RELACIÓN TRIANGULAR EN EL PLANO

Sasha Rueda Cárdenas
Cód.: 2010140061
C.C.:1016055290

Trabajo de Grado
Presentado ante la Universidad Pedagógica Nacional
Como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Asesor: Gil Alberto Donado Núñez
Magister en Docencia de las Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
10 JUNIO DE 2014

RELACIÓN TRIANGULAR EN EL PLANO

Trabajo de Grado Asociado al

Interés Profesional del Estudiante

Sasha Rueda Cárdenas

Cód.: 2010140061

C.C.:1016055290

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

10 JUNIO DE 2014

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Relación Triangular en el Plano
Autor(es)	Sasha Rueda Cárdenas
Director	Gil Alberto Donado Núñez
Publicación	Bogotá, DC. 2014
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Relación Triangular Circuncéntrica, triángulo, circuncentro, incentro, circunferencia, semejanza de triángulos, simetría axial, homotecia, rotación, traslación

2. Descripción

El trabajo de grado presentado a continuación es el resultado de la exploración del concepto *Relación Triangular Circuncéntrica*. Está dividido en cinco capítulos, en los cuales se presentan los preliminares del trabajo y los resultados de la exploración de la definición Relación Triangular Circuncéntrica, tal relación es una variante de la definición de *Relación Interdiagonal* presentada por Caicedo Yurani & Contreras Diego, como monografía para optar el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2009.

El software utilizado para la exploración de la *Relación Triangular Circuncéntrica* y posterior conjeturación sobre algunas propiedades es GeoGebra, estas propiedades son el objeto de estudio en este trabajo de grado.

3. Fuentes

Artigue, M. (2004). Problemas y Desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la Didáctica de la Matemática para Afrontarlos? Recuperado el 2 abril de 2014, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516302

Barnet, R., Uribe, J. (1994). Algebra y Geometría 2. Segunda edición adaptada.

Caicedo, Y., & Contreras, D. (2009). Relacion Interdiagonal en el Plano. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Clemens, R. (1998). Geometría. México: Pearson Educación. Serie AWLL.

Fundación Polar. (s.f.). Cienciateca. Recuperado el 24 de Octubre de 2013, de Matemática Maravillosa: http://www.cienciateca.com/simetria.html

Gómez, M. (2001). Simetrías y ordenamientos en el plano. Bogotá.

Grossman, S. (1992). Álgebra Lineal con aplicaciones, cuarta edición. México: McGRAW-HILL.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). Álgebra Lienal, octava edición. México: PEARSON EDUCACIÓN.

Lehemann, C. H. (2011). Geometría Analítica. México: Limusa.

Moise, E. (1964). Elementary geometry from an advanced standpoint. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Moise, E., & Downs, F. (1986). Geometría Moderna. U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana , S.A.

Samper, C., Molina, O., & Echeverry, A. (2011). Elementos de geometría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Swokowski, E. W. (1988). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, segunda edicion . México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.

4. Contenidos
El presente trabajo de grado está asociado al interés profesional, en el que se presentan cinco capítulos con los resultados obtenidos de la exploración de la definición *Relación Triangular Circuncéntrica*. *Capítulo 1: Preliminares* En este capítulo se presenta la justificación, los objetivos y los antecedentes del trabajo de grado, estos están presentados en subcapítulos. En los antecedentes se muestra partes de la monografía *“Estudio de una relación en el plano: relación interdiagonal”*, así mismo los cambios en la definición “*Relación Interdiagonal”* para definir la *Relación Triangular Circuncéntrica*. *Capítulo 2: Marco de referencia conceptual* En este capítulo se presentan las principales definiciones, postulados y teoremas que son utilizados en las demostraciones de las propiedades emergentes de la exploración, las cuales en su mayoría son tomadas del Moise & Down (1986). Así mismo se hace una presentación del software educativo GeoGebra. *Capítulo 3: Relación Triangular Circuncéntrica* En este capítulo se presentan las conjeturas halladas, junto con su demostración. Primero se presenta la Definición de la *Relación Triangular Circuncéntrica* (RTC), en donde se hace una presentación formal de la definición estudiada. Después se determinan y caracterizan los puntos que están en RTC con un punto P del plano, se presenta la determinación de los puntos mediante una construcción. Con ello se muestran los tres primeros teoremas, los cuales caracterizan los puntos hallados mediante la construcción presentada. Una vez caracterizados los puntos en RTC, se presentan los teoremas que involucran semejanza entre el triángulo inicial y el hallado mediante los puntos en RTC con el punto del plano escogido. Por último, los teoremas que involucran colinealidad, los cuales surgen de relacionar colinealmente dos puntos del plano y el punto base. *Capítulo 4: ¿Qué ocurre si el punto base es un punto diferente al circuncentro?* En este capítulo se reemplaza el punto base de la definición *Relación Triangular Circuncéntrica* por el incentro del triángulo inicial, este cambio genera la definición *Relación triangular Incéntrica* en donde se prueban algunos de los teoremas mostrados en el capítulo 3. En seguida se hace el cambio del punto base a un punto que no tiene relación directa con el triángulo, es decir un punto no notable de triángulo, donde la información obtenida se muestra en un cuadro comparativo entre la *Relación Triangular Circuncéntrica* (RTC) y *Relación Triangular Incéntrica* (RTI) con la *Relación Triangular* (RT). *Capítulo 5: la RT vista como una función* En este capítulo se continúa el estudio de la RT como una función que asigna a cada punto P del plano un punto P' que está en RT con él, obteniendo la condición necesaria para que haya una simetría axial, así mismo descartando las transformaciones que no se dan. Finalmente se presentan las conclusiones, bibliografía y anexos, en este último están los acuerdos de

notación y la demostración de uno de los teoremas que es utilizado en repetidas ocasiones para la demostración de algunas propiedades emergentes de la definición de la RTC.

5. Metodología

Inicialmente se presenta una introducción al antecedente principal de la *Relación Triangular Circuncéntrica*, el cual es la *Relación Interdiagonal*, ya que a partir de esta monografía surge el interés por hacer un estudio en torno la modificación de la definición de *Relación Interdiagonal.*

Posteriormente se hace una exploración de la definición RTC mediante el software GeoGebra, en cuanto se halló una propiedad de la relación se hizo su exploración con el software y posteriormente se demostró, obteniendo como resultado ocho teoremas.

6. Conclusiones

A pesar de que desde el inicio del trabajo se pensó que al estudiar la RTC se encontrarían diferentes propiedades a las encontradas cuando se modifica el punto base, se presenta una generalidad que de acuerdo con el estudio realizado, se puede concluir que la RTC es un caso particular de la relación denominada como RT, ya que al cumplirse la definición de RT para cualquier punto base del plano, la RTC pasa a ser una particularización del punto base, escogiendo a este como el circuncentro del triángulo, lo mismo ocurre para la RTI, este un caso particular de la RT ya que se toma el incentro del triángulo base. Por ello, la definición que permite generalizar el estudio hecho es el de la relación llamada RT.

Se determinó que hay únicamente tres puntos diferentes en RT con un punto P del plano, en un caso particular si la recta que contiene el punto P y el punto base de la definición es perpendicular a alguna de las rectas del triángulo, uno de los puntos en RT con P coincide con P. Además se demostró que solo un punto en RT puede coincidir con el punto P del plano.

Una vez determinados los tres únicos puntos en RT con un punto P del plano, fue posible determinar un triángulo y realizar un estudio entre la relación del triángulo base y el triángulo determinado por los P', obteniendo una semejanza entre ellos y en consecuencia un factor de semejanza dado por el cociente entre el radio de la circunferencia que inscribe el triángulo base, y el radio de la circunferencia que inscribe el triángulo determinado por los puntos en RT.

Otra relación encontrada entre los puntos que están en RT con puntos P y Q, siendo estos puntos diferentes en plano, se asocia a la interestancia, si los puntos P, Q y el punto base R son colineales, sus puntos relacionados también lo son, además los puntos en RT guardan la misma relación de interestancia, es decir si la relación está dada por $Q - P - R$ entonces se obtiene $Q' - P' - R$.

La RT como una función, esta vista desde el plano cartesiano y es es una transformación que al asignar a cada punto P del plano un único P' que está en RT con él, no corresponde a una homotecia, una rotación, ni a una simetría respecto al eje x, aun aso esta transformación corresponde a una simetría respecto al eje y cuando la pendiente de la recta que contiene a un lado del triángulo y sobre la cual se hace la

transformación es 0, además también se presenta una simetría respecto a la recta $y = x$ cuando la pendiente de esa recta es -1. La RT corresponde a una traslación cuando los valores de u y v cumplen $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2}a - \frac{2m}{1+m^2}b - a$ y $-\frac{2m}{1+m^2}a + \frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2}b - b$ simultánea y respectivamente. Así que la RT es una transformación en el plano que diferente a las usuales.

Elaborado por:	Sasha Rueda Càrdenas
Revisado por:	Gil Alberto Donado Núñez

Fecha de elaboración del Resumen:	10	06	2014

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios, quien me permitió mantenerme con fuerza y sobrepasar toda dificultad a lo largo no solo de mi carrera, sino de toda mi vida. Así mismo por encaminarme por esta hermosa labor de la docencia, la cual pone en sus y mis manos la formación de muchas personas. Gracias.

Agradezco a mi mamá quien con toda su sabiduría, fortaleza y paciencia ha logrado mantenerme enfocada en lo que es importante, la formación como persona y la formación como una excelente profesional. Así mismo por ser la amiga incondicional que ha dado el mejor concejo para seguir adelante de la forma correcta.

A mi familia y amigos que hicieron parte de este proceso brindándome todo su apoyo y no dejándome desfallecer, gracias por su amistad y acompañamiento en este lindo camino.

A mis profesores y directivos cercanos de la Universidad Pedagógica Nacional, en especial del Departamento de Matemáticas, que con sus enseñanzas de vida y matemáticas me permitieron poder decir que he culminado el primer logro académico importante en mi vida.

Finalmente a mi asesor y amigo Alberto Donado, quien orientó, apoyó y aportó todo su conocimiento de la mejor manera para lograr sacar este trabajo de grado adelante.

Gracias a todos.

Sasha Rueda Cárdenas

Dedicatoria

Dedico este gran logro a mi excelente mamá Soraya, a mi amado novio Jeisson, a mis adorados hermanos Igor y Alejandro, a mi hermosa abuela María, a quienes amo profundamente, ya que con sus valiosas palabras, enorme esfuerzo y gran apoyo, sin dejar atrás todo el amor que me han brindado, me han dado una especial formación en valores y principios, además me han permitido sobrepasar todos los obstáculos que se han presentado en diferentes situaciones, siempre llenándome de mucha fortaleza.

A mis chicas y excelentes amigos con quienes tenemos un gran y hermoso futuro por delante, los quiero mucho y valoro todo el apoyo que me han dado.

Sasha Rueda Cárdenas

Índice general

Listado de imágenes

Introducción

Se presenta a continuación un trabajo de grado en el marco de la geometría plana, en el cual mediante algunas modificaciones de la definición *Relación Interdiagonal* propuesta por Caicedo, Y & Contreras, D (2009) en la monografía elaborada para optar el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, surge la definición de *Relación Triangular Circuncéntrica*, la cual es estudiada obteniendo conjeturas mediante el uso del software GeoGebra, posteriormente demostrándolas con las herramientas de la geometría plana euclidiana y analítica.

El trabajo de grado está dividido en cinco capítulos. El primer capítulo se denominó preliminares; en él se presenta el motivo por el cual se desarrolló este documento en el apartado de justificación, así mismo los objetivos planteados en el estudio de la *Relación Triangular Circuncéntrica* y los antecedentes de este estudio, mostrando un resumen de la monografía *Estudio de una relación en el plano: relación interdiagonal"* (Caicedo & Contreras, 2009), con el objetivo de que el lector logre tener un contexto general del origen de la definición estudiada en este trabajo.

En el segundo capítulo se presentan las principales definiciones, postulados y teoremas que son utilizados en las demostraciones de los teoremas resultantes de la exploración mediante el software educativo GeoGebra. Así mismo se presentan algunos aspectos del programa GeoGebra que fueron relevantes para la exploración de la definición *Relación Triangular Circuncéntrica*. Por último en este capítulo se muestran elementos de álgebra lineal y geometría analítica que son necesarios para la demostración de conjeturas referentes a transformaciones en el plano.

En el tercer capítulo se presenta la definición formal de la *Relación Triangular Circuncéntrica* y los ocho teoremas emergentes, con sus respectivas demostraciones. En el cuarto capítulo se hace el cambio de punto base (del circuncentro al incentro) con el fin de conocer el cumplimiento los ocho teoremas descritos en el capítulo tres, así mismo se hace la variación del circuncentro a un punto que no sea notable del triángulo, donde se comprueban los mismos ocho teoremas.

