Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica

Leonor Camargo, Carmen Samper

Universidad Pedagógica Nacional
lcamargo@pedagogica.edu.co; csamper@pedagogica.edu.co

Introducción

El aprendizaje de la geometría, a nivel escolar, se basa en el desarrollo de procesos cognitivos relacionados con el sentido espacial y el razonamiento, relativos al espacio bi y tridimensional. Entre estos procesos están la visualización, la representación gráfica de objetos y relaciones, la conjeturación acerca de propiedades y relaciones de estos, la justificación de afirmaciones acerca de estas propiedades, y la resolución de problemas que requieren modelos de representación de relaciones espaciales. Avanzar en el desarrollo del sentido espacial y del razonamiento geométrico implica una evolución en las formas de pensar, no exenta de tensiones, que va desde las maneras intuitivas o informales que usamos para acceder a información visual, para usarla y aceptar su validez, hasta formas más sofisticadas de procesar y comunicar información, que usan recursos propios de la cultura matemática.

En la presente conferencia presentamos una propuesta de aproximación temprana al razonamiento geométrico que busca acercar a niños de Educación Básica al mundo teórico de la geometría. La propuesta se ha venido desarrollando por el equipo de profesores del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, Æ•G*,* de la Universidad Pedagógica Nacional, en sus estudios acerca del aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de matemáticas y en algunas tesis de maestría realizadas por profesores de matemáticas de primaria y secundaria[1]. Pretende constituirse en un organizador curricular para la geometría en tanto impulsa una reorganización de las prácticas usuales de enseñanza, tradicionalmente centradas en el reconocimiento y clasificación de formas, en pro de procesos de descubrimiento y justificación de propiedades geométricas. Inicialmente aclaramos alguna terminología, y posteriormente nos centramos en la propuesta y damos algunos ejemplos.

[1] Agradezco especialmente a Andrea Escobar, Alejandro Barbosa, Mario Cañón, Liliana Rozo por permitirme hacer uso de sus datos investigativos.

Aclaración de conceptos

Entendemos por razonar matemáticamente, de manera general, el conectar, atendiendo reglas definidas por una comunidad matemática de referencia, experiencias y saberes, con el propósito de indagar, obtener e interpretar información, explicar hechos o procedimientos, determinar una manera de proceder, formular dudas, contradecir, refutar, concluir, etc. (Perry, Samper, Camargo, Molina, en prensa). El razonamiento matemático es el producto de razonar matemáticamente.

Cuando el razonamiento se hace con el propósito específico de sustentar ante otros, o a uno mismo, que una afirmación es cierta dentro de un sistema de conocimientos, nos referimos a una argumentación. Esta se compone de argumentos o enunciados orales o escritos, de estructura ternaria, que relacionan proposiciones particulares entre sí, mediante una regla general. Ahora bien, si una argumentación es de carácter deductivo se aplica una proposición general o garantía ($r: p \rightarrow q$) con la que se cuenta, a unos datos que se tienen (instancia de p), para concluir una afirmación (instancia de q).El esquema del argumento es: $(p \wedge r) \rightarrow q$ y tiene como característica que la afirmación (instancia de q) es necesaria y constituye nueva información para la situación particular. Las proposiciones podrían no estar totalmente explicitas pero debería ser posible identificarlas en un esfuerzo por formalizar lo expresado. (Perry, Samper, Camargo, Molina, en prensa).

Con una introducción temprana al razonamiento geométrico nos referimos a propiciar la elaboración, por parte de los estudiantes, de justificaciones, en particular con argumentos deductivos, pues consideramos que son la esencia de las matemáticas y en particular de una manera matemática de trabajar en geometría. La aproximación metodológica que proponemos busca impulsar el desarrollo de procesos de justificación de propiedades geométricas que han sido obtenidas a partir de procesos de conjeturación.

El grupo de investigación Æ•G ha denominado por actividad demostrativa (Perry, Samper, Camargo, Molina, en prensa) al constructo que articula el proceso de conjeturación con el de justificación de tal manera que se justifique lo que se conjetura.

- La conjeturación hace parte de los procesos de razonamiento matemático y tiene por meta, la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el estudiante pero tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual considera que dichos enunciados son candidatos a entrar en un proceso de justificación. Formular una conjetura se refiere a explicitar en términos matemáticos, y como un enunciado condicional general, un hecho matemático (aquí, geométrico) que se ha reconocido a través del estudio de casos particulares. Corroborar la conjetura significa examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles.

- La justificación tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento acordado por el grupo social que debería reconocerla como válida.

Siguiendo a Stylianides (2007), en la educación básica es posible denominar como demostración a una justificación si es una secuencia de afirmaciones conectadas deductivamente, a favor de un enunciado, que:

- Usan hechos geométricos aceptados por la comunidad de la clase como garantías de las afirmaciones que se concluyen; esto quiere decir que los estudiantes conocen los hechos geométricos, los aceptan y recurren a ellos cuando los necesitan.
- Usan formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de la comunidad de la clase, especialmente formas de argumentación deductiva que desestiman el recurso a la ostensión.
- Usan formas expresivas (notación, lenguaje simbólico, terminología) al alcance de la comunidad de la clase y que favorecen la comunicación.

Aspectos centrales de la propuesta

Desde el punto de vista del grupo Æ•G la elaboración de argumentos deductivos y, por lo tanto la aproximación temprana al razonamiento geométrico se ve favorecida si se combinan los siguientes elementos:

- Una propuesta de secuencia de problemas de construcción geométrica relacionados entre sí, de tal forma que algunos de ellos permiten el descubrimiento empírico de hechos geométricos que se asumen como ciertos (a manera de postulados de un sistema teórico), y otros que dan lugar a conjeturas que pueden ser validadas con argumentos deductivos, mediante los hechos geométricos aceptados previamente (a manera de teoremas). Por esta vía, los estudiantes pueden ver que las propiedades de las figuras geométricas constituyen un entramado que da forma al conocimiento geométrico y experimentan la potencia de la demostración matemática. La propuesta busca que los estudiantes dejen de ver las propiedades geométricas únicamente como atributos descriptivos de las figuras, identifiquen relaciones de dependencia entre ellas y construyan, en algunos casos, argumentos deductivos para justificarlas.

