

RELACIÓN ENTRE ÁREA Y PERÍMETRO: UNA ACTIVIDAD DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN (AEI)

José Valério Gomes da Silva, Lúcia Serrano, Marianna Bosch

UNIAN – SP (Brasil). IES Vinyet Sitges (España). Universidad Ramon Llull (España).
valerio.gomes@yahoo.com.br, lidiaserrano@yahoo.com, marianna.bosch@iqs.edu

RESUMEN: Esta investigación se propone estudiar las respuestas de alumnos de primer curso de secundaria (12-13 años) a una *actividad de estudio e investigación* sobre las relaciones entre área y perímetro de figuras planas estructurada en base a los *momentos didácticos* (Chevallard 1999). Presentamos una primera fase de la *actividad* experimentada en tres sesiones, donde aparecen los momentos del primer encuentro y el exploratorio, junto con una actividad de evaluación. El análisis de las respuestas permite establecer los resultados sobre las estrategias de comparaciones de magnitudes y de medida, su apropiación y su posible explotación en momentos posteriores de la experimentación.

Palabras clave: área, perímetro, actividad de estudio e investigación

ABSTRACT: This research is aimed at analyzing the answers of the 12-13 year- old students of secondary school to an activity of study and inquiry about the relations between area and perimeter of plane figures, based on the didactic steps (Chevallard 1999). We show a first stage of the three-session activity which includes both the first and the exploratory meetings, as well as an evaluation activity. The analysis of the answers allows defining the results about magnitude and measurement comparison strategies, and their acquisition and possible further use after the experimentation.

Key words: area, perimeter, teaching and researching activity

■ Introducción y marco teórico

La enseñanza de la matemática en la escuela secundaria en Brasil y España presenta problemas complejos e ineludibles, que conllevan altos niveles de frustración para los estudiantes y profesores. Cuando consideramos las nociones de área y perímetro y buscamos la razón de ser “oficial” en los libros de texto y otros materiales didácticos de la educación secundaria obligatoria, encontramos situaciones que no corresponden con el énfasis puesto por los currículos en el trabajo con más de una magnitud y en la exploración de relaciones entre magnitudes. Tampoco se suelen considerar más de una magnitud asignada a un mismo objeto.

Nos situamos en el marco teórico desarrollado por Yves Chevallard de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y, en particular, en el diseño y análisis de Actividades de Estudio e Investigación basadas en los momentos didácticos (Chevallard 1997, 1999, 2002, Bosch y Gascón, 2010). Partiremos así de un contenido de enseñanza descrito en términos de *praxeologías*, es decir de un conjunto de tipos de problemas que se resuelven mediante ciertas técnicas no necesariamente algorítmicas dentro de un entorno teórico formado por una primera descripción de las técnicas y tipos de problemas (la “tecnología” o discurso – *logos* – sobre la técnica) y un segundo nivel de justificación formado por la teoría propiamente dicha. La construcción de praxeologías en el aula puede describirse en términos de 6 momentos (no necesariamente cronológicos) del estudio que están relacionados con los diferentes componentes de las praxeologías:

- El momento del primer encuentro con la praxeología, que puede realizarse desde sus componentes tecnológico-teóricos (por ejemplo, presentando sus elementos o propiedades) o desde los tipos de problemas por resolver y técnicas o maneras de abordarlos, acercándose así a las posibles razones de ser de la praxeología considerada;
- el momento exploratorio que consiste en la resolución de los tipos de problemas más centrales de la praxeología y la emergencia de técnicas apropiadas para resolverlos;
- el momento del trabajo de la técnica que permite mejorar el dominio de los procesos de resolución, analizar el alcance y limitaciones de las herramientas utilizadas y generar nuevas necesidades teóricas;
- el momento tecnológico-teórico que surge cada vez que aparecen nuevas necesidades descriptivas, explicativas o justificativas;
- el momento de la institucionalización que permite organizar y preparar para nuevos usos los elementos praxeológicos puestos en práctica;
- el momento de la evaluación para poner a prueba tanto la validez de la praxeología construida como la posibilidad de manejarla de forma funcional.

