Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los *Elementos*

Edgar Alberto Guacaneme Suárez[1]

En este documento se presenta un análisis de la teoría de la proporción expuesta por Euclides en el Libro V de los *Elementos*; dicho análisis se nutre de los resultados de la investigación en Historia de las Matemáticas y se organiza a la luz de una interpretación de la *Teoría de Significados Sistémicos* del Enfoque Ontosemiótico. Los resultados del mismo ofrecen una mirada alterna de la propuesta euclidiana relativa al tratamiento de la razón y la proporción, potencialmente útil —y, en cierto sentido, necesaria— para adelantar tanto la actividad de docencia de las matemáticas, como la investigación didáctica relacionada con estos objetos matemáticos.

Introducción

En el proceso de construcción del proyecto de tesis denominado inicialmente *El conocimiento histórico en la formación integral de un profesor de matemáticas: estudio del caso de la proporcionalidad*,[2] del Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Educación Matemática, se ha considerado importante lograr una aproximación a la historia de la razón y la proporción recurriendo a la identificación de fuentes documentales que versen específicamente sobre ésta y que permitan esclarecer, entre otros aspectos, algunos momentos y hechos fundamentales de su desarrollo. En este sentido, al menos en la tradición matemática occidental, se han identificado varios hitos, dentro de los cuales sobresale la época dorada de los griegos (representada fundamentalmente por Eudoxio, Euclides y Apolonio) en la que se configura una teoría de las proporciones, se adapta a la versión axiomática deductiva y se usa en la descripción de curvas geométricas.

De aquella época, y en particular de la producción matemática de Euclides, hemos seleccionado una de las obras más importantes para las matemáticas, en general, y para la teoría de la proporción, en particular: los

---

1 Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación (Sede Universidad del Valle) y profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

2 Dirigido por el Doctor Luis Carlos Arboleda e inscrito en la Línea de investigación en Historia y Educación Matemática. Actualmente el proyecto se titula *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*.

Elementos[3]. Si bien los Libros V, VI, VII y X, de esta obra contienen información relativa a las proporciones, desde nuestra perspectiva ha merecido especial atención el Libro V, puesto que: (i) en éste Euclides hace un tratamiento de la teoría de la proporción para las magnitudes geométricas; (ii) esta teoría contiene la definición de proporción, por demás ampliamente estudiada por los historiadores, la cual constituye la innovación central frente a la teoría de la proporción pitagórica; (iii) el Libro V maneja un nivel de generalidad *sui generis* en los *Elementos*; (iv) la "proporcionalidad geométrica" no ha sido tan comentada y estudiada en la investigación didáctica (o al menos no tanto como la "proporcionalidad aritmética") y por tanto, presenta un "sabor" especial a la reflexión; y (v) abordar el estudio de todos los libros mencionados desborda nuestras posibilidades de tiempo y espacio actuales. Así, el Libro V es el objeto de análisis de este trabajo; de manera específica nos interesa esclarecer el significado de la razón y la proporción, en tanto objetos matemáticos centrales de la teoría desarrollada en dicho libro. Para tal fin, haremos uso de las seis categorías a las que alude la *Teoría de los significados sistémicos* [(Godino, 1996), (Godino y Batanero, 1994), (Godino y Batanero, 1998), (Godino y Recio, 1998), (Godino, 2002), (Godino, Batanero y Font, 2007)], a saber: situaciones problemas/tareas matemáticas, lenguaje matemático, procedimientos/procesos matemáticos, conceptos/definiciones, propiedades y argumentos.

Atendiendo a ello, inicialmente presentaremos una breve descripción de las seis categorías definidas en la *Teoría de los significados sistémicos* y del contenido del Libro V, para luego hacer una descripción del tratamiento de la teoría de la proporción a través de cada una de las seis categorías mencionadas. Finalmente, esbozaremos algunas conclusiones acerca del significado sistémico de la razón y la proporción. Como apéndice del documento incluimos un listado de las definiciones y proposiciones del Libro V.

Esperamos que este trabajo permita al lector una mirada alterna de la propuesta euclidiana relativa al tratamiento de la razón y la proporción, y que los resultados aquí expresados puedan servir de base para elaborar contrastes con otras propuestas matemáticas, desarrolladas por los matemáticos o por los diseñadores curriculares, que posibiliten develar aspectos de lo que ha sido y es la teoría de la proporcionalidad.

3 Como los historiadores reconocen varias traducciones de los *Elementos*, procedentes de diversas versiones, aclaramos que se asumirá la versión de Puertas (1994), la cual procede de la edición de J. L. Heiberg y H. Menge, *Euclidis Opera omnia,* vols. I-IV, Leipzig, 1883-1886.

Señalemos, inicialmente, que entendemos la *Teoría de los significados sistémicos* (TSS) como una propuesta teórica-metodológica que, junto con la *Teoría de las funciones semióticas* y *la Teoría de las configuraciones didácticas*, constituyen los actuales desarrollos de un ambicioso programa de investigación en Didáctica de las Matemáticas, denominado *Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*, liderado por el doctor Juan D. Godino.[4]

Desde nuestra interpretación distinguimos que en el marco de la TSS se reconoce que el análisis del significado de los objetos matemáticos en una actividad matemática específica (de una cierta institución, momento histórico u obra matemática) se enriquece al ser ejecutado bajo la óptica de las seis entidades primarias o categorías de análisis citadas antes.

Entendemos que en este contexto teórico se considera que las *situaciones problemas/tareas matemáticas* son uno de los ejes centrales que contextualizan y promueven la actividad matemática y que incluyen el análisis tanto de los problemas matemáticos simples y complejos, como de las problemáticas metamatemáticas que movilizan la actividad matemática; aquí, se entiende que la mayoría de estos problemas están entretejidos en redes problemáticas y que por tanto su análisis debe desarrollarse en el ámbito singular y plural. Asimismo, en la descripción e identificación del significado de las nociones, la TSS asigna un importante papel al *lenguaje matemático*, interpretado —desde nuestra perspectiva— en una dimensión relativamente ingenua pero útil, en el que se le reconoce como un mediador en la solución de las problemáticas reseñadas y que considera la mirada a los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., empleados. Por otra parte, los *procedimientos/procesos matemáticos,* constituyen una tercera categoría de análisis en la TSS; en efecto, hemos comprendido que en esta teoría se asume la identificación de un campo operatorio o procedimental (definido por operaciones, algoritmos, técnicas, etc.) como un aspecto nodal en la identificación del significado de los objetos matemáticos, en tanto que este campo deja entrever las maneras de uso de dichos objetos en un ámbito no necesariamente discusivo o de definiciones; igualmente, hemos comprendido que se pueden analizar la manera como algunos procesos matemáticos (*v.g.*, materialización, idealización, particularización, gene-

4 En http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm se encuentran alojados una variedad de documentos que describen ampliamente tal programa.

ralización, personalización, institucionalización, representación, significación, descomposición, reificación) se ponen en juego y manifiestan como parte fundamental de la actividad matemática. Igualmente, y como es natural suponer, *conceptos/definiciones* constituye una categoría de análisis fundamental en la TSS; consideramos que en esta teoría el análisis de un concepto atiende el estudio de la definición, pero lo trasciende en la medida en que la concibe como una expresión del concepto, integrada más a las reglas gramaticales sobre el uso del lenguaje en la actividad matemática en cuestión. Las *propiedades matemáticas* constituyen la quinta categoría considerada en la TSS; desde nuestra interpretación de la teoría, concebimos las propiedades como los atributos que de los objetos matemáticos de una obra matemática se ponen en juego y se develan en la arquitectura de la obra misma; en cierto sentido, estos atributos exhiben el carácter utilitario de los objetos en tanto que dan cuenta de qué se puede o no hacer con los conceptos de la obra. La última de las seis categorías la constituyen los *argumentos matemáticos*; estos son los razonamientos que se utilizan para comprobar, explicar o justificar las soluciones de los problemas, o para validar las inferencias, conjeturas o deducciones que la trama constructiva en la actividad matemática puede implicar.

En lo que sigue, a través de estas seis categorías se intenta hacer una "reconstrucción" de lo que podemos describir como la "configuración epistémica" que Euclides elaboró para las nociones de razón y proporción en el Libro V, esto es, los objetos y relaciones emergentes de las prácticas operatorias y discursivas de Euclides sobre estas nociones o conceptos. Pero, antes, miremos la estructura de dicho Libro.

Estructura del Libro V

Por considerarse como componente de la obra total, se debe suponer que el Libro V está antecedido y condicionado por las ocho nociones comunes, enunciadas al inicio del Libro I (Puertas, 1991, pp. 199-201). Además, en tanto que hace referencia a las magnitudes geométricas generalizadas[5] y no de manera específica a las tratadas en los anteriores libros, se supone que éstos no condicionan o se implican en aquél; en cierto sentido, los historiadores estudiosos de los *Elementos* reconocen una independencia

5 Luis Vega, en la introducción general (Puertas, 1991, p. 73), califica el contenido del Libro V como la teoría *generalizada* de la proporción, y no teoría *general,* por al menos tres motivos: "[i] La forma de aparición de la teoría —en sustitución de nociones anteriores más limitadas y concretas de razón y proporción, en la primera mitad del siglo VI—, [ii] el hecho de que estas magnitudes hayan de cumplir ciertas condiciones —ser homogéneas y "arquimedianas"—, [iii] el punto oscuro de las relaciones entre las ideas de magnitud y número". (La numeración es nuestra).

del Libro V con respecto a los que le preceden. Igualmente se muestran de acuerdo en que el Libro VI constituye una particularización de la teoría de las proporciones generalizada y que en esencia aborda el estudio de la semejanza entre figuras. También, establecen que la teoría expuesta en el Libro V no condiciona el tratamiento de la teoría de la proporciones en el ámbito aritmético, contenida en esencia en el Libro VII, lo cual no puede interpretarse como la ausencia de ciertas analogías y diferencias en el tratamiento de la proporción entre los ámbitos de las magnitudes y los números. Asimismo, discuten si la teoría de proporciones generalizada es o no empleada en el Libro X, en tanto que algunos reconocen, en ciertas proposiciones, el uso de la idea de *antanairesis* —o como se llamó después, *anthyphairesis*— como una definición alterna de proporción, no enunciada por Euclides ni en el Libro V ni en el VII.