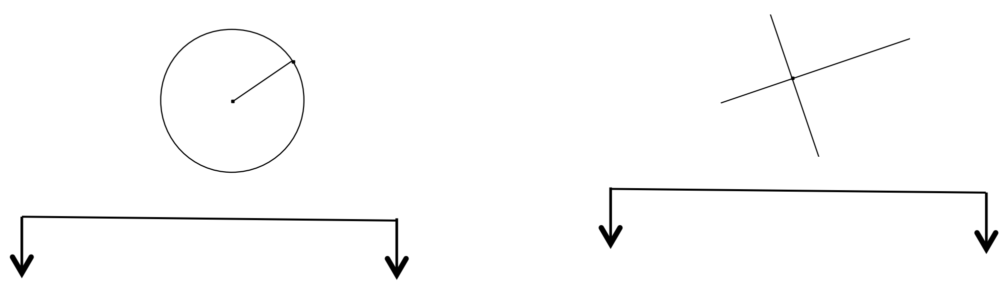
- El uso, para la resolución de los problemas, de un programa de geometría dinámica que hace que la construcción y la exploración sean una actividad matemática apoyada en las propiedades geométricas y no en la percepción visual. Específicamente, el reconocimiento de las propiedades construidas, ya sea directamente o con el arrastre, y el estudio del comportamiento de las figuras geométricas, cuando algunos elementos de la configuración son arrastrados, proveen a los estudiantes un mecanismo para identificar invariantes y relaciones de dependencia entre propiedades geométricas que es central para formular conjeturas y disponer de elementos para justificarlas. En ese sentido, se aprovecha el potencial de los programas de geometría dinámica, no sólo como recurso para tener disponibles rápidamente una gran cantidad de ejemplos de una figura geométrica dada, favoreciendo la inducción empírica, sino como recurso para detectar invariantes y establecer relaciones de dependencia que favorecen la construcción de enunciados condicionales, gracias principalmente a la actividad experimental que se logra con el arrastre. En particular, los procedimientos de construcción de figuras elementales, como un paralelogramo y arrastrar hasta que las diagonales sean congruentes, obliga a tener consciencia de las propiedades que definen la figura y a aquellas que se imponen, las cuales se constituyen en los antecedentes de proposiciones condicionales, y descubrir propiedades que se mantienen o suceden simultáneamente al imponer una, se constituyen en los consecuentes, dando lugar a conjeturas iniciales y posiblemente a ideas para que los estudiantes las justifiquen deductivamente.

- La mediación semiótica del profesor que guía las actividades impulsando a los estudiantes a interpretar signos del profesor o de otros alumnos y producir signos, a través de los cuales manifiesten sus significados personales acerca de las figuras y las relaciones representadas en la pantalla, como forma de construir conocimiento personal significativo cuya referencia es un conocimiento cultural aceptado por la comunidad matemática de referencia, de acuerdo a las metas instruccionales. En tal sentido, además de diseñar la secuencia de problemas que posibiliten la emergencia de enunciados en torno a un concepto o relación geométrica, el profesor es el encargado de generar una interacción discursiva para que a partir de esos enunciados surjan otros que les den soporte y para que tales enunciados evolucionen hacia los significados matemáticos del contenido.

A continuación, presentamos posibles vías de acceso al universo teórico de la geometría partiendo de cuatro hechos geométricos básicos derivados de experiencias empíricas de construcción de circunferencias y rectas perpendiculares. La propuesta se ha experimentado con estudiantes de grados cuarto, quinto y octavo. La ilustramos con ejemplos sacados de sus producciones.

Punto de partida

Los hechos geométricos básicos para las propuestas son: (i) los radios de una circunferencia son congruentes (HG1) (ii) los puntos de una circunferencia equidistan del centro de la misma (HG2) (iii) dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos (HG3) (iv) dos rectas perpendiculares forman ángulos de 90° (HG4) (Figura 1). Para llegar a estos hechos se puede invitar a los estudiantes a realizar actividades de construcción. Algunas de las actividades que hemos propuesto a estudiantes de cuarto de primaria a noveno grado son: determinar un punto *C* y luego ubicar puntos que estén a la misma distancia de *C*; construir un segmento *AB* y luego arrastrar el punto *B* procurando que la medida del segmento no cambie; ubicar tres puntos *A, B, C* y luego una circunferencia que pase por dicho puntos; hallar el centro de una circunferencia; construir un ángulo recto; construir dos rectas perpendiculares. En todos los casos, se puede pedir a los estudiantes estudiar propiedades para analizar qué cambia con el arrastre, qué no cambia, y qué cambia simultáneamente con otro cambio. Pueden tomar medidas y arrastrar hasta llegar a tener certeza de las conclusiones. Cuando el grupo de estudiantes acepta que las cuatro propiedades son ciertas, ellas se convierten en herramientas de construcción, control y justificación de equidistancia, congruencia de segmentos y construcción de ángulos rectos.



HG1: Los radios de una circunferencia son congruentes.

HG2: Los puntos de una circunferencia equidistan del centro de la misma.

HG3: Dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos.

HG4: Dos rectas perpendiculares forman ángulos de 90°.

Figura 1.

A partir de estos hechos se planean secuencias de problemas de construcción, de acuerdo con el nivel y la experiencia escolar previa de los estudiantes en geometría y con programas de geometría dinámica. Se busca que construyan, exploren, descubran propiedades, formulen conjeturas y justifiquen algunas de ellas con los hechos geométricos iniciales y los que se derivan de nuevos problemas. Inicialmente se solicita que justifiquen los procedimientos de construcción y luego las conjeturas que resultan de explorar las construcciones.

Generalmente, las secuencias comienzan solicitando a los estudiantes construir un segmento congruente a uno dado. Esta tarea puede ser más o menos exigente según si se ponen condiciones especiales o no. En la Figura 2 se presentan tres opciones de pregunta y las construcciones realizadas por estudiantes de quinto de primaria junto con la argumentación que dieron acerca de por qué los segmentos son congruentes, todas basadas en el HG1.

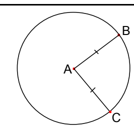
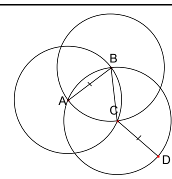
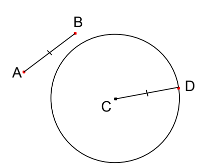
Problema	Construcción	Justificación
Construir un segmento congruente al segmento AB dado.		María: *Los segmentos AB y AC son congruentes porque son radios de la misma circunferencia.*
Construir un segmento congruente al segmento AB dado cuyos extremos no sean A ni B.		Sebastián: *Los segmentos AB y CD son congruentes porque AB y BC son radios de la misma circunferencia y BC y CD son radios de una misma circunferencia.*
Construir un segmento congruente al segmento AB y tal que C sea uno de sus extremos.		Laura: *Los segmentos AB y BC son congruentes porque hice una circunferencia con centro en C y radio el segmento AB* (opción compás).

Figura 2.

Los argumentos de María, Sebastián y Laura son deductivos, como se demuestra al transformar las proposiciones que los componen pero no están explícitos todos los elementos del argumento. En el caso del argumento de María, se concluye una afirmación (los segmentos AB y AC son congruentes) que se deriva de unos datos (segmentos AB y AC son radios de una circunferencia) y ambas proposiciones se conectan con la palabra “porque”. Para construir el argumento deductivo hay que invertir el orden de las proposiciones y hacer explícito el HG1 como garantía de que la afirmación se deriva de los datos (Figura 3). Es una transformación que puede hacer María, con la guía del profesor.

