

TIRO PARABÓLICO Y SU DESCRIPCIÓN ALGEBRAICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Pedro Javier Ubaldo Salinas, Rogelio Martínez García, Liliana Flores Jiménez

CECyTN₄ “Lázaro Cárdenas”, DME Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional. (México)

pubaldos@ipn.mx, martinezga@ipn.mx, lfloresj@ipn.mx.

RESUMEN: En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en Matemática Educativa, se indaga acerca de la comprensión de los estudiantes de tercer semestre del tiro parabólico y su descripción matemática mediante la ecuación cuadrática. Luego de la enseñanza del tema, aunque los estudiantes comprendieron el fenómeno físico, no dieron sentido al modelo matemático. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de los objetivos de los Programas de Estudio del bachillerato tecnológico.

Palabras clave: tiro parabólico, ecuación cuadrática.

ABSTRACT: This research is within the framework of an inter-institutional project about Educational Mathematics teaching and research. The work investigates about the third-semester students' understanding of the parabolic throwing and its mathematical description by means of the quadratic equation. After teaching the topic, the students understood the physical phenomenon; however, they didn't get the essence of mathematical model. The obtained results show the necessity to investigate about the way in which the teaching process can make the students effectively use the interrelation among the Learning Units of the different disciplines, in order to achieve the aims of the technological high school Teaching Programs.

Key words: parabolic throwing, quadratic equation.

■ Introducción

En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en Matemática Educativa, se indaga acerca de la comprensión de conceptos de matemáticas de los estudiantes, revelada cuando los aplican para describir fenómenos físicos que se estudian como tal, de forma tradicional, en el Laboratorio de Física. Informamos aquí de la comprensión de los estudiantes de tercer semestre de bachillerato tecnológico del fenómeno de tiro parabólico y su descripción matemática mediante la ecuación cuadrática, luego de la enseñanza del tema en el curso de *Física I* (DEMS, 2008).

■ Marco de referencia

El tema de la ecuación cuadrática se incluye en el programa de estudios del bachillerato tecnológico en la unidad de aprendizaje *Álgebra* para el primer semestre (DEMS, 2008, Unidad didáctica 4, p. 16). Le siguen las unidades *Geometría* y *Trigonometría* para el segundo semestre y *Geometría Analítica* para el tercero. Esta secuencia lleva a suponer que el estudiante del tercer semestre ha alcanzado un cierto dominio de las expresiones simbólicas matemáticas y de los conceptos a los que se refieren. También para el tercer semestre se prescribe para el curso de *Física I* la impartición del tema del tiro parabólico, precedida por la de los temas de caída libre y de movimiento rectilíneo uniforme; la enseñanza teórica es anterior a la experimental respectiva en el laboratorio para cada tipo de movimiento. Con el antecedente del curso *Álgebra*, en *Física I* se espera que el estudiante utilice la ecuación cuadrática como la ecuación de movimiento del tiro parabólico y calcule los valores de sus principales características, a saber: altura máxima, alcance máximo, tiempo en alcanzar la altura máxima y tiempo de vuelo. Con la ecuación cuadrática se obtiene el valor del tiempo de vuelo del proyectil. No obstante, ya Barojas, Covarrubias, Gallegos, López y Vega (1997) han señalado que los estudiantes utilizan una representación *escolarizada* de los conceptos científicos “para dar respuesta a las demandas escolares y que sólo forman parte de su memoria y que manifiestan sólo en procesos declarativos y operacionales” (p.217).

El orden mismo de las asignaturas transgrede el de la evolución del conocimiento, señalada por Born (1956) con su origen en la experiencia con problemas o preguntas referidas a situaciones concretas, que culmina con su formulación matemática abstracta, no al revés. En la misma línea, en su propuesta psicogenética de la evolución del pensamiento del individuo, Piaget e Inhelder (1985) han señalado que los esquemas formales se construyen progresivamente a partir de los esquemas anteriores, en el mismo orden y sin que pueda omitirse alguno de ellos, y subrayó la importancia de la acción en situaciones concretas del entorno para dar lugar a la abstracción. No obstante, incluso la enseñanza tradicional de la Física incluye primero la descripción matemática del fenómeno y luego su confirmación experimental (DEMS, 2008).

