

# Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas

Jorge Enrique Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.  
jfiallo@uis.edu.co

## Resumen

Presentamos un síntesis de las principales investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, con el ánimo de aportar fuentes de consulta a la comunidad de educadores en matemáticas interesados en el tema. Planteamos una estructura organizativa que incluye las siguientes líneas de investigación: consideraciones histórico–epistemológicas; la demostración en el currículo; concepciones y dificultades de los estudiantes al demostrar; relaciones entre argumentación y demostración; y propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración.

## Introducción

Los estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han desarrollado desde perspectivas diferentes, que incluyen aspectos históricos, epistemológicos, psicológicos, cognitivos, curriculares y didácticos, lo que da lugar a diferentes clasificaciones o estructuras organizativas para la presentación de las principales corrientes investigativas en el campo. En la conferencia presentamos una síntesis de importantes publicaciones que dan cuenta de investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática. La estructura presentada está organizada en cinco líneas de trabajo, derivadas de las caracterizaciones realizadas por Mariotti (2006), Harel y Sowder (2007) y Boero (2007).

También se tienen en cuenta las investigaciones que reconocen que las matemáticas son una producción social realizada por los matemáticos profesionales que se ponen de acuerdo sobre ciertas normas. Además, investigadores en educación matemática llevan estas ideas al mundo de la enseñanza y proponen considerar los grupos de estudiantes de un aula como una comunidad que puede adoptar sus propios acuerdos para construir su concepción de demostración matemática. Un ejemplo de ello lo tenemos en Camargo (2010). Desde este punto de vista, con el que coincidimos, la actividad de producir una demostración es una práctica social cuyas características dependen del ámbito institucional en donde se lleva a cabo.

## Investigaciones en la línea histórico - epistemológica

La línea de investigación se sustenta con planteamientos como los de Balacheff (2008) quien propone que las diferentes concepciones sobre la demostración matemática deben ser explicadas y relacionadas para lograr una comprensión global acerca de la naturaleza de la demostración, una coherencia en el discurso acerca de ésta y significados compartidos entre investigadores en educación matemática. Como un aporte a la distinción acerca del estatus otorgado a la demostración por diversos investigadores, Balacheff (2008) distingue cinco posiciones diferentes:

- *La demostración matemática es un tipo universal y paradigmático de validación del conocimiento.* En ese sentido, la demostración matemática debido a sus relaciones privilegiadas con la lógica, podría ser vista como una referencia para procesos de validación en otros ámbitos y como el mejor ejemplo de racionalidad. Esto parece haber sido sistematizado de manera bastante radical por los educadores matemáticos estadounidenses de la primera parte del siglo pasado, dando lugar a un formato de representación a dos columnas, a favor un enfoque analítico, que facilita la evaluación de la demostración por el estudiante y el profesor (Balacheff, 2008).
- *La demostración matemática tiene una naturaleza idiosincrásica y particular, ligada al contenido matemático.* El esquema de demostración de una persona es algo completamente subjetivo, que puede variar de una persona a otra, de una cultura a otra y de una generación a otra. Así, los esquemas de demostración son idiosincrásicos y varían de un campo a otro, incluso dentro de las matemáticas. (Harel y Sowder, 1998). Esta visión de la demostración ha sido utilizada y/o adaptada por algunos investigadores para proponer modelos para el estudio de la demostración en la educación matemática (Antonini y Mariotti, 2008; Fiallo, 2006, 2010; Ibañez y Ortega 2003, 2004; Marrades y Gutiérrez, 2000; Stacey y Vincent, 2008; Stylianides, 2011).
- *La demostración es una práctica matemática por excelencia ubicada en el corazón de ésta.* La demostración es connatural al pensamiento matemático y el razonamiento deductivo, que sustenta el proceso de validar, diferencia las matemáticas de las ciencias empíricas. El proceso de construcción de una demostración es claramente complejo y riguroso: se trata de partir de lo que se sabe, las propiedades matemáticas que ya se conocen o se pueden asumir, identificar lo que se va a deducir y organizar un conjunto de transformaciones necesarias para inferir lo segundo a partir del conjunto inicial de propiedades, usando esquemas de

razonamiento lógico. (Healey y Hoyles, 1998). Esta visión ha sido compartida y complementada por investigadores ingleses (Hoyles y Küchemann, 2002; Küchemann y Hoyles, 2001; Tall, 1998).