Según Bosch y Gascón (2010), la noción de actividad de estudio e investigación (AEI) aparece como un modelo didáctico de referencia para analizar la co-construcción de praxeologías en el aula. Las AEI pueden tomar formas muy diversas en función de la institución escolar y de las praxeologías

consideradas. Podemos sin embargo señalar algunos aspectos que caracterizan la estructura y las funciones de este modelo didáctico. Dada una praxeología por enseñar, el diseño de una AEI se inicia buscando una “situación del mundo” en la que aparezca una cuestión problemática cuya resolución permita o incluso requiera su reconstrucción. Así, se parte de una cuestión generatriz cuyo estudio debería dar lugar a un conjunto de cuestiones derivadas que corresponderían a algunos de los tipos de problemas más representativos de la praxeología objeto de estudio. Puede decirse que las AEI retoman, en cierta manera, una preocupación inherente a la teoría de situaciones didácticas y a su propuesta de reconstrucción de los conocimientos matemáticos a partir de situaciones fundamentales, cuyo objetivo es situar la razón de ser de dichos conocimientos en el corazón mismo del proceso de estudio.

Una vez que la situación ha sido presentada a la comunidad, se inicia un proceso de estudio que, como todos, puede describirse funcionalmente mediante los momentos o dimensiones de dicho proceso. En el caso de las AEI es importante subrayar que el momento del primer encuentro se retrotrae a una cuestión generatriz “en bruto”, en lugar de iniciarse con una tarea escolar ya depurada. La principal función didáctica de las AEI es la de introducir en el núcleo del programa de estudio, de manera explícita y como cuestión generatriz del mismo, la razón de ser de la praxeología que se quiere construir a partir del estudio de una “situación del mundo”. No haría falta subrayar en este punto que las matemáticas forman parte del mundo y, por lo tanto, que una AEI puede consistir, naturalmente, en el estudio de una situación matemática.

■ El caso de la medida de áreas y perímetros

Para nuestra investigación, la praxeología considerada es la de la medida de áreas y perímetros de figuras geométricas simples mediante técnicas de medición elementales basadas en propiedades de regularidad de las figuras. Muchas investigaciones publicadas en torno a las relaciones entre área y perímetro ponen en evidencia la existencia de dificultades de los alumnos para concebir que las magnitudes consideradas son autónomas y establecer relaciones entre ellas (Speranza, 1987; Moreira y Comiti, 1993; Jaquet, 2000; D’Amore y Pinilla, 2006). Uno de los aspectos que puede ser determinante en estas dificultades es la dinámica de presentación de los saberes enseñados y, en particular, el fenómeno de *aritmización de las actividades de medida* puesto en evidencia por Chamorro (2003).

El estudio que aquí presentamos tiene por objetivo incidir en esta dinámica mediante el estudio de las respuestas de un grupo de alumnos de primer curso de educación secundaria obligatoria (12-13 años) en una actividad sobre las relaciones entre área y perímetro de figuras planas por medio de una AEI. De forma similar a la propuesta por Fonseca, Gascón y Lucas (2014), se partió de la elaboración de un *modelo epistemológico de referencia* sobre las magnitudes y sus medidas para el caso del área y perímetro de figuras planas. Este modelo sirvió en una primera fase de la investigación para mostrar que, en el caso de la enseñanza secundaria en Brasil (Gomes da Silva y Dias, en prensa), aparecen

muy pocas actividades de comparación de áreas y perímetro sin medida, así como de medida de figuras irregulares. Las dificultades encontradas en los alumnos para relacionar y distinguir las magnitudes de área y perímetro nos parecieron ser una consecuencia directa del tipo de enseñanza propuesta sobre este tema.

A modo de estudio exploratorio, utilizamos el modelo de referencia sobre las magnitudes para diseñar una actividad centrada en la distinción y comparación de áreas y perímetros, para observar las técnicas utilizadas por los alumnos de primer curso de secundaria (aprendidas por lo tanto en primaria) y los elementos teóricos que las acompañan a modo de descripción, explicación o justificación.