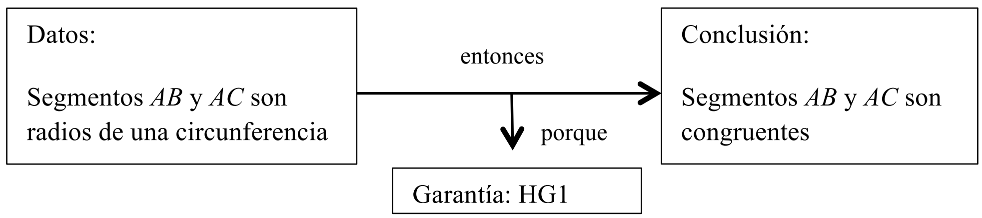


Figura 3.

El argumento de Sebastián es un poco más complejo pues implica la propiedad transitiva de la congruencia (Figura 4). En el caso de Laura basta afirmar que los $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden lo mismo, por lo que son congruentes, usando como garantía la definición de congruencia.

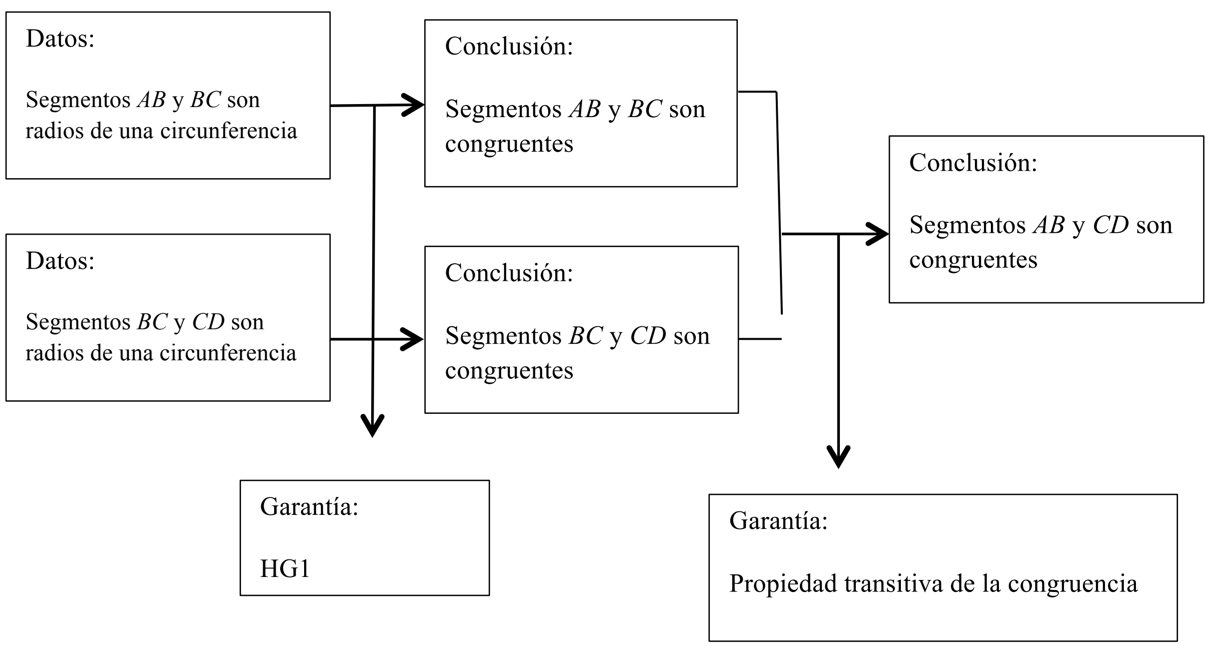


Figura 4.

Después de resolver el problema de construir un segmento congruente a otro, se pide a los estudiantes que construyan varios puntos que equidisten de los extremos de un segmento AB o de dos puntos dados, A y B, e investiguen las propiedades del lugar geométrico de tales puntos. Los estudiantes, con los que hemos experimentado la propuesta, han procedido de varias formas: ubicar varios puntos en la pantalla, medir la distancia de ellos a los puntos A y B y arrastrarlos hasta obtener una medida aproximadamente igual; colocar un punto, medir la distancia del punto a A y a B, activar la huella del punto y arrastrarlo hasta obtener un conjunto de puntos que equidiste de A y B; construir varias circunferencias que pasen por los dos puntos A y B, y señalar los centros. Este problema de construcción se constituye en una oportunidad para identificar y definir el punto medio de un segmento, construir la mediatriz de un segmento e introducir la definición de mediatriz de dos maneras: como los puntos que equidistan de dos puntos fijos y como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. En la Figura 5 se presentan las construcciones blandas (obtenidas con el arrastre) (Healy, 2000) hechas por estudiantes de grado octavo, la construcción robusta (que no se modifica con el arrastre) de la mediatriz y los hechos geométricos[2] que se introducen a partir de este problema.