■ **Métodos e instrumentos**

La Tabla 1 muestra la correspondencia de los contenidos, de interés aquí, de la asignatura de Matemáticas (M) con el tema de Física (LF) y sus semestres respectivos en números romanos. Si bien en el tercer semestre también se incluye el tema de la parábola en la unidad de aprendizaje *Geometría Analítica* (DEMS, 2008, p. 10), su estudio es más o menos simultáneo al de tiro parabólico en *Física I* (DEMS, 2008), por lo que no se puede suponer un dominio del primero por parte de los estudiantes comparable al de la cuadrática.

Tabla 1. Articulación de contenidos.

Matemáticas (M)	Competencia particular: Contenido	Semestre		Laboratorio de Física I (LF) Practicario (Carrillo, 2006, pp. 63-66)
		M	LF	
Álgebra (DEMS, 2008)	Unidad 4: Funciones y ecuaciones cuadráticas (p. 17)	y	I	Unidad 4 Física I (DEMS, 2008) Práctica 16-Tiro Parabólico (DEMS, 2008, pp. 14, 30)

Durante los primeros 15 minutos previos al comienzo de la enseñanza del tiro parabólico, se le aplicó el cuestionario C_1 a un grupo de 16 estudiantes, con el fin de obtener datos de sus conocimientos requeridos por el tema por enseñar. C_1 planteó cuatro reactivos con preguntas abiertas y otro de opción múltiple (véanse en la Tabla 2); se le presentó en el pizarrón para su contestación individual escrita en hoja de cuaderno.

La estrategia de enseñanza fue la dictada por el programa de estudios respectivo (DEMS, 2008); se basó en lo propuesto para el tema en el libro de texto recomendado (Pérez, 2011) y consistió en siete sesiones de aula de una hora cada una y, la octava, de laboratorio, de dos horas. Durante las primeras seis sesiones de aula se introdujeron los conceptos de movimiento uniforme y caída libre, tiro horizontal y sus ecuaciones de movimiento respectivas. En la séptima sesión, para tiro parabólico, mediante problemas alusivos a él se planteó la necesidad de la resolución de la ecuación cuadrática para la obtención del tiempo de vuelo del proyectil desde una altura determinada.

En la octava sesión, el desarrollo de la práctica fue videograbado. La hoja de control consistió en la práctica “Tiro parabólico” propuesta institucionalmente (véase DEMS, 2008, *Física I*, p. 30), e impresa, en la que los estudiantes registraron individualmente por escrito sus cálculos (véase la Figura 2) y conclusiones de la experimentación.

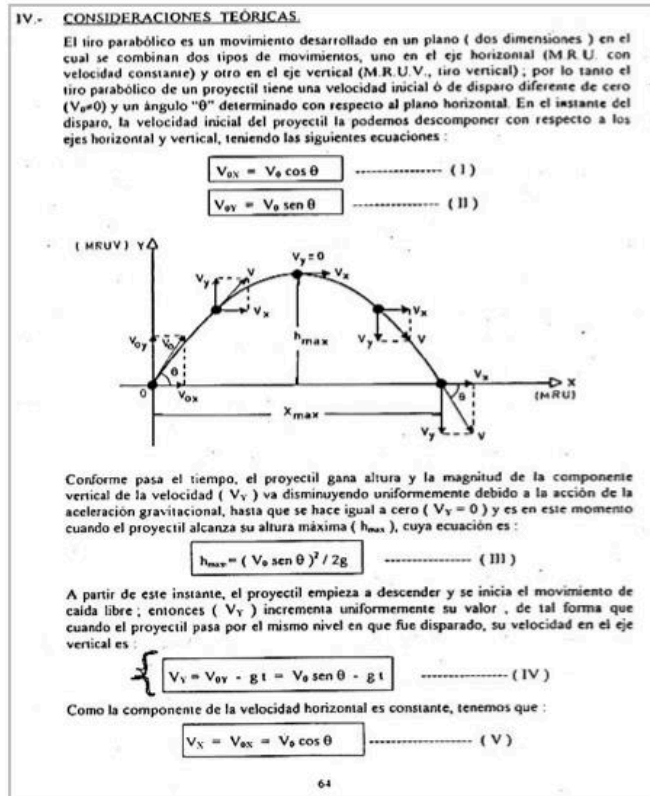


Figura 1. Teoría en la hoja de control (Carrillo, (2006), pp. 63-66).