■ La experimentación en el aula

La experimentación se realizó con tres grupos-aula de primer curso de secundaria de un instituto público de la región metropolitana de Barcelona (63 alumnos en total), cuya profesora, Lúdia Serrano (en adelante, LS) es investigadora en didáctica y coautora de la comunicación. Solo presentamos aquí una primera fase de la AEI experimentada, tres sesiones de 50 minutos, donde aparecen los momentos del primer encuentro y exploratorio, junto con una actividad de evaluación. En esta comunicación nos proponemos analizar las reacciones de los alumnos ante una actividad de clase atípica (cambio en el contrato didáctico), así como contrastar las dificultades encontradas por los alumnos en torno a las relaciones entre área y perímetro documentadas por la literatura.

Nuestra AEI parte de una cuestión problemática inspirada por D'Amore y Pinilla (2007): *Una inmobiliaria compró terrenos para vender y los tiene que vallar. El precio final depende del tamaño y contorno de cada terreno. 1ª Parte: ¿Qué terreno es más caro y por qué? 2ª parte: Ordenar los terrenos según su área y su perímetro. 3ª parte: Dado el precio de los terrenos (en €/m²) y el precio de la valla (en €/m), ¿qué terreno es más caro? ¿Y cuál es el más barato?*

Los terrenos venían representados por cinco conjuntos de cuatro figuras en cartulina de formas variables a escala 1:100 sin una comparación evidente entre sus áreas y perímetros (ver figura 1).

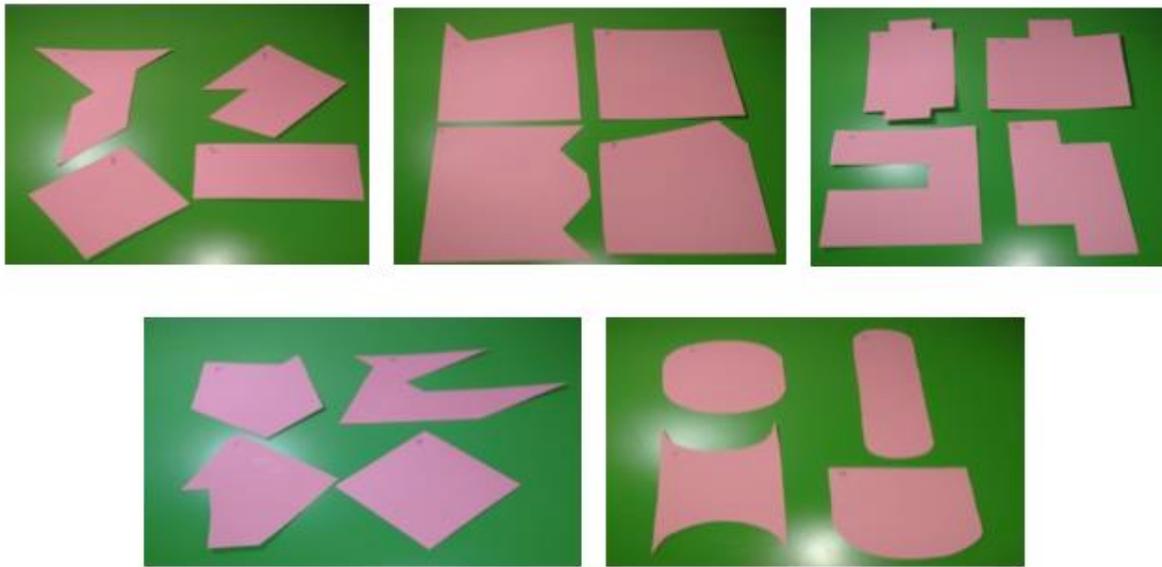


Figura 1: Representación de los terrenos

Los alumnos se distribuyeron en grupos de tres o cuatro, asignándose a cada grupo un conjunto de cuatro terrenos de tal forma que a lo sumo dos grupos de alumnos trabajaron con el mismo conjunto de terrenos. En la primera sesión se presentó la cuestión generatriz y se pidió elaborar una respuesta para las dos primeras partes. En la segunda sesión se hizo una puesta en común de los resultados obtenidos y en el caso de disconformidad entre grupos, se discutieron las diferencias para llegar a un acuerdo común, utilizando principalmente argumentos que no involucrasen la medida directa (inclusión de una figura en otra, utilización del pedazo de cinta que envuelve un terreno para bordear otro, etc.). Esta sesión acabó con la presentación de la tercera parte, relativa al cálculo de los precios finales de los terrenos y la comprobación (o discusión) de los resultados avanzados en la sesión anterior. Finalmente, en la tercera sesión se propuso un ejercicio individual con un nuevo grupo de terrenos para estimar su precio, añadiéndose preguntas puntuales sobre la existencia de una figura de misma área y mayor perímetro que una figura dada o viceversa.