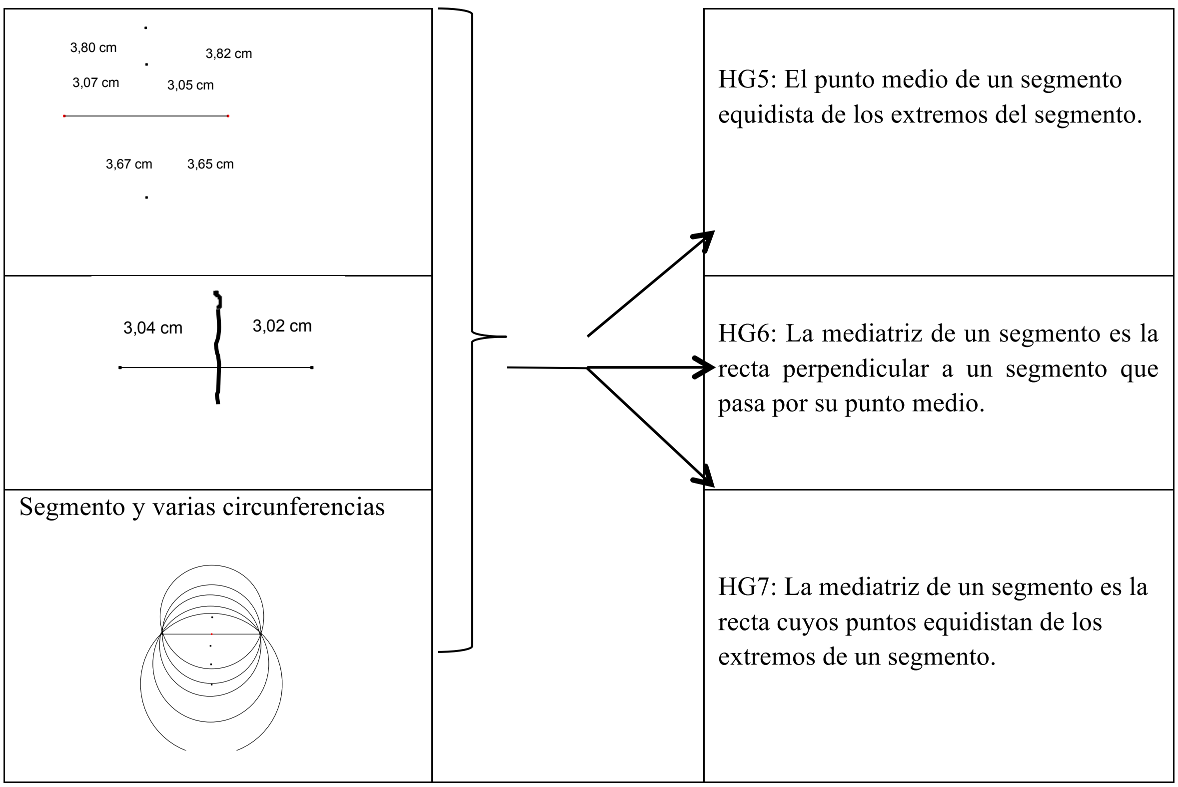


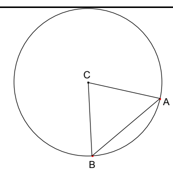
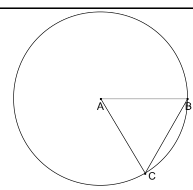
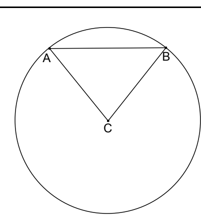
Figura 5.

A partir de allí, las secuencias pueden continuar por varios caminos. A continuación presentamos tres opciones y mencionamos, en cada caso, aspectos relacionados con el uso del programa de geometría dinámica y la mediación semiótica del profesor.

Ejemplo de secuencia para cuarto y quinto de primaria

[2] En esta conferencia numeramos en orden consecutivo los hechos geométricos para facilitar la lectura del texto, pero no pretendemos insinuar que estos se deben introducir en ese orden. Las secuencias de problemas pueden variar y por lo tanto la introducción de hechos geométricos, de acuerdo a circunstancias particulares de cada implementación.

Se propone el problema de construir triángulos isósceles. Así como en el caso de la construcción de segmentos congruentes, se puede decidir el grado de dificultad de la tarea o se puede ir modificando éste de acuerdo al desempeño de los estudiantes. En la Figura 6 ilustramos las construcciones realizadas por tres niños, de acuerdo a variantes en el enunciado del problema. También incluyo la justificación que dieron a la propuesta de construcción, la cual asumimos como una conjetura de la forma: si el triángulo se construye de tal forma que… entonces es isósceles.

Problema	Construcción	Justificación
Construir un triángulo isósceles.		Juan: *El triángulo es isósceles porque los lados CA y CB son congruentes ya que son radios de una circunferencia y los radios de una circunferencia son congruentes.* (HG1)
Construir un triángulo isósceles que tenga al segmento AB como uno de los lados congruentes.		Alicia: *El triángulo ABC es isósceles porque AB y AC son congruentes ya que son radios de una circunferencia y los radios de una circunferencia son congruentes* (HG1)
Construir un triángulo isósceles en el que el segmento AB no es congruente a otro lado del triángulo.		Estela: *El triángulo ABC es isósceles porque CA y CB son congruentes ya que C equidista de los extremos de un segmento* (HG1 - HG7)

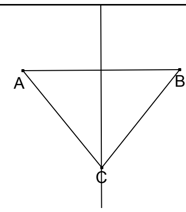
		Beatriz: *El triángulo ABC es isósceles porque CA y CB son congruentes ya que C está en la mediatriz de AB porque hice la recta que es perpendicular al segmento por el punto medio* (HG6) *y los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos de un segmento* (HG7)

Figura 6.

La secuencia continúa con la construcción de triángulos equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. Las herramientas de control HG1, HG2, HG3, HG4 y los hechos geométricos HG6 y HG7 son suficientes para justificar el resultado de las construcciones. Así, es posible organizar los hechos geométricos en un sistema teórico local (Perry, Samper, Molina, Camargo, Echeverry, 2012), en donde los hechos que se aceptan sin justificar se consideran como postulados y los que se justifican son los teoremas del sistema. En la Figura 7 ilustramos el uso de un sistema teórico local relacionado con la construcción de triángulos isósceles y equiláteros. Los recuadros en línea continua gruesa, ligados por una flecha, contienen los datos y las afirmaciones que se concluyen de ellos y los recuadros en línea punteada contienen las garantías que permiten afirmar que la conclusión se sigue de los datos.

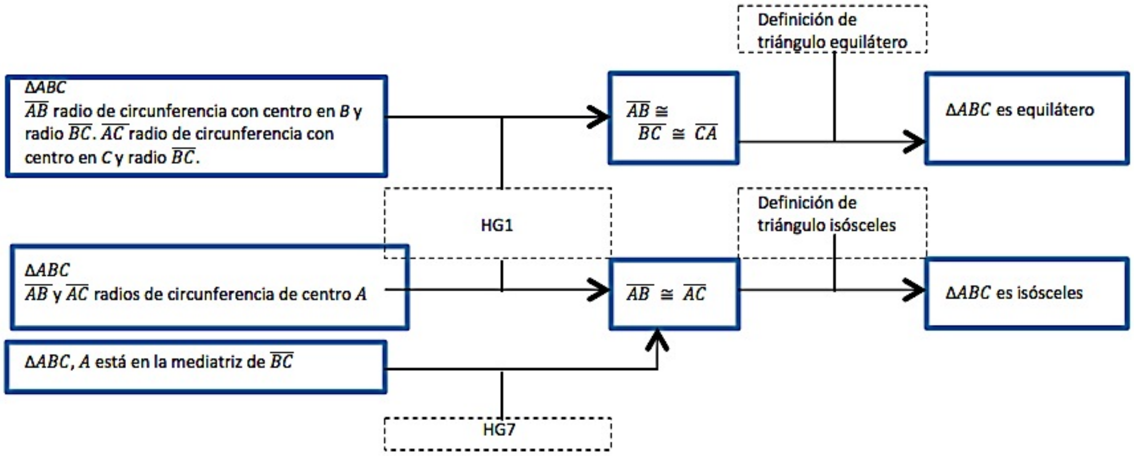
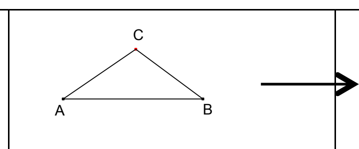
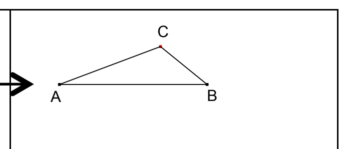
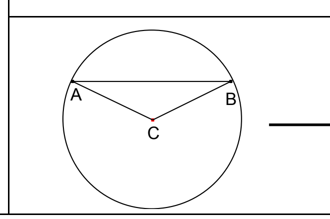
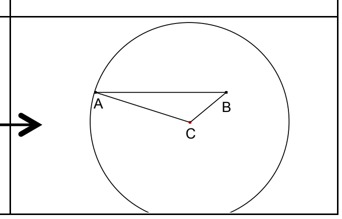


Figura 7.