En el quinto capítulo se hace uso de la geometría analítica y elementos del algebra lineal, con el fin de presentar la RT como una función que asigna a cada punto P del plano un punto P' del plano, por lo cual se hará uso del plano cartesiano para poder asignar a los elementos geométricos una ecuación que permita el estudio como de la RT como función en relación a las transformaciones en el plano usuales como la rotación, traslación, simetría axial y homotecia.

Finalmente se presentan las conclusiones, en donde se exponen los aportes adquiridos al hacer el estudio de la *Relación Triangular Circuncéntrica*, así mismo las propiedades que surgieron; además se presenta la bibliografía y la sección correspondiente a anexos, en donde se muestra como anexo 1 los acuerdos de notación utilizados a lo largo del desarrollo del trabajo y como anexo 2 el enunciado y la demostración del teorema rectas paralelas - ángulos congruentes, el cual es utilizado en la demostración de varios teoremas emergentes de la RTC.

Capítulo 1: Preliminares

1.1 Justificación

Gracias al interés adquirido a lo largo de la carrera por la geometría, se decide hacer un documento en el que se exponen los resultados de la exploración de la definición *Relación Triangular Circuncéntrica*, la cual surge a partir de la modificación de algunos elementos geométricos de la definición *Relación Interdiagonal* (Caicedo & Contreras, 2009) .

En el estudio de la *Relación Interdiagonal*, se hace una invitación a continuarlo, por lo cual se decide hacer un estudio análogo, para ello se hacen cambios como reemplazar cuadriláteros por triángulos, cambiar el punto de intersección entre diagonales del cuadrilátero por el circuncentro, incentro de triángulo, o por un punto sin relación directa al triángulo, este punto es el llamado punto base. Se escogieron inicialmente puntos notables del triángulo para observar si hay alguna relación o características particulares dependiendo del punto notable que se tomara. Se decide tomar como primer punto a explorar el circuncentro; no hay un motivo específico desde la teoría por el cual se haya escogido éste y no otro punto notable para comenzar. Siguiendo lo anterior se escoge el incentro del triángulo para explorar el cumplimiento o no de los teoremas encontrados para la RTC; pudo haber sido baricentro, ortocentro, etc. Al observar los resultados obtenidos con el incentro del triángulo se decide independizar el punto del triángulo y hacer la misma exploración de los teoremas obtenidos para la RTC.

Desde mi experiencia como estudiante de licenciatura en matemáticas y durante el desarrollo de mis prácticas, formular y explorar definiciones permite generar estrategias de enseñanza y aprendizaje, ya que se tiene presente gran parte del proceso requerido en el estudio del objeto a tratar, así que se facilita la creación de actividades para la transmisión del conocimiento. En mi formación como docente, explorar relaciones entre los objetos matemáticos es clave para que el estudiante se apropie del concepto o definición del objeto a ser estudiado, además el uso de softwares educativos es una forma llamativa para estudiar diferentes temas no solo en la escuela.

El uso del software GeoGebra referido por autores como Mariotti (2002)[1], es útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas porque ayuda a los estudiantes a conjeturar y visualizar las propiedades de los objetos matemáticos. Por otra parte, Preiner (2008), presenta el software como una herramienta para fomentar el aprendizaje por descubrimiento, un aprendizaje centrado en los estudiantes, que los enriquece haciendo las clases más participativas. Además, dice la autora que los maestros se pueden sentir más cómodos durante las situaciones de enseñanza-aprendizaje de todos los días, utilizando nuevos métodos de enseñanza, tales como la matemática por medio de experimentos y hallazgos.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Estudiar la definición *Relación Triangular Circuncéntrica* para cada punto del plano, utilizando como medio de exploración el software GeoGebra y haciendo uso de elementos de la geometría euclidiana, algebra lineal y geometría analítica para la comprobación de las propiedades emergentes.

1.2.2 Objetivos específicos

- Determinar los puntos P' que están en RTC con un punto P en el plano.

[1] (Preiner, 2008)

- Hallar propiedades generadas a partir de la exploración de la definición relacionadas con semejanzas y relaciones de interestancia entre los puntos relacionados.
- Reproducir el proceso llevado a cabo con la RTC utilizando como punto base el incentro del triángulo, decantando las propiedades existentes.
- Reproducir el proceso llevado a cabo con la RTC mediante un cuadro comparativo utilizando como punto base un punto sin relación alguna con el triángulo, decantando las propiedades existentes.
- Determinar si al utilizar la definición de RTC como una función se pueden obtener propiedades relacionadas con las transformaciones en el plano.

1.3 Antecedentes: "Estudio de una relación en el plano: "relación interdiagonal""

La definición de *Relación Interdiagonal* surgió a partir de definiciones que se presentan en transformaciones isométricas, donde se pudo utilizar conceptos de geometría euclidiana, conjeturando y demostrando algunas propiedades emergentes de una definición creada. Se definió la *Relación Interdiagonal*[2] como:

Dado el cuadrilátero $WXYZ$, O el punto de corte entre las diagonales de $WXYZ$ y A un punto cualquiera del plano, diremos que A está relacionado interdiagonalmente con A' respecto a O si se cumple que:

- El $\triangle AOA'$ es isósceles.
- La recta que contiene los puntos A y A' es paralela a algún lado de $WXYZ$.

[2] (Caicedo & Contreras, 2009)

El $\triangle AOA'$ tiene como lados congruentes $\overline{AO}$ y $\overline{OA'}$, ya que A y A' pertenecen a la misma circunferencia cuyo centro es O, así que $\overline{AO}$ y $\overline{OA'}$ son radios de la circunferencia por ello son congruentes y determinan un triángulo isósceles.

La exploración hecha por Caicedo, Y & Contreras, D principalmente fue mediante el software Cabri II plus, aplicando la definición de *Relación Interdiagonal* a un punto A del plano, teniendo en cuenta los cuadriláteros según su clasificación; paralelogramo, trapecio y trapezoide.

Se presentan los denominados *Teoremas Generales*[3], estos son:

Teorema General 1: Sea el cuadrilátero $WXYZ$ un paralelogramo y O el punto de corte entre las diagonales $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$ se cumple que para cualquier punto A del plano diferente de O, existen a lo más dos puntos A_1 y A_2 que están relacionados interdiagonalmente con A.

Teorema General 2: Sea el cuadrilátero $WXYZ$ un trapecio y O el punto de corte entre las diagonales $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$ se cumple que para cualquier punto A del plano diferente de O, existen a lo más tres puntos A_1, A_2 y A_3 que están relacionados interdiagonalmente con A.

Teorema General 3: Sea el cuadrilátero $WXYZ$ un trapezoide y O el punto de corte entre las diagonales $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$ se cumple que para cualquier punto A del

[3] Por cada teorema se presenta su correspondiente demostración, la cual prueba la existencia y unicidad de los puntos relacionados a un punto A del plano, además de contemplar los casos posibles.

plano diferente de O, existen mínimo dos y máximo *cuatro puntos* A_1, A_2, A_3 *y* A_4 *que están relacionado interdiagonalmente con* A.[4]

Así mismo a lo largo del trabajo se presentan otras propiedades que refieren a interestancia entre puntos, paralelismo entre rectas, puntos en rectas especiales como la mediatriz, formación de triángulos isósceles y rectángulos, formación de trapecios, algunos de estos teoremas se presentan a continuación:

3.1 Siendo $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$ diagonales del rectángulo $WXYZ$ y A colineal con los puntos W y Y entonces los puntos A_1 y A_2 relacionados interdiagonalmente con A son colineales con los puntos X y Z.

3.2 Si $WXYZ$ es trapecio isósceles y existen A_1, A_2 y A_3 relacionados interdiagonalmente con A un punto cualquiera del plano, entonces el $\Delta A_1A_2A_3$ es isósceles.

3.3 Sea $WXYZ$ un paralelogramo no rectángulo y A un punto cualquiera del plano. Si A pertenece a la mediatriz de $\overline{WY}$ entonces A_1 relacionado interdiagonalmente con A pertenece a la mediatriz de $\overline{YZ}$.

En conclusión el estudio de la *Relación Interdiagonal* presentada permitió obtener una serie de teoremas, dando paso a la exploración de esta definición y la posibilidad de modificación de la misma, por ello se decide cambiar aspectos de la definición para hacer un estudio de propiedades, así como se hizo en esta monografía.

---

[4] Todo cuadrilátero esta notado de forma cíclica, por ello no se hace la especificación de los segmentos paralelos en cuadriláteros como el trapezoide.

1.4 Planteamiento del problema

Teniendo en cuenta lo mostrado anteriormente, se decide cambiar algunos aspectos de la definición *Relación Interdiagonal*, para generar una definición que es explorada mediante el software educativo GeoGebra, esta definición es llamada *Relación Triangular Circuncéntrica*..

Inicialmente se decide tomar como polígono base el triángulo y no un cuadrilátero, debido a que los triángulos no tienen diagonales, se decide tomar algún punto que sea característico del triángulo, como lo es un punto notable de este, así que se reemplaza la intersección entre las diagonales del cuadrilátero base de la definición de Relación Interdiagonal, por el circuncentro del triángulo de la nueva definición, el cual es llamado punto base. Así se dirá que un punto P' está en *Relación Triangular Circuncéntrica* si dado un triángulo y su circuncentro, para cada punto P del plano se cumple que el triángulo cuyos vértices son el circuncentro del triángulo base, el punto P y el punto P', es isósceles (los lados congruentes son los dos segmentos determinados por el punto en RTC con P y el circuncentro), además si la recta determinada por P y P' es paralela a algún lado del triángulo.

Determinando los puntos que están en RTC con un punto P del plano, se estudian algunas propiedades que guardan relación con el triángulo base y los puntos P', tales como la determinación de alguna figura geométrica a partir de los puntos que están en RTC, y la posible relación entre la figura geométrica con el triángulo inicial. Una vez obtenidas las propiedades emergentes de la RTC, se hace el cambio de punto base por el incentro del triángulo para determinar las semejanzas y diferencias en las propiedades obtenidas anteriormente. Se escoge el incentro del polígono base, ya que es un punto notable de este, bien se puede escoger el baricentro, ortocentro u punto notable para la exploración y comparación con la RTC. No se explora con otros puntos notables, ya que se decide independizar el punto base del triángulo inicial y realizar la comparación en ese caso general.

Capítulo 2: Marco de Referencia Conceptual

En este capítulo se presentan los principales postulados, definiciones, teoremas y corolarios que serán utilizados a lo largo de la demostración de los teoremas que emergen de la exploración de la definición *Relación Triangular Circuncéntrica* mediante el software GeoGebra. Estos elementos teóricos están en el marco de la geometría euclidiana, así que en totalidad son tomados del libro de Moise & Downs (1986)[5]. Los acuerdos de notación se presentan junto con la definición de cada objeto. En el anexo 1 se presenta la notación de todos los objetos que serán utilizados a lo largo de es este trabajo de grado.

Dado que el software que se utiliza para la exploración es GeoGebra, así que se presenta una breve contextualización histórica del programa, pasando a un ámbito de enseñanza y aprendizaje mediante el uso de esta herramienta, junto con su importancia en el aula y en procesos de visualización.

Finalmente para efectos del quinto capítulo, se hace un marco de referencia desde la geometría analítica y el álgebra lineal, en el que se presentan las ecuaciones de la recta y la circunferencia en su forma general y normal. Así mismo se presenta una breve contextualización del estudio del álgebra lineal comenzando por vectores y matrices hasta llegar a espacios vectoriales y transformaciones lineales, las cuales permitirán hacer el estudio de las isometrías como homotecias, simetrías, rotaciones y traslaciones desde la matriz que cada una tiene asociada.

[5] (Moise & Downs, 1986)

2.1 Definiciones

1) *Definición de triángulo:* Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama triángulo, y se indica con $\triangle ABC$. Los puntos A, B y C se llaman vértices, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman lados. Todo triángulo $\triangle ABC$ determina tres ángulos : $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$. A estos los llamamos los ángulos del $\triangle ABC$. Si está claro a qué triángulo nos referimos, frecuentemente podemos designarlos por $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

2) *Definición de ángulo:* si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un ángulo. Los rayos se llaman los *lados* del ángulo y el extremo común se llama *vértice*.

3) *Definición de ángulo inscrito en un arco:* un ángulo está inscrito en un arco, si:
   - Los lados del ángulo contienen los extremos del arco.
   - El vértice del ángulo es un punto, pero no externo al arco.

4) *Definición de ángulo intercepta un arco:* un ángulo intercepta un arco, si:
   - Los puntos extremos del arco están en el ángulo.
   - Los otros puntos del arco están en el interior del ángulo.
   - Cada lado del ángulo contiene un extremo del arco.
   - El vértice del ángulo está en el interior o pertenece a la circunferencia que contiene el arco.

5) *Definición de ángulo par lineal:* si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos, y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.