- *La demostración es una herramienta necesaria para las matemáticas, cuya utilidad se percibe en sus aplicaciones.* La demostración adquiere significado en el juego dialéctico entre formular una demostración y comunicar su significado (Hanna y Jahnke, 1996). Esta dialéctica debería explotarse en la enseñanza combinando procesos sociales de verificación con la elaboración de demostraciones en el marco de sistemas teóricos. En ese sentido, la contribución más importante de la demostración a la educación matemática es la comunicación de la comprensión matemática. Un currículo de matemáticas que tiene como objetivo reflejar el verdadero papel de la demostración rigurosa de las matemáticas debe presentarla como una herramienta indispensable de las matemáticas y no en la esencia misma de la ciencia (Hanna y Jahnke, 1996).
- *La demostración es un campo autónomo específico de las matemáticas.* Un teorema<sup>3</sup> sólo es aceptable porque es sistematizado en una teoría, con una total autonomía de cualquier verificación o argumentación a nivel empírico (Mariotti, 1997). Esta posición se basa claramente en el reconocimiento de una característica específica de las matemáticas: la organización teórica de acuerdo a axiomas, definiciones y teoremas (Balacheff, 2008).

Por su parte, de Villiers (1993) propone como funciones de la demostración la verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. El análisis se efectúa con base en consideraciones epistemológicas y en el testimonio personal de matemáticos activos. Plantea que la convicción de un hecho no se consigue exclusivamente con una demostración, ni la única función de la demostración es la de verificación/convicción; esta función no tiene sentido para los estudiantes en los casos evidentes o fácilmente verificables, mientras que la función de explicación es más significativa. Según el autor, en el ámbito educativo debe ponerse más atención a las funciones de descubrimiento y comunicación. La función de sistematización debe dejarse para niveles más avanzados y debería ser omitida en un curso introductorio de la demostración.

## Investigaciones en la línea de la demostración en el currículo

En esta sección nos referimos a investigaciones que tienen como meta proporcionar una descripción del estatus de la demostración en la escuela y su relación con el currículo. Algunos

---

<sup>3</sup> “Unidad compuesta de un enunciado matemático, una demostración y una teoría matemática, donde la forma condicional del enunciado desempeña un papel principal” (Mariotti y otros, 1997).

interrogantes que motivan los estudios investigativos son: ¿cuál es el estatus de la demostración en la escuela? (Mariotti, 2006), ¿qué influencia tienen las concepciones epistemológicas acerca de la demostración en las diversas opciones curriculares? ¿qué relación guardan el aprendizaje de la demostración en la escuela y las concepciones de los estudiantes acerca de la demostración con supuestos históricos y epistemológicos subyacentes en el currículo? (Boero, 2007). A continuación sintetizamos algunos de los principales estudios representativos de esta línea.

Battista y Clements (1995) proponen que el currículo de secundaria debe estimular a los estudiantes a refinar su pensamiento gradualmente, conduciéndolos a comprender los defectos de las justificaciones visuales y empíricas para que descubran y comiencen a usar componentes críticos del pensamiento formal. Al respecto Godino y Recio (2001) plantean que la enseñanza de las matemáticas debe procurar que los estudiantes controlen y dominen las diversas prácticas argumentativas, así como ser conscientes de las relaciones dialécticas entre las mismas.

Healy y Hoyles (1998, 2001) presentan los resultados de un proyecto nacional sobre las concepciones de demostración que tienen estudiantes entre 14 y 15 años, en Inglaterra y Gales. A partir de un cuestionario aplicado masivamente, que incluía preguntas de álgebra y geometría, examinan la relación entre el currículo nacional, las concepciones que manifiestan los estudiantes, así como su desempeño. Las respuestas del cuestionario sirvieron a Küchemann y Hoyles (2001) para sacar conclusiones sobre la influencia del tema (álgebra o geometría), el género y el conocimiento matemático general en las concepciones acerca de la demostración y en el desempeño al demostrar. Los autores señalan que las respuestas a los ítems cuyos temas eran más familiares a los estudiantes estaban sujetas a la influencia de los libros de texto más que al conocimiento matemático general, mientras que las respuestas a los ítems menos familiares (geometría), estaban más sujetas a la variación entre clases; en un estudio complementario al anterior, los autores caracterizan las diferentes respuestas de dos estudiantes con diferentes visiones de demostración y de matemáticas. En un estudio local, usando la idea de evaluación propuesta en Küchemann y Hoyles (2001), Fiallo y Gutiérrez (2007) presentan los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a 100 estudiantes de 10° grado de bachillerato (14 – 16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), mediante el análisis de los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes al inicio del curso. Con un objetivo similar, Szendrei-Radnai y Török (2007) suministran información sobre la existencia de situaciones alternativas y la influencia de “agentes” externos a la configuración escolar húngara usual (contextos matemáticos y cotidianos) que contribuyen a proporcionar buenas oportunidades para que los estudiantes puedan hacer frente a una demostración de una manera coherente y proporcionan una imagen parcial y relativa de las concepciones de los estudiantes en Hungría acerca de la demostración al entrar en la Universidad, como efecto del acercamiento escolar.