La posibilidad de aprovechar un programa de geometría dinámica para incentivar el aprendizaje de la demostración se incrementa si los estudiantes ganan confianza en el uso del arrastre como medio de exploración, verificación y control. Cuando se han tenido pocas experiencias con el uso de estos recursos, se tienden a usarlo para hacer construcciones estáticas como si fueran dibujos hechos en lápiz y papel. Es tarea del profesor impulsar a los estudiantes a arrastrar elementos de la figura, analizar permanentemente los invariantes al movimiento e identificar los cambios simultáneos. Por ejemplo, al pedirles que construyan un triángulo isósceles ABC a partir de un segmento AB que no sea congruente a otro lado del triángulo, es probable que los estudiantes poco experimentados con programas de geometría dinámica hagan una figura blanda (Healy, 2000) que sea un triángulo que perceptualmente tenga dos lados congruentes. Incluso, por la experiencia que han tenido con circunferencias, puede que partan de un segmento AB y una circunferencia que pase por A y perceptualmente pase por B (Figura 8). Sin embargo, al verificar si dicha propiedad se mantienen al arrastrar los vértices se darán cuenta que las medidas de los lados no permanecen congruentes. Así, se estimula el uso de estrategias de construcción geométrica, con base en propiedades conocidas, como la congruencia de los radios de una circunferencia. Por esta vía se incentiva el establecimiento de relaciones geométricas y la identificación de garantías para afirmar que la figura efectivamente es un triángulo isósceles.

	Estrategias que se desestiman porque no soportan el arrastre		
			

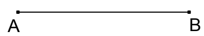
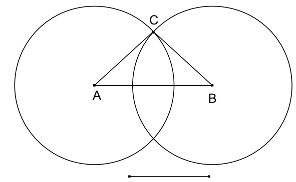
	Construcción geométrica	

Figura 8.

Cuando los estudiantes aprenden a construir triángulos isósceles que soporten el arrastre se puede combinar el trabajo con el dibujo de figuras en papel y lápiz, haciendo uso del compás. La asociación de la abertura del compás con el radio de una circunferencia, les permite reconocer el invariante que se deriva de su uso, es decir, la congruencia. Adicionalmente, se trabaja en el reconocimiento del estatus que un objeto geométrico puede tener, por ejemplo, puede ser a la vez radio de dos circunferencias o el lado de un triángulo. Con ello, se sientan las bases de la geometría de las relaciones.

El trabajo realizado con estudiantes de cuarto de primaria nos ha permitido percatarnos de algunas acciones que están bajo la responsabilidad del profesor, para favorecer la justificación deductiva:

- La indagación permanente por el porqué de los hechos y las afirmaciones que formulen para que los estudiantes experimenten un ambiente de clase centrado en la búsqueda de propiedades, más que en su memorización.
- La institucionalización de los hechos geométricos de tal forma que los estudiantes puedan recurrir a ellos al momento de justificar sus afirmaciones. Si los estudiantes tienen claro de cuál conjunto de hechos pueden escoger las garantías, podrán más fácilmente construir pasos de deducción.
- La exigencia de expresar completamente los pasos de deducción mencionando explícitamente los datos iniciales, la afirmación que desean justificar y la garantía. Así, poco a poco irán ganado en las formas convencionales para argumentos e irán desestimando garantías como la percepción visual.
- La introducción de terminología geométrica y la notación para hacer referencia a puntos, segmentos, vértices, lados, congruencia, etc. Esto facilita la comunicación y permite que los estudiantes expresen más fácilmente sus hallazgos. Incluso hemos visto que el uso de programas de geometría dinámica favorece esta práctica, pues algunos de ellos introducen automáticamente la notación de los puntos construidos.

Ejemplo de secuencia para sexto y séptimo:

Después de haber trabajado la construcción de segmentos congruentes, se propone el problema de construir dos segmentos congruentes que se bisequen y descubrir qué cuadrilátero se forma al unir los extremos mediante segmentos que no se intersequen. En la Figura 9 se presentan los pasos que usualmente siguen los estudiantes y los hechos geométricos que se concluyen.

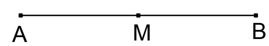
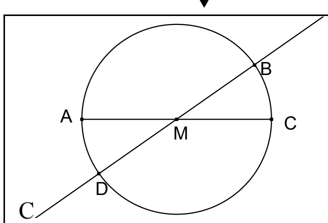
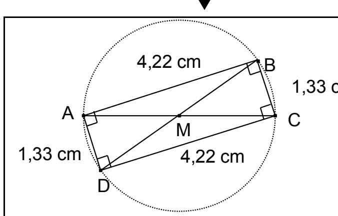
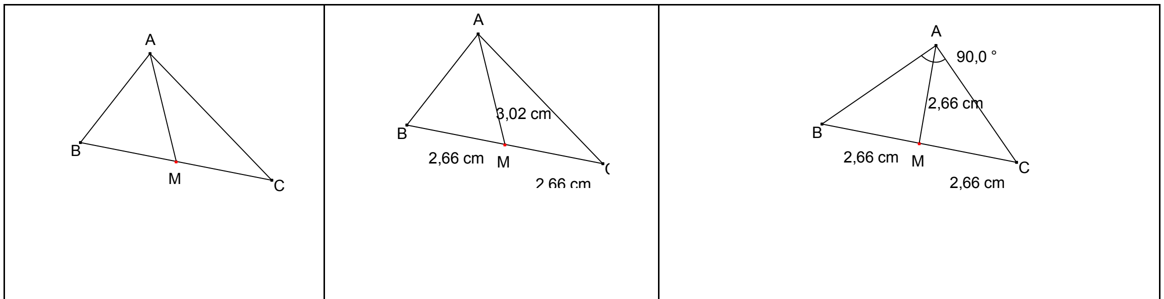
	HG8: Dos segmentos se bisecan cuando se cortan en el punto medio.
	HG9: Los diámetros de una circunferencia son congruentes.
	HG10: Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes y se bisecan el cuadrilátero es un rectángulo.

Figura 9.