El análisis de las respuestas al ejercicio individual, junto con un estudio cualitativo a partir de los materiales recogidos (vídeos de las sesiones y materiales producidos por los alumnos) han permitido establecer los resultados sobre las estrategias de comparación de magnitudes y de medida utilizadas en el momento exploratorio, la apropiación de estas estrategias por parte de los alumnos y la explotación de esta actividad en los momentos posteriores a la experimentación (tecnológico-teórico, trabajo de la técnica, institucionalización y evaluación).

Consideramos los momentos didácticos para presentar el análisis de los resultados de este estudio. En la primera sesión en los tres grupos-aula, la profesora (LS) presenta a los alumnos a José Valério (en adelante JV, investigador en didáctica y coautor de esta comunicación) que viene a plantearles un

problema sobre la inmobiliaria en la cual trabaja, propiedad de Marianna Bosch (en adelante MB, investigadora en didáctica y coautora también de este texto). JV proyecta sobre la pizarra el problema y pide que se trabaje en las dos primeras partes ya que en la siguiente sesión vendrá MB al aula. Así, el primer encuentro con la praxeología se da a través de la presentación de un problema proyectado en la pizarra. Se invita a un alumno a leer el encargo y se inicia una primera discusión en gran grupo. Luego se distribuyen en pequeños grupos. Las primeras técnicas que surgen son: medición de los lados de cada figura; descomposición de las figuras de los terrenos en figuras usuales como triángulos, cuadrados y rectángulos; conteo de unidades de medida de área, es decir, recuento de cuadraditos de papel cuadriculados para calcular el área de las figuras; conteo de unidades de longitud para calcular el contorno de la figura de los terrenos; utilización de una cinta para medir el contorno de las figuras circulares. Estas técnicas permiten determinar el terreno con mayor superficie y mayor perímetro (longitud de la valla). Los estudiantes también utilizan las operaciones de adición y multiplicación como estrategia de cálculo al sustituir las fórmulas para calcular el área de cuadrados, triángulos y rectángulos. Al final de la sesión aparecen breves momentos de institucionalización y evaluación cuando JV pide a los alumnos explicaciones y justificaciones de las respuestas. En el contraste de los diferentes resultados, algunos grupos se dan cuenta de los errores cometidos (por ejemplo en los cálculos o mediciones) y vuelven a considerar sus respuestas.

La segunda sesión se inicia presentando a la propietaria de la inmobiliaria (MB), tal como se les había anunciado en la sesión anterior. Un representante de cada grupo le hace un resumen de las conclusiones a las que su grupo había llegado. A continuación, MB les plantea las siguientes nuevas cuestiones: *Dado el precio de los terrenos (en €/m²) y el precio de la valla (en €/m), ¿qué terreno es más caro? ¿Y cuál es el más barato?* Algunos grupos cuestionan la falta de datos para llegar una respuesta numérica y elaboran sus propias cuestiones, otros necesitaron ayuda por parte de los mediadores de la experimentación. MB escribe en la pizarra el precio: 5€/m para la valla y 2€/m² para el terreno. También indica que dos cuadraditos de la hoja corresponden a un metro en la realidad. MB escribe en la pizarra 1cm hoja = 1m realidad (escala 1:100). Algunos estudiantes se basan en fórmulas para calcular las nociones de área y perímetro, como también las operaciones de adición y multiplicación. La mayoría mide los lados y divide las figuras en rectángulos y triángulos para calcular las áreas y perímetros. Los que tienen figuras con contorno circular piden a LS que les recuerde la fórmula del área del disco. En este momento todos los grupos trabajan muy concentrados. La mayoría se ha repartido las figuras y todos calculan las áreas y perímetros. La institucionalización y evaluación de la sesión viene dada al final de la sesión con una puesta en común de las repuestas.