Ibañes y Ortega (2004) realizan un análisis curricular del tratamiento de las demostraciones trigonométricas revisando los libros de texto españoles de primer curso de bachillerato. Usan como categorías de análisis de contenido matemático las definidas para ese fin en Ibañes y Ortega (2003). Por esta razón, estudian los esquemas de demostración, las técnicas empleadas en las demostraciones -método, estilo y modo-, las funciones de la demostración, la explicitación de procesos, las expresiones que se utilizan y si en los textos se hacen consideraciones globales del proceso seguido en la demostración. En un trabajo similar, Stacey y Vincent (2008) usan la definición de demostración y los esquemas de demostración de Harel y Sowder (2007) para analizar los modos de razonamiento explícito en las explicaciones, justificaciones y demostraciones de varios tópicos en cuatro libros de texto australianos. Concluyen que todos los libros de texto hacen algún intento de explicar cada proposición. Ningún libro de texto presenta “reglas sin razón”. Sin embargo, parece ser que el único objetivo al deducir una regla es ponerla en práctica en ejercicios, en lugar de utilizar las explicaciones como una herramienta de pensamiento. Las explicaciones son muy cortas y sólo presentan aspectos esenciales del razonamiento formal, por lo que los estudiantes deben acudir a los profesores para comprenderlas, aunque el material proporcionado requiere de profundización en el conocimiento matemático y pedagógico del contenido por parte de los profesores. Algunos de los recursos electrónicos que se agregan, incluyendo demostraciones geométricas dinámicas y plantillas para la construcción, son para llenar algunas lagunas en las explicaciones.

## Investigaciones en la línea de concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar

En este grupo ubicamos investigaciones que buscan obtener una mejor idea sobre los procesos relacionados con el aprendizaje de la “demostración” y aportan respuestas a interrogantes como ¿cuáles son las actuales concepciones de la demostración de los estudiantes? (Harel y Sowder, 2007) ¿cuáles son las principales dificultades que encaran los estudiantes en relación a la demostración? y ¿cuál puede ser el origen de tales dificultades? (Mariotti, 2006; Harel y Sowder, 2007). A continuación presentamos trabajos de investigación representativos de esta línea.

Balacheff (1988b) presenta un estudio experimental acerca de las concepciones de demostración de los estudiantes, desde el punto de vista de las prácticas matemáticas. Plantea la siguiente clasificación para las concepciones: *empirismo ingenuo*, *experimento crucial*, *ejemplo genérico* y *experimento mental*. Las tres primeras corresponden a demostraciones empíricas y la última a demostraciones deductivas informales. La diferencia entre las demostraciones empíricas es la forma como los estudiantes seleccionan los ejemplos: En el empirismo ingenuo, el estudiante busca, muchas veces de manera aleatoria, uno o varios ejemplos, que son percibidos como casos aislados. En el experimento crucial, la demostración se basa en la concepción de que todos los

ejemplos se comportarán de la misma manera, por lo que el estudiante elige ejemplos de manera cuidadosa para que no sean “especiales” y verifica en ellos la conjetura cuya veracidad quiere demostrar. En el ejemplo genérico, el estudiante hace una búsqueda cuidadosa de ejemplos, que son representantes de sus clases y portadores de propiedades abstractas. La principal característica del experimento mental es que los ejemplos ya no forman parte de la demostración, sino que son un complemento que ayuda al estudiante a encontrar propiedades y relaciones deductivas para construir la demostración.