A continuación, se propone el problema de descubrir en qué triángulos el punto medio de un lado equidista de los tres vértices. Usualmente los estudiantes construyen un triángulo que denominaremos ABC, el punto medio M de un lado, $\overline{BC}$ y el segmento cuyos extremos son M y A. Toman las medidas MB, MC, MA, arrastran los vértices del triángulo y se dan cuenta que los segmentos MB, MC y MA son congruentes cuando el ángulo A es recto. Este problema da lugar al HG 11: Si en el triángulo ABC con M punto medio del lado BC, se cumple que M equidista de los puntos A, B y C (o los segmentos $MB, MA\ y\ MC$ son congruentes), entonces el triángulo ABC es rectángulo y el ángulo A es recto (Figura 10).



HG 11: Si en el triángulo ABC con M punto medio del lado BC, se cumple que M equidista de A, B y C entonces el triángulo ABC es rectángulo y el ángulo A es recto.

Figura 10.

Luego se propone un problema que da lugar a una conjetura que puede justificarse con los hechos geométricos disponibles. Se pide construir una circunferencia de centro en el punto O y diámetro *AC,* y ubicar un punto B en la circunferencia. Después se solicita descubrir una propiedad del triángulo ABC y justificarla. En este caso no se trata de justificar el resultado de una construcción, sino de demostrar que el ángulo B es recto. Para ello, los estudiantes pueden valerse principalmente de los hechos HG9, HG10 y HG11. La justificación usando el HG11 es casi inmediata, por lo que conviene pedirles otra vía. En la Figura 11 presentamos el uso de un posible sistema teórico local, construido a partir de los hechos geométricos que surgen de los problemas propuestos, para demostrar otros hechos geométricos. Para no extendernos en la explicación, no incluímos algunos de los hechos que aparecen en la figura como la definición de figuras inscritas en circunferencias, la definición de rectángulo y de ángulo recto. En la parte superior de la figura se avanza en afirmaciones hacia la derecha, usando los hechos geométricos HG1 y HG11 principalmente, como garantía. En la parte inferior se usan los hechos geométricos HG1, HG9 y HG10.

Los tres problemas propuestos en esta sección tienen como característica que, a partir de la construcción, basta hacer una exploración dinámica sencilla para detectar el invariante esperado. De esta manera se aprovecha el programa de geometría dinámica para impulsar la inducción empírica, dado que los estudiantes pueden apreciar una regularidad en múltiples configuraciones que tienen las mismas relaciones geométricas.

La mediación semiótica se centra principalmente en el apoyo a los estudiantes para que encuentren una de las vías para construir la justificación, con base en los hechos geométricos conocidos. Enfocarse en las propiedades geométricas usadas en la construcción y en los hechos geométricos que se tienen a disposición permite a los estudiantes validar la conjetura que surge del último problema, desarrollando un proceso deductivo.

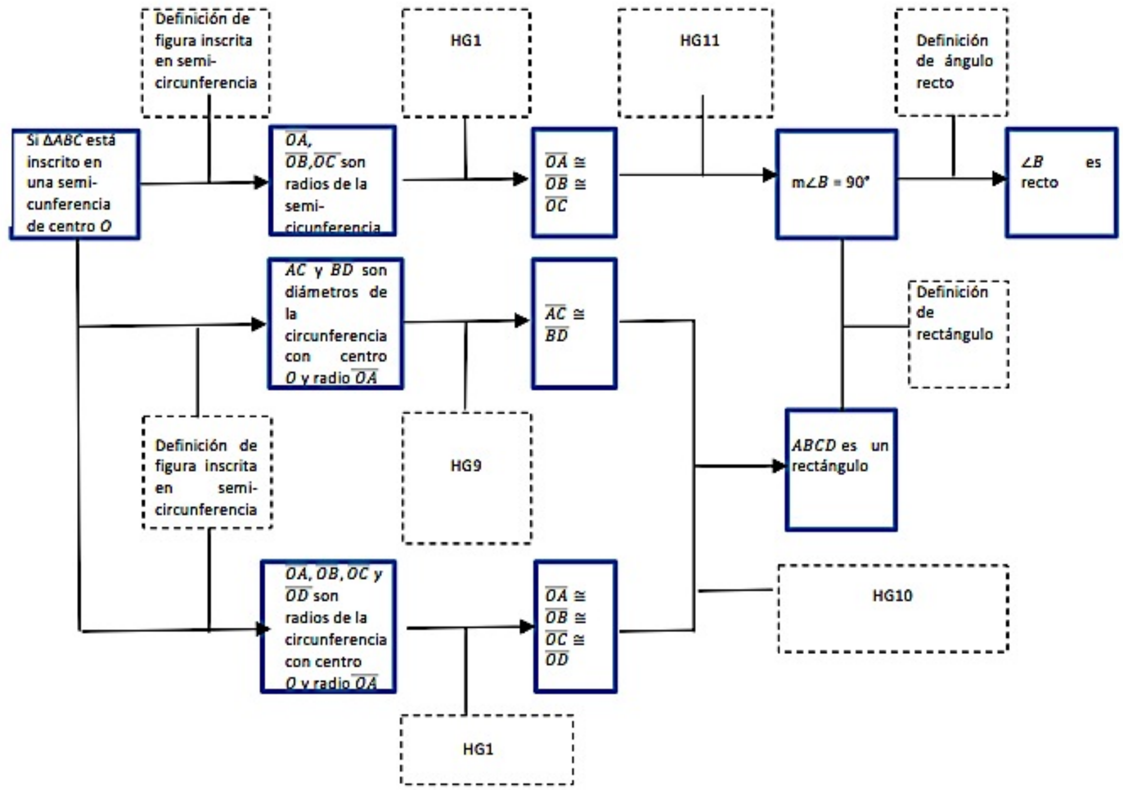


Figura 11.

Ejemplo de secuencia para octavo grado:

Después de construir segmentos congruentes, se proponen los problemas: (i) construir dos rectas perpendiculares m y l y una recta p perpendicular a l; descubrir una relación de las rectas m y p, (ii) construir dos rectas paralelas m y l y una recta p perpendicular a l; descubrir una relación entre las rectas m y p. (Figura 12). Estas construcciones dan lugar a los hechos geométricos HG12 y HG13.