La evaluación individual duró 50 minutos y estaba formada por tres cuestiones. La primera: *La inmobiliaria Bosch compró 4 terrenos más para vender y los tiene que vallar. El precio final de cada terreno depende de su tamaño y de su contorno. Los terrenos están representados por las figuras siguientes, cada metro cuadrado cuesta 3 € y cada metro de valla cuesta 4 €. ¿Cuál es el terreno más caro? ¿Y cuál es el más barato? Justifica tu respuesta.* Las figuras de los terrenos están en la figura 2. Desde las presentaciones de los grupos de alumnos todos comprenden la cuestión, crean estrategias

adecuadas, pero la mayoría no consigue presentar un raciocinio completo. La segunda cuestión: *A partir de las ideas presentadas para la venta de los terrenos, la señora Bosch se quedó con dos dudas:* a) *¿Es posible construir una nueva figura con la misma área y un perímetro más pequeño que la figura de abajo? Si tu respuesta es que sí, construye esta nueva figura. Si tu respuesta es que no, explica por qué.* b) *¿Es posible construir una nueva figura con el mismo perímetro y el área más grande que la figura de abajo? Si tu respuesta es que sí, construye esta nueva figura. Si tu respuesta es que no, explica por qué.* Las figuras de la cuestión están en la figura 2. Esta cuestión presentó muchas dificultades a los estudiantes, tal vez porque no fue tratado en las sesiones. La tercera cuestión: *¿Qué aprendiste de nuevo con el problema de la inmobiliaria? ¿Qué fue lo más difícil?* Para la primera pregunta, encontramos principalmente: calcular perímetros; las mediciones; el proceso de saber si el terreno es más caro o más barato. Y para la segunda: calcular las áreas de las figuras redondas.