6) *Definición de arco mayor y Arco menor:* sea C una circunferencia con centrp P y sean A y B dos puntos que están en C, pero que no son los extremos de un diámetro. Entonces, el arco menor $\widehat{AB}$ es la reunión de A, B y todos los puntos de C que están en el interior del $\angle APB$. El arco mayor $\widehat{AB}$ es la reunión de A, B y todos los puntos de C que están en el exterior del $\angle APB$. En cada caso A y B son los extremos del arco $\widehat{AB}$.

7) *Definición de bisectriz de un ángulo:* si D está en el interior de $\angle BAC$ y $\angle BAD \cong \angle DAC$, entonces $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAD$ y $\overrightarrow{AD}$ se llama bisectriz del $\angle BAC$.

8) *Definición de circuncentro:* el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama *circuncentro* del triángulo.

9) *Definición de incentro:* el punto de concurrencia entre las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama el *incentro* del triángulo.

10) *Definición de circunferencia:* sea P un punto de un plano y sea r un número positivo. La *circunferencia con centro P y radio r* es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto P.

11) *Definición de mediatriz:* en un plano dado, la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

12) *Definición de puntos colineales:* los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos.

13) *Definición de recta tangente a una circunferencia:* una tangente a una circunferencia es una recta (en el mismo plano) que interseca a la

circunferencia en un solo punto. Este punto se llama *punto de tangencia* o *punto de contacto*. Decimos que la recta y la circunferencia son tangentes en el punto de intersección.

14) *Definición de rayo:* sean A y B dos puntos de una recta L. El rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la reunión del segmento $\overline{AB}$ y el conjunto de puntos C para los cuales es cierto que B esta entre A y C, el punto A se llama extremo de $\overrightarrow{AB}$.

15) *Definición de relación de interestancia entre puntos:* B está entre A y C, si A, B y C son puntos de una misma recta, y $AB + BC = AC$.

16) *Definición de recta secante a una circunferencia:* una recta que corta a la circunferencia en dos puntos se llama secante a la circunferencia.

17) *Definición de segmento:* para dos puntos cualesquiera A y B, el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de los puntos A y B, y de todos los puntos que están entre A y B. Los puntos A y B se llaman los extremos de $\overline{AB}$.

18) *Definición de segmento secante de una circunferencia:* si un segmento corta a una circunferencia en dos puntos y precisamente uno de estos es un extremo del segmento, entonces el segmento se llama segmento secante a la circunferencia.

19) Definición de semejanza entre dos triángulos: si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia se llama una semejanza y decimos que los triángulos son *semejantes.*

2.2 Postulados

Postulado congruencia lado – ángulo - lado para triángulos (LAL): toda correspondencia LAL es una congruencia.

El postulado de la medida de ángulos: a cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180, llamado medida.

El postulado de la recta: Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.

2.3 Teoremas y corolarios

Teoremas de ángulos:

Teorema de la bisectriz: todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

Teorema rectas paralelas- ángulos alternos- internos (PAI): si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Teorema ángulo inscrito en una circunferencia: la medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

Teorema ángulo inscrito rayo secante – rayo tangente: se da un ángulo con el vértice en una circunferencia, formado por un rayo secante y un rayo tangente. La medida del ángulo es la mitad de la medida del arco interceptado.

Teorema rectas paralelas - ángulos congruentes: Dado $\angle BAC$, un punto E en el plano y las rectas $c \parallel \overrightarrow{AB}$ y $d \parallel \overrightarrow{AC}$, tales que $E \in c$ y $E \in d$ entonces el ángulo α determinado por las rectas c y d es congruente al $\angle BAC$.

Teoremas de rectas:

Teorema rectas paralelas: En un plano, si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces son paralelas entre sí.

Teorema intersección de rectas: si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene un punto solamente.

Teorema recta perpendicular –punto dado: desde un punto externo dado, hay a lo sumo una recta perpendicular a una recta dada.

Teorema unicidad recta perpendicular – punto dado: en un plano dado, y por un punto dado de una recta dada, pasa una y solamente una recta perpendicular a la recta dada.

Teorema recta tangente a una circunferencia: una recta perpendicular a un radio en su extremo es tangente a la circunferencia.

Teorema reflexión en segmentos: todo segmento es congruente consigo mismo.

Teoremas y corolario de triángulos:

Congruencia ángulo – lado - ángulo para triángulos (ALA): toda correspondencia ALA es una congruencia.

Congruencia lado – lado – lado (LLL): toda correspondencia LLL es una congruencia.

Teorema del triángulo isósceles: si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

Teorema de la semejanza ángulo – ángulo – ángulo (AAA): sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entones la correspondencia es una semejanza.

Teorema ángulos congruentes – lados congruentes: si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes. De otro modo: Se da el $\triangle ABC$. Si $\angle B \cong \angle C$, entonces $AB = AC$.

Corolario ángulo – ángulo (AA): sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

Teorema y corolario de arcos:

Teorema de la adición de arcos: si B es un punto de $\widehat{AC}$, entonces $m\widehat{ABC} = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}$.

Teorema ángulos inscritos en un arco: Dos ángulos cualesquiera inscritos en el mismo arco son congruentes.

Corolario de circunferencias:

Teorema tres puntos de una circunferencia: ninguna circunferencia contiene tres puntos alineados.

2.4 GeoGebra

GeoGebra es un software de matemática dinámica (DMS) diseñado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela secundaria y en un nivel universitario. El software combina la facilidad de uso de un software de geometría dinámica (DGS) con ciertas características de un sistema de álgebra computacional (CAS) y, por tanto, permite la reducción de la brecha entre las disciplinas matemáticas de geometría, álgebra, cálculo

(Hohenwarter & Preinter, 2007). Por un lado, GeoGebra se puede utilizar para visualizar conceptos matemáticos, así como para crear de instrucción materiales. Por otro lado, tiene el potencial de promover el aprendizaje centrado en los estudiantes al permitir experimentos matemáticos, exploraciones interactivas, como así como el descubrimiento de aprendizaje (Burner, 1961).

El desarrollo de GeoGebra comenzó en el 2001 como tesis de maestría Markus Hohenwarter proyecto en la Universidad de Salzburgo, Austria. Después de estudiar la educación matemática así como la ingeniería informática, comenzó a poner en práctica su idea de la programación de un software que uniera la geometría dinámica y álgebra computacional, dos disciplinas matemáticas que otros softwares tienden a tratar por separado. Su principal objetivo era crear un software educativo que combina la facilidad de uso de un software dinámico de geometría con el poder y las características del álgebra computacional, lo que podría ser utilizado por profesores y alumnos de secundaria hasta el nivel universitario. Después de la publicación de un prototipo del software en Internet en 2002, los docentes de Austria y Alemania comenzaron a usar GeoGebra para la enseñanza de las matemáticas.

GeoGebra ganó varios premios en diferentes países europeos incluyendo Austria, Alemania, y Francia. Desde 2006, el desarrollo en curso de GeoGebra ha continuado en la Universidad Atlántica de la Florida, EE.UU. GeoGebra se mejoró mediante la inclusión de una serie de características importantes. Esta funcionalidad mejorada ha permitido la creación de herramientas definidas por el usuario y la simplificación significativa de los pasos necesarios para la creación de materiales de instrucción interactivos, las llamadas hojas de trabajo dinámicas. Futuros planes para extender aún más y mejorar GeoGebra implican la implementación de una hoja de cálculo enlazada dinámicamente, así como una extensión de álgebra computacional, empujando el software más hacia el objetivo de ser un paquete de software versátil y fácil de usar que se puede utilizar para una amplia gama de actividades.

Hay dos tipos de softwares educativos que conectan la matemática en los campos de la geometría y el álgebra y se utilizan para la enseñanza-aprendizaje; por un lado, hay un programa de geometría dinámica (DGS) que permite a los usuarios crear y modificar dinámicamente construcciones euclidianas. Así como, las propiedades y relaciones geométricas entre objetos utilizados en una construcción de ecuaciones de líneas o secciones cónicas. Por otro lado, existen sistemas de álgebra computacional (CAS) que realizan construcciones simbólicas de algebra, geometría analítica y cálculo. Utilizando ecuaciones de objetos geométricos, programas de álgebra que pueden mostrar sus representaciones gráficas y el componente algebraico numérico. Muchos sistemas de álgebra computacional también son capaces de trazar ecuaciones explícitas y a veces incluso ecuaciones implícitas.

GeoGebra combina la facilidad de uso, con la construcción dinámica del software de geometría y la funcionalidad de un sistema de álgebra computacional, se abre una amplia gama de posibilidades de aplicación para la enseñanza de las matemáticas. Su versatilidad permite a los profesores utilizar el software en todos los niveles de grado de la escuela secundaria hasta la universidad, para tratar una amplia gama de temas matemáticos. En consecuencia, GeoGebra se puede utilizar como una herramienta de presentación, así como para la creación de materiales didácticos, el software inicialmente fue desarrollado para el uso de los estudiantes, ya que fomenta y activa el aprendizaje por descubrimiento (Burner, 1961), y puede ser fácilmente utilizado por los estudiantes para encontrar soluciones en las matemáticas.

Por otra parte, un profesor necesita saber acerca de la funcionalidad básica de softwares como GeoGebra y tener un cierto grado de experiencia utilizando herramientas educativas. Además, un maestro también necesita saber acerca de métodos de enseñanza que permitan una integración con éxito de un software de matemática dinámica en la enseñanza diaria. GeoGebra se puede utilizar como una herramienta de presentación y visualización en un primer momento o como una primera aproximación, con el fin de crear bosquejos, construcciones para presentaciones, folletos, notas o concursos. Ésta herramienta permite mejorar la enseñanza cotidiana de las matemáticas.

A medida que adquiere mayor confianza en el manejo del software, los profesores pueden entrar en la siguiente fase de la integración de GeoGebra en su enseñanza diaria, preparando su propia construcción de archivos y figuras dinámicas que pueden ser utilizados para fines de presentación dinámica y visualización de los conceptos matemáticos. En esta fase, los maestros comienzan a utilizar la dinámica y la funcionalidad interactiva de GeoGebra para permitir que sus estudiantes se beneficien de las visualizaciones. Además, los maestros tienden a notar que el software es capaz de facilitar su enseñanza cotidiana, ya que muchos de los estudiantes pueden entender mejor los conceptos si ellos pueden ver cómo los objetos están relacionados y cambiar dinámicamente.

Mediante la introducción de GeoGebra los estudiantes establecen conexiones entre diferentes temas de matemáticas desde los primeros años de escolaridad con otros temas más complejos que tratarán al final de la secundaria, teóricamente se podría presentar la herramienta a partir de quinto grado y hasta el grado once. Para introducir a los estudiantes a GeoGebra y facilitar su primer contacto con el software, son posibles diferentes enfoques. Por un lado, los maestros podrían introducir el software de paso a paso, empezando con el uso de hojas de trabajo dinámicas básicas y aumentar el conocimiento sobre el uso del software lentamente mediante la introducción de más y más herramientas. Por otro lado, los estudiantes también podrían estar expuestos a todas las funciones de GeoGebra de inmediato mediante el uso de instrucciones paso a paso, así como diferentes métodos de enseñanza; por ejemplo, trabajar junto con el profesor, el trabajo en grupo o por su cuenta. Además, los estudiantes también podrían explorar GeoGebra por su cuenta, por ejemplo, haciendo dibujos de colores, que ya es posible para los estudiantes de la escuela media temprana. Finalmente, el software debe representar una herramienta útil para aumentar la comprensión de las matemáticas y el aprendizaje con una gran acogida por parte de los estudiantes.

2.5 Geometría analítica y Algebra lineal

Es posible asociar el conjunto de números reales con el conjunto de puntos del plano. El plano cartesiano es un sistema coordenado rectangular y lineal cuyos ejes son rectas (la recta de los números reales) y estas a su vez son perpendiculares, uno de ellos se denomina eje x y el otro eje y. El punto de intersección entre estas dos rectas se denomina origen. Los sistemas coordenados en un plano están compuestos de pares de números reales llamados par ordenado, esto se simboliza como (a, b), donde a es la componente en el eje x y b es la componenete en el eje y. Los ejes determinan cuatro cuadrantes, llamados I, II, III y IV cuadrante.[6]

Para hacer uso del método analítico en la geometría, a cualquier objeto geométrico se le es asignada una ecuación, a continuacion se presentan

[6] (Swokowski, 1988)

algunos elementos de la geometría analítica que se tendrán presente en el quinto capítulo del presente trabajo de grado:

La recta es el lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante[7].

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, dos puntos diferentes, la pendiente m de la recta que contiene esos dos puntos se halla mediante la siguiente ecuación:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

donde x_1 y x_2 son diferentes. Así que la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m esta dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$.

