

¿Qué nos dice la teoría APOE sobre la enseñanza del Álgebra Lineal?

María Trigueros G.¹

Depto. de Matemáticas
ITAM, México
trigue@itam.mx

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de dos proyectos de investigación sobre el aprendizaje de los conceptos del Álgebra Lineal y sus relaciones y sobre la enseñanza de esta disciplina mediante el uso de modelos abiertos; ambos utilizando la teoría APOE. Los resultados de las investigaciones empíricas acerca del aprendizaje de los distintos conceptos del Álgebra Lineal constituyen la base para la selección de conceptos a enseñar y el diseño de modelos y actividades para enseñarlos. Los resultados obtenidos permiten valorar las aportaciones de la teoría APOE a la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del Álgebra Lineal.

El Álgebra Lineal es una disciplina que día con día se considera más importante en la preparación de alumnos de diferentes licenciatura. La gran cantidad de aplicaciones que pueden tratarse utilizando los conceptos de esta disciplina y su potencial para desarrollar la capacidad de abstracción matemática y de formalización en los estudiantes son determinantes en la formación de profesionales hoy en día. Sin embargo, los estudios que se han realizado acerca de la enseñanza del Álgebra Lineal indican que los estudiantes presentan muchas dificultades debido, principalmente, a la abstracción que se requiere en la formalización de los conceptos y al lenguaje que se utiliza en ella. Dubinsky (1997) advirtió ya desde hace muchos años que estas dificultades no pueden ni deben evitarse y que dedicar toda la atención a enseñar los aspectos computacionales de la disciplina eludiendo la abstracción que es necesaria en un aprendizaje a profundidad de esta materia no es conveniente. La abstracción y el formalismo son la esencia de las Matemáticas, y en particular del Álgebra Lineal, por ello es necesario buscar acercamientos específicos que permitan a los alumnos comprender los conceptos a través de experiencias agradables pero sin eludir la exigencia de abstracción indispensable para profundizar en ellos. El

logro de diseñar estrategias de enseñanza exitosas está íntimamente ligado a la investigación y experimentación didáctica.

En este artículo se describen los resultados experiencias de investigación y enseñanza de algunos conceptos del Álgebra Lineal utilizando como marco teórico la Teoría APOE. Para ello se inicia con una breve descripción de la teoría, posteriormente se presenta un panorama que intenta dar una idea del contenido y alcance de los proyectos tanto de investigación cuanto de enseñanza y de los resultados obtenido hasta ahora.

La Teoría APOE

La teoría APOE (Arnon, et al., 2013) ofrece un modelo teórico acerca de la construcción del conocimiento matemático basado en el mecanismo de *abstracción reflexiva*. La construcción del conocimiento inicia cuando un estudiante realiza acciones sobre objetos matemáticos conocidos. Una *acción* es una transformación de un objeto mental siguiendo una o varias reglas específicas que el estudiante considera como externas. Conforme el individuo reflexiona sobre sus acciones, éstas se interiorizan en un *proceso*. En este caso, cada paso de la transformación puede describirse sin necesidad de hacerla. La reflexión sobre el proceso y la necesidad de aplicar acciones sobre el mismo hace que el estudiante tome conciencia de él y que lo encapsule en un *objeto*. Un *esquema* se considera como una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se relacionan entre sí para formar estructuras matemáticas útiles en la solución de problemas. Estos esquemas pueden evolucionar conforme se construyen relaciones entre sus componentes de manera que los esquemas cambian dinámicamente construyéndose y reconstruyéndose. La evolución de los esquemas se describe mediante los niveles de la *triada*: El nivel Intra- se caracteriza por el foco en estructuras aisladas de otras estructuras de naturaleza similar. En el nivel Inter- se construyen relaciones y transformaciones entre los componentes del esquema, se agrupan y se pueden identificar con el mismo nombre. En el nivel Trans- se construyen síntesis entre los componentes del esquema que permiten entender las relaciones construidas con anterioridad y decidir cuándo el esquema es aplicable a una situación particular.

La aplicación de la teoría APOE requiere del diseño de un modelo teórico de análisis: la *descomposición genética*. Este modelo, no necesariamente único, consiste en una descripción de la forma en que un concepto matemático de interés se construye. Para ello utiliza las construcciones específicas de la teoría que se consideran necesarias en esa construcción y posteriormente se valida o refina a través de investigación empírica.

La descomposición genética constituye la base del ciclo de investigación de la teoría APOE que inicia con el diseño de la misma y culmina con su validación. La teoría APOE propone finalmente un modelo de enseñanza: el ciclo ACE (Actividades, discusión en clase, ejercicios)

en el que se ponen en juego actividades que promueven las construcciones modeladas en la descomposición genética.

A continuación se describen brevemente dos proyectos de investigación que ilustran el uso de esta teoría en relación con la construcción de conceptos del Álgebra Lineal.