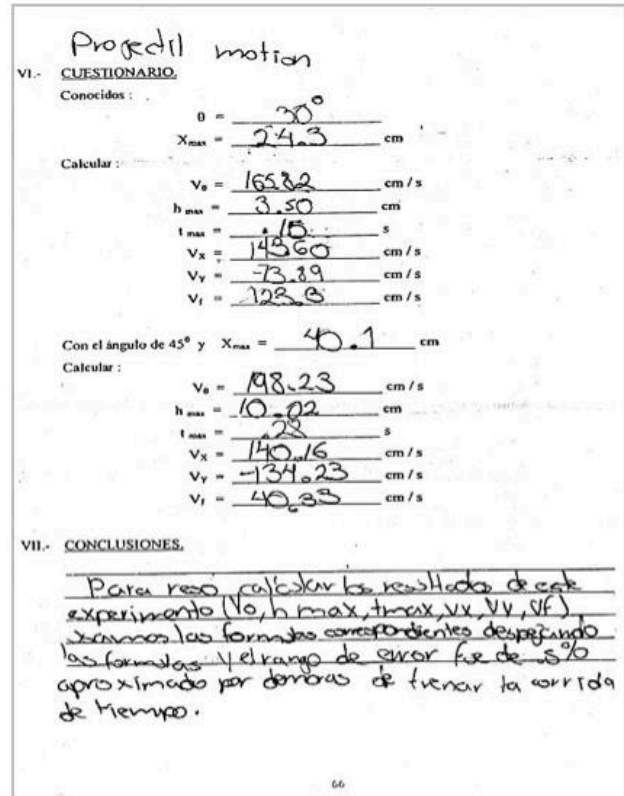


Figura 2. Resultado de mediciones y conclusiones en la hoja de control.

Para desarrollar la práctica el grupo se organizó en equipos de seis estudiantes. En cada equipo, uno de los estudiantes establecía las condiciones del disparo (ángulo de tiro, altura inicial, masa del proyectil), otro activaba el disparador y otro medía el alcance máximo del proyectil; los demás registraban los datos en sus hojas de control. Con estos datos y con el uso de la calculadora, los estudiantes efectuaron los cálculos requeridos para la descripción del movimiento (velocidad inicial, altura máxima, tiempo de vuelo y alcance máximo).

Luego, en sesión de aula se aplicó el cuestionario C₂, impreso, que planteó siete reactivos, de los cuales uno fue de opción múltiple, dos fueron instrucciones y cuatro fueron preguntas abiertas (véase la Tabla 2); la contestación, individual, duró 50 minutos. El objetivo de C₂ fue obtener datos de la comprensión de los estudiantes del fenómeno del tiro parabólico y su descripción matemática al término de la enseñanza del tema.

■ Resultados

La Tabla 2 resume los resultados de cada cuestionario, la correspondencia de los reactivos por contenido común y las frecuencias de respuestas correctas proporcionadas a cada reactivo, para C₁, en el primer renglón, mientras que para C₂ en la celda que corresponde al contenido común con el reactivo en C₁ (“TP” denota “Tiro Parabólico”).

Tabla 2. Correspondencia de los reactivos de C₁ y C₂ y frecuencia de respuestas correctas a sus reactivos respectivos.