La ecuación general de una recta es de forma lineal así que se puede expresar de la siguiente forma:

$$Ax + By + C = 0$$

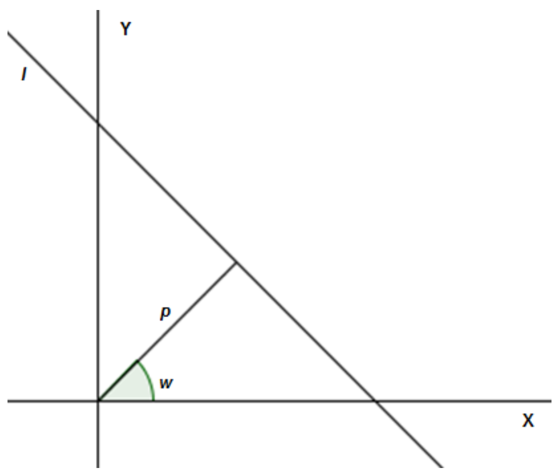
donde A y B deben ser deferentes de 0 y C puede ser igual a 0. El problema consiste en hallar los coeficientes A, B y C en esta expresión, a pesar de que estas tres constantes parezcan independientes puede hallarse una relación entre ellas, ya que la ecuación puede quedar escrita así:

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0$$

[7] (Lehemann, 2011)

Para hallar $\frac{B}{A}$ y $\frac{C}{A}$ se necesitan dos ecuaciones independientes que las contengan, así que analíticamente la ecuación de la recta está determinada por dos condiciones independientes; uno de sus puntos y su dirección o dos de sus puntos.

La forma normal de la ecuación de la recta está dada por:



$$x \cos w + y \; sen \; w - p = 0$$

Figura 1. Ecuación normal de la recta

donde p es un número positivo, numéricamente igual a la normal trazada desde el origen a la recta, y w es el ángulo positivo menor de $360°$ medido a partir de la parte positiva del eje x a la normal (Figura 1. Ecuación normal de la recta) (Lehemann, 2011).

Dadas dos rectas expresadas en su forma general $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, las dos rectas pueden ser:

- Paralelas, solo sí $AB' - A'B = 0$,
- Perpendiculares, solo sí $A'A + B'B = 0$.
- Coincidentes, solo sí $A = kA'$, $B = kB'$ y $C = kC'$, donde $k \neq 0$.

- Intersecadas una por la otra sí $AB' - A'B \neq 0$, es decir si no son paralelas.

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y coplanario llamado centro, en una cantidad que es constante denominada radio. La ecuación de una circunferencia que tiene como centro el punto (h, k) y tiene un radio r, esta dada por:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Así que la forma general de la ecuación de la circunferencia está dada por:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde

$$D = -2h, \qquad E = -2k \qquad \text{y} \qquad F = h^2 + k^2 - r^2$$

El álgebra lineal se centra en el estudio de matrices y vectores, *los vectores* se definen como el conjunto ordenado de n números y se escribe así:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ llamado vector renglón

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ llamado vector columna

Dos vectores son iguales si y solo si tienen el mismo número de componentes y sus componentes correspondientes son iguales.

Existe la adición y multiplicación de vectores, se definen por:

Sean $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b\_n \end{pmatrix}$ n-vectores. Entonces la suma de a y b se define por:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Sea $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ un vector y α un escalar, entonces la multiplicación de un vector por un escalar está definida como:

$$\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

Así mismo sean a, b y c n- vectores y sean α y β escalares, entonces:[8]

- $a + 0 = a$
- $0a = 0$
- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
- $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$

Las matrices se definen un arreglo rectangular de mn números acomodados o dispuestos en arreglos de m filas y n columnas, cada elemento de la matriz se llama componente:

[8] (Grossman, 1992)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

Al igual en los vectores, las matrices se suman componente a componente y la multiplicación de un escalar por una matriz consiste en multiplicar cada componente por el escalar. Así mismo sean A, B y C matrices $m \times n$ y α un escalar, entonces:[9]

- $A + 0 = A$
- $0A = 0$
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $1A = A$

Un espacio vectorial es una terna formada por un conjunto V y dos operaciones ($+$ suma vectorial, $\times$ multiplicación por un escalar) que satisfacen las siguientes propiedades:[10]

(α) Si u y v son elementos cualesquiera de V, entonces $u + v$ está en V, es decir V es cerrado bajo la operación $+$.

a) $u + v = v + u$, para u y v en V.
b) $u + (v + w) = (u + v) + w$, para u, v y w en V.
c) Existe un elemento 0 en V, tal que $u + 0 = u$, para toda u en V.
d) Para cada u en V existe un elemento $-u$, tal que $u + \; -u = 0$

[9] (Grossman, 1992)
[10] (Kolman & Hill, 2006)

(β) Si u es cualquier elemento de V y c es cualquier número real, entonces $c \times u$ esta en V, es decir, V es cerrado bajo la operación $\times$.

e) $c \times (u + v) = c \times u + c \times v$, para todo número real c y toda u y v en V.
f) $(c + d) \times u = c \times u + d \times u$, para todo número real c y d y toda u en V.
g) $c \times (d \times u) = (cd) \times u$, para todo número real c y d y toda u en V.
h) $1 \times u = u$, para toda u en V.

Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal L de V en W es una función que asigna a cada vector u en V un único vector $L(u)$ en W tal que:

a) $L(u + v) = L(u) + L(v)$ cualesquiera sean u y v en V.
b) $L(ku) = kL(u)$, para cada u en V y cada escalar k.

La rotación en el plano representa un giro de una figura entorno a un punto fijo, el cual es llamado centro de rotación; este último puede estar en el interior en el exterior de la figura. La representacion matricial de una rotación está dada por:

$$A_T = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

ya que, si el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el plano cartesiano se rota un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el vector $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ representará al vector v rotado. Si r es la longitud de v, entonces:

$$\begin{matrix} x = r\ cos\alpha & y = r\ sen\alpha \\ x' = r\cos(\alpha + \theta) & y' = r\ sen(\alpha + \theta) \end{matrix}$$

Pero $r\cos(\alpha + \theta) = r\ cos\theta\ cosa - r\ sen\theta\ sen\alpha$, por ello:

$$x' = x\ cos\theta - y\ sen\theta$$

De manera análoga

$$y' = x\ sen\theta - y\ cos\theta$$

Determinado así la matriz de la rotación como:

$$A_T = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

La traslación representa el desplazamiento de un conjunto de puntos según un vector fijo no nulo. La transformación lineal correspondiente a una traslación por el vector b fijo, está definida como $T(v) = v + b$.

Las simetrías geométricamente corresponden a una reflexión de una figura en el plano cartesiano respecto a una recta fija, esto representa la imagen simétrica respecto a ella. Esta recta fija se denomina eje de simetría. La transformación de reflexión está definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

Cuando la simetría es:

- Respecto al eje x, tiene asociada la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- Respecto al eje y, tiene asociada la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Respecto a la recta $y = x$, tiene asociada la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La homotecia geométricamente es una transformación que cambia el tamaño del objeto, sin hacer una variación en su forma. Se dice que dos figuras son homotéticas si al unir uno mediante el otro en sus puntos correspondientes estas rectas concurren en un único punto llamado centro de la homotecia. La homotecia tiene asociada la matriz $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, donde k determina la contracción o dilatación el objeto; si $k > 1$ entonces la figura sufre una dilatación, en cambio sí $0 < k < 1$ la figura sufre una contracción, cuando $k = 1$ la figura mantiene su tamaño.[11]

[11] (Fundación Polar)

Capítulo 3: Relación Triangular Circuncéntrica

En este capítulo se presenta la definición formal de la *Relación triangular circuncéntrica*, así mismo los principales resultados de la exploración hecha mediante el software GeoGebra de la definición, junto con los enunciados escritos como teoremas y sus correspondientes demostraciones. Inicialmente se presentan los pasos de construcción para hallar los puntos que están en RTC con un punto P del plano, esta construcción se mantendrá a lo largo del desarrollo del presente trabajo de grado y permitirá obtener una serie de teoremas que serán presentados posteriormente. Así mismo, esta construcción será utilizada sin necesidad de ser mencionados sus pasos de elaboración en el desarrollo de algunas demostraciones.

Como se ha dicho en varias ocasiones el software utilizado para la exploración de la *Relación Triangular Circuncéntrica* será GeoGebra, ya que es un medio que se adapta a las diferentes necesidades de una exploración matemática. En este caso GeoGebra no solo permitirá agilizar el proceso de visualización, sino permitirá verificar la validez de las conjeturas hechas en el proceso, sin tomarlas como una demostración. Así mismo servirá como medio de ayuda para lograr exponer mediante un gráfico bien sea el enunciado de un teorema o aspectos del proceso de demostración.

3.1 Definición de la *Relación Triangular Circuncéntrica*

La definición de la *Relación Triangular Circuncéntrica*, la cual en adelante será llamada RTC, se presenta a continuación*:*

Dado el $\triangle ABC$ y O su circuncentro, para cada P punto del plano, diremos que P está en RTC con P' si se cumple que:

- El $\triangle \mathrm{POP'}$ es isósceles, donde $\overline{PO} \cong \overline{OP'}$.

- La recta que contiene los puntos P y P' es paralela a algún lado de $\triangle \mathrm{ABC}$.

¿Cómo se determinan y caracterizan los puntos que están en RTC con un punto P del plano?

A continuación se indican los pasos a seguir para hallar los puntos que están en RTC con un punto P del plano describiendo las construcciones auxiliares.

Primero se construye $\triangle ABC$ con la herramienta *polígono*:

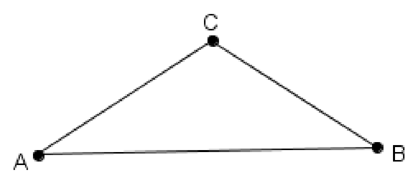


Figura 2. △ABC, triángulo base

Con la herramienta *mediatriz* se trazan las mediatrices del $\triangle ABC$. Para marcar la intersección de estas se hace uso de *intersección de dos objetos* determinando el punto O, el cual por definición será el circuncentro de $\triangle ABC$:

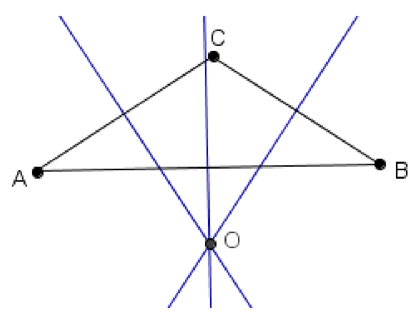


Figura 3. Circuncentro de $\triangle ABC$

Luego con la herramienta *nuevo punto* se determina un punto P en el plano y con *circunferencia dados sus centro y uno de sus puntos* se determina la circunferencia con centro en O y radio OP.

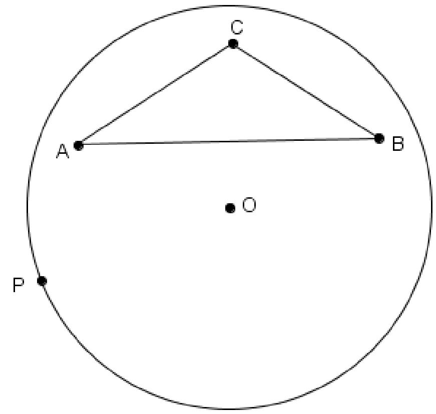


Figura 4. Circunferencia C_{OP}

La única restricción para el punto P del plano es que sea diferente de O (punto base), para que exista la circunferencia y se puedan determinar los puntos que estarán en RTC con P.

La circunferencia determinada por el circuncentro del triángulo inicial y el punto P escogido en el plano, a lo largo de este documento será nombrada como C_{OP}, donde O es el centro y OP el radio.

Se trazan las rectas l_1, l_2 y l_3 paralelas a los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente del triángulo, todas ellas por el punto P con la herramienta *recta paralela*.

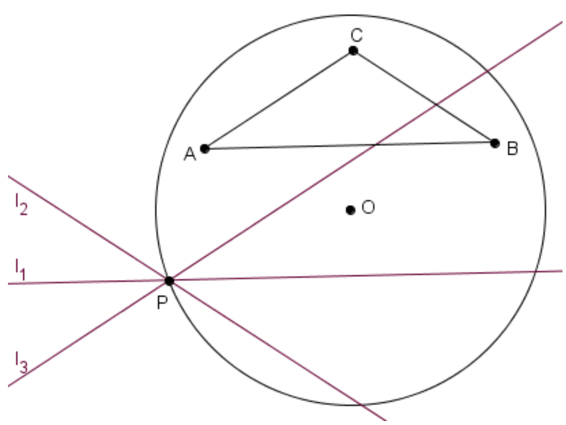


Figura 5. Determinación de rectas paralelas a los lados del $\triangle ABC$ por P

Nótese que las rectas l_1, l_2 y l_3 solo tienen en común el punto P, ya que si no fuese así las rectas serian iguales, lo que indicaría que dos lados del triángulo son paralelos lo cual impide la existiera el triángulo, llegando a una contradicción.