Ibañes y Ortega (2003) presentan un estudio sobre el reconocimiento de diferentes procesos matemáticos por parte de estudiantes de primer curso de bachillerato, entre los cuales está la demostración. En su estudio muestran que los estudiantes van evolucionando en el reconocimiento, distinción e identificación de las demostraciones matemáticas, basados en razones externas al proceso y en las funciones que le asignan al mismo, logrando una caracterización cada vez mejor del mismo. Cuando ellos se fijan en las funciones de la demostración, la de explicación es la que más consideran. Los estudiantes que no han recibido una instrucción específica sobre la aplicabilidad de los teoremas no son conscientes de esta posibilidad e incluso creen que se pueden encontrar ejemplos que no satisfagan un teorema ya demostrado. Antonini y Mariotti (2008), a partir de la noción de teorema de Mariotti y otros (1997), proponen un modelo para ser usado en la observación, el análisis y la interpretación de asuntos didácticos y cognitivos relacionados con las argumentaciones y demostraciones indirectas. Plantean que el uso de las expresiones “demostración indirecta”, “demostración por contradicción”, “demostración por contraposición”, “demostración ad absurdum”, en los libros de texto, no es claro y uniforme, y puede ser objeto de polémica, incluso entre los matemáticos. Los autores señalan la dificultad de algunos estudiantes para convencerse de la veracidad de alguna conjetura a partir de una demostración por contradicción, debido a la complejidad de la argumentación que soporta la demostración y su lejanía con posibles procesos previos de generación de la conjetura. Dichos autores detectan también que, para muchos estudiantes, las demostraciones por contradicción no cumplen las funciones asignadas a este proceso.

Por otro lado, Harel y Sowder (1998) consideran que las dificultades para aprender a demostrar obedecen a la variedad de formas como los estudiantes se convencen a sí mismos o persuaden a otros de la certeza de una observación. Proponen la noción de “*esquema de demostración*” como una herramienta para analizar las formas de convicción o persuasión y clasifican las demostraciones de los estudiantes en los siguientes esquemas, cada uno con sus respectivas sub-categorías: por convicción externa, empíricos o analíticos. Dichos esquemas son mutuamente exclusivos, pues un argumento de demostración no puede ser de dos tipos a la vez, pero es frecuente que los estudiantes utilicen más de una clase de esquema en diferentes partes de una demostración. Estos autores argumentan que las actividades de aprendizaje que educan el razonamiento de los estudiantes acerca de la demostración son cruciales en el desarrollo

matemático, aún desde los primeros años. Los estudiantes deberían aprender que las demostraciones son, primero que todo, argumentos convincentes, que son un producto de la actividad humana, en la cual ellos pueden y deben participar y que son parte esencial de la actividad matemática. La meta de la enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a refinar sus propios esquemas de lo que constituye una justificación en matemáticas: desde esquemas dominados por la percepción, la manipulación simbólica y los rituales, hasta esquemas basados en la necesidad lógica, pasando por esquemas basados en la intuición y la convicción personal.

Arzarello y otros (1998) bosquejan un modelo para interpretar las dificultades en los procesos de exploración de situaciones geométricas, cuando se están formulando conjeturas (fase ascendente de la actividad) y produciendo sus demostraciones (fases descendente de la actividad). El modelo está basado en los diferentes tipos de control del sujeto con respecto a la situación, y el paso de una fase a la otra. Estos autores analizan la solución a un problema de demostración poniendo especial atención al momento en que se pasa de la fase ascendente, caracterizada por una actividad empírica que apunta a entender mejor el problema, generar una conjetura o verificarla, hacia una fase descendente, donde se intenta construir una demostración deductiva de la conjetura.

Healy y Hoyles (2000) examinan las concepciones de los estudiantes de la demostración en álgebra, encontrando que los estudiantes sostienen simultáneamente dos concepciones diferentes de demostración. De un lado, prefieren argumentos que pueden evaluar, que les convencen, que le proveen una explicación significativa y que excluyen el álgebra. De otro lado, predomina el argumento empírico en las propias construcciones de demostraciones, aunque la mayoría de estudiantes se da cuenta de sus limitaciones. Otro resultado de este proyecto es reportado en Hoyles y Küchemann (2002), quienes analizan las respuestas a una pregunta escrita sobre la equivalencia de dos enunciados de teoría elemental de números, una implicación lógica y su recíproca, para evaluar la verdad de las afirmaciones y justificar sus conclusiones. Distinguen tres estrategias, empírica, empírica enfocada y deductiva enfocada, que representan cambios en la atención desde un acercamiento inductivo hacia uno deductivo. Estos autores presentan también algunas categorías teóricas para clasificar diferentes tipos de significados que los estudiantes asignan a la implicación lógica y las razones que sustentan estos significados. Las categorías distinguen respuestas donde un enunciado de implicación lógica es (o no) interpretado como equivalente a su recíproca, el antecedente y el consecuente se ven (o no) como intercambiable o las conclusiones son (o no) influenciadas por datos específicos.