Dos proyectos de investigación

En México se están desarrollando dos proyectos de largo alcance con el fin de estudiar cómo se aprenden los conceptos del Algebra Lineal. Uno de ellos se centra principalmente en el uso de la teoría APOE para desentrañar las construcciones de los estudiantes respecto a los conceptos fundamentales de esta disciplina (Oktaç y Trigueros, 2010). En el marco de este proyecto, ya se han estudiado a profundidad los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales, espacio vectorial, conjunto generador y espacio generado, base, transformaciones lineales. El otro proyecto utiliza conjuntamente los ciclos de investigación y enseñanza de la teoría y aporta la introducción de modelos en el aula con el objetivo de brindar oportunidades a los alumnos de usar sus conocimientos previos y de conectar los conceptos abstractos del Algebra Lineal con situaciones que permitan darles un sentido más cercano a su experiencia (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2009; Trigueros y Possani, 2013). Este proyecto aprovecha los resultados de las investigaciones del de investigación y las descomposiciones genéticas propuestas en él para diseñar actividades de enseñanza que complementan los problemas de modelación para abordar distintos conceptos. Este proyecto profundiza en la forma en que los alumnos aprenden los conceptos y, además, estudia la relación que guarda la introducción de problemas abiertos en dicha construcción. En este contexto se han abordado los temas de vectores, independencia lineal, valores y vectores propios y programación lineal, además de los mencionados anteriormente.

Ambos proyectos coinciden en utilizar el análisis teórico de las construcciones involucradas en el aprendizaje de cada uno de los conceptos considerados con el fin de validar, o en su caso refinar, dicho análisis a través de los datos que se obtienen de la investigación empírica. Los resultados de ambos proyectos se han aprovechado para diseñar sugerencias didácticas para guiar al maestro en el uso de los problemas y de las actividades que ya han sido probadas en el aula.

Resultados de la investigación sobre algunos conceptos del Álgebra Lineal

Los resultados obtenidos en las investigaciones de los proyectos han dado luz acerca de los múltiples factores que intervienen en el aprendizaje del Algebra Lineal. Entre ellos destaca la

importancia que tiene la comprensión de la variable en el aprendizaje de todos los conceptos. Una y otra vez distintas investigaciones evidencian la necesidad de interpretar, manipular y simbolizar flexiblemente la variable en la comprensión de cada uno de los conceptos del Álgebra Lineal estudiados. La posibilidad de diferenciar entre los usos de la variable: número general, incógnita y variables en relación funcional, y de integrar estos usos en la solución de problemas, juega un papel fundamental en la generalización de la variable real hacia otro tipo de variables como parámetros, vectores o matrices y en la interpretación de resultados de los problemas relacionados con los nuevos conceptos. Los resultados de varios proyectos han mostrado que el trabajo con modelos y con actividades específicas que abordan la dificultad con las variables contribuye a que las dificultades de los alumnos disminuyan y que ello contribuye a una mejor comprensión de los conceptos nuevos conceptos estudiados.

En todas las investigaciones relacionadas con la enseñanza de distintos conceptos del Álgebra Lineal se ha encontrado que el uso del ciclo ACE promueve la construcción de los distintos conceptos, al menos como una concepción proceso y en varias ocasiones como una concepción objeto. Tal es el caso, por ejemplo de la noción de conjunto solución como proceso, de la noción de espacio generado, conjunto generador, base y vectores propios. También se ha reportado que promueve la construcción de relaciones entre conceptos y permite la evolución de los esquemas de los alumnos, como por ejemplo en el caso de la independencia y dependencia lineal. Algunas de las dificultades mencionadas en la literatura y que resultan difíciles de superar a la luz de los resultados de la investigación se relacionan con la representación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución, particularmente cuando el problema se plantea en R^3 .

Suele considerarse que el uso de la modelación en la clase de matemáticas contribuye a motivar el interés de los alumnos. Si bien los resultados encontrados en el proyecto permiten decir lo mismo para la mayoría de los estudiantes; hay evidencias claras en los resultados de investigación de aprendizaje de los alumnos.

Aportaciones de ambos proyectos

En términos generales podemos decir que el uso de un modelo abierto en la clase de Álgebra Lineal permite desarrollar una discusión interesante con el grupo acerca de los conceptos importantes del tema en consideración. Por ejemplo, permite comparar distintos sistemas de ecuaciones lineales y sus conjuntos solución; introducir nuevas técnicas y nuevos conceptos para profundizar en la generación de un modelo y en el trabajo sobre él cuando resultan necesarias para los alumnos, o reflexionar conjuntamente en las propiedades de cada concepto y las relaciones entre ellos. El caso de un problema de tráfico ejemplifica claramente este hecho. En el marco del trabajo de modelación y de su uso conjunto con actividades conceptuales, fue posible no solamente introducir el método de Gauss para resolver eficientemente sistemas de ecuaciones lineales e interpretar su solución, sino también discutir acerca de la relación de los elementos de

la matriz con el conjunto de calles y discutir su significado en relación al problema de los signos de las ecuaciones. En términos de la variable, el trabajo en el modelo apoyó la interpretación y el manejo de los parámetros por parte de los alumnos, además de la posibilidad de utilizarlos como herramienta para determinar las características de las soluciones factibles, la comparación de diferentes parametrizaciones utilizando una representación geométrica del espacio de soluciones factibles.