Finalmente los puntos de intersección entre l_1, l_2 y l_3 y la circunferencia C_{OP}, serán notados como $P',\ P''$ y P''' respectivamente, los cuales se determinan con la herramienta *intersección de dos objetos*.

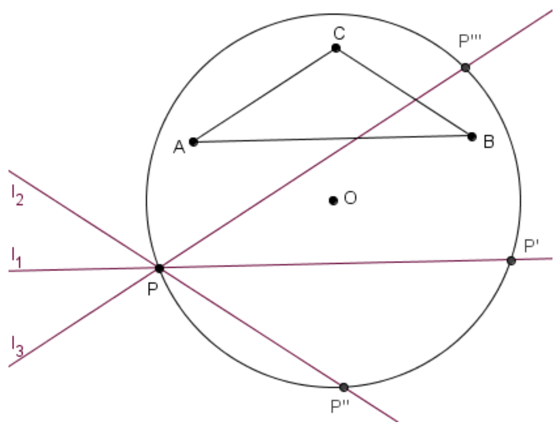


Figura 6. Determinación de los puntos $P',\ P''$ y P''' en RTC con P

Los puntos $P',\ P''$ y P''' están en RTC con el punto P, ya que los segmentos $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$ y $\overline{OP'''}$ tienen igual longitud que $\overline{OP}$ por ser radios de la circunferencia C_{OP}, así que $\triangle POP'$, $\triangle POP''$ y $\triangle POP'''$ son triángulos isósceles. Así mismo por construcción las rectas $\overleftrightarrow{PP'}$, $\overleftrightarrow{PP''}$ y $\overleftrightarrow{PP'''}$ son paralelas a algún lado del $\triangle ABC$, cumpliendo con las dos condiciones dadas en la definición de la RTC.

Lo anterior se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 1: Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro y P un punto en el plano, existen tres puntos que están en RTC con P.

La construcción anteriormente descrita permite hallar al menos tres puntos que están en RTC con un P del plano, a continuación se enuncia y demuestra que estos tres puntos son únicos, es decir no hay cuatro puntos en RTC con P.

Teorema 2: Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro y P un punto en el plano, existen únicamente tres puntos que están en RTC con P.

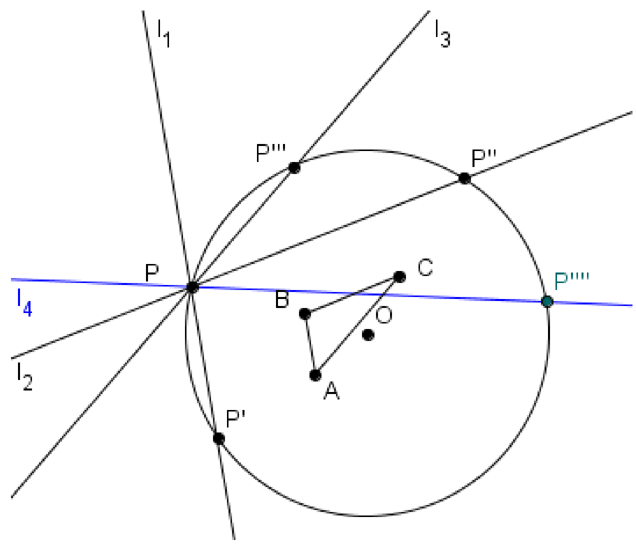


Figura 7. Teorema 2 RTC

Para demostrar la no existencia de un cuarto punto en RTC con P suponemos que si existe, entonces sea P'''' un punto en RTC con P diferente de P', P'' y P''' entonces se tiene que $\overleftrightarrow{PP''''}$ es paralela a algún lado de $\triangle ABC$. l_1, l_2 y l_3 son paralelas a cada lado del triángulo, dado que el triángulo tiene tres lados solo hay tres rectas paralelas a los lados diferentes entre ellas, como $\overleftrightarrow{PP''''}$ es paralela a algún lado de $\triangle ABC$, entonces debe coincidir con l_1, l_2 o l_3 por la unicidad de la recta paralela, si esto ocurre P'''' no sería diferente a $P',\ P''$ o P''', ya que una recta no corta a la circunferencia en más de dos puntos, uno de ellos P, por construcción y el punto relacionado con P, por lo cual habría una contradicción, quedando demostrado que no pueden haber más de tres puntos en RTC con P.

Una recta que tiene en común un punto con una circunferencia puede ser tangente o secante, a continuación se caracterizan cuales ternas entre secantes y tangentes se pueden presentar, entonces:

- Sean l_1, l_2 y l_3 las rectas paralelas a los lados del triángulo por el punto P, además las tres son secantes, entonces cada recta interseca a C_{OP} en P por construcción y en un punto que ya se ha demostrado que es único. Entonces por cada recta hay un punto en RTC con P que es diferente a P, como son tres rectas entonces hay tres puntos en RTC con P que son diferentes a él.
- Si una de las rectas es tangente, por definición de tangencia el punto que determina es el mismo P, entonces los puntos que están en RTC con P son solo dos. A pesar de que P no está en RTC consigo mismo, se utilizará para algunas propiedades posteriores, si este es el caso que se presenta.

La posibilidad de que haya dos o más tangentes a la vez es imposible. Hay que tener en cuenta que la condición para que una recta sea tangente a una circunferencia por un punto de la circunferencia, es que esa recta sea perpendicular al segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y el punto por el que la recta es tangente.

Para completar la aclaración anterior, se tiene que no hay dos rectas diferentes que contengan a dos segmentos diferentes del triángulo que sean perpendiculares a $\overleftrightarrow{PO}$. Sea $\triangle ABC$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, supongamos que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PO}$ y $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{PO}$. Si $B \notin \overleftrightarrow{PO}$ (Figura 8. Caracterización de las rectas, caso 1) entonces $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{PO} = X$ y $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{PO} = Y$, entonces existe el $\triangle XBY$, cuyos ángulos $\angle BXY$ y $\angle BYX0$ son rectos, es decir que la suma de la medida de los ángulos del $\triangle BXY$ sería mayor que 180, presentándose una contradicción.

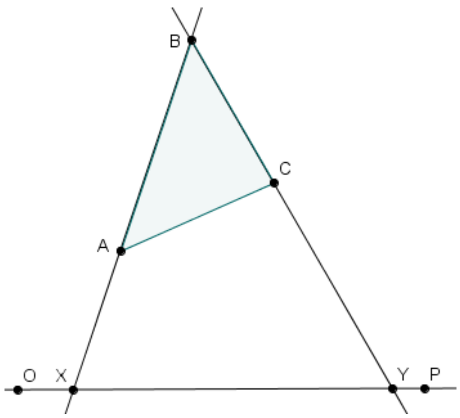


Figura 8. Caracterización de las rectas, caso 1

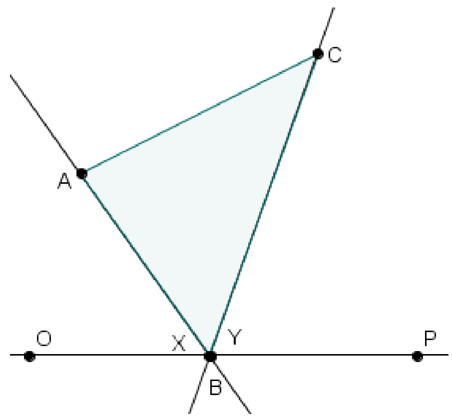


Figura 9. Caracterización de las rectas, caso 2

Sea $\overleftrightarrow{PO}$ una recta tal que $B \in \overleftrightarrow{PO}$ (Figura 9. Caracterización de las rectas, caso 2), $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son rectas secantes a $\overleftrightarrow{PO}$ por B. Supongamos que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PO}$ y $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{PO}$, por definición de triángulo ni $C \in \overleftrightarrow{AB}$, ni $A \in \overleftrightarrow{BC}$, es decir las rectas son diferentes, por la unicidad de la perpendicular, no hay dos rectas perpendiculares, diferentes, a una recta por el mismo punto, presentándose una contradicción. Entonces a lo más una de las rectas l_1, l_2 y l_3 puede ser tangente a la circunferencia C_{OP}.

Como se vio anteriormente, es posible que alguno de los puntos que están en RTC con P coincida con P, esto cuando alguna de las rectas paralelas a los lados del triángulo es tangente a la circunferencia C_{OP}, se enuncia formalmente el siguiente resultado, el cual expone la condición de las características del triángulo para que ocurra:

***Teorema 3*:** Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, P un punto en el plano, $P',\ P''$ y P''' los puntos que están en RTC con P, este último coincide con uno de los puntos si solo si $\overleftrightarrow{OP}$ es perpendicular a alguna de las rectas que contiene a algún lado del triángulo.

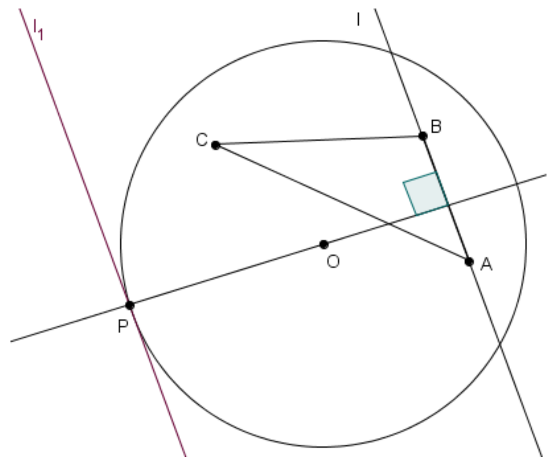


Figura 10. Teorema 3 RTC

Sin perder generalidad, sea l_1 la recta paralela a l por P, donde l es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{PO}$, entonces $l_1 \perp \overleftrightarrow{PO}$ por el punto P, como PO es un radio de la circunferencia C_{OP}, entonces l_1 es tangente a la esta circunferencia C_{OP} por el punto P. Como la recta $l_1$es tangente a C_{OP} por el punto P, el punto P' (intersección entre l_1 y C_{OP}) es igual a P.

Ahora, sea l una de las rectas que contiene a un lado del triángulo y l_1 la recta paralela a l por P, donde $P' = P$, entonces l_1 es tangente a la circunferencia C_{OP}. Como toda tangente a la circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto, en este caso P, entonces $l_1 \perp \overleftrightarrow{PO}$, ya que una recta que es perpendicular a otra, es perpendicular a su vez a cualquier otra que sea paralela a la segunda.

3.2 Teoremas de semejanza

Durante el proceso de exploración mediante el software GeoGebra, teniendo en cuenta la definición de triángulo y que los tres puntos que están en RTC con P pertenecen a la circunferencia C_{OP}, se concluye que el polígono determinado por los puntos que están en RTC con P es un triángulo, dando origen al siguiente teorema:

Teorema 4: Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, P un punto en el plano y los puntos P', P'' y P''' que están en RTC con P, entonces P', P'' y P''' no son colineales.

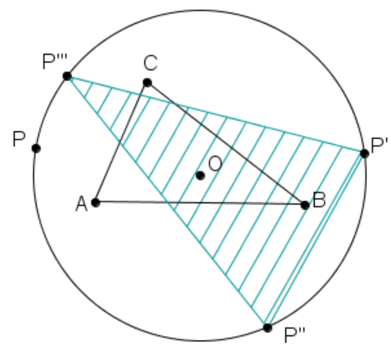


Figura 11. Teorema 4 RTC

Ya se demostró que existen únicamente tres puntos que están en RTC con P, además por construcción estos puntos están contenidos en la circunferencia C_{OP}, por tanto no son colineales. En consecuencia la reunión de los segmentos $\overline{P'P''}, \overline{P''P'''}$ y $\overline{P'P'''}$ genera el $\triangle P'P''P''$.

Así mismo mediante la exploración se observa que hay una relación entre el $\triangle ABC$ y $\triangle P'P''P'''$. Mediante la herramienta *ángulo* se comparan los ángulos de $\triangle ABC$ y $\triangle P''P'''P'$ observando que existe una igualdad entre estos y por ello una semejanza entre $\triangle ABC$ y $\triangle P''P'''P'$, lo cual se precisa y demuestra en el siguiente teorema:

Teorema 5: Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, para cada P punto en el plano y sus puntos P', P'' y P''' que están en RTC con P, se tiene que $\triangle ABC$ y $\triangle P''P'''P'$ son triángulos semejantes.

