayectos demarcados en la primera gráfica. Los grupos coinciden en sus respuestas, pero en el momento de sustentarlas, explican confusamente. Entonces el profesor pide explicar porque no escogieron como respuesta el trayecto 7 o final.

Descripción específica:

Argumentación: El grupo 2 toma la vocería y mirando su actividad correspondiente afirman que el automóvil en el trayecto 7 recorrió menos kilómetros, entonces implícitamente se descartaría como el más rápido, pues en el trayecto 3 recorrió más kilómetros. El profesor pide aclarar esta afirmación, pero en ese momento ignora que el tiempo del trayecto 3 y 7 era el mismo, por lo que los estudiantes solo argumentaron la rapidez en relación únicamente a las distancias recorridas.

Variación: El grupo 2 empieza a diferenciar entre diferentes velocidades cuando el tiempo es idéntico y sus distancias de recorrido no.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

El grupo 2 utiliza los datos encontrados y establece un argumento de rapidez elemental, pero valedero al afirmar que era más veloz el automóvil en el trayecto en que se recorrió mayor distancia, mientras observaban (sin comentarlo) que el tiempo transcurrido era el mismo para los dos trayectos.

Al final entienden la aclaración del profesor y dicen que no bastan solo las distancias para tal conclusión sino también el tiempo.

Momento 3.

Descripción general:

Después de llegar a un consenso sobre el trayecto en que el automóvil fue más rápido, se les pide a los estudiantes que observen en la gráfica que forma tiene ese trayecto.

Descripción específica:

Argumentación: El docente pide observar la gráfica e indicar que forma tienen los trayectos en que el automóvil se mueve más rápido. Un estudiante infiere que a mayor velocidad la recta tiene más inclinación, es decir que la recta es casi vertical, esto es sustentado por otro estudiante indicando que *“como la pendiente es la diferencia de las y sobre la diferencia de las x, en este caso, la diferencia de las y es mucho mayor que la de las x”*.

Variación: el estudiante concluye en que trayecto hubo mayor variación apoyándose en la gráfica.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

El garante es la gráfica misma y es bastante explícita la idea de cómo hallar la pendiente de una recta.

Los aspectos relacionados con la variación están presentes en la idea que tienen sobre inclinación, pues detectan que a mayor variación en el espacio recorrido y menor variación en el tiempo, se da mayor rapidez por lo cual la recta es casi vertical.

Momento 4.

Descripción general:

El profesor hace la socialización de la actividad, en donde interroga sobre la posibilidad de existir una línea vertical que interprete el movimiento del automóvil en el gráfico de distancia vs tiempo (correspondiente), dando un grupo una respuesta errónea, y los otros dos grupos respondiendo asertivamente.

Descripción específica:

Argumentación: el grupo dos responde correctamente y además explica que es imposible avanzar el automóvil con un tiempo estático o sin transcurrir.

Variación: El grupo dos tiene bien definida la concepción gráfica de variación de la distancia recorrida en el tiempo.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

El grupo llega a una conclusión categórica, utilizando un respaldo o ley universal acerca de la imposibilidad de movimiento en un tiempo cero, además tienen claro el tipo de variación que se está tratando en la propuesta didáctica.

Momento 5.**Descripción general:**

El profesor pregunta de acuerdo a la actividad, si Δt (tiempo) es constante y Δs (distancia) también es constante, además de la justificación de la respuesta, los grupos 1.2.3 responden que no.

Descripción específica:

Argumentación: el grupo 3 explica que en los diferentes intervalos los datos de tiempo no son uniformes, pero el grupo 1 agrega a esta afirmación que la variable s (distancia) depende del tiempo, por lo cual no es constante también.

Variación: El grupo 1 concluye el tipo de variación que se da en la actividad, además de la variable dependiente.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

El grupo 1 uso inicialmente como garante la conclusión del grupo 3, y la propia de acuerdo a labor desarrollada en la actividad, y al concepto de movimiento constante se argumenta del tipo de movimiento además de la dependencia de la distancia respecto al tiempo.

Momento 6.

Descripción general:

El docente socializa preguntando acerca de las diferencias del movimiento de dos móviles, de acuerdo a las figuras de la actividad.

Descripción específica:

Argumentación: El grupo 1 se destaca de los otros en que además de deducir los diferentes tipos de movimiento, argumenta que hay una aceleración implícita en una gráfica, la cual marca la diferencia de movimientos.

Variación: el grupo 1 encuentra un tipo de variación nuevo y la llama aceleración.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

El grupo 1 hace una aserción novedosa con base a los garantes encontrados en las actividades anteriores y encuentra un nuevo concepto de variación, la aceleración. Implícitamente afirma que hay movimientos de velocidad constante que carecen de aceleración. Este es un tipo de argumento formalmente valido (según Toulmin).

Momento 7.

Descripción general:

El docente indaga si de acuerdo a los datos encontrados en la actividad, además de lo aprendido hay proporcionalidad en dicho movimiento.

Descripción específica:

Argumentación: el grupo 1 hace uso de los datos hallados, además del concepto de proporcionalidad lineal para concluir (argumentar) que el tipo de movimiento no es proporcional para los diferentes intervalos de tiempo, esto en relación a la velocidad.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

El grupo 1 diferencia con facilidad los diferentes tipos de movimiento analizados, argumentando que si fuera proporcional el movimiento daría una posición deducible con solo los intervalos de tiempo y la velocidad en cualquier momento.

Momento 8.

Descripción general:

El grupo dos completa la tabla enunciada en la actividad 3, que consiste en la gráfica de posición vs tiempo de una piedra lanzada hacia arriba. En un primer intento el grupo 1, discutió sobre el concepto proporción pero no avanzó, en cambio el grupo dos mejoro en ciertos conceptos gracias a la dirección del docente.

Descripción específica:

Argumentación: El profesor encamina a los estudiantes a observar las regularidades encontradas en la tabla desarrollada por el grupo. Al final concluyen: que en los diferentes puntos de la piedra, va aumentando y va disminuyendo una unidad, y en sus apuntes aclaran que Δt es el mismo.

Variación: Los estudiantes encuentran un tipo de variación diferente al del móvil, del ejercicio anterior. Negando el argumento propuesto en la pregunta.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

Los estudiantes logran enfocarse en los datos de la tabla desarrollada y descubren la regularidad implícita allí, entonces esto lo utilizan como garante para argumentar en la siguiente pregunta, acerca del tipo de movimiento, afirmando que tiene velocidades diferentes, aun en pequeños trayectos, es decir la velocidad no es constante, ni de proporción lineal.

Momento 9.

Descripción general:

De acuerdo a la tabla desarrollada en la actividad, la cual describe el movimiento de una piedra que es lanzada hacia arriba, el profesor pregunta si existe una

regularidad en los valores encontrados, a lo que responde el grupo 3 afirmativamente y confirmando la no proporcionalidad de la velocidad en este tipo de movimiento.

Descripción específica:

Argumentación: El grupo 3 se vale de los datos de la tabla desarrollada en la actividad correspondiente, y del concepto de variación de distancia con respecto a tiempo para concluir que la variación (velocidad) no tiene proporcionalidad, aunque hallan una regularidad en delta s cada 0.5 segundos, aun no la interpretan.

Variación: Ya a estas alturas tienen un concepto claro de las distintas clases de velocidad, pero no de la aceleración.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

El grupo 3 utiliza cada vez con mayor facilidad los garantes desarrollados y encontrados en las diferentes actividades, para argumentar el tipo de variación de la distancia en relación al tiempo, y a partir de esto se espera sigan construyendo y encontrando nuevos conceptos implícitos en las actividades finales, con la menor ayuda del docente posible.

Momento 10.

Descripción general:

Se discute sobre una regularidad presentada en la tabla en la columna de Δs , se indaga sobre qué clase de números son, pares, impares, decimales, y se llega a una regularidad.

Descripción específica:

Argumentación: Sobre ésta columna se determina que no son pares ni impares, son decimales, además presentan un argumento visual, en donde se evidencia que los números aumentan y disminuyen de una unidad en una unidad

Variación: la variación se hace presente ya que para llegar a estos números tuvieron que hallar la razón de cambio de la variable tiempo.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

Se determina, por medio de un argumento, una regularidad, que consiste en que los números van disminuyendo de una unidad en una unidad.

Se presenta variación en el momento en que se determina, tanto la razón de cambio de la variable tiempo como de la variable distancia.

Momento 11.**Descripción general:**

Sobre la pregunta de qué pasa cuando t_1 , se acerca a t_0 , se comenta que pasaría de ser una recta secante a una tangente, pero se habla que no puede ser por el hecho de que cuando se halle la razón de cambio de la variable tiempo, ésta va a dar cero por lo tanto sería inconsistente .

Descripción específica:

Argumentación: un grupo afirma que cuando t_1 , se acerca a t_0 y llega a ser el mismo punto, pasaría de ser una recta secante a una recta tangente, para lo cual el profesor le indica que realice las razones de cambio necesarias para hallar la velocidad y además le pregunta si la razón de cambio de la variable tiempo se encuentra arriba o abajo en la razón, para lo cual el estudiante le responde que abajo y razona en que esa división no se puede realizar, por lo que el paso de recta a secante a recta tangente no es clara.