Una primera aproximación a la estructura del Libro V permite reconocer un grupo de dieciocho definiciones, veinticinco proposiciones (ninguna de ellas construcción o problema), dos porismas (o corolarios) y ningún postulado. A propósito de las proposiciones, Hill (1928, p. 39) afirma que "De las veinticinco proposiciones, cinco se refieren a las magnitudes y sus múltiplos (no a razones). De las veinte restantes, catorce conciernen a la *igualdad* de razones y seis a propiedades de razones *desiguales*".

Es este, entonces, el panorama general en el que se ubica el Libro V y que define su estructura interna. Este es el terreno en el que se desarrollará el análisis en torno a las seis categorías citadas y que definen los seis apartados siguientes.

Situaciones problemas/Tareas matemáticas

Acabamos de señalar que ninguna de las veinticinco proposiciones del Libro V enuncia explícitamente un problema matemático o una construcción; todas ellas son teoremas.[6] La gran mayoría de las proposiciones tiene una configuración condicional o bicondicional; en efecto, salvo la proposición 15, las demás o bien tienen un enunciado explícitamente condicional (si p entonces q), o se puede hacer una interpretación simbólica de la forma $p \Rightarrow q$. En este sentido, la actividad matemática esencial en el Libro V no es otra que la de demostrar enunciados condicionales; ahora

6 Nos referimos aquí a problemas o construcciones como los dados en las proposiciones 1 del Libro III (*Hallar el centro de un círculo dado*) y 1 del Libro I (*Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada*) respectivamente. Por teoremas asumimos aquellos enunciados que exhiben los atributos esenciales de los objetos. Euclides al terminar la demostración de un problema emplea la locución "*que es lo que había que hacer*" en tanto que al terminar la demostración de un teorema utiliza la locución "*que es lo que había que demostrar*".

bien, es apenas natural admitir que en el marco de una presentación deductiva, como la de los *Elementos,* es completamente adecuado asumir la demostración de cada proposición como una problemática evocada por el enunciado mismo de la proposición; bajo esta óptica, la demostración de cada proposición constituiría un problema lógico deductivo. El asunto de la demostración será abordado en esencia cuando demos cuenta de la categoría *Argumentación*.

Por otra parte, antes de pasar al análisis de la segunda categoría, creemos conveniente señalar que más allá de la mirada internalista que se pueda hacer al tipo de problemas y tareas matemáticas que subyacen en el Libro V, hay que considerar que la teoría euclidiana de las proporciones emerge en atención a dos problemas específicos de la época.

Por un lado, la entonces clásica teoría pitagórica de la proporción —y en general la cosmovisión pitagórica— había sufrido un duro revés al confirmarse la "anomalía" relativa a la conmensurabilidad de cualquier par de segmentos; es decir, a la imposibilidad de asignar un número (o medida) o dos números, a la razón de dos segmentos cualesquiera. Esto conminó a los matemáticos griegos a, entre otras *tácticas*[7], replantear la teoría de la proporción de tal suerte que se pudiera hablar de razones y proporciones, sin necesidad de especificar si las magnitudes consideradas eran o no conmensurables; en últimas, a excluir la noción de medida numérica de la geometría. En cierto sentido, el mérito de esta teoría es que frente a la teoría de los pitagóricos, esta no alude a la medida (como número) que establece "cuántas veces" una magnitud está contenida en otra, o cuántas veces una magnitud debe ser repetida para igualar a un múltiplo de la otra, o, como lo señala Corry (1994, p. 4), el mérito mayor de la teoría expuesta en el Libro V es la posibilidad de comparar magnitudes inconmensurables. Lo anterior no debe interpretarse como si en este libro se le diera salida total al problema de la conmensurabilidad, pues es en el Libro X y no en el V, donde se hace un tratamiento específico de la conmensurabilidad (o si se prefiere, de la inconmensurabilidad).

Por otro lado, es conveniente recordar que el Libro V atiende a la necesidad que motiva los *Elementos* y, más en general, a la obra euclidiana. Ésta no es un requerimiento ni iniciativa enciclopédica; más bien es una necesidad de presentar bajo el esquema axiomático deductivo las teorías matemáticas y, en este sentido, justificar las afirmaciones de la teoría bajo

7 El artículo de Rusnock y Thagard (1995) ofrece una gama y análisis de varias tácticas ligadas a los diferentes elementos (a saber: la construcción geométrica, la estructura lógica, la teoría de números y la teoría de razón/proporción) que el problema de la inconmensurabilidad involucra. Dos de las tácticas se refieren a "limitar la aplicación de la razón en geometría y reformular la geometría tanto como sea posible sin el uso de la razón; o [...] generalizar los conceptos de razón y proporción" (p. 115). Estas dos están implicadas en las propuestas eudoxiana y euclidiana.

unos cánones matemáticos que se apropian y logran una forma particular. Así, el Libro V no es una simple recopilación del trabajo de Eudoxio, ya que implicó una revisión, recapitulación y transformación de su teoría, e incluso la creación de resultados.[8] En otras palabras, la teoría euclidiana de las proporciones responde a un problema metamatemático que se relaciona directamente con un *estilo* de hacer matemáticas y de comunicarlas, característico de aquella comunidad y época, que se constituyó en acicate y guía para la mayor parte de las matemáticas ulteriores.

Lenguaje matemático

Cuando pensamos en el lenguaje utilizado en el Libro V, debemos hacer alusión al idioma en que han sido escritos los *Elementos*. Se sabe que originalmente fueron escritos en griego antiguo y que se realizaron traducciones al árabe y al latín, y que éstas se han vertido en lenguas vernáculas modernas.[9] Este asunto, que puede ser de orden menor, ha sido considerado por historiadores a través de análisis muy específicos (*v.g.*, estudios de carácter filológico o etimológico[10]) y de análisis más generales que, por ejemplo, contemplan el estudio de las modificaciones de orden estructural (*v.g.*, inclusión o exclusión de proposiciones, postulados, etc., e incluso la inclusión de los Libros XIII al XV). Como este aspecto está lejos de nuestras posibilidades, lo asumiremos como no relevante para el presente propósito y, en consecuencia, reiteramos y precisamos nuestro objeto de estudio: el Libro V de los *Elementos* en la versión en español presentada por Puertas (1994, pp. 9-54).

Al examinar este texto, sin incluir las notas elaboradas por la autora de la traducción, reconocemos que las definiciones, las proposiciones y sus demostraciones están escritas en un estilo retórico que incorpora palabras o términos, notación simple y diagramas o dibujos; precisamente estos cuatro

8 Una amplia y detallada exposición sobre el vínculo entre la teoría de proporción de Eudoxio y la de Euclides se encuentra en Knorr (1992).

9 En un apartado de la introducción general, Luis Vega (Puertas, 1991, pp. 123-151) presenta una amplia y minuciosa discusión acerca de las diferentes versiones y ediciones de los Elementos; allí presenta cuatro fases características del texto, a saber: Euclides griego, Euclides árabe, Euclides latino y Euclides de las lenguas vernáculas. Por su parte, Acerbi (2003) reconoce que a diferencia de otros libros de los *Elementos*, el Libro V no presenta diferencias sustanciales en cuanto a su estructura entre las tradiciones griega y árabe-latina.

10 En la Sección 5, *Las magnitudes geométricas de Euclides: glosario*, Grattan-Guinness(1996, p. 364) refiere una discusión acerca de la traducción del término griego σημειον (posteriormente traducido como *punctum*) como *punto* y no como *signo*, como parece haber sido usado originalmente por Euclides, asunto que cobra un valor mayor cuando luego reconoce que el uso de *signo* descartaba la posible consideración de este objeto como constitutivo de las magnitudes.

elementos del lenguaje constituyen los apartados siguientes a través de los que desarrollamos el análisis de esta categoría.

Palabras o términos

Las palabras o términos usados, como era de esperarse, en esencia refieren a algunos objetos y relaciones matemáticas definidas implícita o explícitamente (nos referiremos a éstos como *palabras-concepto*); por supuesto que también se encuentran palabras que cumplen una función secundaria en el discurso. Las palabras-concepto han sido objeto de trabajo e interpretación histórica, y en libros como el de Puertas (1994) y Heath (1956) constituyen buena parte de sus comentarios; algunos ejemplos de éstas, identificadas en las definiciones, son: magnitud, parte, menor, mayor, mide, múltiplo, medida, razón, tamaño, homogéneas, guardar razón, equimúltiplo, proporcionales, razón duplicada, razón triplicada, antecedentes, consecuentes, razón por alternancia, razón por inversión, composición, separación, conversión, razón por igualdad, extremos, medios, proporción perturbada.[11] Más allá de la posible dificultad en la interpretación de las palabras-concepto, por experiencia propia reconocemos que el estilo utilizado impone enormes dificultades a un lector no familiarizado con éste, es decir, a un lector moderno; para corroborarlo, basta con leer cualquiera de los enunciados de la mayoría de las definiciones o proposiciones para encontrarse con textos abstrusos que ocasionalmente pueden llegar a parecer trabalenguas, y comparar tal experiencia con la lectura e interpretación de su expresión algebraica dual.

Sin embargo, más allá de las dificultades generadas por el estilo retórico, es preciso señalar que hay un componente lógico en la enunciación que genera dificultad en la lectura. Dicho componente es planteado detalladamente por Gardies (2004, pp. 9-26) en uno de los apartes del capítulo titulado "*De quoi parlait le Géomètre grec*". Nuestra interpretación de lo expuesto allí se resume en que una definición de la proporción desborda los límites del lenguaje de primer orden en tanto que se refiere a una relación entre relaciones y, por tanto, implica una manera de predicación sobre predicados. La virtud de Euclides, que conlleva a lo abstruso de sus predicados, es precisamente lograr enunciar en lenguaje de primer orden una definición tal.