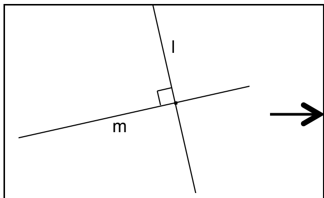
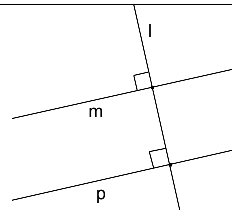
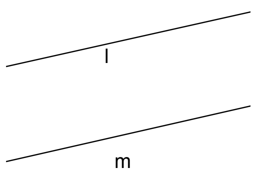
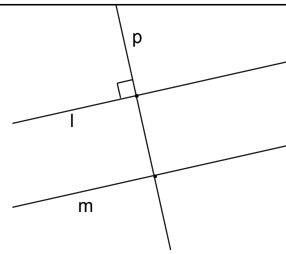
		HG12: Si las rectas m y p son a l entonces m y p son paralelas.
		HG13: Si las rectas l y m son paralelas y l es perpendicular a p entonces m y p son perpendiculares.

Figura 12.

El problema principal en esta secuencia es encontrar cuadriláteros cuyas mediatrices se corten en un punto. Es probable que estudiantes con poca experiencia con geometría dinámica comiencen analizando cuadriláteros conocidos como el rectángulo, el rombo o el trapecio. A continuación presento algunas propuestas de solución de estudiantes:

- *Sebastián hace un rectángulo mediante una construcción robusta, a partir de un segmento.* Al trazar las mediatrices, se da cuenta que éstas coinciden dos a dos. La pregunta por la concurrencia se transforma en tratar de justificar por qué las mediatrices de lados opuestos del rectángulo coinciden. Los hechos geométricos HG12 y HG13, la definición de distancia entre dos rectas y el HG5 permiten justificar este hecho (Figura 13). Una vez justificado que las mediatrices del rectángulo concurren, el profesor le pide que encuentre una propiedad del punto de corte de las mediatrices. Por esta vía, Sebastián usa el HG7 para justificar que los vértices del rectángulo están en una circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices.

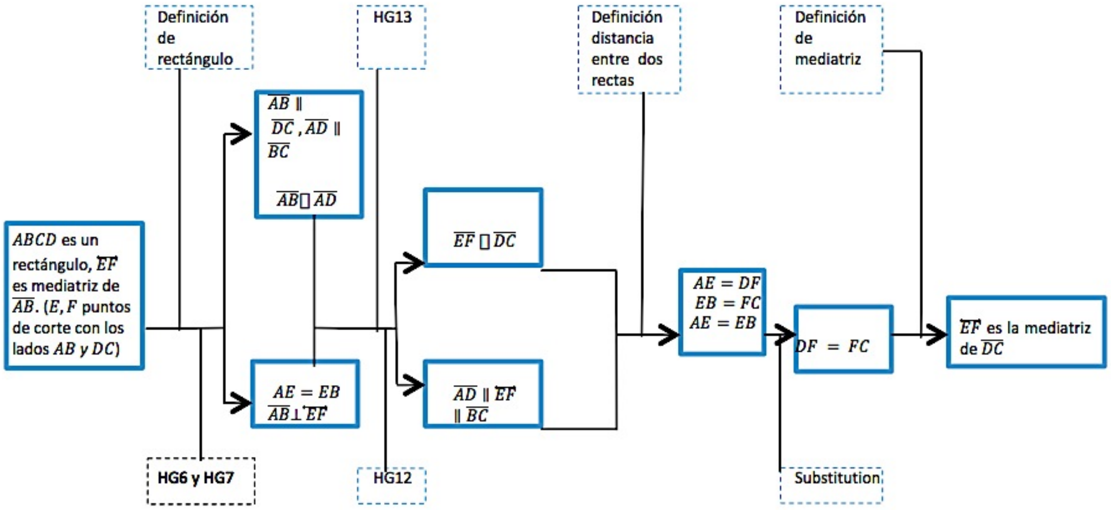


Figura 13.

- *Mónica hace un rombo, mediante una construcción robusta.* Tan pronto construye la tercera mediatriz se da cuenta que en los rombos no se cumple la propiedad pedida.
- *Sara hace un cuadrado a partir de un polígono regular.* El programa de geometría dinámica deja ver una circunferencia circunscrita al cuadrado y marca su centro (Figura 14). Sara se da cuenta que, al trazar las mediatrices, éstas concurren en el centro de la circunferencia. Se vale de este hecho para justificar que la distancia del punto de corte a los vértices del cuadrado es la misma, pues los segmentos del vértice al centro son radios de la circunferencia (HG2). Usando la propiedad transitiva de la equidistancia, justifica que el centro de la circunferencia es el punto de concurrencia de las mediatrices. (Figura 15).

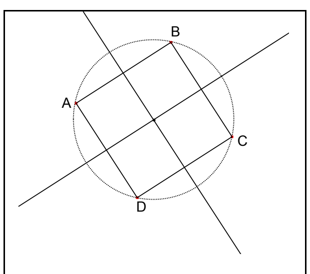


Figura 14.

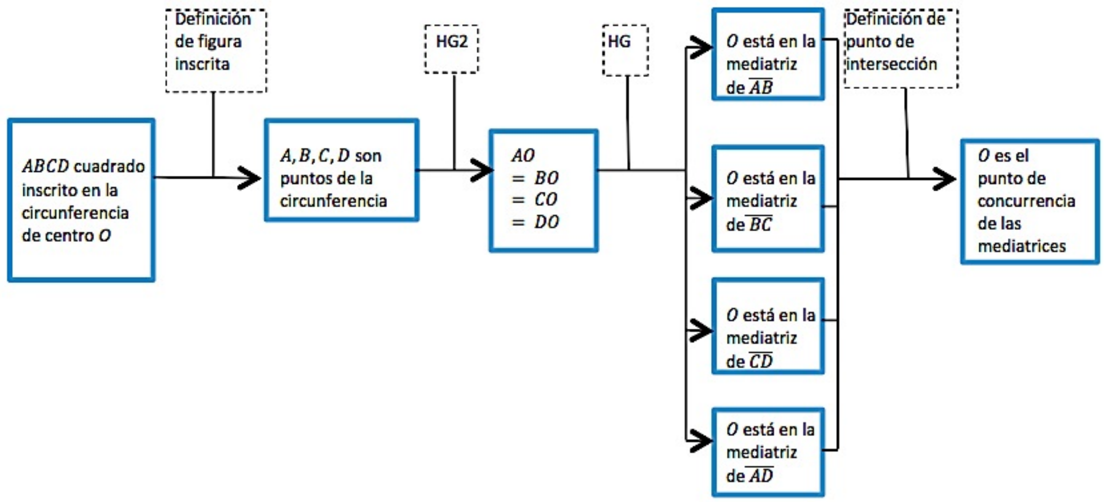


Figura 15.

- *Mario hace un trapecio.* Cuando el profesor insiste en que exploren figuras diferentes al cuadrado y al rectángulo, el estudiante decide explorar un trapecio. Hace una construcción de un cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos, traza las mediatrices y usa el arrastre para explorar en qué casos éstas concurren. Se da cuenta que las mediatrices se intersecan en un punto sólo cuando este es isósceles. Ante la insistencia del profesor para que Mario justifique que las mediatrices concurren construye una circunferencia con centro en el punto de concurrencia, menciona que el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia y se refiere al HG2 y HG7 para justificar que el centro está . en las respectivas mediatrices (Figura 16).