Variación: los estudiantes, por medio de la tabla, coinciden en que cuando t_1 se acerca a t_0 la razón entre la variable distancia y la variable tiempo tiende a ser una constante.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

Aunque no es tan clara la argumentación, un grupo da un razonamiento válido cuando menciona que algebraicamente no es tan evidente el paso de una recta secante a una recta tangente.

Se evidencian aspectos relacionados con la variación porque los grupos evidencian que cambios pequeños en Δt llevan a una constante en la velocidad media.

Momento 12.

Descripción general:

Se discute sobre lo que sucede con la parábola y la recta cuando t_1 se acerca a t_0 , un grupo afirma que en algún momento la recta se va a separar de la parábola, lo que inmediatamente es refutado por otro grupo.

Descripción específica:

Argumentación: un grupo asegura que en algún momento la parábola se va a separar de la recta cuando t_1 se acerca a t_0 , *“porque en la última gráfica vemos que los dos puntos se unen bastante y que la parábola está a la izquierda de la recta, en cambio en la primera gráfica, la parábola corta la recta, por eso decimos que en algún momento no la va a tocar”* lo que es refutado por dos grupos, el primero dice que es falso porque *“en el punto c de la actividad dice que pasa si los dos puntos son los mismos, es decir que ya no se van a cortar en dos puntos sino en uno, por eso decimos que no, que no se alcanzan a separar”* y el otro grupo dice *“profe lo que usted mencionaba del zoom, si hacemos ese pedacito bien grande siempre se va a cortar en dos puntos”*.

Variación: aunque un grupo describe de forma errónea el comportamiento de las gráficas cuando t_1 se acerca a t_0 , los otros grupos interpretan de una manera más acertada el proceso de variación que subyace en esta razón de cambio del tiempo.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

Hay argumentación porque los estudiantes de los otros grupos presentan un garante que determina la falsedad de la afirmación hecha por el grupo inicial.

Se evidencian aspectos relacionados con la variación porque los estudiantes relacionan los cambios pequeños de la variable tiempo con los cambios producidos por estos mismos en la variable distancia.

Momento 13.

Descripción general:

La actividad 4, hace parte de la tercera sesión, en donde se proporcionan 8 gráficas de movimiento con velocidad no constante y que describe una parábola, que relaciona distancia vs tiempo. Se debe hacer uso de dichas gráficas para completar la tabla sugerida, que pide los Δs (distancia) y los Δt (tiempo), marcados por diferentes rectas secantes en el mismo movimiento.

Al final de este momento se pregunta qué sucede en el instante $A=B$, es decir cuando Δt (tiempo) es igual a cero. Un estudiante manifiesta que existe (ese instante) pero la función no dejaría.

Descripción específica:

Argumentación: Los estudiantes del grupo 2 afirman en base a las observaciones o datos obtenidos que a medida que Δt tiempo se hace más pequeño, entonces (conclusión) la velocidad media se acerca a 2. En relación a la pregunta en que $\Delta t = 0$, el grupo dos afirmo que era imposible utilizar la tangente, entonces se hacía necesaria la secante.

Variación: Los estudiantes llegan adicionalmente a una aseveración acerca de la variación en ese instante cercano, cuando Δt (tiempo) se acerca a cero. Están hallando el punto de encuentro cercano de la velocidad tangente o media y la rapidez (en un instante). Es de aclarar que ha esta conclusión llegaron la mayoría de grupos.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

La aseveración la hacen cumpliendo la observación gráfica y numérica, además la pregunta ayuda a responder y reconfirmar que la velocidad es media en esos puntos cercanos, pues empiezan a dar el mismo valor de velocidad, con un insignificante error de milésimas. Los estudiantes han construido, con ayuda de las

actividades y del profesorado conceptos que llevaron a la definición de derivada en sus comienzos de una forma básica.

Es de manifestar que aquí se dedujo un argumento que satisface el modelo argumentativo de Toulmin. La combinación de actividad gráfica y numérica produce buenos efectos en los argumentos de los estudiantes. El grupo dos saca una conclusión apresurada (al final de este momento) debido a la ausencia del concepto de límite.

Momento 14.

Descripción general:

Se plantea nuevas preguntas para los estudiantes. De acuerdo a una ecuación de movimiento se debe completar una tabla, preguntándose sobre la velocidad media y si hay un límite involucrado en los resultados encontrados.

Descripción específica:

Argumentación: Los estudiantes tienen más garantías de acuerdo a los resultados previos y de la tabla presente, para tomar el valor del límite, para cada ejercicio propuesto, además la pregunta los disuade de concluir más fácilmente. Se formula el límite de cada función (no lineal) cuando Δt (tiempo) tiende a cero, como si fuera lineal. Es decir se ha llegado a un concepto nuevo para los estudiantes, muy cercano al de derivada de una función.

Evidencias sobre lo argumentativo y Variacional:

Los estudiantes han avanzado poco a poco en sus aseveraciones, gracias a los garantías descubiertos y desarrollados en las distintas sesiones. Es fundamental la ayuda del docente, así como de conocimientos previos a la propuesta didáctica, además el tiempo y cansancio juegan en contra de los objetivos, sin embargo se observó la construcción de argumentos valederos en cuanto se acercaron (los estudiantes) a conceptos de derivada de una función sin pasar por límite.

COMENTARIOS

En cada implementación se observa cómo en la argumentación que están construyendo emplean garantes deducidos por ellos mismos, y no impuestos por el docente. Mediante esta implementación se destaca el cambio de roles, tanto del docente como de los estudiantes, lo cual permite mayor participación del alumnado y el docente participa como moderador de la actividad hecha en clase, esto dio más dinamismo y permitió a los estudiantes construir conocimiento de una forma efectiva y sin el tradicional traumatismo que experimentan algunos estudiantes en otras labores de la matemática.

Se observa una evolución cognitiva en cuanto se avanza en las implementaciones propuestas, los estudiantes poco a poco van adquiriendo mayor destreza en sus conclusiones, además en las diferentes socializaciones son más participativos y asertivos en sus afirmaciones.

Se plantea por parte de un estudiante la imposibilidad de obtener la rapidez de un móvil en un instante dado haciendo uso de la secante y la función que describe su movimiento al mismo tiempo, lo cual es la puerta de entrada para llegar al concepto y papel que desempeña la derivada de la función o la tangente en ese punto, para determinar la rapidez o velocidad en un instante de tiempo.

En el desarrollo de las actividades propuestas y en las etapas de socialización, los estudiantes utilizaron ideas, estrategias, procedimientos relacionados al pensamiento variacional. Asimismo, plantearon argumentos y utilizaron lenguaje característico de este tipo de pensamiento.

El papel del docente en este tipo de actividades termina siendo de moderador y orientador de la discusión, pues los estudiantes en ocasiones pierden el camino cuando utilizan diferentes tipos de argumentos para probar y defender sus ideas.

En los registros escritos se puede establecer que la información suministrada en algunos casos no es suficiente para identificar y ubicar los argumentos logrados por los estudiantes

Existe cierto olvido de los conocimientos previos necesarios para desarrollar las actividades, por lo cual se hace indispensable la intervención del docente guiando la conversación.

Los estudiantes tienen una formación muy débil del pensamiento variacional, cuando los grupos trabajaban solos eran escasas las ideas, las cuales se activaban con la ayuda del docente.

Al momento de revisar los audios y los videos, se puede evidenciar que las respuestas de los estudiantes son más claras y concretas que las de la prueba escrita.

En la actividad final se destaca cómo en las conjeturas hechas por parte de un grupo se habla de la aceleración y de la velocidad, relacionándolas y diferenciándolas para los diferentes tipos de movimiento, sin haber mencionado durante la implementación el termino aceleración, es decir encontraron la covariación del movimiento.

En esta misma actividad, la mayoría de los grupos lograron conjeturar sobre la velocidad en el instante y el comportamiento en el caso de que los intervalos se hicieran infinitamente pequeños. Su resolución permitió que reconozcan la necesidad de realizar el paso al límite para determinar la razón de cambio instantánea.

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentará primero en qué medida se cumplieron o se consiguieron los objetivos generales y específicos del trabajo y en segundo lugar se mencionarán algunos aspectos generales.

El objetivo general fue identificar y describir cómo los estudiantes se aproximan a la noción de derivada mediante la resolución de problemas físicos relacionados con la variación y el cambio. Con respecto a este objetivo se puede decir, que con la propuesta elaborada se logró la formación de las ideas variacionales y la comprensión de los conceptos básicos del cálculo, especialmente de la derivada, en la mayoría de los alumnos que participaron en la experiencia pedagógica, ya que a medida que se desarrollaron las tareas propuestas los estudiantes iban argumentando sobre las diferentes variables que intervienen en el movimiento, estableciendo además de sus relaciones las diferencias existentes en cada caso en particular. El conocimiento se fue adquiriendo no solo en la resolución de cada taller sino en la socialización impartida por el docente, llegando a conclusiones hechas por los mismos estudiantes. Ellos empiezan las pruebas con escaso conocimiento de velocidad, velocidad constante, velocidad media, aceleración, rapidez (variaciones) de movimiento y al finalizar la propuesta, los argumentos adquiridos por ellos son más significativos por la mayoría de los estudiantes a quienes se les aplicó la secuencia didáctica.