Notación

Decimos que la notación es simple, en tanto que esta solo incorpora el uso de letras griegas mayúsculas (*v.g.*, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Θ) para denotar magnitudes, exclusivamente en las demostraciones. Sin embargo, Euclides hace un

11 En la sección titulada *Conceptos/definiciones* discutiremos los conceptos implicados por algunas de éstas.

uso dual de éstas: en la demostración de una misma proposición, utiliza un par de letras para nombrar una magnitud y también emplea una sola para nombrar otra magnitud; por ejemplo, la demostración de la Proposición 1 comienza así: "Sean un número cualquiera de magnitudes ΑΒ, ΓΔ respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes Ε, Ζ iguales en número" (Puertas, 1994, p. 18). La notación de la magnitud a través de dos letras evoca la notación que el mismo Euclides ha usado en libros anteriores para indicar segmentos; allí las letras parecerían denotar los extremos del segmento, es decir los puntos. Algo similar podría considerarse que sucede en el Libro V, pero nos resistimos a aceptar tal interpretación pues es claro que en él se está tratando con magnitudes generalizadas y no solo unidimensionales (*i.e.*, segmentos). De esta manera, cuando Euclides enuncia "la magnitud ΑΒ" o "la magnitud Ε" debe entenderse que se está refiriendo a un segmento, una región o un sólido (o más precisamente, a la cantidad de longitud de un segmento, la cantidad de superficie de una región o la cantidad de volumen de un sólido, respectivamente) y no exclusivamente al segmento cuyos extremos son los puntos denotados con Α y Β; no hacerlo así implicaría el desconocimiento del nivel de generalidad que el Libro V implica, del cual hablaremos más adelante, cuando nos refiramos a los *procesos* matemáticos identificados. Euclides también hace uso de esta notación de letras griegas en los dibujos que acompañan las demostraciones en el mismo sentido que el señalado antes; sin embargo, bajo la consideración de que los trazos rectos y finitos en los dibujos no representan segmentos —como lo discutiremos adelante—, la interpretación de estas letras denotando puntos o segmentos no tiene sentido alguno. Por otra parte, examinando con un poco más de cuidado el uso de la notación con una o dos letras, advertimos que ello está relacionado con la operatoria de las magnitudes; así, Euclides nota una magnitud con una letra cuando ésta será multiplicada o constituye un múltiplo de otra magnitud, en tanto que usa las dos letras, cuando la magnitud será dividida en sus partes o cuando será objeto de una resta (o será restada de otra). En consecuencia, a través de esta observación, debemos reconocer que la notación también incorpora un aspecto de ostensión operatoria.

Un señalamiento adicional respecto de la notación empleada es el hecho de que, excepto para las magnitudes, no hay notación alguna para ninguna de las palabras-concepto citadas arriba; en efecto, incluso para los objetos como razón o proporción, se usan expresiones retóricas de la forma "como… es a …, así… es a…". De esta manera queda claro que las discusiones acerca de si debe usarse el signo "=", en vez de "::", o el signo "/" en lugar de ":" para simbolizar la proporción y la razón, respectivamente, son sencillamente anacrónicas.[12] Ello no implica que en una interpretación

12 Grattan-Guinness(1996) refiere que la notación "::" procede de William Oughtred, en el siglo XVII.

moderna de las razones y proporciones, esta discusión no tenga sentido, pues definitivamente el uso de unos u otros símbolos sí impone relaciones diferentes entre el lector y el texto, como lo hemos podido advertir a través de la experiencia de leer las propiedades de las razones con unos y otros símbolos, o a la manera como sugiere Grattan-Guinness (1996) en la sección sobre *La ontología de Euclides* (pp. 369-371).

De las anteriores precisiones sobre la notación, se deduce que en los Elementos no hay uso de notación algebraica alguna del estilo $a{:}b{::}c{:}d$ o $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.[13]

Diagramas o dibujos

Los diagramas o dibujos incluidos en el Libro V acompañan cada una de las demostraciones de las proposiciones.[14] Todos están constituidos por trazos rectilíneos con pequeños trazos en sus extremos o en su interior. A modo de ejemplo, y para facilitar la referencia a los comentarios sobre los dibujos, presentamos en la Figura 1 una reproducción del dibujo empleado en la demostración de la proposición 3 (Puertas, 1994, p. 24).

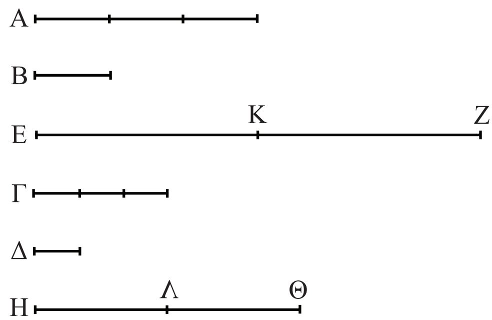

Figura 1

Como lo señalamos antes, no nos parece acertada la lectura de estos trazos como segmentos, ni la de las letras como puntos o extremos de estos; ello en consideración a que los trazos están representando cantidades de longitud, de superficie y de volumen. A este respecto Beppo Levi comenta:

> *y el hecho de que la figuración que acompaña las demostraciones se hace todavía exclusivamente por segmentos, mientras que los co-*

---

13 Esta y otras razones son expresadas por Grattan-Guinness (1996, p. 366) en su discusión en torno a si existió o no en los *Elementos* un álgebra geométrica.

14 En este punto debemos reconocer que algunos autores han puesto en duda la originalidad de los dibujos en la obra euclidiana manifestando que éstos fueron insertados en transcripciones y traducciones posteriores. Al margen de la posible validez de tales declaraciones, las razones expresadas en torno a la triangulación de la información disponible para lograr una versión muy cercana a la original, argüidas por Luis Vega (Puertas, 1991, pp. 123-151), nos permiten considerar que los dibujos sí hacían parte de la obra euclidiana objeto de análisis.

mentaristas se esfuerzan frecuentemente en acentuar el nuevo punto de vista con el dibujo de objetos diferentes, solo demostrará más claramente el pensamiento más puramente abstracto del autor antiguo, desvinculado de la representación material; pues estos segmentos no tienen diferente significación que las letras en nuestras demostraciones algebraicas (Levi, 2003, p. 167).

La anterior interpretación puede ser entendida como una anticipación en la obra euclidiana de la *linealización* de las magnitudes geométricas, lograda por Descartes en su *Geometría*, varios siglos después. Consideramos que Euclides estaba lejos de considerar tal proceso en los términos técnicos en que lo planteó Descartes, pues este último sí tenía entre sus propósitos lograr una definición operativa del producto de segmentos; creemos que Euclides simplemente reconoció en los trazos la posibilidad de representar la cantidad de una magnitud geométrica cualquiera y una relativa —pero restringida— operatividad.

En efecto, debemos resaltar el hecho de que la longitud (o quizá sea mejor decir la extensión) de cada trazo sí está en correspondencia con la cantidad de la magnitud considerada. Esto se puede evidenciar por la manera en que se representa una relación como la "equimultiplicidad"; por ejemplo, en la demostración de la proposición 3, Euclides inicialmente enuncia: "Pues sea la primera, A, el mismo múltiplo de la segunda, B, que la tercera, Γ, de la cuarta, Δ, y tómense los equimúltiplos EZ, HΘ de A, Γ" (Puertas, 1994, p. 24) para luego presentar el diagrama de la Figura 1. Como puede apreciarse, la extensión de A es tres veces la de B, así como la extensión de Γ es tres veces la de Δ; igualmente, la extensión de EZ es dos veces la de A, así como la extensión de HΘ es dos veces la de Γ.

El hecho de que la extensión del trazo esté en correspondencia con la cantidad de la magnitud considerada, tiene una expresión bastante diciente en las proposiciones que implican una proporción o una desproporción. Tal es el caso, por ejemplo, del dibujo que acompaña la demostración de la proposición 14, cuya primera frase es "Guarde pues la primera, A, con la segunda, B, la misma razón que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, y sea A mayor que Δ" (Puertas, 1994, p. 40), y que reproducimos en la Figura 2.

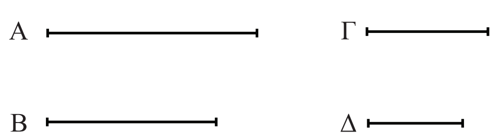

Figura 2

En este dibujo se observa que en efecto la extensión del trazo nombrado con Α es mayor que el del trazo notado con Δ. Pero más allá de esto, llama la atención que ciertamente los trazos conforman una proporción geométrica —al menos desde una aproximación intuitiva—, es decir, (i) no solo Α es mayor que Β, y Γ es mayor que Δ, sino que (ii) el resto de Α con respecto a Β, es mayor que el resto de Γ con respecto a Δ, en tanto que Α es mayor que Γ, y además (iii) tales restos parecen la misma fracción de Α y Γ respectivamente, o simplemente (iv) Β parece ser la misma fracción de Α, como Δ es fracción de Γ. Desde esta perspectiva, la razón y la proporción tienen una expresión figurativa particular, totalmente implícita en el dibujo; en otras palabras, si bien en el dibujo es relativamente evidente el reconocimiento de un múltiplo de una magnitud, no lo es así la razón entre dos magnitudes ni mucho menos la proporción entre dos razones.

El papel de la figura en los *Elementos* es discutido ampliamente por Gardies (1997, pp. 127-155) en el capítulo titulado *"Le rôle de la figure chez Euclide et Archimède"*. Allí, destacando que las entidades tratadas en la obra son de naturaleza diferente (números, magnitudes geométricas específicas y magnitudes en general), comenta que las figuras empleadas en múltiples libros tienen que ser consideradas de manera igualmente diversa; así, a las figuras empleadas para representar a las magnitudes geométricas específicas (*v.g.*, segmentos, ángulos, triángulos, círculos) las denomina *propias,* en tanto que utiliza el término *impropias* para las figuras que representan los otros dos tipos de entidades.[15] Desde esta postura, diremos que los dibujos del Libro V son representaciones impropias, o no ostensivas, de las magnitudes generalizadas representadas. Este reconocimiento constituye un argumento más a favor de nuestra interpretación de los trazos rectos y finitos como representación indistinta de los segmentos, regiones y volúmenes.

