

## UNA PROPUESTA DE SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA APROXIMACIÓN DE LA MEDIDA DEL ÁREA POR EXHAUSCIÓN

**Francisco Ugarte Guerra, Mihály Martínez Miraval**

Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)

[martinez.ma@pucp.edu.pe](mailto:martinez.ma@pucp.edu.pe), [fugarte@pucp.edu.pe](mailto:fugarte@pucp.edu.pe)

**RESUMEN:** Esta investigación presenta el análisis de las dialécticas de la Teoría de las Situaciones Didácticas por las que transitan estudiantes universitarios al desarrollar una situación didáctica, mediada por el GeoGebra, que los lleva a la aproximación de la medida del área. Al realizar el contraste entre los resultados esperados y obtenidos, se observó que los estudiantes adaptaron por sí mismos un procedimiento de aproximación para medir el área que se les propuso, conceptualizando de esta forma (en el sentido de Brousseau), la noción de límite infinito asociado al cálculo de medición a partir de un proceso por exhaustión; al mismo tiempo se observaron las dificultades en el proceso de conversión de la aproximación geométrica (registro gráfico) al registro algebraico.

**Palabras clave:** teoría de situaciones didácticas, geometría dinámica, GeoGebra, concepto de área

**ABSTRACT:** This research work shows an analysis of the dialectics of the Didactic Situation Theory that the university students affront when developing a didactic situation, by using the Geogebra software, in order to approximately obtain the measurement of the area. When comparing the expected and obtained results, it was possible to observe that students adapted by themselves an approach procedure for measuring the proposed area. So, they conceptualize (in Brousseau's sense) the notion of infinite limit associated to measurement calculus from a process by exhaustion. At the same time, difficulties in the conversion process from the geometric approach (graphic register) to algebraic register were observed.

**Key words:** Didactic Situation Theory, dynamic geometry, Geogebra, area concept

## ■ Introducción

El proceso de conceptualización del área se desarrolla de manera transversal durante todo el periodo escolar y, en el nivel superior, se asocia al concepto de integral definida. Al respecto, Corberán (1996), señala que la dificultad que tienen los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos como, por ejemplo, el de integral definida, se explica por la falta de un concepto de área.

En nuestra práctica docente, en una universidad de Lima, no se propone una definición formal de área ni de integral definida, aún cuando se basan en conceptos que son familiares a los estudiantes tales como: funciones, intervalos, áreas de rectángulos, sumatorias, límites, entre otros. De esta manera, consideramos que se pierde la oportunidad de que los estudiantes adquieran un nuevo concepto a partir de sus conocimientos previos, por medio de una situación didáctica.

Freudenthal (1999) presenta diferentes enfoques para la construcción del concepto de área, la existencia de estos enfoques es un argumento común a muchas investigaciones (Puig, 1997; Corberán 1996) que intentan explicar la complejidad de la construcción de este concepto. En nuestra investigación hemos empleado el enfoque por medición mediante un proceso de exhaustión, que se caracteriza por el uso de unidades de área cada vez más pequeñas que generan una aproximación, por defecto, al área.

La situación didáctica que planteamos propone que el estudiante adapte a su aprendizaje un procedimiento de aproximación, mediado por el Geogebra, que le permita aproximar la medida del área tanto como lo desee mediante la adición de medidas de áreas de rectángulos de igual base. Adicionalmente y de forma complementaria al objetivo planteado, pretendemos que el estudiante represente dicha aproximación utilizando un registro algebraico.

Con esa finalidad diseñamos una propuesta didáctica, tomando como marco teórico a la Teoría de las Situaciones Didácticas, de forma tal que a partir de la interacción entre el estudiante, el saber y el medio, el aprendizaje se logre (Brousseau, 2007).

Por otro lado hemos elegido a la Ingeniería Didáctica como nuestro marco metodológico, por ser, en palabras de Artigue (1995), «un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza» (p. 36).