El primer objetivo específico fue Describir los argumentos logrados por los estudiantes al desarrollar un problema físico que involucre variación y cambio. Respecto a este objetivo se detectó que no en todas las respuestas dadas se evidencia un proceso argumentativo, a pesar de esto, se observó que el desarrollo de las distintas actividades favoreció el surgimiento de algunos argumentos en torno a la variación. El análisis del comportamiento de las situaciones propuestas permitieron dos acercamientos a la construcción de nociones fundamentales para el inicio del estudio del cálculo, el cualitativo (a

través de las gráficas y sus interpretaciones) y el cuantitativo (es decir, el numérico, a través de las tablas).

El segundo objetivo específico fue determinar si las tareas que involucran procesos de variación y cambio potencian la argumentación y aproximan a la noción de derivada. Podemos mencionar que la resolución, o el intento de solución de las distintas actividades fue significativo, los estudiantes lograron realizar en determinadas actividades procesos argumentativos, aunque se debe decir que guiados por el profesor. La aproximación a la noción de derivada quedó evidente con el paso al límite de la velocidad media, o como ellos gráficamente lo entendieron mejor, el paso de recta secante a recta tangente. Cabe mencionar, que los aspectos que no pudieron descubrir los estudiantes en la resolución de las actividades fueron abordados luego en un debate grupal y en el desarrollo de las clases siguientes.

Ahora, como aspectos generales tenemos:

El uso de la visualización formó parte del diseño, ya que se buscó que el alumno obtenga información relevante y explique sus conjeturas a través de las gráficas presentadas en las diferentes actividades. Se intentó en todo momento, obtener la máxima información posible de cada una de las situaciones representadas, de manera que se beneficiara el desarrollo de su capacidad de análisis.

La gráfica entonces deja de ser una mera representación geométrica de una expresión algebraica pasando a convertirse en un proceso de modelación que transforma y re-significa al objeto que se está estudiando.

Los estudiantes observaron en ciertas actividades que algunas de las razones de cambio eran constantes, lo cual es muy importante desde nuestro enfoque variacional, ya que los movimientos están determinados por los cambios y el comportamiento de los cambios es el aspecto esencial de la variación.

La metodología de trabajo propuesta logró que todos se involucraran y se dispusieran a analizar las actividades planteadas. La formación de pequeños grupos favoreció también este aspecto, ya que ninguno tomó una actitud pasiva.

El análisis y la interpretación de las respuestas de los estudiantes permitieron detectar distintas dificultades en todas las actividades propuestas. Así, se observaron problemas para identificar las variables que intervienen en una situación, enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables e interpretar el comportamiento de la gráfica de una función.

Las mayores dificultades se relacionaron con el manejo de conocimientos previos necesarios, tanto a nivel conceptual como algorítmico. Por otro lado, la cantidad de nociones involucradas en la secuencia hicieron que los tiempos de trabajo, especialmente en las etapas de validación e institucionalización, fueran escasos. La misma secuencia, distribuida en más sesiones, puede llevar a mejores resultados.

Los estudiantes argumentan con dificultad sin la ayuda del profesor, pues se observó la diferencia en presencia o ausencia del maestro (en los audios), la forma en que los estudiantes cambian sus argumentos y la importancia que le asignan a las aseveraciones de sus compañeros, entonces esto confirma los planteamientos de los lineamientos curriculares al sugerir el cambio de roles tanto de estudiantes como del profesor en una forma activa y dinámica entre ellos para que haya construcción de conocimiento. El papel como moderador y eje rector en las diferentes tareas didácticas es fundamental para dar cumplimiento no solo al desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes sino a los objetivos propuestos en la secuencia didáctica.

El tiempo empleado en desarrollar los temas es un inconveniente serio a la hora de implementar esta metodología de trabajo en el aula. Sin embargo, de esta manera se propicia que los estudiantes produzcan conocimiento matemático y reflexionen sobre sus producciones y generen teoría sobre dicho conocimiento. Todo esto deriva necesariamente en aprendizajes significativos.

Hay momentos en la socialización en que un estudiante va muy bien encaminado y al ser interrumpido por sus compañeros se pierde o confunde con otros razonamientos.

El cansancio afecta a los estudiantes en algunos casos y querían concluir rápidamente cometiendo errores.

En este sentido, teniendo en cuenta los problemas detectados, nos preguntamos qué acciones es posible implementar para subsanar de alguna manera las dificultades relacionadas con el bajo nivel de los conocimientos previos de nuestros alumnos, y qué modificaciones deben plantearse en las actividades propuestas de manera de optimizar el funcionamiento de la secuencia.

Todo lo realizado constituye un aporte significativo al desarrollo del pensamiento Variacional de nuestros estudiantes y también de su lenguaje Variacional, dado que fueron capaces de comunicar sus argumentos.

La definición de derivada surgió de manera natural al final de este desarrollo, planteado a partir de la necesidad de cuantificar los cambios en un instante.

Por otro lado, este trabajo de grado no puede considerarse agotado, la propuesta de la que nos hemos ocupado a lo largo del trabajo es tan solo una primera aproximación tendiente al mejoramiento de la enseñanza de la derivada en el bachillerato.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176
- Cabrera, L. (2009). El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México D.F. México.
- Cantoral, R., MOLINA, J.; SÁNCHEZ, M. Socio epistemología de la Predicción. In: LEZAMA, J.; SÁNCHEZ, M. y MOLINA, J. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2005. p. 463-468.
- Cantoral, R.; FARFÁN, R.; CORDERO, F.; ALANÍS, J.; RODRÍGUEZ, R.; GARZA, A. *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas, 2003.
- Cantoral, R.; FARFÁN, R.; CORDERO, F.; ALANÍS, J.; RODRÍGUEZ, R.; GARZA, A. *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas, 2003.
- Dolores, C. La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. In: DOLORES, C.; MARTÍNEZ, G.; FARFÁN, R.; CARRILLO, C.; LÓPEZ, I.; NAVARRO, C. (Ed.). *Matemática Educativa*:

Algunos aspectos de la socio epistemología y la visualización en el aula.
México: Ediciones Díaz de Santos, 2007a. p. 169-204.

Dolores, Crisólogo; Chi, Andrés; Canul, Eduardo; Cantú, Cristy; Pastor, Crispín,
«De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de
la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática», Unión, 2009,
18, 41-57, ISSN 1815-0640.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y
aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y
aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, Raymond, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento
cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), Investigaciones en Matemática
Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H.
Bauersfeld (eds.), the emergence of mathematical meaning: Interaction in
classroom cultures (p. 229- 269). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Ass.

Ministerio de Educación Nacional. (2006).*Estándares Básicos de competencias*.
Editorial Magisterio. Bogotá D.C. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006).*Estándares Básicos de competencias*.
Editorial Magisterio. Bogotá D.C. MEN.

Perelman, C. y Olbrech-Tyteca, L. (1994). *Tratado de la argumentación*. Madrid:
Gredos.

Posada, Fabián; Obando, Gilberto (ed.), Pensamiento Variacional y Razonamiento
Algebraico, Módulo 2, Medellín, Gobernación de Antioquia, 2006, ISBN 958-
9172-81-4

Testa, Z. Procesos de re significación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo. 2004. 333 f. Tesis (Maestra en Ciencias en Matemática Educativa) – Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México, 2004.

Toulmin, S.E. (2007), Los usos de la argumentación, Península, Barcelona

Vasco, Carlos, «El pensamiento Variacional, la modelación y las nuevas tecnologías». En Ministerio de Educación Nacional (ed.), Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas (Memorias del Congreso Internacional, Bogotá, D.C., 8, 9 y 10 de mayo de 2002), Bogotá, Ministerio de Educación Nacional, 2003, p. 68-77.

Vrancken, S; ENGLER, A. (2008). *Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio*. Universidad nacional del Litoral. Argentina

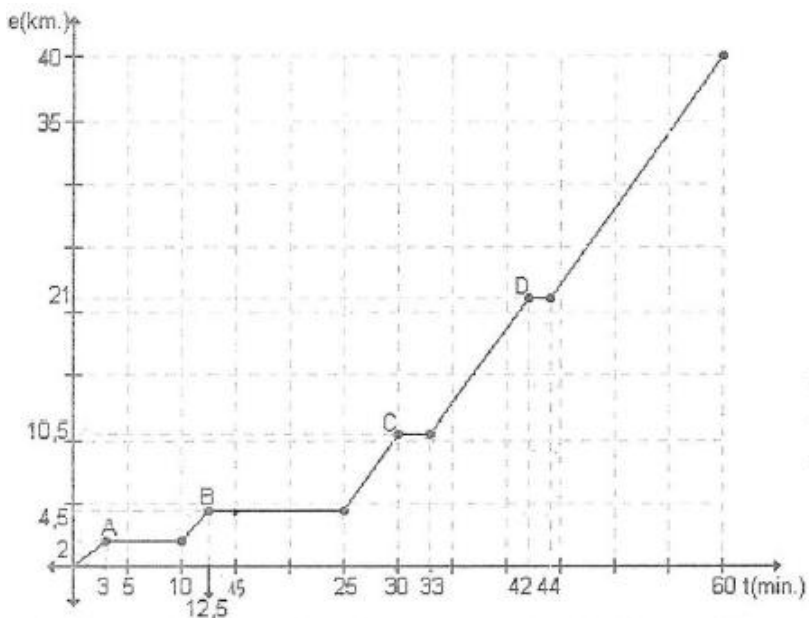
ANEXOS

ANEXO 1. Secuencia didáctica piloto

INSTITUCION EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN JUAN DERIOSECO PROPUESTA DIDACTICA "ARGUMENTACIÓN DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO HACIA EL CONCEPTO DE DERIVADA"

Primera sesión.