Procedimientos/Procesos matemáticos

Procedimientos matemáticos

La lectura del contenido del Libro V nos permite reconocer algunos procedimientos matemáticos, a saber:

a. *Medir o ser medido*. El procedimiento matemático de medir está referido en las definiciones 1 y 2; sin embargo, como lo menciona Puertas (1994, p. 9), "La noción de medida y la relación de medir a (y ser medido por) quedan indefinidas". Al respecto reiteramos que

15 Esta división nos evoca la distinción entre las representaciones ostensivas y no ostensivas, respectivamente.

uno de los rasgos de esta teoría es precisamente la de no asociar una medida (*i.e.*, un número) a la relación entre dos magnitudes homogéneas; no obstante esta consideración, nuestra interpretación de las definiciones citadas sí incorpora la referencia a la existencia de un número entero aunque no requiere establecer cuál es.

b. *Multiplicarse*. Esta idea se aplica a una magnitud y, desde nuestra interpretación, se reduce a añadir una magnitud a sí misma cualquier número entero de veces, es decir, a una adición repetida. Esta idea aparece no sólo en la Definición 4, sino que es aplicada dondequiera que en el Libro V aparecen las expresiones múltiplo o equimúltiplo; especialmente se reconoce tal tratamiento en las demostraciones de las diferentes proposiciones, a través de su representación en los dibujos e incluso a través de la inclusión de términos como *doble, triple o cuádruple*.

c. *Comparar magnitudes*. Para parejas de magnitudes homogéneas aparece el proceso general de comparación para establecer cuándo una excede, es igual o resulta inferior que la otra. A través de estas comparaciones se colige cuándo una magnitud es igual, desigual, mayor o menor que otra.

d. *Suma de magnitudes*. Si bien en la idea de multiplicarse se admitía la reiteración de una magnitud, en la Definición 14 (composición de una razón) se admite la suma de dos magnitudes cuando estas son antecedente y consecuente de una razón. Ahora bien, aún no logramos entender la justificación para que tal definición se interprete en términos de proporciones —como lo hace Puertas (1994, p. 16) "$a : b :: c : d \rightarrow (a+b) : b :: (c+d) : d$"— y no en términos de una razón; por otra parte, la proposición 18 admite también la suma, y su formulación simbólica no es otra que la recíproca de la que acabamos de incluir.

e. *Diferencia de magnitudes*. En las definiciones 15 y 16 (separación y conversión de una razón, respectivamente) se incorpora la idea de resta de magnitudes cuando estas son antecedente y consecuente de una razón y, aunque no se explicite, el antecedente es mayor que el consecuente. Aquí también Puertas (1994, p. 16) hace una interpretación en términos de proporciones: "$a : b :: c : d \rightarrow (a-b) : b :: (c-d) : d$" —interpretación que también hace para la proposición 17— y "$a : b :: c : d \rightarrow a : (a-b) :: c : (c-d)$", respectivamente. De la misma forma, en las proposiciones 17, 18 y 19 se incorpora la separación de una razón, pero en éstas claramente en el marco de proporciones y, en consecuencia, la idea de resta de magnitudes. Asimismo, una idea similar a la de resta aparece en las proposiciones 5 y 6; en éstas, de una magnitud *se quita* otra menor y se generan restos de aquella.

f. *División de una magnitud*. En la demostración de las proposiciones 1, 3 y 15, Euclides divide una magnitud en magnitudes iguales a una parte de aquella, condición que limita el resultado y no permite interpretarlo como la división de una magnitud en un número cualquiera de partes alícuotas; en efecto, en las tres proposiciones se garantiza que la magnitud a dividir es múltiplo de la magnitud en que se va a dividir.

Los procedimientos que acabamos de discutir parecieran tener su racionalidad en los libros anteriores de los *Elementos* —lo cual contrastaría con la independencia del Libro V señalada antes—; sin embargo, consideramos que ello puede ser cierto para el caso en que las magnitudes referidas sean segmentos, e incluso superficies, pero no es así si éstas son volúmenes; recordemos que el trabajo con objetos geométricos sólidos (o quizá sea más prudente decir, objetos en el espacio) tendrá que esperar a los Libros XI, XII y XIII.

Procesos matemáticos

Con respecto a los procesos matemáticos (y atendiendo a lo señalado al inicio de la sección *Situaciones problemas/Tareas matemáticas*) debemos reiterar que el proceso por excelencia desarrollado en el Libro V, ante la ausencia de problemas o construcciones, es la demostración de enunciados condicionales; adicionalmente, y ligado con este proceso, advertimos en el Libro V el uso del proceso matemático de *instanciación*; estos procesos serán tratados en la sección *Argumentos*. Asimismo, reconocemos el proceso de generalización como un rasgo del Libro V. Como lo señalamos en la sección *Estructura del Libro V* y en la sección *Lenguaje matemático,* la generalización se advierte al considerar que se está incluyendo en una misma estructura a las magnitudes geométricas arquimedianas y no se les está dando un tratamiento particular que atienda a su dimensión. Además, en la Definición 5, especialmente en la idea evocada por la locución *cualquier equimúltiplo*, aparece una manera particular de referirse a todos los elementos de un conjunto, en este caso de magnitudes; el nivel de generalización aumenta en esta misma definición, cuando se condiciona la comparación de dos parejas de tales conjuntos de equimúltiplos, para garantizar que *se comportan —frente al orden— de la misma manera*. De modo un poco diferente, la generalización aparece en las proposiciones 1 y 12, al hablarse de "un número cualquiera de magnitudes" (Puertas, 1994, pp. 18, 37).

Con una mirada de lejos más especializada, Acerbi (2003) alude al Libro V como una fuente principal en el estudio de la generalidad. Además, establece que al respecto de la generalidad, las tradiciones griega y árabe-latina de los *Elementos*, ofrecen tratamientos bastante disímiles. Igualmente, sostiene que ya en los tiempos de Euclides estaba muy refinada la comprensión de la generalidad y de las herramientas lingüísticas para expresarla. Él asume como objeto central de estudio a la proposición 8 (especialmente su demostración), como caso revelador de la existencia y expresión del proceso de generalidad euclidiano.

Conceptos/definiciones

Como ya se mencionó, el Libro V contiene 18 definiciones, las cuales han sido discutidas minuciosamente por los historiadores. De éstas, identificamos al menos tres nominales, a saber: la Definición 3 (nomina la razón como una relación entre dos magnitudes), la Definición 6 (nomina magnitudes proporcionales o proporción a las que satisfacen la condición de la Definición 5) y la Definición 11 (nomina magnitudes correspondientes a lo que hoy llamaríamos parejas de antecedentes y parejas de consecuentes)[16]. Las quince definiciones restantes establecen condiciones, y catorce de éstas, además, dan nombres a los objetos implicados; la Definición 8 solo precisa la condición pero no nomina algo. De estas definiciones, el grupo de la 12 a la 16 alude a transformaciones en las razones sin que su enunciado implique, al menos de manera inmediata o directa, la aplicación a una proporción; a este respecto, Puertas (1994, p. 15) sostiene que estas definiciones "Euclides las aplica a razones cuando describirían mejor proporciones, tal vez porque, al referirlas a proporciones, parecería que asume algo que todavía no se ha probado".

Atendiendo la opinión de los historiadores, quienes coinciden en asignar un lugar central a la paradigmática Definición 5 (proporción), y junto con

16 En esta definición aparece por primera vez la mención a los términos "antecedente" y "consecuente" sin una significación explícita en el contenido anterior; creemos que la significación surge de manera relativamente natural cuando se atiende al orden explícito de referencia a las magnitudes de una proporción (*i.e.*, primera, segunda, tercera, cuarta) implicado desde la definición 5, y de manera mucho más obvia, cuando se incorpora una notación como "*a:b*" pues allí se observa que *a* antecede a *b*.

ella a las definiciones 3 (razón) y 7 (desproporción), recapitularemos y discutiremos algunos de sus planteamientos.[17]

Hay un cierto consenso en que la Definición 3, en sí misma, es una definición general y vaga, y desempeña un papel secundario —y en cierto sentido innecesario— en la teoría; por ejemplo, Hill (1928, p. 38) expresa que "El primer señalamiento que habría que hacer respecto de las definiciones es la ausencia de una definición útil de razón, por ello es imposible hacer cualquier uso de la tercera definición de Euclides". También hay un consenso en que esta definición es complementada por la Definición 4 y adquiere un carácter específico en la medida en que interactúa con la Definición 5; al respecto, por ejemplo, Fine (1917, p. 73) establece que "una noción muy definida de razón está implicada en la definición de proporción".

La existencia de estos consensos contrasta con la existencia de diversas interpretaciones que hacen los historiadores sobre las ideas de razón y proporción en conjunto. En suma, tales interpretaciones configuran una gama de posibilidades que incluyen concebir la razón (y ocasionalmente la proporción) como —o relacionada con—: (i) una cantidad, adicional a los números y las magnitudes, (ii) una comparación o relación binaria de segundo orden, (iii) un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes, (iv) un número real.[18]

Para Grattan-Guinness (1996), en la obra euclidiana existen tres tipos distintos de cantidades, a saber: los números, las magnitudes y las razones. Nos parece que en esencia su argumento se centra en el hecho de que las razones se pueden comparar para establecer si están *en la misma razón*,[19] o si una *es mayor* o *es menor* que otra, de manera análoga a como se hace con los números y las magnitudes. En oposición, Corry (1994) ha afirmado que la razón no puede concebirse como una cantidad en tanto que la idea

17 Fine (1917, p. 73) sostiene que las definiciones significativas del Libro V son de la 3 a la 7. Antes hicimos una consideración acerca del carácter nominal de la definición 6 y frente a la definición 4 podemos señalar, brevemente, que desde nuestra perspectiva, ésta impone la condición de que para poder establecer una razón entre dos magnitudes, estas deben ser arquimedianas, condición que no satisfacen los ángulos euclidianos, observación esta última que no hemos encontrado en ninguno de los documentos históricos estudiados y que se sustenta en el hecho de que para Euclides no puede haber un ángulo mayor o igual a dos rectos.

18 Al margen de estas interpretaciones con referentes históricos, en los capítulos 3 y 4 de la tesis de Guacaneme (2001) se encuentran sendos análisis de las ideas de razón y proporción en teorías matemáticas y textos escolares de matemáticas. Igualmente, en Guacaneme (2002) se encuentra una descripción del tratamiento que de las razones, proporciones y proporcionalidad se realiza en algunos textos escolares.