Fiallo (2006) analiza los tipos de demostración propuestos por Marrades y Gutiérrez (2000) que emergen durante la aplicación de una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la

demostración en los estudiantes de 10° grado. Con los datos obtenidos en esta investigación, Gutiérrez y Fiallo (2007) presentan algunos ejemplos de los diferentes tipos de demostración producidas por los estudiantes y muestran su progreso durante la unidad de enseñanza.

## Investigaciones en la línea de la relación entre argumentación y demostración

En esta línea de investigación se busca dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿existe continuidad o distancia cognitiva entre la argumentación producida en la construcción de una conjetura y su demostración? ¿de qué tipo de continuidad se trata? ¿cómo comparar la argumentación con la demostración? ¿cómo identificar la fase de producción de una conjetura y la fase de construcción de la demostración? (Pedemonte, 2005).

Desde una perspectiva clásica epistemológica, algunos estudios han planteado, como una de las fuentes de dificultades, la discrepancia entre la argumentación con base en la verificación empírica (típica de un razonamiento común) y el razonamiento deductivo (típico de un razonamiento teórico). Balacheff (1988a) plantea que existe una heterogeneidad de tipo epistemológico entre estos dos procesos, debido a que los conocimientos utilizados son muy diferentes por la diferencia del paso de lo pragmático a lo teórico. Este autor también plantea que el objetivo de la argumentación consiste en obtener la adhesión del interlocutor sin plantear necesariamente el problema de validez del enunciado.

Duval (1989, 1992-1993) muestra la distancia cognitiva que separa la argumentación de la demostración, a pesar de una proximidad discursiva a veces muy grande, y se refiere al problema de reconocer una argumentación, dada la variedad de las formas discursivas que puede tomar y la diversidad de sus niveles de organización. Duval analiza cómo funciona una demostración para plantear una ruptura entre la argumentación y la demostración, afirmando que el razonamiento deductivo es de un carácter diferente al de la argumentación espontáneamente aplicada en discusiones o en debates relativos a conflictos cognitivos. Una argumentación no funciona en primer lugar sobre el estatus de las proposiciones, sino sobre su contenido. La consideración del estatus de las proposiciones no es esencial.

Douek (1998) toma el análisis del funcionamiento de la demostración de Duval como punto de referencia para subrayar la necesidad de considerar otros aspectos del proceso de construcción de una demostración dentro de las matemáticas. Plantea que, a pesar de la innegable distancia epistemológica y cognitiva entre la argumentación y la demostración matemática formal como productos socialmente situados, desde el mismo punto de vista epistemológico y cognitivo, la argumentación y la demostración matemática ordinaria tienen, como procesos, muchos aspectos en común. Al respecto, Boero y otros (1996) proponen que, en un contexto educativo adecuado,



es posible implementar con éxito un proceso de producción de teoremas, caracterizado por un fuerte vínculo cognitivo entre los procesos de argumentación y de demostración. En una investigación basada en un experimento de enseñanza organizado con estudiantes de grado octavo, que tenían que resolver problemas consistentes en elaborar conjeturas y demostrarlas de manera deductiva, observaron que los estudiantes que resolvían los problemas con éxito mantenían una gran coherencia entre el texto del enunciado producido por ellos y la demostración deductiva construida para justificarlo, mientras que los estudiantes que no lograban completar una demostración deductiva correcta mostraban diferencias importantes entre la actividad de elaboración y verificación de la conjetura y los intentos de demostrarla. Ello lleva a estos autores a proponer el constructo “*unidad cognitiva de teoremas*” para destacar la coherencia (o la falta de ella) entre ambas fases de resolución de los problemas de conjetura y demostración.

Pedemonte (2002, 2005, 2007, 2008) usa el constructo *unidad cognitiva de teoremas* para analizar y mostrar las posibles continuidades y rupturas entre la argumentación y la demostración. Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración, desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte utiliza una herramienta basada en el modelo  $cK\phi^4$  (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) integrado en el modelo de Toulmin (1958)<sup>5</sup>. El modelo  $cK\phi$  permite analizar el sistema de referencia y el modelo de Toulmin permite analizar la estructura de la argumentación.