Actividad 1. En el grafico se observa la representación del espacio recorrido por un auto en función del tiempo en su trayecto desde San Juan de Rioseco hasta el cruce de Chuguacal



Se tiene como referencias:

- A: Restaurante primavera
- B: Cruce para chaguani
- C: Vianí
- D: Bituima

Responda y **justifique** cada una de las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el auto?, ¿Cómo llega a este resultado?
- b. ¿Cuál fue la velocidad media del auto a lo largo de todo su trayecto?, ¿Cómo llega a este resultado?
- c. ¿Cuál fue la velocidad media en el trayecto realizado desde que salió de Vianí

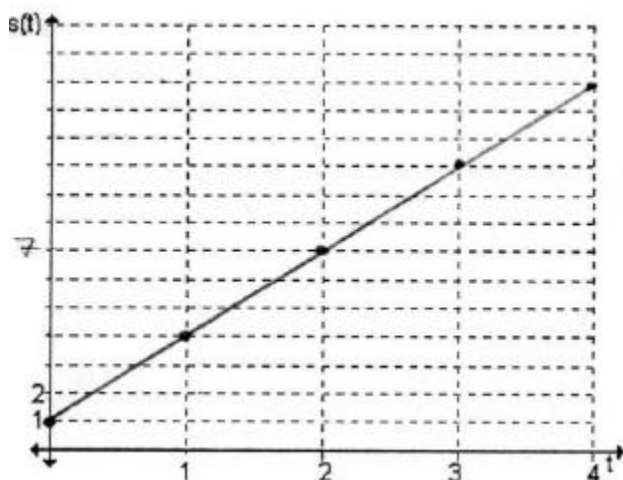
- hasta Bituima?, ¿Cómo llega a este resultado?
- d. ¿Cuál fue la velocidad media entre los instantes 30 y 33 segundos?, ¿Cómo llega a este resultado?

Actividad 2. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla y responda:

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$			
$1 \leq t \leq 2$			
$2 \leq t \leq 3$			
$3 \leq t \leq 4$			

- a. ¿Qué conceptos físicos representan los valores de la última columna de la tabla? ¿Porque? determina las unidades en las que se expresa, justifica

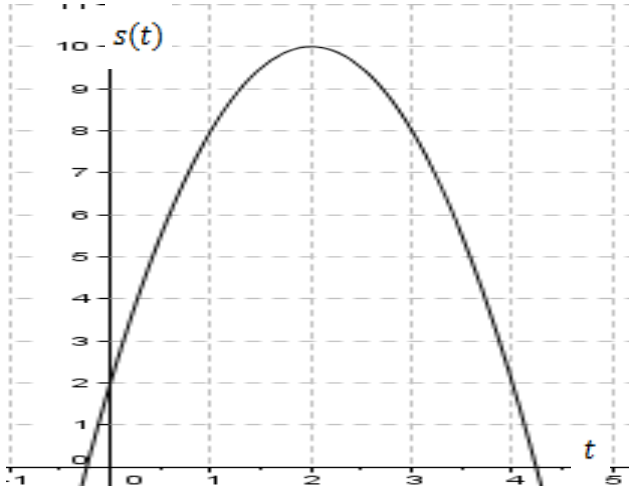
A partir de la siguiente tabla (representación gráfica de $s(t) = 3t + 1$), responda y justifique las siguientes preguntas:



- b. ¿Cuál es la representación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?, justifique
- c. ¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?, ¿por que?
- d. ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?, ¿Cómo ha llegado a este resultado?

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo se mide en segundos, complete la siguiente tabla y responda:

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$		
$1 \leq t \leq 2$		
$2 \leq t \leq 3$		
$3 \leq t \leq 4$		



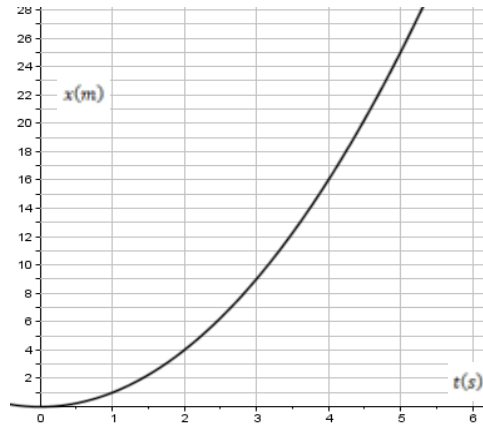
a. ¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto? Justifique.

b. Estime la velocidad a los 3 segundos de iniciado el movimiento, que ha sucedido hasta estos 3 segundos de acuerdo al movimiento

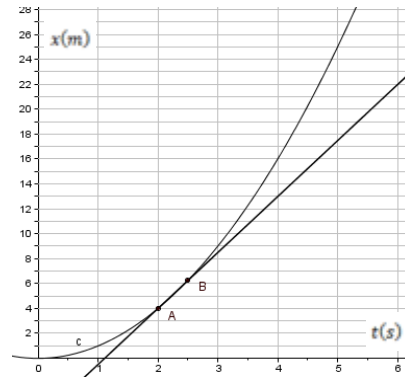
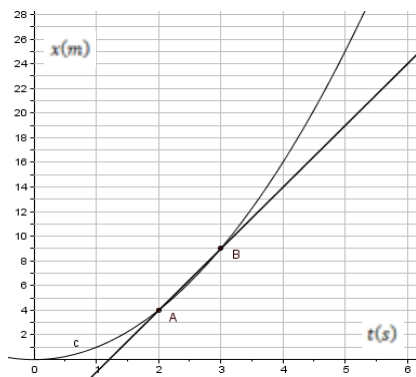
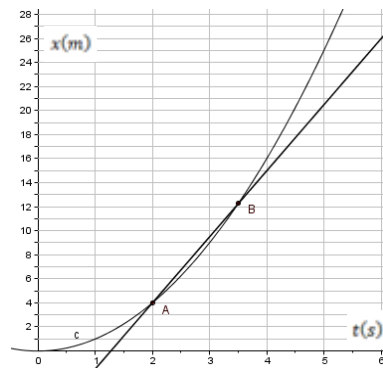
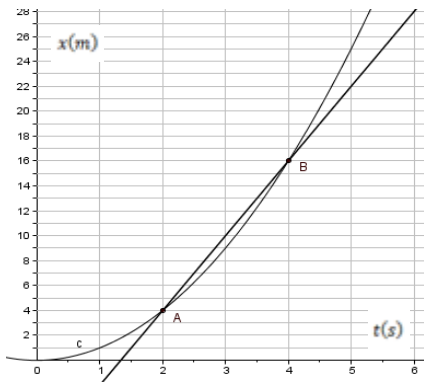
Segunda sesión

Actividad 4.

La siguiente grafica es de una función que describe la posición de una pelota en caída libre



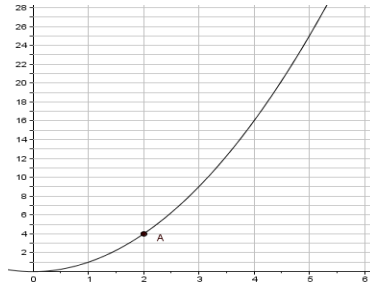
- ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la pelota en el instante $t=2$ segundos?, como llega a ese resultado
- En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B



c. Haciendo coincidir el instante inicial y el final del intervalo, es decir, considerando $t_1=t_2$, ¿qué puede observar si realiza este procedimiento?, explique.

d.

Dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto A, estime su pendiente, ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en a? justifique su respuesta



Actividad 5. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos, está dada por la ley $s(t)=t^3$

a. Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre si

$t_0 \leq t \leq t_1$	$1,9 \leq t \leq 2$	$1,99 \leq t \leq 2$	$1,999 \leq t \leq 2$	$\dots \rightarrow$		$\leftarrow \dots$	$2 \leq t \leq 2,001$	$2 \leq t \leq 2,01$	$2 \leq t \leq 2,1$
Δt									
Δs									
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$									

b. Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿Qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en $t=2$ segundos?. ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuara cumpliendo la conjetura? Justifique.

c. Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso b, ¿Cuál es el significado de $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t}$?, calcule el límite, ¿que observa? explique

ANEXO 2. Secuencia didáctica final

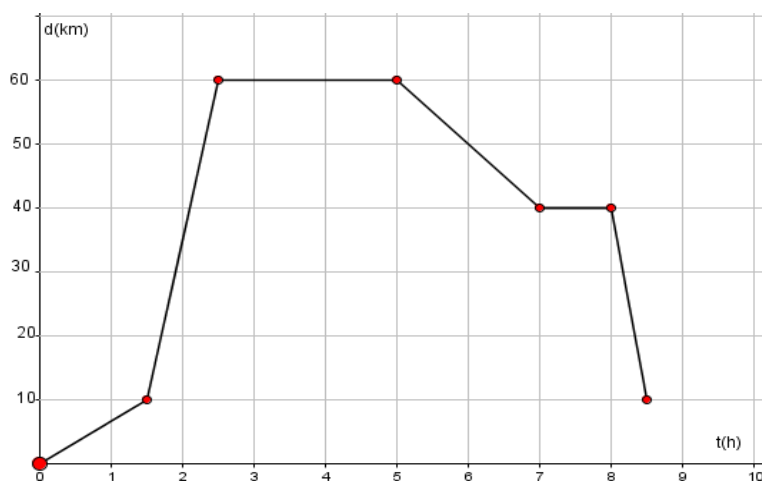
INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL DEPARTAMENTAL CHIMBE PROPUESTA DIDACTICA “UNA APROXIMACIÓN A LA DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO”

Primera sesión.