19 Si bien Grattan-Guinness (1996, p. 361) reconoce una igualdad aplicable a los números y a las magnitudes, sostiene que Euclides nunca dice que las razones sean *iguales* entre sí, solamente que están en la *misma razón*, o que una razón *es como* otra. Éste es uno de los tres rasgos de los *Elementos* que Grattan-Guinness utiliza en su argumentación en contra de una lectura de la obra en términos de álgebra geométrica.

de cantidad griega no la admite; de hecho afirma que "La razón, a diferencia del número y de la magnitud, no mide nada ni es cantidad" (p.10). El argumento, coincidencialmente, es similar al que emplea su contradictor, pues también se refiere a que la comparación de dos razones no permite establecer si estas son *iguales* o *desiguales*, sino para establecer la *identidad* o falta de ella; como parte de su argumentación, cita el siguiente pasaje de las *Categorías* (VI, 6a) de Aristóteles, para reforzar la idea de que la condición de igualdad o desigualdad solo se aplica a las cantidades:

> *Lo que realmente es peculiar para las cantidades es que nosotros las comparamos o contrastamos en términos o sobre los fundamentos de igualdad. Predicamos los términos 'igual' o 'desigual' de todas las cantidades mencionadas.*

Corry (1994, p. 5) establece que "La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades" y luego (p. 10) señala que "La razón entre dos cantidades del mismo tipo (bien sean dos números o dos magnitudes homogéneas), permite compararlas aún siendo desiguales". A partir de ello se puede colegir que la proporción es asumida como una comparación entre dos comparaciones. Por su parte, Grattan-Guinness (1996, pp. 367-368) en la octava sección, "*Razones de Euclides ¿un fondo musical?",* considera que las razones pueden estar en una estrecha conexión con las relaciones entre notas musicales —o quizá sea mejor decir entre intervalos— en tanto que la proporción sería una manera de afirmar que dos de tales relaciones son la misma, sin requerir que los términos de las razones sean iguales; así, la relación entre las notas Fa sostenido y La [F#-A] puede reconocerse como una tercera menor, que es la misma relación, o el mismo intervalo, que hay entre Si y Re [B-D][20]; desde esta perspectiva la proporción sería una relación entre dos relaciones.

La razón relacionada con un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes es una propuesta que encontramos en el trabajo de Fine (1917), donde establece que:

> *Ya que según la Definición 5 la condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: si los múltiplos A, 2A, 3A, … y B, 2B, 3B, … son*

20 Casualmente, luego de la lectura del Capítulo 4, *The role of the theory of proportions in Nicomachus, Theon and Domninus* (Klein, 1968, pp. 26-36) —y antes de la lectura de (Grattan-Guinness, 1996)— habíamos escrito:
A partir del documento de Klein parece razonable explorar la expresión musical que da origen a la teoría de las proporciones, pues éste puede constituir un ámbito sugerente para el trabajo escolar y con los profesores con las proporciones, además que permitiría esclarecer una idea de razón "práctica" o "sensible" y contrastarla con una idea de razón "teórica" o "abstracta". (Quizá se pueda afirmar que la relación entre las notas Mi y Do, es la misma que entre las notas Si y Sol).

dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos X, 2X, 3X, … y Y, 2Y, 3Y, …, la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de los múltiplos de X entre aquellos de Y. De ahí que "la identidad" de las razones A:B y X:Y significa la identidad de estas dos leyes de distribución, y la razón A:B en sí misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B (p. 73).

Esta interpretación se puede resumir en una correspondencia entre dos sucesiones ordenadas de múltiplos, cada una compuesta por los múltiplos de las dos magnitudes de una razón. Fine (1917, pp. 74-75) argumenta a favor de esta interpretación al advertir cómo ésta se pone en juego en varios de los teoremas (proposiciones 7 a 10, 11, 13, 16, 18, 22, 24). La idea propuesta por Fine establece la necesidad de que las dos magnitudes de cada razón sean homogéneas, pues de no ser así, no se podría armar una sucesión con los múltiplos de éstas. Igualmente, tal idea no impide que las magnitudes de las dos razones tengan que ser todas del mismo tipo o la misma naturaleza. Además, implica una manera poco usual de interpretar la Definición 5, en tanto que no toma parejas de múltiplos sino de secuencias. Además, Fine sostiene que para una teoría general de la proporción no se requiere una definición de razón, en singular, aunque sí se exigen sendas definiciones de igualdad y desigualdad entre razones, las cuales son suministradas en las definiciones 5 y 7. Bajo esta última interpretación, la razón se despoja de todo halo referido a la cantidad; en efecto, no es posible aquí pensar en que una cantidad pueda estar asociada a una secuencia ordenada de equimúltiplos de dos magnitudes, o en otras palabras, no se puede pensar en una entidad (*v.g.*, un número) que se asocie o ponga en correspondencia con una sucesión.

La interpretación de la teoría de la proporción del Libro V como una manifestación de la teoría del número real ha sido objeto de opinión y estudio de varios historiadores. Recapitulando las ideas de Corry (1994, pp. 7-13) podemos señalar que algunos historiadores de las matemáticas han argumentado a favor de la equivalencia entre la teoría de proporciones de Euclides y la de cortaduras de Dedekind. Uno de los argumentos consiste en considerar una razón o cociente de dos magnitudes homogéneas y asociarlo a una cortadura, para luego considerar dos cocientes de magnitudes que resulten iguales (proporcionales) y mostrar que las cortaduras asociadas son equivalentes. Otros historiadores de las matemáticas rechazan tal equivalencia bajo la idea de que la interpretación de los textos griegos debe hacerse en el marco de las restricciones en que estos fueron producidos. Una de tales restricciones se refiere al lenguaje; en este sentido no se acepta la traducción o formulación simbólica de las definiciones, ni las interpretaciones y deducciones que a partir de ellas se hacen. Otra de las restricciones obedece a la radical diferencia entre la idea de número en la obra griega y la del número del siglo XIX.[21] Atendiendo a lo anterior, se entiende que no pueda reconocerse en la teoría de las proporciones una teoría de números.

En la misma dirección, Fine (1917, pp. 75-76) discute la relación entre los irracionales y las razones de inconmensurables, afirmando que el argumento expresado por algunos historiadores a favor de reconocer que en efecto se puede asociar una razón y una pareja de números enteros a cada cortadura de Dedekind —y que con esto se podría entender que Euclides ya poseía una teoría del número real y, en consecuencia, Dedekind no habría *creado* el sistema de los números reales— está apoyado en un simbolismo algebraico y en unas nociones de número y de razón que no se corresponden con las ideas euclidianas respectivas.

Estas posturas contrastan con afirmaciones de estudiosos de la teoría de la proporción del Libro V. Por ejemplo, en Zubieta (1991) encontramos las siguientes oraciones: "Esta nota presenta la definición de número real atribuida a Dedekind como una interpretación de la definición de proporción de Eudoxio, tal como la enuncia Euclides al principio de su libro V" (p. 477) y "Esto significa que la definición de número real propuesta por Richard Dedekind es la misma que la presentada por Eudoxio" (p. 478). También Knorr (1992) señala que "Como es bien sabido, las definiciones euclidianas son un equivalente de la técnica de Dedekind (a través de 'cortes' en los racionales) para investigar la propiedad de los números reales" (p. 3). De manera análoga, Hill en al menos dos de sus documentos sobre los Libros V y VI de los *Elementos*, señaló que "La razón de una magnitud A a otra magnitud B de la misma clase es un número real, racional o irracional, determinado de la manera como se explican en lo que sigue. Éste se denota por el símbolo A:B" (Hill, 1912, p. 360) y que "Estos seis resultados suministran una regla para determinar si la razón (A:B) es mayor que, igual a, o menor que cualquier número racional; consecuentemente, en concordancia con la definición de Dedekind, la razón (A:B) es considerada como un número" (Hill, 1928, p. 44).

Antes de pasar a los comentarios sobre la Definición 7, nos parece interesante destacar que otro elemento interesante en la discusión de la Definición 5 lo constituye su expresión simbólica, pues existen varias versiones simbólicas de traducción de la esta. Por ejemplo Corry (1994, p. 3) propone la siguiente:

21 La idea griega reconoce a los números y las magnitudes como cantidades *no abstractas* asociadas respectivamente al contar y medir, en tanto que la idea moderna se refiere a la cantidad como abstracta y general.

"$a:b=c:d$, si para todo par de enteros m, n, se tiene $ma>nc$ (o $ma<nc$, o $ma=nc$) si y solo si $mb>nd$ (o $mb<nd$, o $mb=nd$) respectivamente".

Entre tanto, Puertas (1994, p. 12) reseña dos versiones no equivalentes desde el punto de vista lógico; una que implica una *disyunción de conjunciones*, a saber:

"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a:b::c:d$ si y solo si: o (($ma>nb$) y ($mc>nd$)) o (($ma=nb$) y ($mc=nd$)) o (($ma<nb$) y ($mc<nd$))."

Y otra que es una *conjunción de condiciones (implicaciones)*, la cual es la forma lógica de su aplicación en la proposición 11, a saber:

"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a:b::c:d$ si y solo si: (si $ma>nb$, entonces $mc>nd$) y (si $ma=nb$, entonces $mc=nd$) y (si $ma<nb$, entonces $mc<nd$)."

A través de una notación particular de la reunión de los signos "=", "<" y ">", Filep (2003, p. 1) incorpora una forma simbólica equivalente a la citada inmediatamente antes, a saber:

"si a, b, c, d son magnitudes (de la misma clase), entonces $a:b=c:d$ si y solo si para cualesquiera enteros positivos ('números' en el uso griego) n, m, $ma \gtreqless nb \rightarrow mc \gtreqless nd$."

Con respecto a lo planteado por los historiadores sobre la Definición 7, queremos resaltar que Knorr (1992, p. 8) establece que:

> *Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que "no tener la misma razón" sea equivalente a "tener una razón mayor o menor razón". Pero, de hecho, algunas veces supone esta afirmación (por ejemplo, en el libro V, proposiciones 9 y 10), por lo cual es preciso pensar que lo entendían tanto él como los geómetras que le precedieron.*

Esta aserción es importante para entender que hay un supuesto tácito en la teoría que provee a Euclides de una herramienta potente para la demostración de la proporcionalidad o desproporcionalidad de cuatro magnitudes; en otras palabras, si se supone que tener una razón mayor que otra equivale a afirmar que no es cierto que exista proporción entre tales magnitudes, se dispone de una herramienta para demostrar por reducción al absurdo.

También, nos llama la atención la manera en que Fine (1917, p. 73) parafrasea la Definición 7 ["Si (en la notación de la Definición 5) se pueden encontrar *m* y *n* tal que $mA>nB$ pero $mX\leq nY$, entonces se dice que A tiene una mayor razón a B que la que X tiene a Y], pues es una manera alterna de mirar la comparación entre las razones.

Propiedades

En el Libro V hay veinticinco proposiciones y dos porismas a través de las cuales se reseñan y demuestran propiedades de los diferentes objetos tratados. Al examinar el contenido de las proposiciones y atendiendo al dominio al que se refiere (*v.g.*, magnitudes o proporciones) —o más específicamente, a los dominios que relaciona (*v.g.*, magnitudes y magnitudes, magnitudes y proporciones, proporciones y magnitudes, proporciones y proporciones— se reconocen cinco grupos de proposiciones.