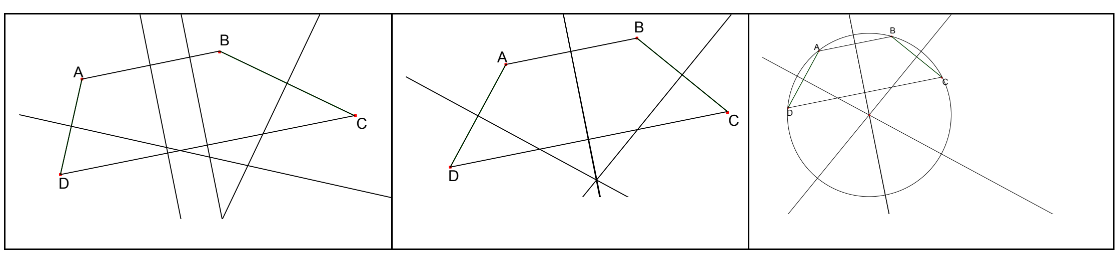


Figura 16.

- *Andrea hace un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.* La socialización del trabajo realizado por Sebastián, Sara y Mario impulsa a Andrea a hacer un cuadrilátero sin una propiedad especial, trazar las mediatrices y arrastrar los vértices hasta que las mediatrices concurran. Una vez lograda la configuración, decide construir la circunferencia circunscrita y usa los hechos geométricos HG2 y HG7 para justificar que todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia cumple la propiedad (Figura 17).

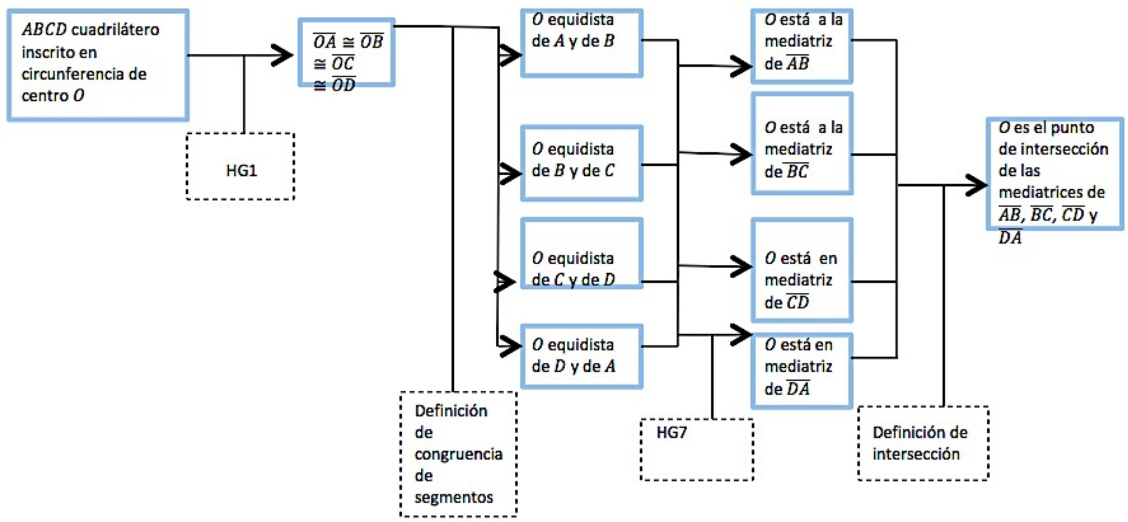


Figura 17.

El profesor guía el trabajo de los estudiantes, promueve la socialización de las propuestas y destaca en ellas el papel que juega la circunferencia circunscrita. Para generalizar los resultados les propone partir de una circunferencia y construir un cuadrilátero inscrito en ella. Con su ayuda, los estudiantes justifican porqué en cualquier cuadrilátero cíclico las mediatrices concurren.

Reflexión final

La investigación sobre la enseñanza apoyada por tecnología ha abarcado el análisis de propuestas para la enseñanza de conceptos geométricos y para impulsar en los estudiantes el desarrollo de procesos de conjeturación y justificación. En todos los casos, los investigadores señalan que la selección de tareas es uno de los aspectos más críticos para sacar provecho del potencial de las tecnologías. Laborde (2001) distingue cuatro clases de tareas propuestas por los profesores que usan ambientes de geometría dinámica: (i) Tareas en las cuales el programa favorece la elaboración de las representaciones, pero en esencia no altera lo que los estudiantes podrían hacer con lápiz y papel; por ejemplo, producir figuras y medir sus elementos. (ii) Tareas en las cuales el programa de geometría dinámica favorece la exploración y el análisis; por ejemplo, identificar relaciones entre las partes de una figura geométrica a través del arrastre. (iii) Tareas que tienen su contraparte en papel y lápiz que pueden ser resueltas de manera diferente en cada ambiente; por ejemplo, una tarea de construcción puede ser resuelta en un programa de geometría dinámica mediante una transformación. (iv) Tareas que sólo pueden ser resueltas en un ambiente de geometría dinámica; por ejemplo, reconstruir una figura dada, después de haber analizado su comportamiento dinámico para identificar propiedades. En los dos primeros casos, la mediación del programa facilita la realización de tareas usuales. En los últimos casos las tareas cambian debido a la mediación, en relación con las usuales, y se asemejan más a una investigación o una modelación, modificando la naturaleza del conocimiento matemático que se alcanza en la clase.

En esta conferencia hemos propuesto otro tipo de intervención en el aula: diseña un conjunto de problemas articulados de tal forma que algunas de las propiedades que se descubren a partir de la exploración dinámica se utilicen como herramientas de construcción, verificación y control para descubrir, verificar y justificar propiedades que se descubren en la resolución de otros problemas. Consideramos que es una vía para introducir tempranamente a los estudiantes en la actividad matemática de justificar sujeto a un sistema teórico que se va construyendo colectivamente a partir de los hechos geométricos que la comunidad de la clase va aceptando. Ello es posible gracias a la mediación del profesor quien impulsa a los estudiantes a ir más allá de la impresión perceptual y la verificación empírica, cuando los estudiantes tienen los hechos geométricos que les sirven de garantía para justificar las afirmaciones que concluyen.

Referencias bibliográficas

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interaction with robust and soft Cabri constructions. *Proceedings of the 24th PME International Conference,* 1, 103 – 117.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry task with Cabri-geometry. *International Journal of computers for mathematical learning,* 6, 283 – 317.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L.; Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon. Revista de Educación Matemática,* 29(3), n°82, 41-56.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L.; Molina, Ó. (en prensa). *Geometría Plana*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.