El trabajo con un modelo y con actividades diseñadas con la teoría APOE favorece la construcción de conceptos en un contexto en que los alumnos pueden darles sentido y articularlos. Por ejemplo, los conceptos de dependencia e independencia lineal suelen ser muy difíciles para los estudiantes. Sabemos que entre las dificultades que se presentan están el entender su definición e interpretar la solución del sistema de ecuaciones necesario para determinar si un conjunto es o no linealmente independiente, particularmente en el caso en el que hay dependencia lineal. Se ha encontrado que un modelo de producción permite que el concepto de dependencia lineal se concrete mediante la idea de “información redundante” y que esto apoye la interiorización de estos conceptos. La reflexión sobre la pregunta “¿Cuál es el mínimo de información que se necesita utilizar?” conduce a la construcción de las nociones de conjunto generador y base. Las relaciones entre los conceptos de sistema de ecuaciones, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador, base y dimensión empiezan, además, a construirse conformando un esquema. El trabajo de los estudiantes en actividades cuidadosamente diseñadas con la teoría APOE apoya la evolución del esquema. Una limitación importante en el uso de este modelo es que el esquema no llega a evolucionar el nivel trans-independencia lineal y los estudiantes muestran muchas dificultades para generalizar el concepto a otros espacios vectoriales distintos a R^n .

El uso de modelos a lo largo del curso, relacionados, por ejemplo, con las transformaciones lineales, los valores y vectores propios o matrices, hace posible la construcción de relaciones entre los distintos del Álgebra Lineal y favorece la evolución de un esquema para esta disciplina. Es importante mencionar, sin embargo, que no es el trabajo únicamente con los modelos lo que hace posible esta evolución. En ella, el trabajo con las actividades que promueven las construcciones de los conceptos y de relaciones entre ellos juega un papel fundamental. Las dificultades encontradas en los estudios y su explicación en términos de la descomposición genética de los distintos conceptos conforman la base del diseño de las actividades utilizadas en el aula, guían la discusión del grupo y el trabajo del maestro a lo largo de las sesiones de clase.

Conclusiones

Las investigaciones realizadas en los dos proyectos han mostrado claramente que la forma en que se introducen los conceptos en el aula juega un papel importante en el tipo de construcciones que se favorecen en los alumnos. Los modelos estimulan la emergencia de “ideas poderosas” y

de formas de dar sentido a los conceptos abstractos del Álgebra Lineal. Las actividades promueven la reflexión en equipo y con el grupo en torno a ellos y su formalización.

Los proyectos han permitido también el desarrollo de nuevo conocimiento. Las discusiones entre los investigadores para diseñar los modelos a utilizar en la clase, condujo a proponer una nueva manera de considerar la construcción de conocimiento mediante el uso de modelos en términos de la teoría APOE. La investigación en ambos ha contribuido a profundizar en el conocimiento de cómo se aprende el Álgebra Lineal: Entre los dos proyectos se ha investigado la construcción de casi todos los conceptos relevantes de esta disciplina. Estas investigaciones señalan las dificultades de los estudiantes, pero van más allá, permiten diagnosticar las posibles causas de estas dificultades y ofrecen formas de trabajar con ellas. Este conocimiento se aprovecha en el diseño de material didáctico, basado en la investigación, para promover un aprendizaje significativo de esta importante disciplina.

Quedan aún cuestiones de investigación abiertas que es necesario abordar. Entre ellas, la investigación sobre la construcción de los conceptos que no han sido abordados y el uso de las descomposiciones genéticas en nuevas investigaciones para validarlas o refinarlas. Sin embargo, el trabajo realizado hasta el momento pone en evidencia la contribución de la teoría APOE a la comprensión de la construcción de conocimientos de Álgebra Lineal y a su enseñanza.

1. En este trabajo han colaborado las siguientes personas: Asuman Oktaç, Solange Roa-Fuentes, Edgar Possani, Carmen López, Javier Alfaro, Darly Kú, Ligia Manzanero, Ma. Dolores Lozano, Xaab Nop Vargas, Hilda Salgado, Ivonne Sandoval, Marcela Parraguez, Ana Elisa Lage y Barbara Bianchini.

Referencias

- Aron, I., Cottrill, J. Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa-Fuentes, S. Trigueros, M. & Weller, K. (2013). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. New York.
- Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (eds), *Resources For Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42, 85-106.
- Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4-II), 373-385.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G. & Lozano, M.D.. (2009) Use of models in the teaching of linear algebra, *Linear Algebra and its Applications*. 432 (8), 2125–2140.
- Trigueros, M. (2008) Modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires. En C.

Ouvrier-Bufferet & M.-J. Perrin-Glorian (éd.). *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur: quoi de neuf? Actes Colloque DIDIREM08*, pp. 83-101. Paris, France.

Trigueros, M. & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*. Vol. 438, 4, pp. 1779–1792.