El primer grupo —compuesto por las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6— se refiere a las magnitudes y sus múltiplos (*i.e.*, magnitudes), pero no aluden a las razones ni a las proporciones. La expresión simbólica de tales proposiciones (*i.e.*, $[m(x_1+x_2+...+x_n)=mx_1+mx_2+...+mx_n]$, $[(m\Theta n)x=mx+nx]$, $[m(nx)=(mn)x]$, $[m(x-y)=mx-my]$, $[(m\Theta n)x=mx-nx]$) permite reconocer que, en lenguaje moderno, se están expresando propiedades relativas a la distributividad (proposiciones 1, 2, 5 y 6) y aparentemente a la asociatividad del producto (proposición 3)[22]; además, advertimos que se admite la suma de magnitudes, la suma y resta de múltiplos de magnitudes, la suma y resta de los números que representan las veces que se suma una misma magnitud y el producto de tales números, y que no hay referencia alguna al producto de magnitudes.[23] Pero para que estas operaciones se puedan aplicar se requiere, de una parte, que las magnitudes implicadas sean homogéneas y, de otra, que se considere que los números *m*, *n* no son exactamente los números tratados en los libros aritméticos de los *Elementos*, sino, podríamos decir, números de contar repeticiones de una misma magnitud.

El segundo grupo consta de las proposiciones 7 (sin su porisma 7') y 8. Al observar los enunciados simbólicos de las propiedades en cuestión (*i.e.*, [Si

22 Para la propiedad expresada en el simbolismo $[m(nx)=(mn)x]$ hay que precisar que se están incorporando dos productos y que una notación más precisa podría ser $[m\odot(n\odot x)=(m\ n)\odot x]$ en la que el símbolo $\odot$ expresa el producto de un escalar por una magnitud (o simplemente la idea de múltiplo de una magnitud) y el símbolo $\bullet$ expresa el producto de dos "números de contar". Bajo estas consideraciones no es muy evidente que la propiedad se refiera a la asociatividad del producto.

23 Esta última observación es amplia y vehementemente discutida por Corry (1994, pp. 2-5) en el apartado titulado "*La teoría de proporciones de Eudoxio*".

$x=y$, entonces $x:z::y:z$ y $z:x::z:y$], [Si $x<y$, entonces $x:z\prec y:z$; $yz:x\succ z:y$]) reconocemos cómo se explicitan propiedades "de orden" de las razones a partir de propiedades "de orden" en las magnitudes o, en otras palabras, cómo la igualdad o desigualdad de las magnitudes se refleja o trasmite a algunas de las razones en que ellas están implicadas. La anterior afirmación debe matizarse con la observación que está implicada en la simbología empleada aquí, y que distingue, por ejemplo, el igual para las magnitudes (=) del hoy "igual" para las razones (::).

El tercer grupo está integrado por proposiciones que describen cómo relaciones entre razones determinan relaciones u operaciones entre magnitudes. Así, en este grupo están las proposiciones 9, 10, 14, 20, 21 y 25. Sus expresiones simbólicas respectivamente son: [Si $x:z::y:z$, entonces $x=y$. Y, si $z:x::z:y$, entonces $x=y$], [Si $x:z\prec y:z$, entonces $x<y$. Y si $z:x\prec z:y$, entonces $x>y$], [Si $w:x::y:z$ y $w\gtreqless y$, entonces $x\gtreqless z$], [Si $u:v::x:y$ y $v:w::y:z$ y $u\gtreqless w$, entonces $x\gtreqless z$], [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$ y $u\gtreqless w$, entonces $x\gtreqless z$], [Si $w:x::y:z$ y $w>x$ y $w>y$ y $x>z$ y $y>z$, entonces $w+z>x+y$]. De estas seis proposiciones, las últimas cuatro (*i.e.*, 14, 20, 21 y 25) tienen una condición específica en tanto que en la hipótesis no solo se incluyen condiciones sobre las razones, sino también sobre las magnitudes implicadas.

El cuarto grupo es el más numeroso; éste incluye propiedades de las proporciones o desproporciones, es decir de las razones en sí mismas. Allí, ubicamos las proposiciones 4, 7′, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 19′, 22, 23 y 24, cuyos enunciados simbólicos respectivamente son: [Si $w:x::y:z$, entonces $\forall m$ y n, $mw:nx::my:nz$], [Si $w:x::y:z$, entonces $x:w::z:y$], [Si $u:v::w:x$ y $w:x::y:z$, entonces $u:v::y:z$], [Si $x_1:y_1::x_2:y_2::\ldots::x_n:y_n$, entonces $(x_1+x_2+\ldots+x_n):(y_1+y_2+\ldots+y_n)::x_i:y_i$, $\forall i=1,\ldots,n$], [Si $u:v::w:x$ y $w:x\succ y:z$, entonces $u:v\succ y:z$], [Si $w:x::y:z$, entonces $w:y::x:z$], [Si $(w+x):x::(y+z):z$, entonces $w:x::y:z$], [Si $w:x::y:z$, entonces $(w+x):x::(y+z):z$], [Si $(w+x):(y+z)::w:y$, entonces $(w+x):(y+z)::x:z$], [Si $(u+v):(x+y)::v:y$, entonces $(u+v):(x+y)::u:x$], [Si $x_1:x_2::y_1:y_2$, $x_2:x_3::y_2:y_3$, ... , y $x_{n-1}:x_n::y_{n-1}:y_n$, entonces $x_1:x_n::y_1:y_n$], [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$, entonces $u:w::x:z$], [Si $u:v::w:x$ y $y:v::z:x$, entonces $(u+y):v::(w+z):x$]). Como se puede observar, las razones no son objeto de operación tales como la suma o el producto, aunque sí sus elementos (*i.e.*, las magnitudes), al menos para la suma y para, lo que hoy llamaríamos, el producto por un escalar; en oposición a esta afirmación, encontramos en Fine (1917, p. 75) la siguiente afirmación:

> *El Teorema 22 implica una definición del producto de las dos razones A:B y B:C, y el Teorema 24 una definición de la suma de dos razones A:C y B:C, en el mismo sentido que la Definición 5 implica una definición de razón en sí misma.*

El quinto grupo contiene únicamente a la proposición 15 ([$x:y::nx:ny$]), la cual no presenta estructura de condicional y tan solo muestra una proporción. Nos parece que esta forma de enunciación no permite ubicar esta proposición en alguno de los otros grupos.

Argumentos

En tanto ícono del estilo hipotético deductivo, la argumentación utilizada en los *Elementos* procede vía deductiva y esencialmente sintética. En las proposiciones del Libro V hemos identificado que la mayoría de sus demostraciones proceden a través del estilo directo, aunque también hemos reconocido proposiciones cuya demostración incorpora la reducción al absurdo; las demostraciones de las proposiciones 9, 10 y 18 incorporan esta última estrategia demostrativa.

Las proposiciones (y sus demostraciones) exhiben una estructura que ha sido descrita por los historiadores; en general ella contempla seis etapas, a saber: *prótasis, ectesis, diorismo, construcción, demostración y conclusión*.[24] En la versión de Puertas (1994), en el Libro V la prótasis aparece al inicio en letra cursiva y en esencia es el enunciado de la proposición; la *ectesis* es el párrafo siguiente a la *prótasis*, el cual casi siempre inicia con los términos "Sean" o "Pues sean". El tercer párrafo, que inicia con la palabra "Digo", es el *diorismo*. Luego del *diorismo* aparecen uno o varios párrafos en los cuales no siempre es evidente el reconocimiento de la *construcción* y la *demostración* como partes separadas, aunque creemos que en la etapa de la construcción, los diagramas o dibujos son una parte constitutiva medular. La *conclusión* normalmente es el último párrafo (excepto cuando hay porismas) y comienza con la expresión "Por consiguiente" e incorpora el texto de la *prótasis*.[25]

En las demostraciones de las proposiciones identificamos una forma especial de prueba, pues Euclides presenta una demostración para equimúltiplos específicos de las magnitudes (casi siempre el doble y el triple), y sin un discurso particular que propenda por la generalización

24 En este texto hemos usado los términos "proposición" y "demostración" en un sentido amplio para referirnos con el primero a lo que aquí se llama prótasis, en tanto que el segundo lo hemos usado para referirnos al conjunto de las otras cinco etapas citadas. En adelante seguiremos usando la misma convención y emplearemos la cursiva (o itálica) cuando hagamos referencia a una etapa específica.

25 Debemos reconocer que en la interpretación de cada *prótasis* y en la reescritura de la proposición en lenguaje simbólico moderno fue fundamental el texto de la *ectesis*, el del *diorismo* e incluso el de la *construcción* y *demostración*; sin éstos, varias veces nos sentimos ante un enunciado abstruso, sin mayor sentido.

a cualquier equimúltiplo, construye una argumentación válida para el caso general; en otras palabras, pareciera que muestra la validez de la *prótasis* para un caso particular que subsume todos los casos. Esta estrategia exhibe lo que algunos han dado en llamar un proceso de *instanciación*; en este, en la *ectesis* se reemplaza la forma de cuantificación universal enunciada en la *prótasis* por la designación de un objeto singular que representa la clase general, sobre el que se desarrolla la demostración.

Otra estrategia demostrativa llamativa que hemos identificado, es la empleada en parte de la demostración de la proposición 8, pues Euclides arguye con una especie de inducción sobre los múltiplos cuando expresa "tómese A doble de Δ y M triple (de Δ), y así **sucesivamente** hasta que el múltiplo tomado de Δ sea el primero mayor que K" (la negrilla es nuestra).

Ahora, siguiendo las directrices de Hill (1923, pp. 217-220), las proposiciones del Libro V se pueden clasificar en seis grupos. Cada uno de estos ha sido representado, en la Figura 3, por una columna de proposiciones (notadas P*i*).