Grupo No _____

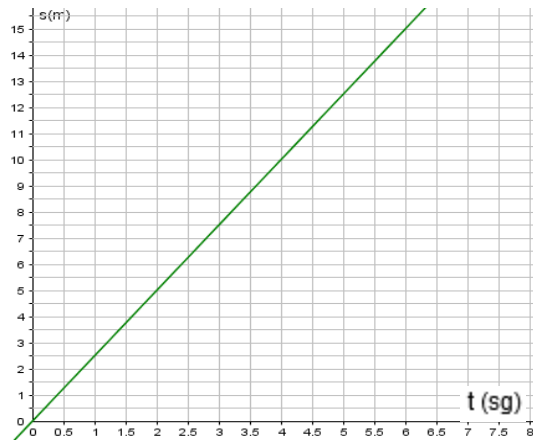
Integrantes:

Actividad 1. La siguiente gráfica representa el movimiento de un automóvil que parte del colegio de Chimbe y se dirige a la ciudad de Bogotá:



- Describe el movimiento del automóvil en los diferentes momentos
- ¿En qué trayecto es más rápido el automóvil? ¿Por qué?
- ¿En qué trayecto es más lento el automóvil? ¿Por qué?
- ¿Cómo determinas que tan rápido o lento va el automóvil?
- Ubica los siguientes puntos en la gráfica : (Facatativá, Pantanillo, Bogotá,)
- ¿Qué sucede con el automóvil en los puntos señalados?
- ¿Es posible que el movimiento del auto sea representado por una recta vertical?
- Observando la gráfica, ¿qué se puede mencionar sobre el concepto de pendiente?
¿todas son iguales?
- ¿Existe una sola velocidad en todo el recorrido?
- ¿Qué puedes mencionar sobre la velocidad promedio del automóvil?

Actividad 2. La siguiente gráfica representa el movimiento de un móvil



Completa la siguiente tabla a partir de grafica anterior

t_0	t_1	Δt	Δs	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
0	2			
1	6			
2	5			
5	6			
0	4			

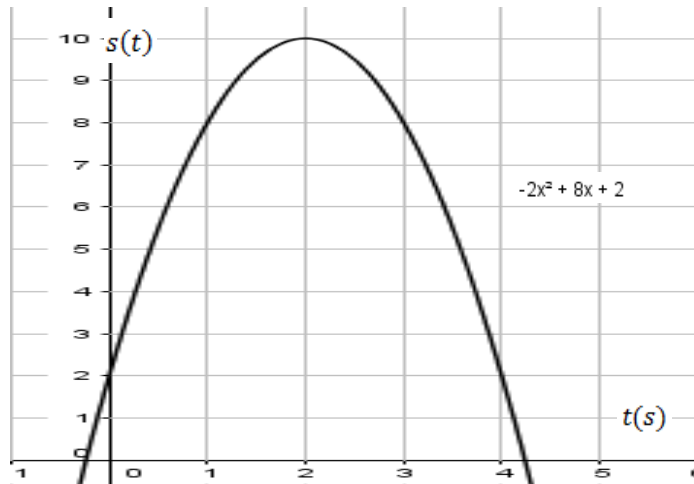
- ¿Qué observan en la tabla y qué se puede decir acerca del movimiento del automóvil?
- ¿Qué significan y que información brindan Δt y Δs ?
- ¿Si en un segundo, el móvil se desplaza 2.5 metros y en cuatro segundos se desplaza 10 m, cuantos metros se desplaza después de transcurridos 15sg, 21sg? explique.
- ¿Si al desplazarse 5 metros transcurren 2 segundos y al desplazarse 15 metros pasan 6 segundos, cuantos segundos transcurren después de desplazarse 25 m, 30m? explique.
- Qué diferencia hay en el movimiento del móvil de esta grafica con el movimiento del automóvil de la gráfica anterior

Segunda sesión.

Grupo No _____

Integrantes:

Actividad 3. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por la siguiente trayectoria, donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos



Completa la siguiente tabla y responde

t_0	t_1	Δt	Δs	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
0	0.5			
0.5	1			
1	1.5			
1.5	2			
2	2.5			
2.5	3			
3	3.5			
3.5	4			

- a. ¿Encuentras alguna regularidad en la tabla?
- b. ¿Si de 0s a 1s la piedra recorre 8m, entonces de 0s a 2s recorre 16m?
¿si no es así, cuantos metros recorre?
- c. ¿Existe alguna relación entre Δs y Δt ? ¿es constante? ¿es proporcional?
Explica.
- d. ¿Existe alguna relación entre la velocidad de la piedra y la velocidad del móvil en el ejercicio anterior? Explica.
- e. ¿Qué diferencia existe entre estos dos movimientos?

Tercera sesión.

Grupo No _____

Integrantes:

Actividad 4. Completa la siguiente tabla

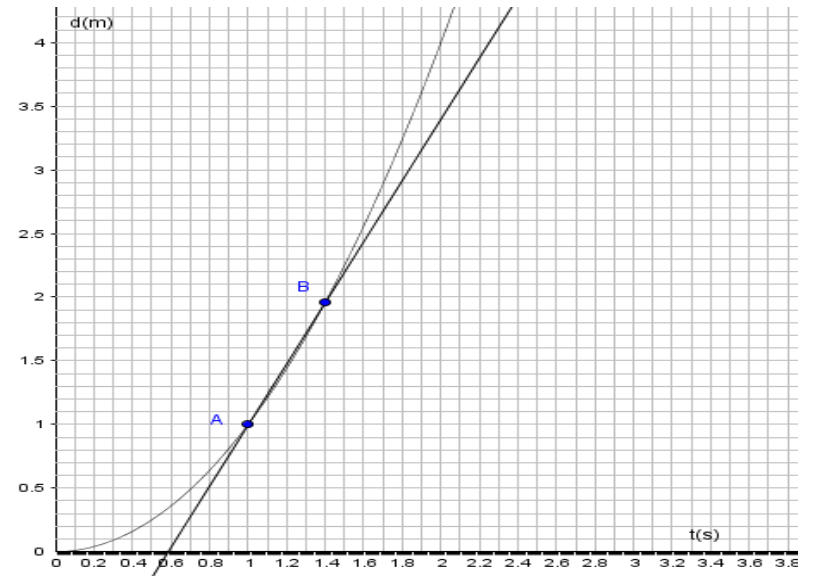
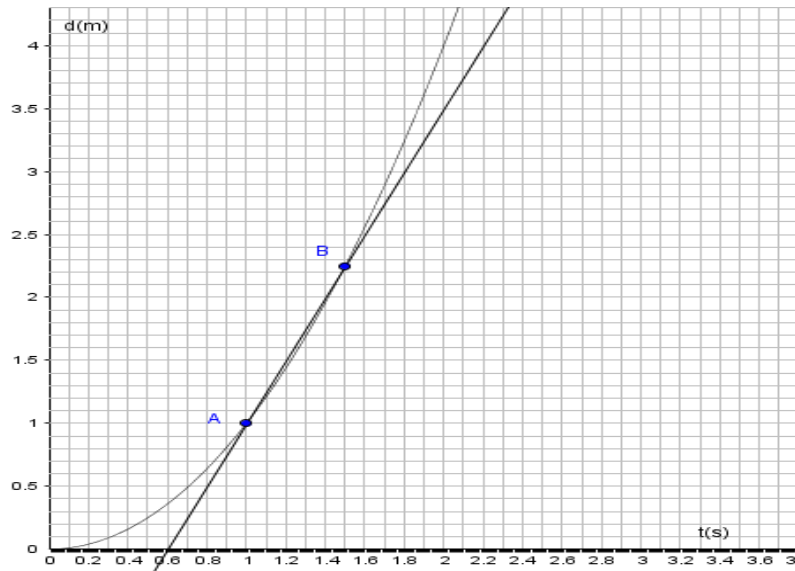
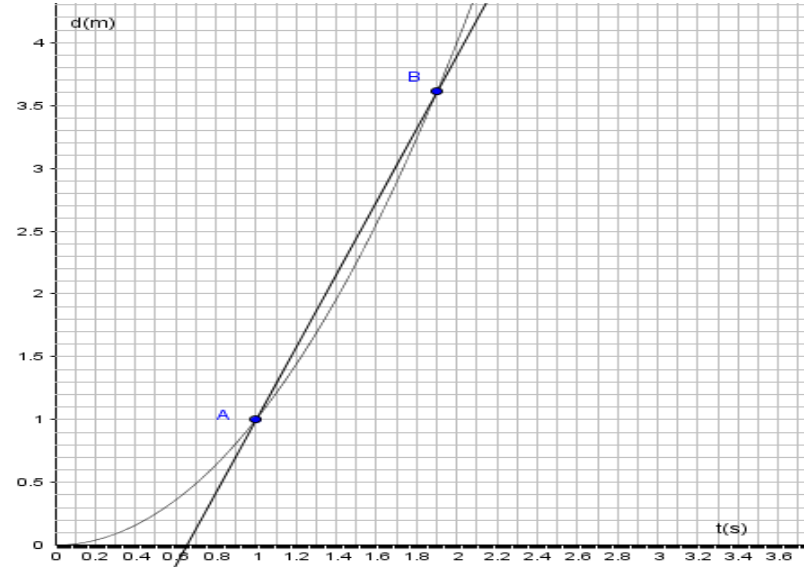
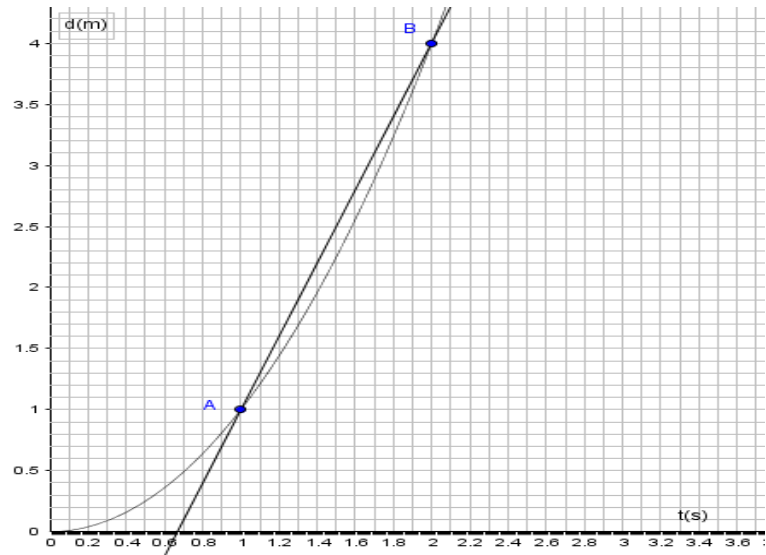
t_0	1	1	1	1	1	1	1	1
t_1	2	1.8	1.7	1.5	1.3	1.1	1.05	1.04
Δt								
Δs								
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$								