Reactivos de C ₁ (antes de la enseñanza)	¿Qué es TP?	TP es un movimiento ¿de qué tipo?	¿Qué ecuaciones describen un TP?	¿Ecuación alcance máximo? a) lineal, b) cuadrática c) cúbica	¿Qué curva representa a un TP?
C₁	12	8	6	7	9
(%)	75%	50%	38%	44%	36%
Reactivos de C₂ (después de la enseñanza)					C₂ (%)
1) ¿TP es movimiento en: a) Dos, b) Una, c) Tres dimensiones?	---	14			88%
2) ¿De cuántos y cuáles movimientos consta el TP?	---	15			94%
3) Trace la gráfica que representa un TP.	---				16 100%
4) ¿Tipo de movimiento y ecuación para alcance máximo en TP?	---			13	81%
5) ¿Movimiento qué tipo y ecuación para altura máxima en un TP?	---	12			75%
6) Dada altura inicial, ¿ecuación para tiempo de vuelo y de qué orden es?	---		10		63%
7) Dada velocidad inicial, ¿ecuación para altura en cualquier instante?	---		6		38%
Promedio por contenido C₂ (%)	---	85%	50%	81%	100%

Antes de la enseñanza, los estudiantes expresaron una noción general de la representación del tiro parabólico y poco conocimiento de la ecuación que lo modela (véanse las segunda y tercera filas de la Tabla 2 para C₁). Un ejemplo de respuestas típicas dadas al cuestionario C₁ se muestra en la Figura 3. Todas las respuestas se dieron en lengua natural y cuatro estudiantes (25%) incluyeron una figura en su respuesta al reactivo 5. Sólo cinco estudiantes contestaron que la cuadrática describiría al tiro parabólico.

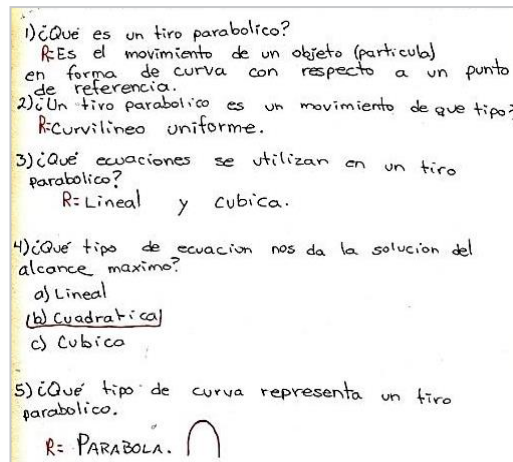


Figura 3. Respuestas comunes al cuestionario C₁.

Después de la enseñanza, los resultados de C₂ parecen indicar que los estudiantes comprendieron el fenómeno del tiro parabólico como la composición de dos movimientos perpendiculares entre sí, uno rectilíneo uniforme y el otro uniformemente acelerado debido a la acción de la gravedad sobre el proyectil (véanse los renglones cuarto y quinto de la Tabla 2 y la Figura 4), pero no comprendieron su descripción mediante la ecuación cuadrática (véanse los reactivos 6 y 7 de C₂ en la Tabla 2 y la Figura 5), ni los valores obtenidos a partir de ella.

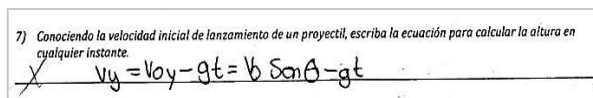
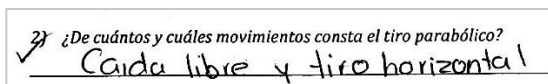


Figura 4. Cuestionario C₂: movimientos componentes del Tiro Parabólico.

Figura 5. Cuestionario C₂: descripción matemática del Tiro Parabólico.

Contribuyó a este resultado aparente la centración en la operatividad, resuelta con el uso de la calculadora, que dio lugar a la incorrección en la escritura simbólica, igualando el cuadrado de una magnitud con su raíz cuadrada, la colocación del signo de igualdad a la altura del numerador de un cociente, la omisión de unidades de medida, incluso la de ángulos, la colocación de subíndices a la misma altura que la de los símbolos. En particular, aún con el uso de la calculadora, los estudiantes mostraron descuido con el sistema decimal, como lo muestran las Figura 6 y 9 para el valor al cuadrado de la velocidad inicial ($v_0^2 = 27498.85 \text{ cm}^2/\text{seg}^2$, en lugar de $274.92 \text{ (cm}^2/\text{seg}^2)$).