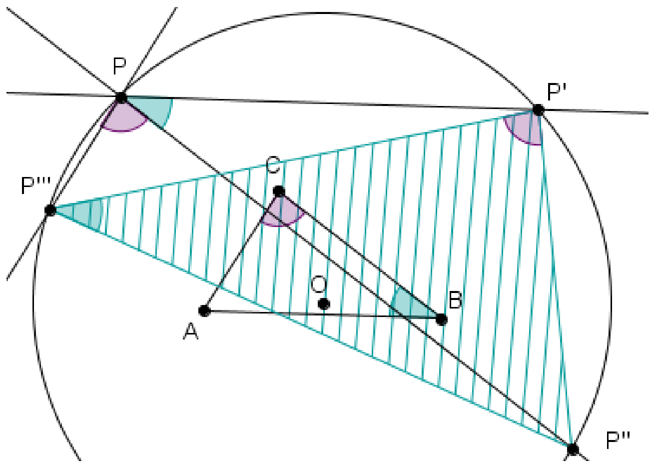


Figura 12. Teorema 5 RTC, caso 1

Sean P', P'', P''' puntos en RTC con P; sí P', P'', P''' son diferentes de P (Figura 12. Teorema 5 RTC, caso 1), por el teorema rectas paralelas–ángulos congruentes se tiene que $\angle P'''PP'' \cong \angle ACB$ y $\angle P''PP' \cong \angle ABC$, ya que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{P'''P}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{P'P}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{P''P}$. Por otra parte, los $\angle P''PP' \cong \angle P''P'''P'$ y $\angle P'''PP'' \cong \angle P''P'P'''$ ya que cada par de ángulos intercepta el mismo arco. Como $\angle P'''PP'' \cong \angle ACB$ y $\angle P''PP' \cong \angle ABC$ por sustitución $\angle ABC \cong \angle P''P'''P'$ y $\angle ACB \cong \angle P''P'P'''$, con el criterio de semejanza ángulo- ángulo se tiene finalmente que $\triangle ABC \sim \triangle P''P'''P'$.

Sí $P''' = P$ (Figura 13. Teorema 5 RTC, caso 2), sea α el ángulo semi-inscrito cuyos rayos están contenidos en las rectas l_1 y $l_3$que pasa por P, como $\overleftrightarrow{PP'} \cap l_3 = \{P\}$ y $l_3 \parallel \overleftrightarrow{AC}$, entonces $\overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{H\}$. $\alpha \cong \angle PHA \cong \angle BAC$ ya que son ángulos alternos internos determinados por rectas paralelas. Por el teorema rectas paralelas–ángulos congruentes se tiene que $\angle P''PP' \cong \angle ABC$. Como la medida de un arco está determinada por el doble de la medida del ángulo que lo contiene, entonces $m\,\angle PP''P' = \frac{1}{2} m\,\widehat{PP'}$ y $m\,\alpha = \frac{1}{2} m\,\widehat{PP'}$, por ello $\angle PP''P' \cong \alpha$, por sustitución de $\angle PP''P' \cong \alpha$ y $\angle P''PP' \cong \angle ABC$ se tiene que $\angle PP''P' \cong \angle BAC$, por el criterio de semejanza ángulo-ángulo entonces $\triangle ABC \sim \triangle P''P'''P'$.

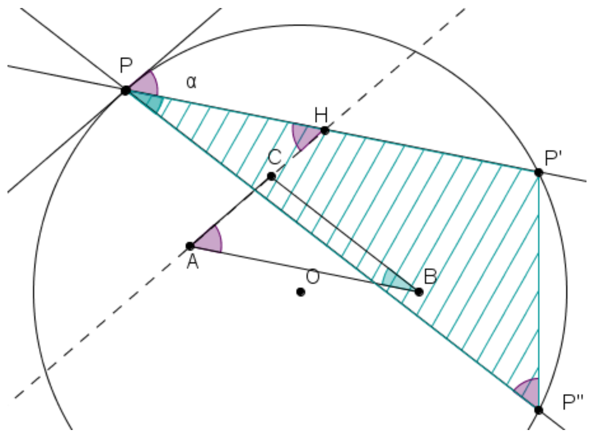


Figura 13. Teorema 5 RTC, caso 2

Habiendo quedado demostrado el teorema 5 se hará un cambio de notación en los puntos que están en RTC con P, dado que para cualquier $\triangle ABC$ se da la semejanza con $\triangle P''P'''P'$, los puntos P', P'' y P''' serán notados como P_C, P_A y P_B respectivamente para los próximos teoremas de la RTC.

Dada la existencia de semejanza entre esos dos triángulos debe existir un coeficiente que permita relacionarlos. Inicialmente se tiene en cuenta que el circuncentro del $\triangle P_AP_BP_C$ es el mismo que el de $\triangle ABC$, ya que por construcción los vértices del $\triangle P_AP_BP_C$ equidistan de O, además el circuncentro de un triángulo es único. Con lo anterior y mediante construcciones auxiliares, exploración en GeoGebra y uso de la bibliografía fue posible demostrar que la relación entre el un lado del $\triangle ABC$ y el lado correspondiente en semejanza del $\triangle P_AP_BP_C$ esta dada por el cociente entre la distancia de cualquier vértice del $\triangle ABC$ a O y la distancia de cualquier vértice del $\triangle P_AP_BP_C$ a O, lo cual se enuncia y demuestra a continuación como teorema 6:

Teorema 6: Sea $\triangle ABC \sim \triangle P_AP_BP_C$, O el circuncentro de los dos triángulos, entonces la constante de proporcionalidad k entre estos dos triángulos está dada por $k = \frac{AO}{P_AO} = \frac{BO}{P_BO} = \frac{CO}{P_CO}$.

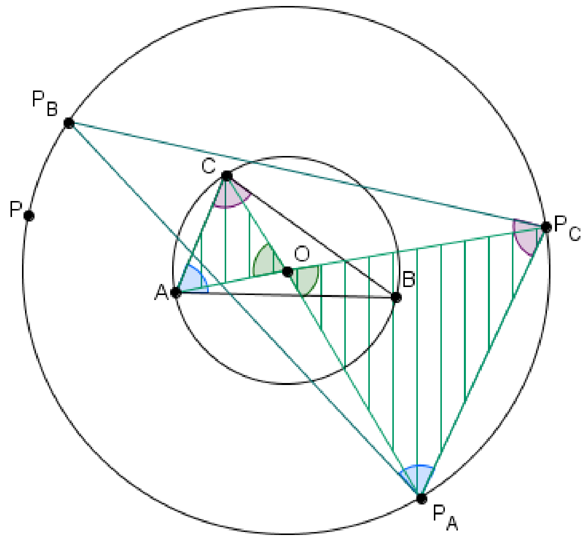


Figura 14. Teorema 6 RTC

Sean $\triangle ABC \sim \triangle P_AP_BP_C$ por definición de semejanza de triángulos se tiene que $k = \frac{AB}{P_AP_B} = \frac{BC}{P_BP_C} = \frac{AC}{P_AP_C}$. Por definición de circuncentro $OP_C = P_AO$ y $AO = OC$, si $O \notin \overline{AC}$, entonces $\triangle AOC$ y $\triangle P_COP_A$ son isósceles (Figura 14. teorema 6 RTC). Como $m\angle P_AP_BP_C = \frac{1}{2}m\angle P_AOP_C$ y $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\angle AOC$, entonces $m\angle P_AOP_C = m\angle AOC$, gracias a la semejanza de $\triangle ABC$ y $\triangle P_AP_BP_C$. Por lo anterior y el teorema de triángulo isósceles $\triangle AOC \sim \triangle P_COP_A$. La constante de proporcionalidad entre $\triangle AOC$ y $\triangle P_COP_A$ es k, ya que $\frac{AC}{P_AP_C} = k$, obteniendo $k = \frac{AC}{P_AP_C} = \frac{CO}{P_CO} = \frac{AO}{P_AO}$. Con el razonamiento anterior los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle P_BOP_A$ también son semejantes, como $k = \frac{AB}{P_AP_B}$, se obtiene $k = \frac{AB}{P_AP_B} = \frac{BO}{P_BO} = \frac{AO}{P_AO}$.

En conclusión la constante de proporcionalidad k entre $\triangle ABC$ y $\triangle P_AP_BP_C$ está dada por $k = \frac{AO}{P_AO} = \frac{BO}{P_BO} = \frac{CO}{P_CO}$.

3.3 Teoremas de interestancia

Continuando con la exploración, se notó que dados P y Q puntos diferentes en el plano, P_A, P_B, P_C y Q_A, Q_B, Q_C los puntos que están en RTC con P y Q respectivamente, la distancia entre P y Q es la misma que entre P_A y Q_A, P_B y Q_B y por último entre P_C y Q_C, así mismo si P, Q y O son colineales sus puntos relacionados correspondientemente son colineales.

Teorema 7: Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, sean P y Q puntos diferentes en el plano, si P, Q y O son colineales entonces sus correspondientes puntos relacionados son colineales.

Para la demostración de este teorema se presentan dos casos, el primero está dado por $Q - P - O$ y el segundo por $P - O - Q$, así que:

Si $Q - P - O$ entonces $Q_A - P_A - O$, $Q_B - P_B - O$ y $Q_C - P_C - O$:

Dado que Q es diferente de P y a su vez estos son diferentes de O, se tiene que las circunferencias C_{OP} y C_{OQ} son diferentes (Figura 15. Teorema 7 RTC, caso 1.1), entonces $\triangle QOQ_B$ y $\triangle POP_B$ son isósceles, $\overleftrightarrow{PP_B}$ y $\overleftrightarrow{QQ_B}$ son paralelas entre sí, por ser rectas paralelas a $\overline{AC}$, por el teorema rectas paralelas ángulos correspondientes se da la siguiente congruencia $\angle P_BPO \cong Q_BQO$, entonces el ángulo $\angle PP_BO \cong \angle QQ_BO$.

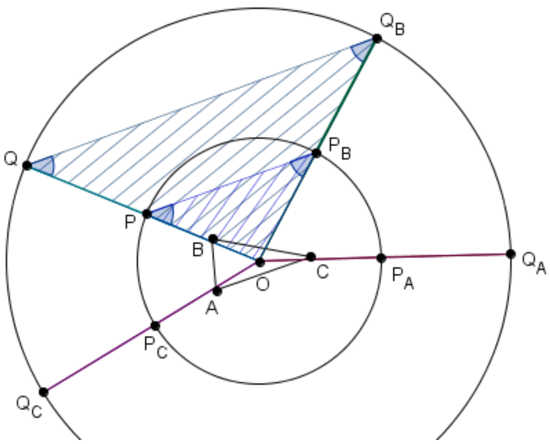


Figura 15. Teorema 7 RTC, caso 1.1

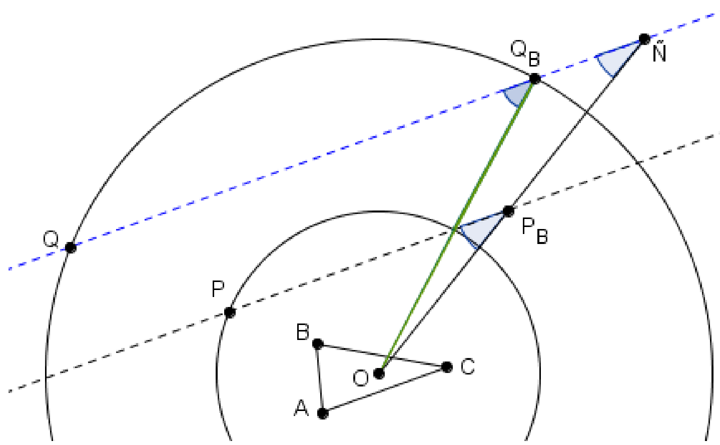


Figura 16. Teorema 7 RTC, caso 1.2

Para probar que Q_B, P_B y O son colineales suponemos que no lo son (Figura 16. Teorema 7 RTC, caso 1.2), entonces el rayo $\overrightarrow{OP_B}$ interseca a $\overleftrightarrow{QQ_B}$ en un punto Ñ, como $\tilde{N} \neq Q_B$ entonces existe $\triangle OQ_B\tilde{N}$, por el teorema rectas paralelas ángulos correspondientes se tiene $\angle Q_B\tilde{N}O \cong \angle PP_BO$, por sustitución donde $\angle Q_B\tilde{N}O \cong \angle QQ_BO$. El ángulo $\angle \tilde{N}Q_BO$ y $\angle QQ_BO$ forman par lineal, por sustitución $m\angle \tilde{N}Q_BO + m\angle Q_B\tilde{N}O = 180$, así que la suma de las medidas de los ángulos del $\triangle OQ_B\tilde{N}$ sería mayor a 180 lo cual genera una contradicción.

Queda demostrado que Q_B, P_B y O son colineales. Como $QP + PO = QO$, por sustitución $Q_BP_B + P_BO = Q_BO$, lo que indica que $Q_B - P_B - O$. Lo anterior es análogo para $Q_A - P_A - O$ y $Q_C - P_C - O$. El anterior caso es análogo a los casos $P - Q - O$, $O - P - Q$ y $O - Q - P$.