Respecto al uso de las herramientas informáticas, que involucran a la geometría dinámica, Amorin et al. (2011) afirman que estas permiten que el estudiante valide sus hipótesis, y argumente o cuestione sus ideas o las de sus compañeros. En las situaciones que hemos diseñado, a diferencia de otras, como las de Ribeiro (2002), en las que reportan el uso de la tecnología como una herramienta que permite al estudiante dibujar rectángulos en el plano y hallar sus áreas, a partir del ingreso de comandos en la barra de entrada (procedimiento estático), nosotros hemos diseñado *applets* en Geogebra, basados en deslizadores, de modo que permitan observar, de forma dinámica, cómo al aumentar el número de rectángulos, aumenta la suma de las medidas de sus áreas, lo que además

permite centrar la atención del estudiante en la interpretación de resultados y no en la complejidad de los cálculos.

### ■ Problemática

En la etapa escolar, el concepto de área se enseña a partir de métodos de subdivisión finita debido a que se desarrolla un pensamiento matemático elemental; sin embargo, en una etapa superior donde se debe desarrollar un pensamiento matemático avanzado, se esperaría que dicho concepto se enseñe a partir de un proceso de subdivisión infinita; sin embargo, este proceso no se realiza.

Es frecuente que los textos de cálculo integral propongan solucionar el problema del área a partir de una construcción utilizando el límite de una suma Riemann (Stewart, 2001; Leithold, 1998), asociando dicho límite a la integral definida. Sin embargo, esta construcción no se presenta como una actividad de aprendizaje, sino como una definición y los problemas asociados están enfocados a la aplicación directa del teorema fundamental del cálculo y de las propiedades de integral definida, produciéndose un fenómeno advertido por Artigue (2003).

Nosotros diseñamos e implementamos actividades donde el estudiante construyó el concepto de área utilizando el enfoque por medición, a partir de un proceso de exhaustión que considera subdivisiones cada vez más finas, generadas a partir del incremento de rectángulos de aproximación que tienden al infinito. De esta forma, la definición de área se obtendría de manera natural como resultado de una suma de medidas de áreas de infinitos rectángulos.

Esta propuesta mediada por el Geogebra es una alternativa al uso del teorema fundamental del cálculo como estrategia presentada en los textos arriba mencionados. De esta manera, se esperan superar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de conceptualización de los procesos de límites, al mismo tiempo que se conectan, de una manera flexible, el trabajo analítico y gráfico.

### ■ Marco teórico y diseño de la investigación

El aprendizaje de un concepto matemático, desde nuestra concepción, debe surgir a partir de las interacciones entre el estudiante, el saber y el medio creado por el profesor que le permita al estudiante construir el nuevo conocimiento. Por ese motivo, consideramos que el marco teórico más adecuado para nuestra investigación es la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007).

Para que el estudiante adapte a su aprendizaje un procedimiento que le permita aproximar el área de una región tanto como lo desee, hemos diseñado actividades desde la teoría de situaciones didácticas, para que el estudiante adquiera el concepto de área a partir de la interacción con el medio propuesto por el profesor, que incluyen a su compañero de dupla, a la otra pareja de participantes, al Geogebra y las tareas propuestas, a sus conocimientos previos, a los nuevos conocimientos que se van generando, al profesor investigador, etc.

La situación propuesta en nuestra investigación utiliza la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación*, con el fin de que el estudiante analice los cambios dinámicos que se generan en el dibujo y en los valores numéricos de las medidas de las áreas de los rectángulos, dado que, al aumentar el número de rectángulos, estos ocupan un mayor espacio en la región, la suma de sus áreas aumenta, así como también el número de términos de la adición; los espacios de la región que no quedan cubiertos por los rectángulos disminuyen, del mismo modo que la medida de las bases de los rectángulos.

Estos cambios en la variable didáctica, generan cambios en la manera de percibir el problema por parte de los estudiantes. Al principio, el estudiante dibuja dos o cuatro rectángulos y su foco está puesto en calcular la medida de sus áreas, pero al trabajar con más de 100 rectángulos, su foco cambia, pues busca un modelo que le permita expresar dicha área y centra su visión en observar cómo la región se va completando con rectángulos. Este proceso permite que el estudiante transite por las distintas dialécticas propias de la teoría de las situaciones didácticas como son las de *acción*, *formulación* y *validación*, las que forman parte de la *situación a-didáctica* que es una situación en la cual la intención de enseñar no es revelada al estudiante, pero que es diseñada por el profesor con el objetivo de lograr que el estudiante se adapte al medio e interactúe con él, y así adquiera el saber (Brousseau, 2007).