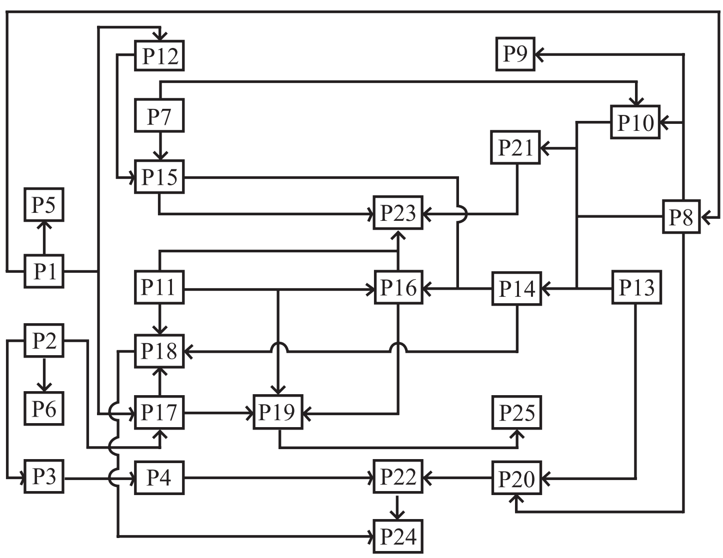

Figura 3

Antes de examinar los grupos definidos por Hill, debemos señalar que en la Figura 3 hemos procurado representar también la estructura deductiva del Libro V. En ésta hemos utilizado una flecha de conexión si una proposición interviene en la demostración de otra; así, por ejemplo, en la figura se puede leer que la proposición 15 (P15) es utilizada en las respectivas demostraciones de las proposiciones 16 y 23, en tanto que en la demostración de la proposición 15 intervienen las proposiciones 7 y 12. Esta representación, junto con la tabla de la Figura 4 (ver páginas siguientes), nos ha permitido reconocer un indicador de la *complejidad lógica* de cada proposición; de esta manera, es muy probable que una proposición tenga mayor complejidad lógica que otra, si en la primera intervienen un mayor número de proposiciones que en la segunda.

Así, a partir de la lectura de la última fila de la tabla, se advierte que es muy probable que la proposición 23 y las proposiciones 14, 16 18, 19, 20 y 21 tengan un nivel de complejidad lógica mayor que el de las demás, en tanto que en su demostración se involucran cuatro y tres proposiciones, respectivamente. De forma análoga se identifica que las proposiciones 1, 2, 7, 11 y 13 no incorporan proposición alguna en su demostración, lo que hace suponer que su complejidad lógica es baja. Por otra parte, leyendo la información de la última columna de la tabla, se tiene un indicio de identificación del nivel de intervención y potencia de las proposiciones en la deducción de resultados de la teoría; así, se observa que la proposición 8 es utilizada en cinco proposiciones, en tanto que las proposiciones 1 y 11, lo son en cuatro proposiciones y las proposiciones 5, 6, 9, 23, 24 y 25 no se implican en demostración alguna. Como veremos enseguida, estos y otros indicadores han sido utilizados parcialmente por estudiosos y críticos del Libro V para agrupar sus proposiciones.

Ahora sí, demos una mirada a los grupos definidos en el apartado V de la crítica de Hill al Libro V de los *Elementos* (1923, pp. 217-220).

El primer grupo contiene las proposiciones que versan sobre las magnitudes y sus equimúltiplos (no sobre sus razones), a saber: las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6. Hill (1923, p. 217) sostiene que sus demostraciones no dependen del Axioma de Arquímedes.[26] Además, señala que a este grupo es necesario añadir una proposición (que llamará *Proposición subsidiaria*), que si bien no es explicitada como tal, sí se reconoce en la demostración de la proposición 8 y que enuncia así: "Si A, B, C son magnitudes de la

26 En el capítulo 3, *El método de exhaución y la heurística*, de la Torre (1997, pp. 25-29) dirige su estudio hacia la *propiedad arquimediana;* luego de presentar y discutir sus diferentes formas enunciativas, expresa que su formulación contemporánea es "Dadas dos magnitudes homogéneas desiguales, siempre existe un múltiplo de la cantidad menor que supera a la mayor" (p. 26).

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
P1					X			X				X	
P2			X			X							
P3				X									
P4													
P5													
P6													
P7										X			
P8									X	X			
P9													
P10													
P11													
P12													
P13													X
P14													
P15													
P16													
P17													
P18													
P19													
P20													
P21													
P22													
P23													
P24													
P25													
	0	0	1	1	1	1	0	1	1	2	0	1	0

Figura 4

P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	
			X									4
			X									3
												1
								X				1
												0
												0
	X											2
X						X	X					5
												0
X						X	X					3
		X		X	X				X			4
	X											1
						X	X					3
		X		X								2
		X							X			2
					X				X			2
				X	X							2
										X		1
											X	1
								X				1
									X			1
										X		1
												0
												0
												0
3	2	3	2	3	3	3	3	2	4	2	1	

misma clase, y A es mayor que B, entonces existen números *n* y *t* tales que *n*A>*t*C>*n*B".

El segundo grupo que identifica Hill se refiere a razones *desiguales* (o desproporciones) e incluye las proposiciones 8, 10 y 13. De éstas afirma que solo son usadas para demostrar propiedades de razones iguales (proporciones)[27] y critica entonces la insuficiencia del criterio para razones iguales (Definición 5) y la recurrencia al criterio de razones desiguales (Definición 7) para tal fin; además, sostiene que la *Proposición subsidiaria* (citada antes) desempeña un papel fundamental en el uso de estas proposiciones en las demostraciones en que están implicadas. Acerbi (2003) resalta que si bien el Libro V se refiere a la proporcionalidad, estas tres proposiciones aluden a la desproporcionalidad; comparativamente en número muy pocas respecto a la cantidad de proposiciones de dicho libro, pero fundamentales en la demostración de varias de las proposiciones de éste. El mismo autor afirma que la proposición 8 jugó un papel fundamental en los primeros desarrollos de la teoría general de proporciones y en los tratamientos preeuclidianos de esta teoría; particularmente, en su citado artículo de cerca de setenta páginas, señala la importancia del razonamiento en la demostración de esta proposición y manifiesta que en el Libro V no se da cuenta de dicha importancia. También, este autor señala que la proposición 8, a pesar de su enunciado intuitivo, tiene una gran importancia en la estructura deductiva del libro; ella tiene una de las demostraciones más extensas (e incompleta), a pesar de que solo alude a una proposición anterior y a pocas suposiciones. A través de ella se establece una condición suficiente para la desigualdad de razones (desproporcionalidad).

El tercer grupo reseñado por Hill está integrado por las proposiciones 4, 7, 7'[28], 11, 12, 15, 17 y 18, y señala que las pruebas de estas proposiciones (excepto la de la 18) dependen exclusivamente de la Definición 5 y de las proposiciones del primer grupo. Esta observación se contrasta y a la vez se matiza cuando se observa la segunda columna de proposiciones en la Figura 3; allí se evidencia que salvo la proposición 18, a las demás proposiciones solo llegan flechas de las proposiciones del grupo de la primera columna y de proposiciones de la segunda columna. Asimismo se hace evidente que estas proposiciones solo van a estar involucradas en proposiciones del mismo grupo o de los grupos 4 y 5.

El cuarto grupo está constituido por las proposiciones 16, 22, 23 y 24. En términos generales sus demostraciones proceden por lo que Hill (1923,

27 En Puertas (1994, p. 35) sí se usa la proposición 8 en la demostración de la proposición 10.
28 Este porisma por nosotros notado como 7', es reseñado por Hill (1923, p. 218) como Corolario de la proposición 4.

p. 218) llama el *tipo normal* y requieren del Axioma de Arquímedes. Hill (1923, pp. 217-218) sostiene que "Cada demostración es independiente de todas las demás propiedades de las razones iguales", pero lo exhibido en las Figuras 3 y 4 nos pone en desacuerdo con tal planteamiento, en tanto que hemos reconocido que las proposiciones 4, 11 y 18 (que en la sección titulada *Propiedades* hemos incluido como proposiciones que exhiben propiedades de las proporciones) sí intervienen en las demostraciones de las proposiciones 22, 16 y 24, respectivamente.

El quinto grupo contiene únicamente a la proposición 19. Hill considera que su demostración no procede por el *tipo normal*, aunque advierte que podría ser considerada como una transformación de la hipótesis y conclusión de la proposición 17 con la ayuda de la proposición 16; en las Figuras 3 y 4 se observa cómo en la demostración de la proposición 19, en efecto intervienen las proposiciones 16 y 17, pero además la 11.

El sexto y último grupo considerado por Hill incluye las proposiciones 9, 14, 20, 21 y 25. En cierto sentido (salvo por la proposición 10) este grupo coincide con el que señalamos como tercer grupo en el apartado titulado *Propiedades* y, como era de esperarse, su caracterización es bastante similar. Para Hill (1923, p. 219) "El objeto de estas proposiciones no es demostrar la igualdad de dos razones, sino probar que ciertas magnitudes implicadas en las razones son iguales o desiguales, dependiendo del caso".

A modo de cierre

El análisis de la teoría euclidiana de la proporción, expuesta en el Libro V de los *Elementos,* realizado hasta aquí bajo la óptica de las seis categorías de la *Teoría de significados sistémicos,* nos reporta dividendos importantes para la comprensión de tal teoría y de los objetos matemáticos implicados, dentro de los cuales, so pena de ser reduccionista o simplistas, nos atrevemos a destacar los siguientes seis, que se corresponden en su orden con las categorías de la TSS (situaciones problemas/tareas matemáticas, lenguaje matemático, procedimientos/procesos matemáticos, conceptos/definiciones, propiedades y argumentos):

- Esta teoría discurre sobre las razones y proporciones de magnitudes geométricas, sean éstas conmensurables o inconmensurables, es decir, de manera independiente de la idea de medida como asignación de un número. Además, el modo discursivo empleado responde a una manera específica de hacer y comunicar las matemáticas en el cual sobresale la actividad demostrativa.