Si $P - O - Q$ entonces $P_A{-}O - Q_A$, $P_B - O - Q_B$ y $P_C{-}O - Q_C$, veamos por qué:

Dado que Q es diferente de P y a su vez estos son diferentes de O, se tiene que las circunferencias C_{OP} y C_{OQ} son diferentes y sea $P - Q - O$ (Figura 17. Teorema 7 RTC, caso 2.1), los $\triangle QOQ_B$ y $\triangle POP_B$ son isósceles, las rectas $\overleftrightarrow{PP_B}$ y $\overleftrightarrow{QQ_B}$ son paralelas entre sí por ser rectas paralelas a $\overline{AC}$, por el teorema rectas paralelas ángulos alternos internos se da la siguiente congruencia $\angle P_BPO \cong Q_BQO$, entonces el ángulo $\angle PP_BO \cong \angle QQ_BO$.

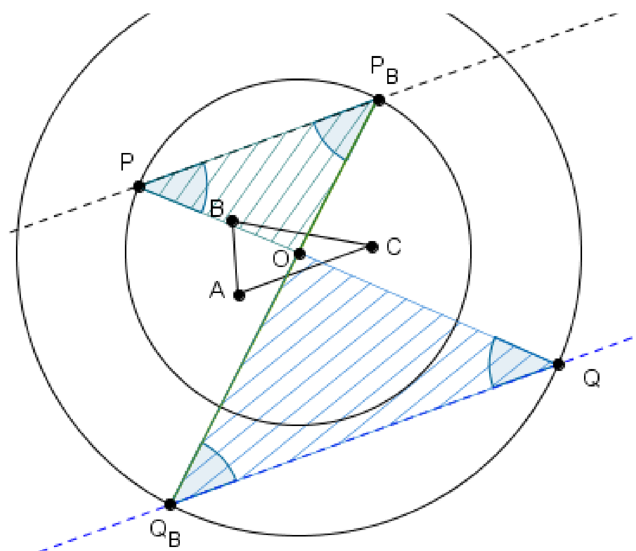


Figura 17. Teorema 7 RTC, caso 2.1

Para probar que Q_B, P_B y O son colineales suponemos que no lo son (Figura 18. Teorema 7 RTC, caso 2.2), entonces el rayo $\overrightarrow{Q_BO}$ interseca a $\overleftrightarrow{PP_B}$ en un punto Ñ, como $\text{Ñ} \neq P$ entonces existe el $\triangle OP_B\text{Ñ}$, por el teorema rectas paralelas ángulos correspondientes se tiene $\angle O\text{Ñ}P_B \cong \angle QQ_BO$, por sustitución donde $\angle PP_BO \cong \angle QQ_BO$. $\angle \text{Ñ}P_BO$ y $\angle PP_BO$ forman par lineal, entonces por sustitución $m\angle \text{Ñ}P_BO + m\angle P_B\text{Ñ}O = 180$, así que la suma de las medidas de los ángulos del $\triangle OP_B\text{Ñ}$ sería mayor a 180 lo cual genera una contradicción.

Por ello, queda demostrado que Q_B, P_B y O son colineales. $PO + OQ = PQ$, entonces por sustitución $P_BO + OQ_B = P_BQ_B$, lo que indica que $P_B - O - Q_B$. Lo anterior es análogo para $P_A{-}O - Q_A$ y $P_C{-}O - Q_C$. El anterior caso es análogo al caso $Q - O - P$.

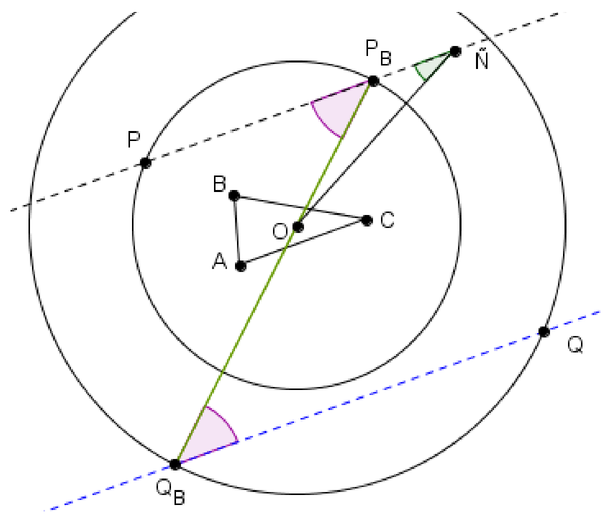


Figura 18. Teorema 7 RTC, caso 2.2

Teorema 8: Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, sean P y Q puntos diferentes en el plano, P_A, P_B, P_C y Q_A, Q_B, Q_C los puntos en RTC con P y Q respectivamente, entonces $P_AQ_A = P_BQ_B = P_CQ_C = PQ$.

Se puede presentar que Q, P y O sean colineales o que no lo sean. Si Q, P y O son colineales entonces:

Sea $Q - P - O$ (Figura 19. Teorema 8 RTC, caso 1) existen $\triangle QOQ_B$, $\triangle POP_B$, $\triangle Q_AOQ$, $\triangle P_AOP$, $\triangle QOQ_C$ y $\triangle POP_C$, los cuales son isósceles ya que P_A, P_B, P_C y Q_A, Q_B, Q_C están en RTC con P y Q respectivamente, por el teorema 7 y teniendo en cuenta lo anterior es posible afirmar que $QP + PO = Q_AP_A + P_AO$, como $PO = P_AO$ por ser lados de uno de los triángulo isósceles, entonces

$QP = Q_A P_A$. Haciendo el anterior procedimiento de forma análoga para P_B, Q_B, P_C y Q_C, y por sustitución entonces $Q_A P_A = Q_B P_B = Q_C P_C = QP$.

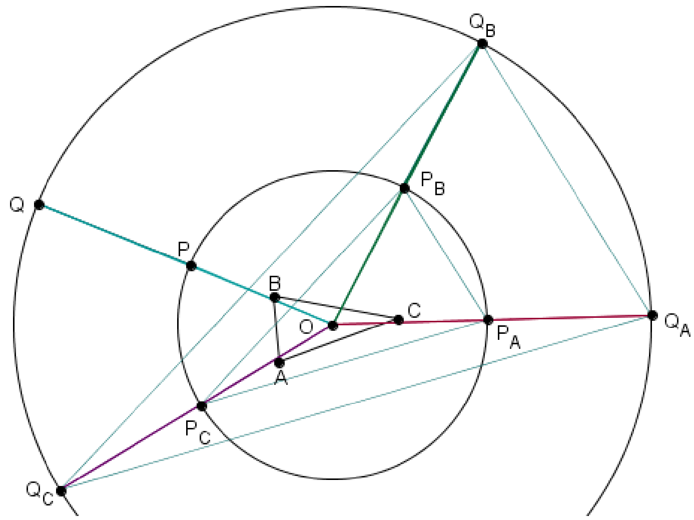


Figura 19. Teorema 8 RTC, caso 1.1

Lo anterior es análogo para $P - Q - O$, $O - P - Q$ y $O - Q - P$

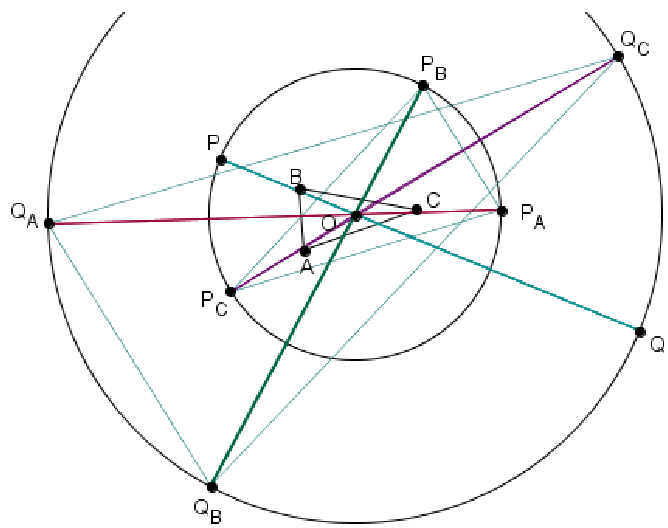


Figura 20. Teorema 8 RTC, caso 1.2

Sea $P - O - Q$ (Figura 20. Teorema 8 RTC, caso 1.2) existen $\triangle\, QOQ_B$, $\triangle\, POP_B$, $\triangle\, Q_A OQ$, $\triangle\, P_A OP$,$\triangle\, QOQ_C$ y $\triangle\, POP_C$, los cuales son isósceles ya que P_A, P_B, P_C y Q_A, Q_B, Q_C están en RTC con P y Q respectivamente, por el teorema 7 y teniendo en cuenta lo anterior $PO + OQ = P_A O + OQ_A$, entonces $PQ = P_A Q_A$. Haciendo el anterior procedimiento de forma análoga para P_B, Q_B, P_C y Q_C, y por sustitución entonces $Q_A P_A = Q_B P_B = Q_C P_C = QP$.

Lo anterior es análogo para $Q - O - P$.

Si Q, P y O no son colineales entonces:

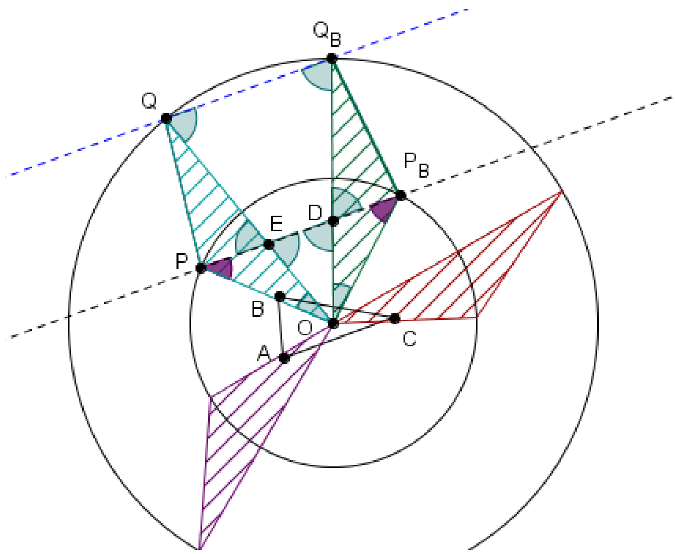


Figura 21. Teorema 8 RTC, caso 2

Sí Q, P y O no se encuentran alineados (Figura 21. Teorema 8 RTC, caso 2) se tienen $\triangle\, QOQ_B$, $\triangle\, POP_B$, $\triangle\, Q_A OQ_B$, $\triangle\, P_A OP_B$, $\triangle\, Q_A OQ_C$, $\triangle\, P_A OP_C$, $\triangle\, POQ$,$\triangle$ $P_A OQ_A$,$\triangle\, P_B OQ_B$ y $\triangle\, P_C OQ_C$. Inicialmente se mostrará que los $\triangle\, P_A OQ_A$,$\triangle$ $P_B OQ_B$ y $\triangle\, P_C OQ_C$ son congruentes mediante la semejanza de $\triangle\, Q_A OQ_B \sim \triangle$ $P_A OP_B$, $\triangle\, Q_A OQ_C \sim\triangle\, P_A OP_C$, después se mostrará la congruencia con el $\triangle\, POQ$ con $\triangle\, P_B OQ_B$ mediante las rectas l_3 y m_3, la recta m_3 es paralela al segmento $\overline{AC}$ por Q.

La relación entre $Q_B O$ y $P_B O$ la misma que $Q_A O$ y $P_A O$, ya que los dos triángulos son isósceles y estos son sus lados congruentes respectivamente, entonces $\frac{P_B O}{Q_B O} = \frac{P_A O}{Q_A O}$, así mismo por el teorema 6, $P_A P_B = \frac{P_A O}{Q_A O} \cdot Q_A Q_B$, entonces los $\triangle\, Q_A O Q_B$ y $\triangle\, P_A O P_B$son semejantes.

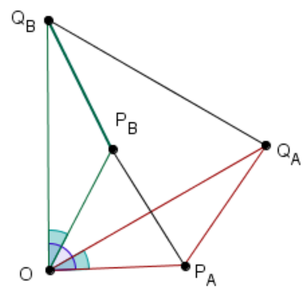


Figura 22. Teorema 8 RTC, caso 2.1

$m\angle Q_A O Q_B = m\angle Q_A O P_B + m\angle Q_B O P_B$ y $m\angle P_A O P_B = m\angle Q_A O P_B + m\angle Q_A O P_A$ (Figura 22. Teorema 8, caso 2.1) es verdadero, además se demostró que $m\angle Q_A O Q_B = m\angle P_A O P_B$, por semejanza de triángulos es posible afirmar que $\angle Q_B O P_B \cong \angle Q_A O P_A$, como $\overline{P_A O} \cong \overline{P_B O}$ y $\overline{Q_A O} \cong \overline{Q_B O}$ por ser radios de C_{OP} y C_{OQ}, por el criterio lado ángulo lado $P_A O Q_A \cong \triangle\, P_B O Q_B$. Análogo para $\triangle\, P_B O Q_B$ y $\triangle\, P_C O Q_C$, mostrando la semejanza $\triangle\, Q_A O Q_C \sim \triangle\, P_A O P_C$. Entonces por sustitución se tiene que lado $\triangle\, P_A O Q_A \cong \triangle\, P_B O Q_B \cong \triangle\, P_C O Q_C$, es decir que $P_A Q_A = P_B Q_B = P_C Q_C$.