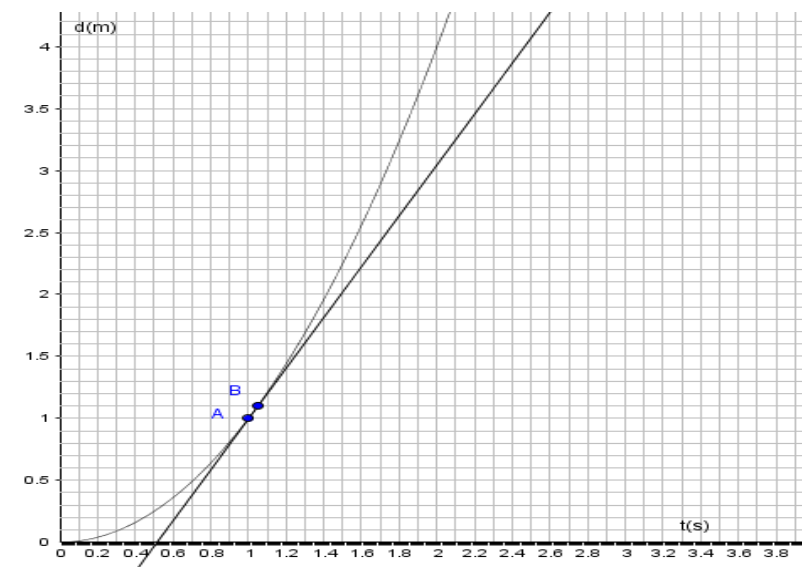
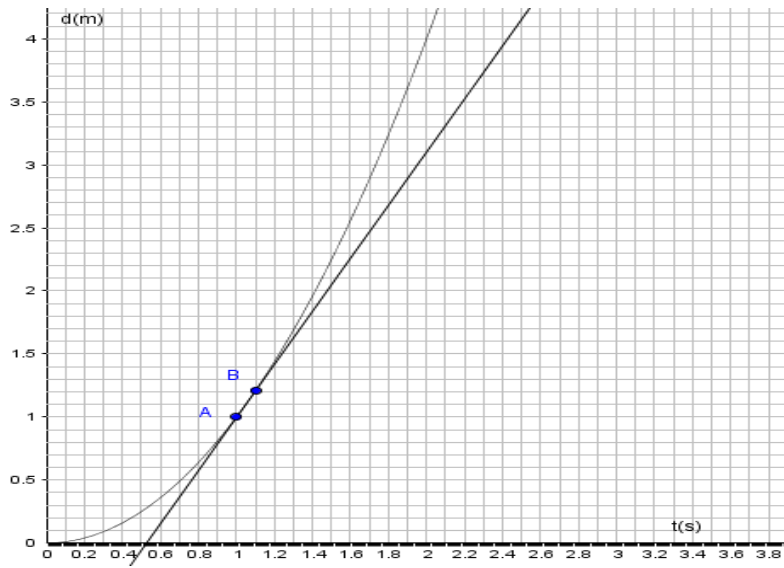
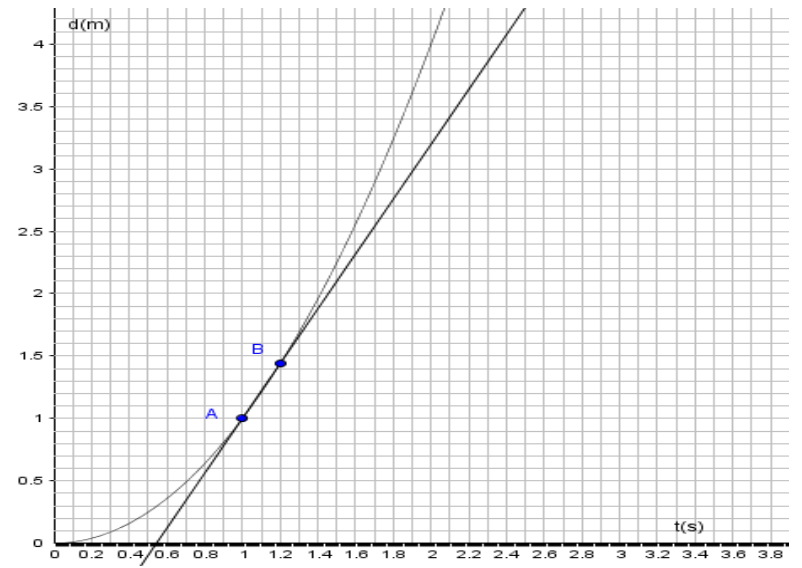
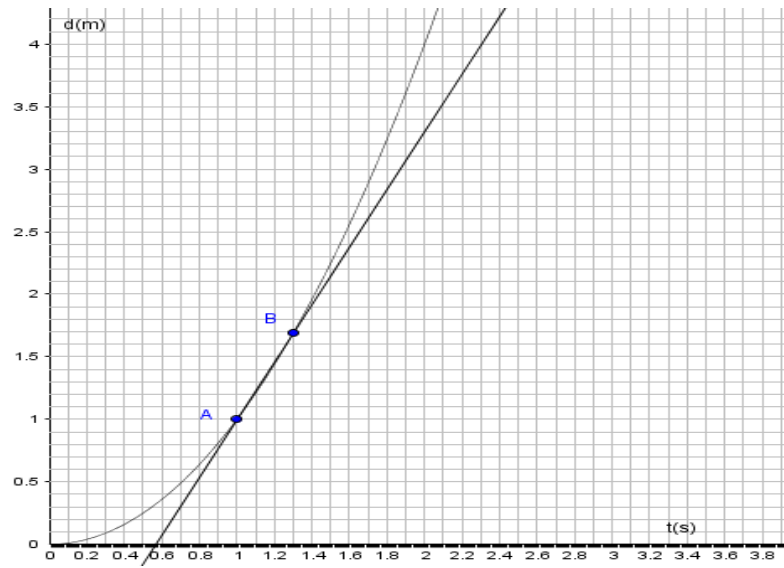
- ¿Qué sucede con la media cuando t_1 se acerca a t_0 ?
- Observe las siguientes gráficas y describa ¿qué sucede con la recta y la curva cuando t_1 se acerca a t_0 ?
- ¿Qué sucede si el punto A=B?

Introduzca valores muy cercanos a 2 por la izquierda y por la derecha para t_1 completando la siguiente tabla para la función $y = t^3$.

t_0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
t_1										
Δt										
Δs										
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$										

- ¿Qué sucede con la velocidad media?
- De acuerdo a las dos tablas anteriores ¿hay algún límite involucrado? ¿Puedes expresarlo en términos de límite?





ANEXO 3. Transcripciones de los momentos

Sesión uno, actividad 1

El profesor inicia la socialización con todos los grupos, empezando con la pregunta a. que trata de la descripción del movimiento del automóvil en los diferentes momentos, dándose una respuesta uniforme por los diferentes grupos.

Momento 1

Profesor: ¿en qué trayecto es más rápido el automóvil?, y ¿porqué?

Grupo 1: en el intervalo....