$S_{\max} = \frac{V_0^2 \text{Sen } 2\theta}{g}$ $t_{\text{max}} = \frac{2V_0 \text{Sen } \theta}{g}$ $gS = V_0^2 \text{Sen } 2\theta$ $\frac{gS}{\text{Sen } 2\theta} = V_0^2$ $\sqrt{\frac{980(2.73)}{\text{Sen } 2(30)}} = 274.92$ $V_0 = 165.82 \text{ cm/s.}$ $t_m = \frac{2(165.82) \text{Sen } 30}{980} = 0.16 \text{ s.}$ $h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ $h = 165.82(0.16) + \frac{1}{2} (-980)(0.16)^2$	$h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ $h_{\max} = \frac{V_0^2 \text{Sen } 2\theta}{g}$ $h_{\max} = \frac{165.82^2 \text{ Sen } 30}{2(980)}$ $h_{\max} = 3.50$ $V_x = 165.82 \cos 30 = V$ $V_x = 142.6$ $V_y = 165.82 \text{ Sen } 30 (9.8)$ $V_y = 73.89$ $V_f = \sqrt{(142.60 + 73.89)^2}$ $V_f = 123.3$
---	---

Figura 6. Cálculos solicitados en la práctica de laboratorio.

Además, incluso si de los datos obtenidos con las hojas de control de la práctica de laboratorio se pudiera afirmar que los estudiantes comprendieron el tiro parabólico como la composición de dos movimientos independientes (véase la Figura 7), uno rectilíneo uniforme en el plano horizontal y otro vertical (caída libre) variable debido a la acción de la gravedad, una revisión de la enseñanza efectuada arrojaría la duda de si los estudiantes meramente repitieron lo que se les dijo y lo que se les presentó durante las sesiones de estudio del tiro parabólico en el aula y en el laboratorio (véase la Figura 1).

Por los resultados de los cuestionarios C_1 y C_2 considerados respecto a la correspondencia de conceptos mostrados en la Tabla 2, los estudiantes parecieron haber comprendido los conceptos físicos después de la enseñanza y haber distinguido al tiro parabólico como la composición de dos movimientos (reactivo 2 de C_1 (50% de respuestas correctas) y reactivos 1, 2 y 5 de C_2 (en promedio, 85% de respuestas correctas)). Además, pareció que todos lograron identificar después de la

enseñanza la forma de la trayectoria descrita por el proyectil (reactivos 5 en C₁ y 3 en C₂; véase la Figura 7).

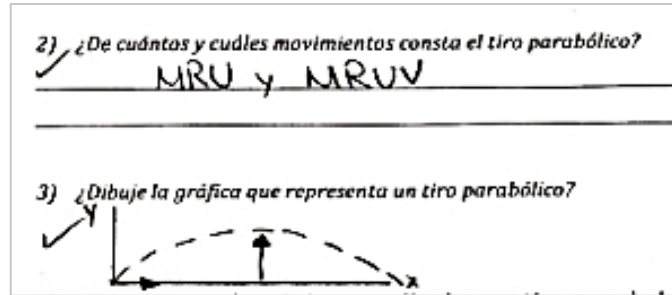


Figura 7. Identificación de la forma de la trayectoria de un proyectil en el cuestionario C₂.

Pero también los datos de la correspondencia de los reactivos en la Tabla 2 (reactivo 3 en C₁ y reactivos 6 y 7 en C₂, y reactivo 4 en C₁ y reactivo 4 en C₂) exhibieron que las operaciones y los cálculos realizados con las mediciones que los estudiantes obtuvieron en la práctica de laboratorio (véanse las Figuras 6, 8 y 9) no contribuyeron a la comprensión del modelo matemático para el tiro parabólico.

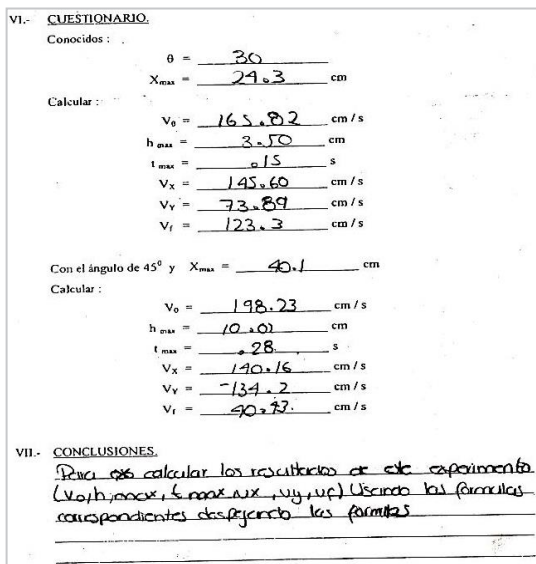


Figura 8. Memorización de “fórmulas”.