- El estilo retórico que se usa para presentar la teoría impone retos considerables a las mentes condicionadas y acostumbradas al uso de un lenguaje simbólico (algebraico), pero a la vez ofrece la posibilidad de reconocer que el simbolismo puede no necesariamente ser un rasgo consustancial de las matemáticas. Adicionalmente, sorprende el papel que juegan la notación y los dibujos a favor de la comprensión de la operatividad y de la generalidad, aun cuando no exista notación para los conceptos centrales de la teoría *(i.e.*, razón y proporción).
- Los procedimientos matemáticos contemplados en la teoría se corresponden con operaciones entre magnitudes, pero no entre razones, de lo cual se sigue que para estas últimas no existe una operatividad explícita ni implícita; este argumento es central al intentar establecer diferencias entre esta teoría y la de los números reales, presentada cerca de veinte siglos después. Por su parte, los procesos matemáticos identificados en la presentación de la teoría y en las demostraciones (*v.g.*, instanciación, generalización) ilustran de manera evidente la manera de pensar, hacer y comunicar las matemáticas, más allá de la especificidad relativa a los objetos matemáticos de la teoría.
- Si bien la mayoría de las definiciones nomina a los objetos de la teoría a la vez que establece condiciones para los mismos y se esperaría que con ello se lograra la identificación y caracterización única de los objetos de la teoría, los historiadores de las matemáticas han generado diversas interpretaciones de éstas y, consecuentemente, diversos significados para tales objetos; esto se revela particularmente interesante para el caso de la razón, en tanto uno de los objetos centrales de la teoría.
- Una de las diversas clasificaciones que pueden construirse de las propiedades o teoremas de la teoría, evidencia que en ésta se hace un tratamiento de las magnitudes, y de las razones de magnitudes y de las proporciones, pero que éstos están interconectados por propiedades que relacionan el comportamiento de las magnitudes con el de las razones.
- Las estrategias de argumentación de las propiedades evidencian de manera bastante clara la estructura demostrativa empleada por Euclides y el estilo directo e indirecto de demostración. Asimismo, son un referente para identificar el modo en que la instanciación permite abordar la generalidad desde la particularidad. Por otra parte, se han logrado identificar proposiciones particularmente importantes para la construcción deductiva de la teoría, así como teoremas en cuya demostración se involucran numerosas proposiciones, lo cual conlleva una valoración particular de su complejidad lógica.

En este punto debería ser claro que el significado de la razón y la proporción —aún en una obra matemática tan bien concebida como el Libro V de los *Elementos*— no puede reducirse a sendas definiciones o párrafos. Precisamente, lo que se ha intentado mostrar en este documento es que el estudio profundo de cada uno de los componentes de tal obra ha generado discusión entre los historiadores y los acuerdos no abundan en la literatura histórica especializada. O dicho de otra manera, los significados de estos objetos matemáticos están dependiendo de las diversas interpretaciones y decisiones históricas que se adopten. Así, por ejemplo, si se asume una interpretación desde lo que Grattan-Guinness (2004) llama *herencia* de la teoría de las proporciones y se acepta su traducción al lenguaje algebraico moderno, se reconocerá una teoría bastante cercana a la de las cortaduras de Dedekind e incluso se identificará un álgebra de las razones donde la proporción es una igualdad entre éstas o una relación de equivalencia; si se asume una postura desde lo que Grattan-Guinness (2004) llama la *historia*, se reconocerá una teoría generalizada de las magnitudes geométricas en la que la idea matemática de razón solo se puede entender en relación con la idea de proporción y desproporción, y, en cierto sentido, se asume la primera como una relación cuantitativa no numérica entre las magnitudes así como la proporción y la desproporción como relaciones de comparación entre las razones.

No obstante esta ambigüedad semántica, seguramente no muy atractiva para matemáticos y profesores de matemáticas, consideramos que precisamente conocer tal teoría de la proporción alimenta la comprensión que de los objetos matemáticos razón y proporción se debe lograr para adelantar tanto la actividad de docencia de las matemáticas, como la investigación didáctica relacionada con dichos objetos.

Referencias bibliográficas

Acerbi, F. (2003). Drowning by multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with special emphasis on prop. 8. *Archive forHistory of Exact Sciences* 57, 175-242.

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas*, 10(1), 1-24.

De la Torre, A. (1997). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Filep, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 19, 167-174.

Fine, H. (1917). Ratio, proportion and measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics*, *Second Series*, 19(1), 70-76.

Gardies, J. L. (1997). *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

_____________ (2004). *Du mode d'existence des objects de la mathématique.* París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Godino, J. D. (1996). *Mathematical concepts, their meaning, and understanding*. Paper presented at the Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Valencia.

____________ (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

_____________ (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D. y Recio, A. (1998). *A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education*. Paper presented at the Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, South Africa.

Grattan-Guinnes, I. (2004). History or Heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. *American Mathematical Monthly, 111*(1), 1-12.

______________ (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's Elements: How did he handle them? *Historia Mathematica*, *23*(4), 355-375.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. Cali: Universidad del Valle.

______________ (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, 7(1), 3-42.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (Second ed.). New York: Dover.

Hill, M. J. M. (1912). Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette*, *6*(100), 360-368.

______________ (1923). A critical account of Euclid's exposition of the theory of Proportion in the Fifth Book of the Elements. *The Mathematical Gazette, 11*(162), 213-220.

______________ (1928). The logical eye and the mathematical eye. Their outlook on Euclid's theory of Proportion. Presidential Address to the Mathematical Association, 1928. *The Mathematical Gazette, 14*(193), 36-56.

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). New York: Dover Publications, Inc.

Knorr, W. (1992). De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas*, 8, 1-12.

Levi, B. (2003). *Leyendo a Euclides* (Tercera ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Puertas, M. L. (1991). *Euclides. Elementos. Libros I-IV.* Madrid: Editorial Gredos S.A.

____________ (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Rusnock, P. y Thagard, P. (1995). Strategies for conceptual change: Ratio and proportion in classical Greek mathematics. *Studies In History and Philosophy of Science Part A*, *26*(1), 107-131.

Zubieta, F. (1991). La definición de proporción de Eudoxio. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 7*, 477-486.

Definiciones y proposiciones del Libro V de los Elementos[29]

Definiciones

1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.
2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
4. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.
5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.
6. Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.
7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.
8. Una proporción entre tres términos es la menor posible.
9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que [guarda] con la segunda.
10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que [guarda] con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.
11. Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.
12. Una razón *por alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.
13. Una razón *por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.
14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto

29 Tomado de Puertas (1994); sin embargo, aún bajo el riesgo del anacronismo pero con la intención de hacer más comprensivos los enunciados, en la mayoría de las proposiciones hemos incluido al final de cada una y entre paréntesis, una versión simbólica moderna, lo cual no significa que consideremos que en los *Elementos* había ya un álgebra geométrica; una discusión interesante de la existencia o no de dicha álgebra se encuentra en Grattan-Guinness (1996). Nótese que hemos empleado símbolos diferentes para indicar las relaciones u operaciones entre magnitudes (=, <, >, :, +, -), que para indicar las relaciones entre razones ($\prec$, $\succ$, ::), o para indicar operaciones entre números ($\oplus$, $\ominus$).

con el consecuente como una sola [magnitud] en relación con el propio consecuente.

15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.
16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.
17. Una razón *por igualdad* se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que tomadas de dos en dos guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.
18. Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente, y como el consecuentes es a alguna otra [magnitud] —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— alguna otra [magnitud] es al antecedente.

Proposiciones

- Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas. [$m(x_1+x_2+\ldots+xn)=mx_1+mx_2+\ldots+mx_n$]

1. Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta. [$(m\Theta n)x=mx+nx$]
2. Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos [magnitudes] tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta. [$m(nx)=(mn)x$]
3. Si una primera [magnitud] guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente. [Si $w:x::y:z$, entonces $\forall m$ y n, $mw:nx::my:nz$]
4. Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una [magnitud] quitada [a la primera] lo es de otra quitada [a la segunda], la [magnitud] restante [de la primera] será también el mismo múltiplo de la [magnitud] restante [de la

segunda] que la [magnitud] entera de la [magnitud] entera. [$m(x\text{-}y)=mx\text{-}my$]

5. Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas [magnitudes] quitadas [de ellas] son equimúltiplos de estas [dos segundas], las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas. [$(m\ominus n)x=mx\text{-}nx$]
6. Las [magnitudes] iguales guardan la misma razón con una misma [magnitud] y la misma [magnitud] guarda la misma razón con las [magnitudes] iguales. [Si $x=y$, entonces $x:z::y:z$ y $z:x::z:y$]

• 7′. *Porisma*: Si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión. [Si$w:x::y:z$, entonces $x:w::z:y$]

7. De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma [magnitud] una razón mayor que la menor, y la misma [magnitud] guarda con la menor una razón mayor que con la mayor. [Si $x<y$, entonces $x:z\prec y:z$; y $z:x\succ z:y$
8. Las [magnitudes] que guardan con una misma [magnitud] la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma [magnitud] guarda la misma razón, son iguales. [Si $x:z::y:z$, entonces $x=y$. Y, si $z:x::z:y$, entonces $x=y$]
9. De las [magnitudes] que guardan razón con una misma [magnitud], la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma [magnitud] guarda una razón mayor, es menor. [Si $x:z\prec y:z$, entonces $x<y$. Y si $z:x\prec z:y$, entonces $x>y$]
10. Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí. [Si $u:v::w:x$ y $w:x::y:z$, entonces $u:v::y:z$]
11. Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes. [Si $x_1:y_1::x_2:y_2::\ldots::x_n:y_n$, entonces $(x_1+x_2+\ldots+x_n):(y_1+y_2+\ldots+y_n)::xi:yi,\ \forall i=1,\ldots,n$]
12. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con una sexta. [Si $u:v::w:x$ y $w:x\succ y:z$, entonces $u:v\succ y:z$]
13. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si menor, menor. [Si $w:x::y:z$ y $w\gtreqless y$, entonces $x\gtreqless z$]
14. Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos, tomados en el orden correspondiente. [$x:y::nx:ny$]
15. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales. [Si $w:x::y:z$, entonces $w:y::x:z$]
16. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales. [Si $(w+x):x::(y+z):z$, entonces $w:x::y:z$]

17. Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales. [Si $w:x::y:z$, entonces $(w+x):x::(y+z):z$]
18. Si como un todo es a otro todo, así es una [parte] quitada [de uno] a una [parte] quitada [de otro], la [parte] restante será también a la [parte] restante como el todo es al todo. [Si $(w+x):(y+z)::w:y$, entonces $(w+x):(y+z)::x:z$]
- 19′. *Porisma*: Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales. [Si $(u+v):(x+y)::v:y$, entonces $(u+v):(x+y)::u:x$]

19. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor. [Si $u:v::x:y$ y $v:w::y:z$ y $u \gtreqless w$, entonces $x \gtreqless z$]
20. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor. [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$ y $u \gtreqless w$, entonces $x \gtreqless z$]
21. Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón. [Si $x_1:x_2::y_1:y_2$, $x_2:x_3::y_2:y_3$, ... , y $x_{n-1}:x_n::y_{n-1}:y_n$, entonces $x_1:x_n::y_1:y_n$]
22. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón. [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$, entonces $u:w::x:z$]
23. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta. [Si $u:v::w:x$ y $y:v::z:x$, entonces $(u+y):v::(w+z):x$]
24. Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor [juntas] son mayores que las dos restantes. [Si $w:x::y:z$ y $w>x$ y $w>y$ y $x>z$ y $y>z$, entonces $w+z>x+y$]