Fiallo (2010) analiza la existencia de la continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas. Propone una estructura de análisis de los tipos de demostración que se presentan en la escuela secundaria, adaptando el modelo de Pedemonte y el constructo de *unidad cognitiva de teoremas* para el análisis de la unidad o distancia cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, según ésta estructura. Plantea cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, las cuales agrupan los diferentes logros o dificultades detectados en los procesos de argumentación y de demostración.

---

<sup>4</sup>  $cK\phi$ : conception, knowing, concept (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 105)

<sup>5</sup> Toulmin (1958) elabora un modelo de representación de argumentos en el que identifica seis características estructurales que se deben analizar y organizar durante el proceso de argumentación: el enunciado (claim), los datos (data), los permisos de inferir (warrant), el indicador de fuerza del argumento (modal qualifiers), las refutaciones potenciales (rebuttals) y el soporte del permiso de inferir (backing).

## Investigaciones en la línea de propuestas didácticas

Los trabajos buscan dar respuestas a numerosas preguntas abiertas relativas a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, tales como: ¿es posible superar las dificultades que encuentran los estudiantes en relación a la demostración? ¿cómo pueden ser diseñadas intervenciones de enseñanza? ¿qué sugerencias generales se pueden dar para la enseñanza de las demostraciones? (Mariotti, 2006), ¿cómo debería enseñarse la demostración? ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en el aula?, ¿cuáles son las fases críticas en el desarrollo de la demostración con el estudiante y dentro del aula como comunidad de aprendizaje? ¿qué entornos de aula son propicios para el desarrollo del concepto de demostración con los estudiantes? ¿qué formas de interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor pueden fomentar la concepción de demostración de los estudiantes? ¿qué actividades matemáticas -posiblemente con el uso de tecnología- pueden mejorar las concepciones de los estudiantes de la demostración? (Harel y Sowder, 2007).

Un aspecto mencionado recurrentemente en los estudios investigativos en esta línea es el tipo de tareas que se proponen a los estudiantes. Bell (1976) es pionero al sugerir que proponer a los estudiantes tareas de investigar situaciones problema puede conducir a diversas conjeturas formuladas por ellos, a la necesidad de resolver conflictos entre puntos de vista diferentes, a la presentación de evidencias y a la construcción de argumentos formales. Esta idea es llevada a la práctica, entre otros, por Lampert (1990), Hoyles (1997) y Martin y otros (2005); el primero de ellos sugiere que los problemas propuestos incluyan la observación de patrones de regularidad pues esto conlleva a la elaboración de argumentos empíricos inductivos y a explicaciones deductivas sobre por qué un patrón puede continuar. Por su parte, Radford (1994) hace una descripción más detallada del tipo de tareas para geometría, proponiendo la reformulación de teoremas relevantes en términos de problemas abiertos que dan lugar a una conjetura correspondiente al enunciado del teorema, seguida de actividades que buscan mostrar que una figura no puede constituirse en una demostración y de otras que procuran la comprensión del funcionamiento de una demostración -las cuales incluyen demostraciones incompletas o cuyos pasos están desordenados con la finalidad de completarlas u organizarlas, respectivamente-. Radford dice que por esa vía los estudiantes pueden ver los teoremas como algo significativo y se motivan a demostrarlos. Evalúa el éxito de su propuesta analizando los progresos individuales en la realización de demostraciones. Harel (1998) introduce un elemento nuevo en la selección de teoremas al proponer que éstos den lugar a demostraciones ‘explicativas’ (Hanna, 1990) pues son las que motivan a los estudiantes a aprender a demostrar. Adicionalmente, Marrades y Gutiérrez (2000) y Jones (2000) llaman la atención sobre la necesidad de organizar secuencias de enseñanza cuidadosas, graduar los problemas según el grado de dificultad y dar suficiente tiempo a los estudiantes para trabajar en los problemas propuestos.

Además de las tareas, otro aspecto al que se presta atención, especialmente con el advenimiento de los programas informáticos de geometría dinámica, es a los recursos que se ponen a disposición de los estudiantes. El trabajo de Groman (1996) es uno de los primeros enfocados en aspectos sociales del aprendizaje de la demostración en donde se emplea como mediador a la geometría dinámica. La investigadora señala que la presencia de la tecnología produce un cambio en la forma de hacer el curso, hacia una práctica de tipo social. A partir de la exploración de figuras geométricas para producir conjeturas y preguntas de la forma “qué pasa si...”, los estudiantes, futuros profesores, pueden construir por sí mismos significados matemáticos en un ambiente social de investigación, donde el profesor es uno más de los participantes en el proceso.