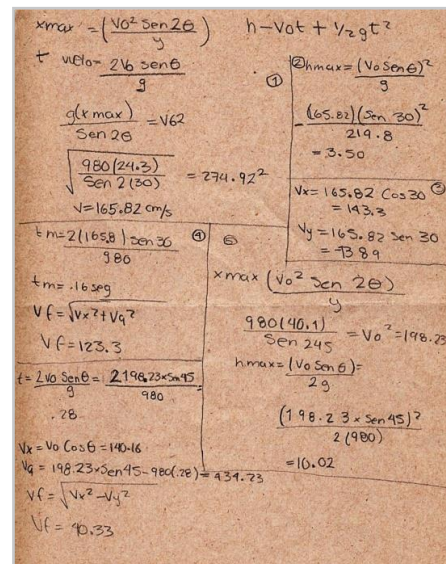


Figura 9. Operatividad de “fórmulas”.

Los estudiantes mismos expresaron en sus conclusiones de la práctica la obtención de resultados mediante la mera aplicación de fórmulas (véase la Figura 8), de lo que se infiere que para que las recuperaran pudieron haber recurrido ya fuera a sus notas, a sus textos o bien a su memoria. Por otro lado, queda por indagar acerca de la contribución de la realización efectiva de las operaciones por los estudiantes mismos, sin el uso de calculadora, a su comprensión de la cuadrática para describir el movimiento del tiro parabólico, a su dotación de sentido a los valores obtenidos y a la necesidad de que expresen sus unidades de medición.

■ Conclusiones

La representación por parte de los estudiantes del tiro parabólico, la memorización escolarizada de formas de representación en el ámbito matemático (véase la Figura 1) y el énfasis en la operatividad (véanse las Figuras 6 y 9), son causas de su interpretación inconveniente para el análisis de problemas científicos. La insuficiencia en la adquisición de los conocimientos previos requeridos para el estudio de temas nuevos, tales como el sistema decimal, el valor posicional, los sistemas de medidas y la sintaxis algebraica, obstaculizaron la identificación de la cuadrática como descriptor general del movimiento de proyectiles.

El tiro parabólico, como cualquier nuevo tema a revisar en el Programa de Estudios de *Física I*, es en un inicio difícil de comprender para el estudiante; sin embargo, las ecuaciones que modelan este movimiento y su resolución son otras causas del bajo desempeño de nuestros educandos.

Por otra parte, surge la interrogante de si la experimentación efectiva en el laboratorio de Física debería anteceder al estudio en el aula de la descripción matemática del tiro parabólico y de qué manera se propondría tal experimentación para que el estudiante dotara de sentido a la ecuación cuadrática como ecuación de movimiento del proyectil.

Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de objetivos de los Programas de Estudio del bachillerato tecnológico.

■ Referencias bibliográficas

Barojas, H., Covarrubias, F., Gallegos, L., López, A., Vega, E. (1997). Transformación de concepciones epistemológicas y de aprendizaje en procesos de física en el nivel medio superior. En G. Waldegg (Ed.). *Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa*, pp. 216-229. México D. F: COMIE.

Born, M. (1956) *Experiment and Theory in Physics*. Nueva York: Dover.

- Carrillo, R. (2006). *Tiro parabólico en Prácticas de laboratorio*. México D. F.: IPN-CECyT No 4 “Lázaro Cárdenas”.
- Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2008). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra*. México: IPN.
- Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2008). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Física I*. México: IPN.
- Pérez, H. (2011). *Física General*. México D. F.: Patria.
- Piaget, J., Inhelder, B. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. 6ª. ed. Barcelona: Paidós Ibérica.