Profesor: bueno vamos a contestar textualmente lo que ustedes tienen en sus hojas y luego si hay necesidad de hacer aportes hacemos los aportes.

Grupo 2: el trayecto más rápido que hizo el automóvil fue de 60km en treinta minutos. Porque avanzo cincuenta kilómetros en menos tiempo que los demás.

Profesor: hablemos de eso.

Grupo 3: el trayecto en que es más rápido el automóvil es de Pantanillo: diez kilómetros, a Bogotá: sesenta kilómetros; es de cien kilómetros por hora.

Grupo 4: si

Grupo 5: ¿de cien kilómetros por hora?

Grupo 2: sí, sí.

Grupo 3: de cien kilómetros, porque si es el promedio es cincuenta.

Profesor: devolvámonos para ese punto, a ver todos pilas con lo que está diciendo Felipe.

Grupo 3: el trayecto en que es más rápido el automóvil es de Pantanillo: diez kilómetros, a Bogotá: sesenta kilómetros, con una velocidad de cien kilómetros por hora.

Grupo 2: así era la solución con la recta.

Grupo 4: no era necesario era un poquito más allá.

Profesor: haber paremos ahí, ¿todo el mundo ve los cien kilómetros por hora ahí?

Grupo 2: es lo mismo.

Profesor: haber eso es lo que vamos a mirar, cada quien se centra en su trabajo, los que lo tienen como cien kilómetros esperamos un momento, los que no lo tienen miremos de donde salen los cien kilómetros por hora, es más, ustedes pusieron veintitrés minutos, ¿de dónde sacaron esos minutos?

Profesor: ah, es que ustedes hicieron como aproximar, pero no eran los veintitrés minutos, más o menos daba en toda la mitad.

Grupo 6: ósea intervalo tres.

Grupo 2: porque es así.

Profesor: ¿a quién no le dio cien kilómetros por hora?

Grupos: se escuchan murmullos, entre ellos: eso íbamos a hacer.

Grupo 2: Bogotá sería sesenta kilómetros.

Grupo 6: son los cincuenta kilómetros y ¿Cuál era la velocidad que dijeron que iba?

Profesor: cien kilómetros por hora.

Grupo 6: ¿dónde están los cien?

Profesor 2: o sea ¿si van en carro no pueden pasar a cien kilómetros por hora?

Profesor: pero bueno, haber hay un punto que dice la velocidad en cada intervalo, esperemos ese punto para eso. Rescatemos de este punto que todos están de acuerdo que ese es trayecto en que va más rápido el automóvil,

Momento 2

Profesor: ¿Por qué no el intervalo número siete?, ¿Por qué ese no? Más rápido, o ¿menos rápido que el primero?

Grupo 2: porque hay menos kilómetros.

Profesor: ¿decir que recorrió menos kilómetros es asegurar que no fue más rápido?

Grupo 2: no al contrario, recorrió menos kilómetros pero en más poquito tiempo, nosotros no lo escogimos porque en el punto anterior en el que va de Pantanillo a Bogotá recorrió más distancia en poco tiempo, en cambio este recorrió harta distancia

Grupo 1: Pero no tanta como la primera.

Profesor: ¿decir más distancia es que fue más rápido?

Grupo 2,3: no se dice que fue más rápido cuando recorrió más distancia en poco tiempo; en menos tiempo.

Grupo 3: por eso se dice que recorrió cincuenta kilómetros en treinta minutos.

Grupo 2: treinta minutos sí, entonces el tiempo.

Profesor: ¿todos tienen claro eso?

Grupo 2 ¿y el otro recorrido cuánto?

Grupos: en coro: 30 km en media hora.

Grupo 2: recorrió más distancia en menos tiempo.

Momento 3

Profesor: si nos guiamos por la gráfica, solamente observando la gráfica, ¿Cómo va siendo la gráfica si recorrió más distancia?, perdón ¿si fue más rápido? ¿Qué forma va tomando ese pedacito de grafica?

Grupo 2: más pendiente, otros: sí.

Profesor: ¿y qué es más pendiente?

Grupos: más inclinación.

Profesor: ¿más inclinación? O sea la recta va siendo casi vertical, listo, entonces una recta que no sea tan vertical, ¿una que este más acostadita?

Grupo 2: ¿acostada totalmente?

Profesor: no, que este casi, casi acostadita.

Grupo 2: que recorre menos distancia en más tiempo.

Profesor: y entonces pasemos al punto c., ¿en qué trayecto es más lento el automóvil?

Grupo 2: en el primero, de Chimbe a Pantanillo.

Grupo 3: en el intervalo uno, dos.

Profesor: ¿si es claro para todos? ¿Y porque es?, ¿la razón cuál es?

Grupo 2: porque gasto más tiempo y recorrió menos distancia.

Profesor: y recorrió menos distancia, entonces la razón es esa. Si hay más desplazamiento y menos tiempo la velocidad es mayor, mire si hay más distancia y menos tiempo ¿la velocidad cómo es?

Grupo 1: más rápido.

Profesor: más inclinada, cierto, entonces sin necesidad de mirar valores de la distancia, ¿cómo puedo saber si una gráfica, si un trayecto es más rápido que otro? Si mirar valores

Grupo 2: por su inclinación, por su pendiente

Profesor: claro por lo que acabamos de mirar, ¿cierto?

Grupo 2: si profe

Profesor: lo pueden hacer ya, olvidémonos de los numeritos, cierto, la recta que tenga más inclinación esa recta es la que lleva ¿más...?

Grupo 1: inclinación.

Profesor: lleva más velocidad la que tenga mayor inclinación, y la que tenga menor inclinación, es la que lleva ¿menor...?

Grupo2: velocidad.

Profesor: listo, ya acabamos de responder la pregunta e. ¿Cómo determina que tan rápido o lento va el automóvil? Ya cualquiera puede responder, ¿cierto?

Grupo4: si profe, por su inclinación.

Profesor: por la pendiente o por la inclinación

Momento 4

Profesor: ¿es posible que el movimiento del auto sea representado por una recta vertical?

Grupo 5: no

Grupo 3: no porque dijimos que el auto tenía una velocidad constante.

Grupo 2: no porque eso es imposible,

Grupo 2: no, porque, como voy a avanzar sin transcurrir el tiempo.

Profesor: Pendientes negativas ¿Qué significa?

Grupo 7: que se devuelve.

Profesor: ¿qué diferencia hay entre la cinco y la siete?

Grupo: que una es más rápida que otra.

Profesor: ¿y qué significa eso?

Grupo 2: que una va más rápida que otra.

Profesor: y ¿Cuál es la más rápida y cual la más lenta?

Grupo1: la última.

Sesión uno, Actividad 2

Momento 5

Profesor: ¿En la tabla que podemos observar? ¿cómo es ?

Grupo 1: no es igual, o sea no es constante

Profesor: ¿qué es que no sea constante?

Grupo 2: ¿qué varía?

Grupo 3: ¿por qué tomamos intervalos de tiempo distintos?

Profesor: listo, y ¿cómo es, es constante?

Grupo1: no

Profesor: ¿porque?

Estudiantes: mmm

Profesor: ¿no es constante porque se tomaron distintos intervalos de tiempo?

Grupo 1: si

Profesor: ¿qué tiene que ver el tiempo?

Grupo 1: pues porque depende de él

Profesor: ¿qué dicen de esa afirmación?

Grupo1: claro, porque son las imágenes de la razón del tiempo

Profesor: claro, para hallar la distancia se necesita saber el tiempo

Momento 6

Profesor: ¿qué diferencia hay en el movimiento del móvil de esta grafica con el movimiento del automóvil de la gráfica anterior?

Grupo 1: en la primera grafica el automóvil nos muestra diferentes variaciones de tiempo y de estado, la variación de velocidades se muestra frecuentemente con una aceleración y desaceleración. En la segunda, aunque el vehículo va aumentando su distancia el tiempo también va aumentando de manera constante, por lo tanto el movimiento del automóvil no varía siempre va a ser 2,5, ni sube ni baja

Grupo 2: en la gráfica anterior se muestran varias pendientes del automóvil, y en la segunda grafica no se encuentra ninguna pendiente, la diferencia es que en la primera grafica el carro paro en diferentes momentos y en la segunda iba a velocidad constante

Grupo 3: en la segunda tuvo velocidad constante y en la primera hay intervalos con velocidades diferentes

Grupo 4: en esta grafica el movimiento del móvil es constante y no hay ninguna parada, a diferencia de la gráfica anterior que el móvil hace algunas paradas y también se devuelve

Profesor: bueno, el grupo 1 incluyo algo de lo que no habíamos hablado, aceleración ¿qué es aceleración?

Grupo 1: cuando aumenta la velocidad

Grupo 2: cuando hay un cambio en la velocidad

Profesor: ¿entonces en la gráfica de la actividad 2 hay aceleración?

Grupo 3: no porque la velocidad es constante

Momento 7

Profesor: Bueno, entonces el objetivo de esta actividad era mirar proporcionalidad, si miramos la gráfica anterior era proporcional

Grupo 1: no, porque proporcional es que como va aumentando el tiempo, va aumentando la distancia, por ejemplo se desplazaba 10km y solo pasaban 2s, en cambio en otros intervalos había más tiempo

Profesor: ¿se refiere a la gráfica de la actividad 1?