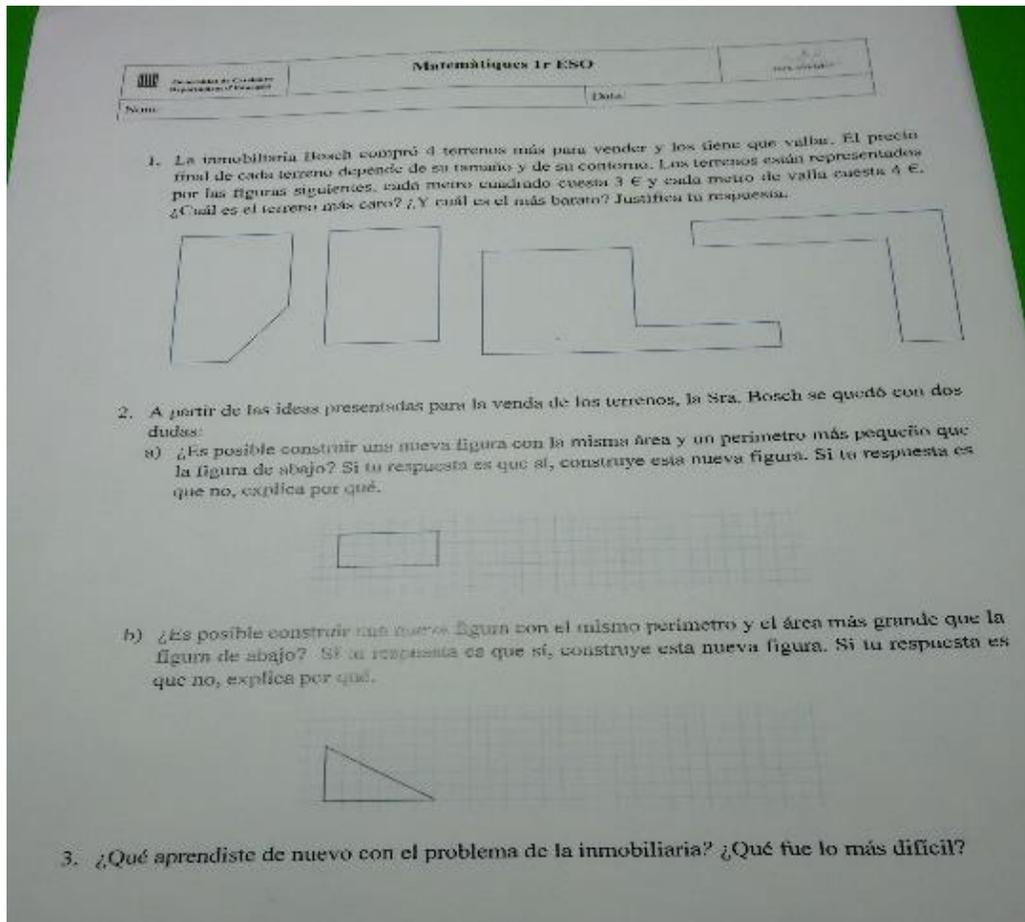


Figura 2: Copia de la evaluación

■ Conclusiones provisionales

Entre las dificultades e impresiones que se han observado a lo largo de la actividad destacamos: (a) la falta de tiempo para el momento inicial de manipulación de las figuras y para la comprensión de las convergencias y divergencias entre ellas; (b) la búsqueda espontánea de las medidas y las fórmulas de cálculo de áreas y perímetros, utilizando reglas y calculadoras, indicio del fenómeno de aritmetización de la medida antes mencionado; (c) identificación de una dificultad en los estudiantes por expresar sus ideas, tanto en forma escrita como oral (dentro del propio grupo como en gran grupo); (d) impresión que la actividad se debía haber diseñado de forma que los resultados de un grupo se validaran con los de algún otro grupo para poder identificar los errores y poder tomar decisiones.

En relación con el modelo epistemológico de referencia utilizado, basado en las investigaciones sobre medida de Sierra (2006) y que no hemos detallado en este artículo, observamos que los tres tipos de praxeologías (comparación directa de objetos / comparación mediante elección de unidades de medida / unidad única y cálculo de medida) no se vivieron por igual en todos los grupos e incluso, en algunos grupos no fue posible identificar esta secuencia por el poco tiempo de que se disponía.

Finalmente, consideramos que la AEI proporcionó a los alumnos una gran interacción entre ellos favoreciendo minimizar las dudas y maximizar el desarrollo del aprendizaje en torno a las relaciones entre área y perímetro en un objeto. También animó a los estudiantes a sentirse protagonistas de sus acciones desde el cambio de contrato didáctico, permitiendo una matemática más próxima a sus experiencias diarias, así como la formulación de sus propias preguntas y la necesidad de defender y justificar sus respuestas. Para futuros trabajos, se prevé desarrollar esta actividad para articularla con una nueva AEI sobre construcción de figuras geométricas.

■ Referencias bibliográficas

- Bosch, M. y Gascón J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp.1-10). Montpellier, Francia : IUFM.
- Chamorro, M. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 221-244). Madrid: Pearson Educación.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (1997). *Familière et problématique, la figure du professeur*. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17 (3), 17-54.

- Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude*. 3. Écologie & régulation, in J. L. Dorier et al. (Eds.) Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- D'Amore, B. y Fandiño, M. I. (2006). Área e perímetro. *Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.
- Fonseca, C; Gascón, J. y Lucas, C. O. (2014). Desarrollo de un Modelo Epistemológico de Referencia en torno a la Modelización Funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (3). 289-318.
- Gomes da Silva, J. V. y Alves Dias, M. (en prensa). Magnitudes y medidas: un recorrido de estudio e investigación para la práctica profesional. *Actas del 5º Congreso Internacional sobre la TAD*.
- Jaquet, F. (2000). Il conflitto area-perimetro I. *L'educazione matematica*, 2(2), 66-77.
- Moreira, P. y Comiti, C. (1993). Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en cequi concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles. *Petit x 34*, 43-68.
- Sierra, T. A. (2006). *Lo Matemático en el Diseño y Análisis de Organizaciones Didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis de Doctorado en Educación. Universidad Complutense de Madrid. Madrid – España.
- Speranza, F. (1987). La geometria dalle cose alla lógica. En B. D'Amore (Ed.). *La matematica e la sua didattica* (pp. 105-114). Bologna: Pitagora.