Mariotti (2000) presenta un análisis de la relevancia de varias funciones del programa Cabri al permitir centrar la atención en los procedimientos de construcción y en su validez, más que en el resultado de los mismos. La autora ilustra -mediante episodios extraídos de un experimento de enseñanza realizado con estudiantes de 15-16 años- de qué manera aprovecha la correspondencia existente entre los comandos del menú que ofrece el programa y los axiomas y teoremas, que los estudiantes usan en sus justificaciones, para introducir la idea general de demostración y la necesidad de demostrar siguiendo los principios y reglas de inferencia aceptados por el grupo como parte de una teoría. Según Mariotti, el aprendizaje de la demostración se favorece cuando una solución propuesta por un estudiante se somete a juicio de los demás, con base en las justificaciones que éste da. De manera paulatina se va incrementando la necesidad de recurrir a la demostración como recurso de validación. Marrades y Gutiérrez (2000) señalan que el programa de geometría dinámica permite una exploración empírica de las representaciones de las figuras geométricas, hecho que influye en una evolución positiva hacia la producción de justificaciones cada vez más próximas a demostraciones deductivas. Jones (2000) propone tareas cuya intención es interesar a los estudiantes en el análisis de las propiedades geométricas que permiten establecer relaciones entre las figuras. Concluye que cuando los estudiantes intentan explicar qué características debe tener una figura construida en un programa de geometría dinámica para representar una figura geométrica específica, juegan implícitamente con la idea de inferencia y se preparan para comprender cómo opera una demostración. El programa de geometría dinámica aporta un contexto de significado a la tarea de explicar, al disponer de la función de arrastre de los objetos de la construcción; el uso de esta función motiva a preguntarse por las razones de la resistencia de una figura al arrastre o la permanencia de algunas de las características de las figuras bajo el arrastre. Así, la preparación para la demostración se hace con actividades que llevan a los estudiantes a tener conciencia de la dependencia entre propiedades, a partir del cuestionamiento de una propiedad condicionada a la validez de otra propiedad. Healy y Hoyles (2001) reportan un estudio en el que tienen como hipótesis que las explicaciones dadas por los estudiantes, derivadas de la interacción con un programa de

geometría dinámica, son más fáciles de sistematizar en una demostración deductiva que aquellas producto del trabajo con figuras hechas en papel; esto es debido a que al usar el programa se presta atención explícita a los procesos que se llevan a cabo. Fiallo (2010) usa archivos construidos en Cabri para que los estudiantes puedan explorar y comprender que los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas se cumplen para cualesquier ángulo entre  $0^\circ$  y  $\pm 360^\circ$ . Los archivos, junto con las preguntas propuestas en las guías de los estudiantes se constituyen es una gran ayuda para el aprendizaje de los conceptos y el mejoramiento de las habilidades de demostración. El autor señala que los propios estudiantes, sin demasiada intervención del profesor son los que “descubren” dichos conceptos y propiedades. Esto los motiva a querer saber por qué son verdaderos y el programa de geometría dinámica les proporciona herramientas necesarias para que exploren los objetos geométricos y las relaciones numéricas y encuentren dichas respuestas.

Un grupo de investigadores italianos han realizado diversos experimentos de enseñanza con el fin de analizar la problemática del aprendizaje de la demostración en clases ordinarias. Varias de esas investigaciones están resumidas en Boero (2007). Entre ellos, Bartolini Bussi y otros (2007a) presentan el trabajo de investigación referente al acercamiento a los teoremas de geometría en la escuela, proporcionando una estructura teórica unificada de los estudios de investigación que usan en investigaciones posteriores. Bartolini Bussi y otros (2007b) reportan un problema de construcción de la geometría del círculo en tercer grado de primaria, analizando los procesos que han tenido lugar en las aulas como consecuencia de la asignación de esta tarea, abordando algunos aspectos pertinentes, como la delicada relación entre las prácticas concretas y el pensamiento teórico, y analizando cómo fue intencionalmente provocado el cambio del uno al otro durante la interacción en las clases. Boero, Garuti y Lemut (2007) analizan los procesos mentales subyacentes a la producción y demostración de conjeturas en matemáticas, dando algunas pistas sobre situaciones problemáticas adecuadas para la enseñanza de la demostración y sobre la mejor forma de manejar el trabajo en clase para una amplia participación de los estudiantes en la construcción de conjeturas y demostraciones. Parenti y otros (2007) presentan las condiciones peculiares que habilitan la clase para llegar a buenos niveles de participación en discursos teóricos y estudian algunos procesos mentales que están involucrados en estas actividades. Confirman el importante papel que desempeña el profesor en el acercamiento a aspectos teóricos de las matemáticas: en el aula como un mediador cultural, que plantea y coordina discusiones; en el grupo de investigación, como un miembro que hace parte de la planificación de las actividades y en el análisis de los procesos mentales de los estudiantes.