Grupo 1: si señor

Sesión 2, actividad 3

Momento 8

Profesor: en esta actividad nos cambian el grafico, ya no es una recta y dice: La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por la siguiente trayectoria, donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos, completa la siguiente tabla y responde, encuentras alguna regularidad en la tabla?

Grupo 1: desde el punto 0 hasta el punto 1,5 son positivos y desde el punto 2 al punto 3,5 son negativos

Profesor: ¿qué dicen los demás?

Grupo 2: del 0 al 1,5 es cuando sube

Grupo 3: de acuerdo a la gráfica ellos tienen razón, porque nos muestra los valores ya como tal de y que son negativos

Grupo 1: pero catalina está hablando del inicial

Grupo 3 no, está hablando del final

Profesor: estamos mirando la tabla, y el grupo uno dice que desde el punto 0 hasta el punto 1,5 son positivos y desde el punto 2 al punto 3,5 son negativos

¿estamos todos de acuerdo?, entonces si pregunto por un numero cualquiera ustedes me dicen si es positivo o negativo, por ejemplo 1,8

Grupo 1: positivo

Grupo 2: negativo, porque del dos hacia abajo es negativo, y 1,8 está por debajo de 2

Profesor: ¿y eso es lo que dijo el grupo 1?

Grupo 1: no, donde es negativo es de 0 hasta 2

Grupo 3: el dos es positivo

Grupo 4: entonces de 0 a 2 es negativo y de 2 a 4 es positivo

Profesor: ¿y entonces el 2 que viene siendo?

Grupo 1: está en los dos pero el de arriba no se toma

Grupo 2 el dos es neutro

Grupo 3: como es neutro no tiene signo

Grupo 1: entonces corrijo lo primero que dije, de 0 a 2 es negativo y de 2 a 4 es positivo

Momento 9

Profesor. Listo, ¿qué otra regularidad encuentran en la tabla?

Grupo 3: la columna es constante porque todos los valores son 0,5, en la casilla de se toma en cuenta desde que es lanzada la piedra hasta el punto 3,5 descendiendo de una unidad en medio segundo hasta pasar por los negativos llegando a -3,5. En la última casilla los números son impares iniciando desde 7 descendiendo de dos en dos hasta llegar a -7m/s

Profesor. ¿todos ven esa regularidad?

Grupo 2: si profe, toma impares positivos y negativos

Profesor: entonces si preguntara por el intervalo de tiempo de 4s a 4,5s ¿cuál sería la velocidad de piedra?

Grupo 2: 8,5

Grupo 1: no profe, como va de 2 en dos seria 9

Grupo 3: -9 porque son negativos

Profesor: ¿entonces se puede decir que la velocidad es proporcional?

Grupo 1: no porque a medida que el tiempo aumenta en un momento la distancia disminuye

Grupo 2: no es proporcional pero hay números que se repiten

Profesor: ok, no es proporcional pero existe una regularidad

Sesión 2, actividad 3

Momento 10

Profesor: Sigán, ¿ya vimos que algunos son impares?, ¿de estos?

Grupo 1: si profe

Grupo 1: ¿impares?

Profesor: Impar.

Grupo 1: Ninguno es impar

Profesor: ¿Tampoco es par?

Grupo 1: Par e impar

Grupo 1: Son números decimales.

Profesor: Pero, si yo les digo sigan de aquí para arriba, ¿Cuál sigue?

Grupo 1: cuatro coma cinco, cinco coma cinco, una unidad, si una unidad.

Profesor: Ya encontraron la regularidad.

Grupo 1: una unidad.

Profesor: ¿Cómo?

Grupo 1: Si, porque si se dice que va, disminuyendo y va aumentando en una unidad.

Grupo 1: Cuando la pelota va disminuyendo en cada punto, va disminuyendo una unidad.

Grupo 1: No, porque también va aumentando.

Grupo 1: ¿Entonces como la redactamos?

Grupo 1: Que en los diferentes puntos de la piedra va aumentando y disminuyendo una unidad.

Grupo 1: Un metro por segundo, su velocidad (conclusión final) y cuando va descendiendo ya se vuelve negativo, porque vuelve al este..., como decir la pendiente de la velocidad, bueno.

Tercera sesión, actividad 4

Momento 11

Grupo 2: Pero al fin ¿qué sucede con la velocidad cuando, se acerca a ?

Grupo 2: El profe lo dijo, siempre va a estar cerca de uno.

Grupo 2: ¿Siempre va a estar más cerca de dos no?

Grupo 2: si a dos.

Grupo 1: A igual a B, entonces ya sería un solo punto y cortarían un solo punto.

Secante

Grupo 1: pero si esta no, si A es igual a B, y esta ¿qué?

Grupo 1: Sería tangente porque estaría tocando un solo punto.

Profesor: Cuando hago, donde estaría ¿arriba o abajo?, hagan de cuenta que es igual a ¿Cómo quedaría delta de t?

Grupo 1: Cero, uno menos uno.

Profesor: ¿numerador o denominador?

Grupo 1: numerador, ¿cómo así?

Profesor: Cuando hallo la velocidad delta de t donde está, ¿arriba o debajo?

Grupo 1: abajo.

Profesor: ¿Y qué pasa si debajo da cero?

Grupo 1: No se puede

Grupo 1: Profe y entonces ¿qué posición toma?, una posición secante porque nunca podría haber una tangente. Entonces toma una posición secante, secante.

Grupo 1: Si porque tangente no existe, o existe pero la función no dejaría.

Grupo 2: ¿Qué pasa con la velocidad media?

Profesor: Porque el número se va acercando ¿a quién?

Grupo 2: a doce

Profesor: Se va acercando ¿a quién?

Grupo 2: ¿Y entonces porque todos esos doces?

Profesor: Lo que paso es que como no escribimos todos los decimales, pero bueno, aquí la conclusión es que se va acercando ¿a?

Grupo 2: Doce.

Profesor: Entonces cuando ¿t1 se va acercando a t0?

Grupo 2: Va aumentando.

Profesor: ¿Qué pasa con la velocidad? Que se va acercando ¿a quién?

Grupo 2: A doce

Profesor: O sea que se va convirtiendo en, si todo me da doce, ¿Qué fue lo que hablamos ayer?, se va convirtiendo ¿en?

Grupo 2: constante, en constante.

Profesor: Hagan el último, el paso al límite.

Grupo 2: (al final) de acuerdo con las dos tablas anteriores ¿hay algún límite involucrado?, ¿puedes expresarlo en términos de límites?

Grupo 2: Si hay un límite involucrado es límite igual, límite cuando x tiende a dos, igual a doce, límite cuando x tiende a uno, igual a dos.

Momento 12

Profesor: observa y describe que sucede con la recta y la curva cuando se acerca a

Grupo 1: cada vez que se acerca a , la parábola se cierra más y si seguimos mirando la gráfica va a llegar a un punto que y se van a separar

Grupo 2: ¿a separar?

Grupo 1: (señala con las manos) cada vez se acerca más hasta chocar en un punto, y si nosotros pensamos y seguimos, y hacemos otra gráfica, va a llegar al punto de que la parábola no va a alcanzar a tocar a la recta

Profesor: de lo que comenta este grupo dos cositas, ¿la parábola se cierra?

Grupo 3: no, siempre va a ser la misma

Profesor: si, la parábola no cambiar de forma, y ¿hay alguna opción de que la parábola y la recta no se encuentren?

Grupo 3: no porque en la última grafica vemos que los dos puntos se unen bastante y que la parábola está a la izquierda de la recta, en cambio en la primera

gráfica, la parábola corta la recta, por eso decimos que en algún momento no la va a tocar

Profesor: que dicen los demás grupos de esa afirmación

Grupo 1: decimos que no porque en el punto c dice que pasa si los dos puntos son los mismos, es decir que ya no se van a cortar en dos puntos sino en uno, por eso decimos que no, que no se alcanzan a separar

Grupo 4: profe lo que usted mencionaba del zoom, si hacemos ese pedacito bien grande siempre se va a cortar en dos puntos

Profesor: además, la recta está construida sobre dos puntos que están sobre la parábola, esto nos garantiza que siempre se intersectaran la parábola y la recta

Momento 13

Profesor: ¿qué sucede si $A=B$?

Grupo 1: se formaría una pendiente y los valores no variarían

Profesor: que opinan de lo que dice este grupo

Grupo 2: falso, porque si son iguales t_1 y t_0 daría un cero y sería match error al dividir entre cero

Profesor: ¿hay necesidad de dividir entre cero?

Grupo 2: si profe, para sacar la velocidad

Profesor: listo, pero por acá hablaron de otra cosita, de recta tangente ¿qué es?

Grupo 3: que toca a la recta en un solo punto

Profesor: ¿entonces en el evento de que $A=B$ en cuantos puntos cortaría la recta a la parábola?

Grupo 3: en uno

Profesor: ¿y entonces pasaría de ser recta secante a recta?

Grupo 1: recta tangente

Grupo 2: pero algebraicamente miramos que no se podía

Profesor: muy bien

Momento 14

Profesor: ¿qué sucede con la velocidad media?

Grupo 2: se vuelve constante

Profesor: a cual constante

Grupo 1: se va acercando a 12

Profesor: es claro que a medida que se acerca a la velocidad tiende a 12