En una dialéctica de acción, el estudiante actúa sobre el medio a partir de sus conocimientos previos, y elige sus estrategias de resolución. La respuesta dada por el medio a la acción del estudiante, puede reforzar el proceso que sigue el estudiante para la adquisición del saber, o hacerle cambiar su procedimiento si los resultados obtenidos no son coherentes. En una dialéctica de formulación, el estudiante comunica sus resultados e intercambia opiniones, ya sea de manera oral, visual, escrita, etc. con el objetivo de uniformizar o corroborar los procedimientos utilizados, lo que permite generar un mismo lenguaje que sea comprensible a todos los participantes de la actividad. En una dialéctica de validación, el estudiante debe justificar a otras personas la validez de sus procedimientos y la coherencia de sus resultados, y debe ser capaz de aclarar las dudas que aparezcan en la discusión con sus compañeros.

### ■ Análisis de algunas tareas de la situación didáctica

A partir de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), hemos diseñado e implementado una situación didáctica y algunos *applets* en GeoGebra (ver figura 1), en base a deslizadores, para que el estudiante los utilice como herramienta para aproximar la medida del área mediante la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos de aproximación de igual base, siendo este número de rectángulos nuestra variable didáctica.

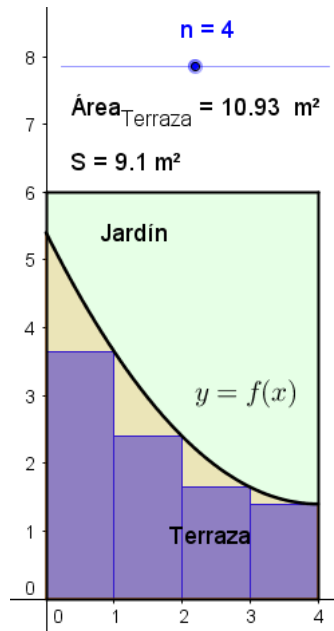


Figura 1. Applet en GeoGebra.

La investigación se realizó con cuatro estudiantes y sus respuestas se recogieron tanto física como oralmente. A continuación presentamos el análisis de las respuestas de uno de los estudiantes.

En una de las tareas propuestas se pidió al estudiante explicar qué calcula  $S$  (ver figura 1), cuando el número de rectángulos aumenta de 1 a 8. Se esperaba que el estudiante moviera el deslizador e indique que  $S$  calcula la suma de áreas de los rectángulos dibujados; sin embargo, el estudiante no solo reconoció lo esperado, sino que formuló, con cierta duda, que se estaba aproximando el área de la terraza. Asimismo, representó correctamente el valor de  $S$  como una adición de términos (la figura 1 muestra lo que el estudiante vio en el monitor de su computadora).

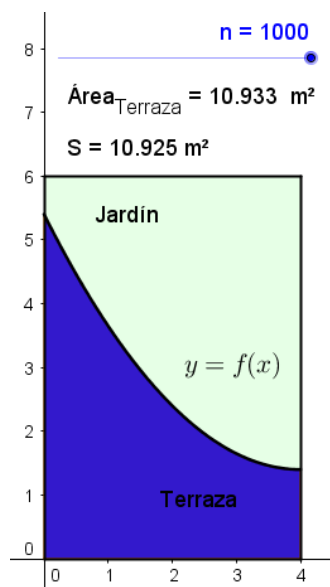
Creo que está calculando el área aproximada de la terraza.

$$\begin{aligned}
 \text{Loseta 1} &= \text{Área} = 1 \times f(1) \\
 \text{u. 2} &= \text{Área} = 1 \times f(2) \\
 \text{3} &= \text{Área} = 1 \times f(3) \\
 \text{4} &= \text{Área} = 1 \times f(4)
 \end{aligned}
 \qquad
 S = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 9,1 \text{ m}^2$$

Figura 2. Suma de áreas de rectángulos  $S$ . Fuente: Martínez (2015, p. 140)

Observamos que cuando se trabajó con un número pequeño de rectángulos y la medida de cada base fue un número natural, ningún estudiante presentó dificultades para expresar  $S$  como una adición de medidas de áreas de rectángulos; sin embargo, cuando se pidió al estudiante representar  $S$  como una adición de términos para 8, 87 y 871 rectángulos, presentó dificultades al representar la altura de cada rectángulo de forma algebraica, lo que ocasionó errores en el planteamiento.