## Referencias

Antonini, S., Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving? *ZDM the International Journal on Mathematics Education*, 40, 401-412.

- Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22th PME International Conference*, 2, 24-31.
- Balacheff, N. (1988a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral). Grenoble (Francia). [Traducción al español: Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: una empresa docente].
- Balacheff, N. (1988b). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). Londres: Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble (Francia): Université Joseph Fourier.
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education*, 40, 501-512.
- Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cKç modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage.
- Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R., Mariotti, M. A. (2007a). Approaching and developing the culture of geometry theorems in school: A theoretical framework. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 211-217). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.
- Bartolini Bussi, M., Boni, N., Ferri, F. (2007b). Construction problems in primary school: A case from the geometry of circle. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 219-247). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.
- Battista, M. T., Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *The Mathematics Teacher*, 88 (1), 48-54.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanation in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.
- Boero, P. (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 2, 113-120.
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249-264). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.
- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria* (tesis doctoral). Valencia (España): Universidad de Valencia.
- de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon* 26, 15-29.
- Douek, N. (1998). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. *Proceeding of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME1)*, 125-139.
- Duval, R. (1989). Langage et représentation dans l'apprentissage d'une démarche déductive. *Proceedings of the 13th PME International Conference*, 1, 228-235.
- Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37-61.
- Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de la demostración*. (memoria de investigación). Valencia (España): Universidad de Valencia.

- Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (tesis doctoral). Valencia (España): Universidad de Valencia.
- Fiallo, J., Gutiérrez, Á. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del grado 10° en Santander (Colombia). En M. Camacho, P. Flores, P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación*
- Godino, J., Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.
- Groman, M. (1996). Integrating Geometer's Sketchpad into geometry course for secondary education mathematics major. *Proceedings of ASCUE*, North Myrtle Beach, EE.UU, 9-13.
- Gutiérrez, Á., Fiallo, J. (2007). Analysis of conjectures and proofs produced when learning trigonometry. *Proceeding of the 5th Conference of European Society for Research in Mathematics Education*, 622-632.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G., Jahnke, N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop y otros (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.
- Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.
- Harel, G., Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842): Reston, VA, EE.UU.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Healy, L., Hoyles, C. (1998). Student's performance in proving: competence or curriculum? *Proceedings of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME1)*, 153-167.
- Healy, L., Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Healy, L., Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 235-256.
- Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 7-16.
- Hoyles, C., Küchemann, D. (2002). Student's understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 193-223.
- Ibañez, M., Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), 49-63.
- Ibañez, M., Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato. *Números*, 57, 19-32.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55-85.
- Küchemann, D., Hoyles, C. (2001) Investigating factors that influence students' mathematical reasoning. *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 3, 257-264.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27 (1), 29-63.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En Á. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.
- Mariotti, M. A., Bartolini, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. (1997) Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME International Conference*, 1, 180-195.

- Marrades, R., Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
- Martin, T. S., Soucy McCrone, S. M., Wallace, M. L., Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 95-124.
- Parenti, L., Barberis, M., Pastorino, M., Viglienzona, P. (2007). From dynamic exploration to "theory" and "theorems" (from 6th to 8th grades). En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 265-284). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.
- Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans le apprentissage des mathématiques* (tesis doctoral). Université Joseph Fourier-Grenoble I, Grenoble, Francia. Disponible en <<http://math.unipa.it/~grim/ThFR-Pedemonte.pdf>>.
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(3), 313-348.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education*, 40, 385-400.
- Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática*, 6(3), 21-36.
- Stacey, K., Vincent, J. (2008). Modes of reasoning in explanations in year 8 textbooks. *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 475-481.
- Stylianides, A. J. (2011). Toward a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, 32 (1), 10 páginas.
- Szendrei-Radnai, J., Török, J. (2007). The tradition and role of proof in mathematics education in Hungary. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 117-134). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.
- Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: is mathematical proof for all or for some. Paper presented at the *UCSMP Conference*. Chicago University, Chicago, EE.UU.
- Toulmin, S. E. (1958). *The use of argument*. Cambridge, Gran Bretaña: Cambridge University Press.