En otra tarea de la situación didáctica, el estudiante debía dibujar 1000 rectángulos en la terraza y señalar si estos la cubrían totalmente; luego debía indicar cuántos rectángulos sí lo cubrirían.



**Figura 3.** Dibujo de 1000 rectángulos en una región

Como se observa en la figura 3, ya no se aprecia en la terraza el dibujo de los 1000 rectángulos, por ese motivo, se esperaba que el estudiante deje de lado el análisis gráfico y centre su atención en los resultados numéricos, los cuales muestran que la terraza no se cubre en su totalidad; inclusive, era probable que el estudiante indicara que usando rectángulos no se podría cubrir una región no lineal. Asimismo, se esperaba que el estudiante se dé cuenta que necesitaba aumentar el número de rectángulos para aproximarse cada vez más al área de la región, y que este número tendería al "infinito".

Exactamente no se ha cubierto toda la terraza, se aproximará pero no se cubre por completo

No llegará exactamente, quizás se acerca un 99% • podría poner lucinitas cosetas, pero nunca llegará al 100%.

$$S = b f(x_1) + b f(x_2) + \dots + b f(x_{100})$$

**Figura 4.** Respuestas dadas por el estudiante luego de dibujar 1000 rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 183 y 189)

A partir de las respuestas dadas por el estudiante (ver figura 4) a la tarea propuesta, observamos que se validó el procedimiento de aproximación, porque el estudiante se dio cuenta que puede aproximarse tanto como lo desea a la medida del área, y es consciente que no llegará a calcular exactamente dicha medida. Asimismo, observamos que representó correctamente la suma  $S$  como una adición de infinitos términos (adición de medidas de áreas de infinitos rectángulos), superando las dificultades presentadas en tareas anteriores, esto se consiguió luego de que el profesor explicara el uso de expresiones simbólicas con subíndices naturales. Por estos resultados, afirmamos que el estudiante alcanzó la *dialéctica de validación*.

### ■ Conclusiones

A partir del desarrollo de la situación didáctica; de la información recogida de los estudiantes, tanto escrita como oralmente; y del análisis realizado, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Al poder observar cómo varían las gráficas y los cálculos numéricos de forma dinámica, los estudiantes centraron su atención en analizar, justificar, e interpretar los resultados obtenidos.
- El estudiante amplía su noción de área a partir del proceso de exhaustión, esto es que puede aproximarse tanto como quiera a la medida de un área, utilizando un número de rectángulos que tiende al infinito.

- Es posible implementar otra situación didáctica cuyo objetivo sea expresar la medida del área como el límite de la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos, de modo que se introduzca la definición de área como el límite de una suma de Riemann o la medida del área como integral definida (Martínez, 2015).

### ■ Referencias bibliográficas

- Amorim, F., Costa, G & Salazar, J. V. (2011, junio). *Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo*. Anais de XIII CIAEM-IACME. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. Recuperado de [http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/1649/749](http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1649/749)
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2003). *¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?* *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X, 117-134. Recuperado de <https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. [Tesis Doctoral]. Universidad de Valencia. España. Recuperado de <http://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/Corberan96.pdf>
- Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. México, D. F.: Oxford.
- Martínez, M. (2015). *Una propuesta para articular área y medida usando la tsd, en alumnos de nivel superior*. [Tesis de Maestría no publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado de [http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/61113/MARTINEZ\\_MIRAVAl\\_MIHALY\\_PROPUESTA\\_TSD.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/61113/MARTINEZ_MIRAVAl_MIHALY_PROPUESTA_TSD.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp 61-94). Recuperado de <http://www.uv.es/puigl/fd.pdf>.
- Ribeiro, J. (2002). *Conceito de integral: Uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem*. [Tesis de Maestría no publicada]. PUC-SP. Brasil. Recuperado de [https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11147/1/dissertacao\\_jose\\_manuel\\_melo.pdf](https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11147/1/dissertacao_jose_manuel_melo.pdf)



Stewart, J (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas*. México, D. F.: Thomson Editores.