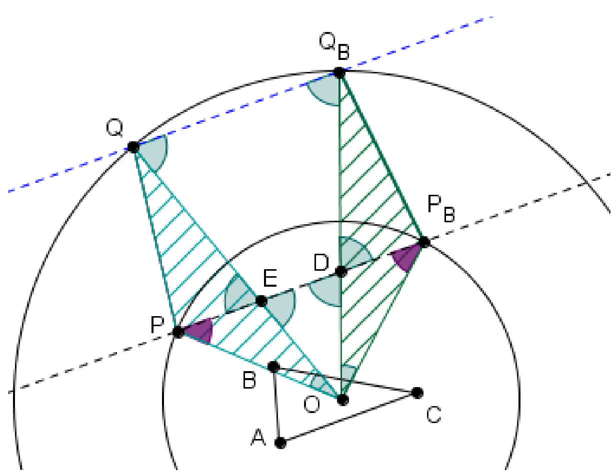


Figura 23. Teorema 8 RTC, caso 2.2

Sean $\triangle QOQ_B$ y $\triangle POP_B$ isósceles por estar en RTC con Q y P respectivamente, se concluye la relación de congruencia entre los ángulos $\angle OPP_B \cong \angle OP_BP$ y $\angle OQQ_B \cong \angle OQ_BQ$. Teniendo en cuenta que las rectas l_3 y m_3 son paralelas (Figura 23. Teorema 8 RTC, caso 2.2), ya que cada una es paralela al segmento $\overline{AC}$, E y D puntos de intersección entre $\overline{QO}$ y l_3, $\overline{Q_BO}$ y l_3 respectivamente, se tiene que$\angle DEO \cong \angle EDO$, por lo cual $\overline{EO} \cong \overline{DO}$ ya que $\triangle EDO$ resulta isósceles. Los ángulos $\angle PEO$ y $\angle P_BDO$ son congruentes por ser ángulos suplementarios de dos ángulos que son congruentes, por ello se deduce que $\angle EOP \cong \angle P_BOD$. Los $\triangle EOP$ y $\triangle DOP_B$ son congruentes por LAL, de lo cual se concluye que $\overline{DP_B} \cong \overline{PE}$. Los ángulos $\angle PEQ$ y $\angle P_BDQ_B$ son congruentes por ser opuestos por el vértice de dos ángulos que son congruentes. Finalmente, $\triangle QPO$ y $\triangle Q_BP_BO$ son congruentes por el criterio lado ángulo lado, entonces $\overline{P_BQ_B} \cong \overline{PQ}$

Por sustitución se tiene finalmente que $P_AQ_A = P_BQ_B = P_CQ_C = PQ$, quedando demostrado el teorema 8.

Capítulo 4: ¿Qué ocurre si el punto base es un punto diferente al circuncentro?

Básicamente para definir la *Relación Triangular Circuncéntrica* se tomó como punto base el circuncentro del triángulo inicial. Mediante la exploración con GeoGebra se descubrieron ocho teoremas, los cuales fueron presentados junto con su correspondiente demostración en el capítulo anterior.

4.1 Cambio de punto base; *Relación Triangular Incéntrica*

Ahora, surgen preguntas como ¿Qué pasaría si se toma un punto notable del triángulo diferente al circuncentro?, ¿Se cumplirán los ocho teoremas mencionados anteriormente, para otro punto notable del triángulo? Para dar respuesta a esas preguntas se decide tomar el punto notable como el incentro y cambiar una condición de la RTC para hacer una definición similar. Para la *Relación Triangular Incéntrica* el punto base no será el circuncentro sino el incentro del triángulo inicial, definiéndola así:

Dado el $\triangle ABC$ e I su incentro, para cada P punto del plano, diremos que P está en RTI con P' si se cumple que:

- El $\triangle \mathrm{PIP'}$es isósceles, donde $\overline{PO} \cong \overline{OP'}$.
- La recta que contiene los puntos P y P' es paralela a algún lado de $\triangle \mathrm{ABC}$.

Para referirnos a la *Relación Triangular Incéntrica*, al igual que en la RTC, se usará la abreviación RTI. Los pasos de construcción para hallar los puntos que están en RTI con un punto P del plano son completamente análogas, lo único que varía es en que se debe hallar el incentro del $\triangle ABC$, esto se logra con la herramienta *bisectriz* trazando las bisectrices del $\triangle ABC$, marcando con la herramienta *intersección de dos objetos* dos de las bisectrices para determinar el punto I, el cual será el incentro:

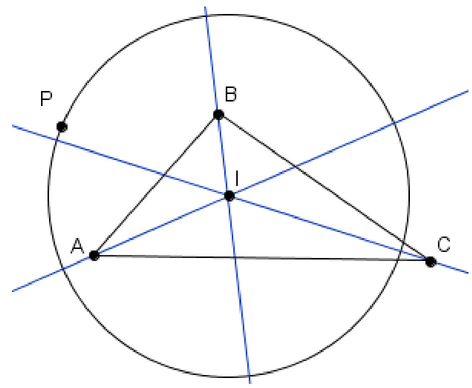


Figura 24. Incentro de $\triangle ABC$

Continuando así con los mismos pasos hechos en la RTC, determinando los puntos $P',\ P''$ y P'''.

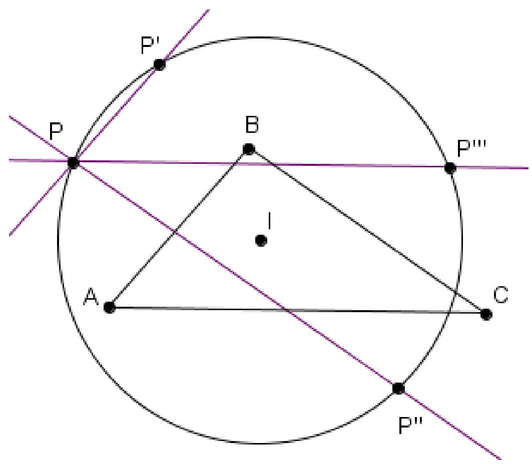


Figura 25. Determinación de los puntos $P',\ P''$ y P''' en RTI con P

Los puntos $P',\ P''$ y P''' están en RTI con el punto P, ya que los segmentos $\overline{IP'}$, $\overline{IP''}$ y $\overline{IP'''}$ tienen igual longitud que el segmento $\overline{IP}$ por ser radios de la circunferencia C_{IP}, así que los $\triangle PIP'$, $\triangle PIP''$ y $\triangle PIP'''$ son isósceles. Así mismo por construcción las rectas $\overleftrightarrow{PP'}$, $\overleftrightarrow{PP''}$ y $\overleftrightarrow{PP'''}$ son paralelas a algún lado del $\triangle ABC$. No es difícil notar que es la misma razón por la cual los puntos determinados por la construcción del capítulo anterior están en RTC con P.

Con lo anterior, el teorema 1 mencionado en el anterior capítulo quedó demostrado. Para el teorema 2 y teorema 3 la demostración es completamente análoga, solo basta cambiar el punto O por el punto I, concluyendo que son exactamente tres los puntos que están en RTI con P.

Veamos qué ocurre con el teorema 4 y el teorema 5, los cuales llamaremos teorema 4' y teorema 5' respectivamente:

Teorema 4': Dado el $\triangle ABC$, I y P puntos diferentes en el plano y los puntos P', P'' y P''' que están en RTC con P, entonces P', P'' y P''' no son colineales.

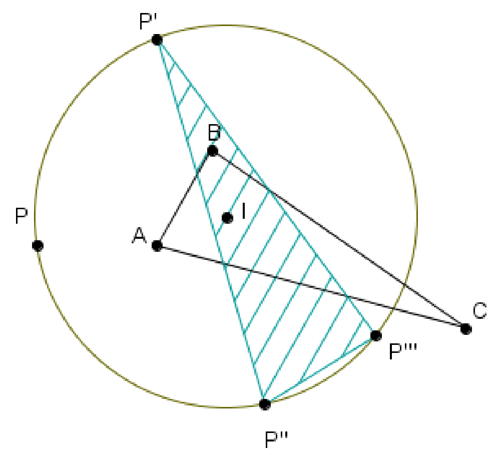


Figura 26. Teorema 4' RTI

Por el teorema 2' los puntos que están en RTI con P son exactamente tres, además por la forma de construcción estos están contenidos en la circunferencia C_{OP}, por tanto no son colineales, y por definición de triángulo la reunión de los segmentos $\overline{P'P''}, \overline{P''P'''}$ y $\overline{P'P'''}$ genera el $\triangle P'P''P''$.

Es fácil ver que la demostración para este teorema es la misma que la presentada en el capítulo anterior. Veamos qué ocurre con el teorema 5':

Teorema 5': Dado el $\triangle ABC$, I su incentro, para cada P punto en el plano y sus puntos $P'P''$ y P''' que están en RTI con P, se tiene que $\triangle ABC$ y $\triangle P''P'''P'$ son semejantes.

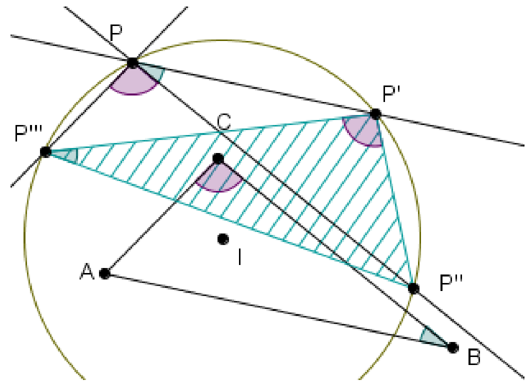


Figura 27. Teorema 5' RTI, caso 1

Sean P', P'', P''' puntos en RTI con P; sí P', P'', P''' son diferentes de P (Figura 27. Teorema 5' RTI, caso 1), por el teorema rectas paralelas – ángulos congruentes se tiene que $\angle P'''PP'' \cong \angle ACB$ y $\angle P''PP' \cong \angle ABC$, ya que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{P'''P}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{P'P}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{P''P}$. Por otra parte los $\angle P''PP' \cong \angle P''P'''P'$ y $\angle P'''PP'' \cong \angle P''P'P'''$ ya que cada par de ángulos intercepta el mismo arco. Como $\angle P'''PP'' \cong \angle ACB$ y $\angle P''PP' \cong \angle ABC$ por sustitución $\angle ABC \cong \angle P''P'''P'$ y $\angle ACB \cong \angle P''P'P'''$, con teorema AA se tiene finalmente que $\triangle ABC \sim \triangle P''P'''P'$.

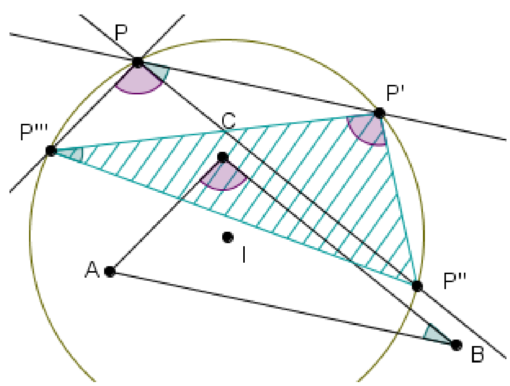


Figura 28. Teorema 5' RTI, caso 2

Sí $P''' = P$ (Figura 28. Teorema 5' RTI, caso 2), sea α el ángulo semi-inscrito cuyos rayos están contenidos en las rectas l_1 y l_3 que pasa por P, como $\overleftrightarrow{PP'} \cap l_3 = \{P\}$ y $l_3 \parallel \overleftrightarrow{AC}$, entonces $\overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{H\}$. $\alpha \cong \angle PHA \cong \angle BAC$ ya que son ángulos alternos internos determinados por rectas paralelas. Se tiene que $\angle P''PP' \cong \angle ABC$ por el teorema rectas paralelas – ángulos congruentes. Como la medida de un arco está determinada por el doble de la medida del ángulo que lo contiene, entonces $m\angle PP''P' = \frac{1}{2} m\,\widehat{PP'}$, además $m\alpha = \frac{1}{2} m\,\widehat{PP'}$, así que $\angle PP''P' \cong \alpha$, por sustitución de $\angle PP''P' \cong \alpha$ y $\angle P''PP' \cong \angle ABC$ se tiene que $\angle PP''P' \cong \angle BAC$, por el criterio de semejanza ángulo-ángulo entonces $\triangle ABC \sim \triangle P''P'''P'$.

Una vez demostrada la semejanza entre $ABC \sim \triangle P''P'''P'$, los puntos P', P'' y P''' que están en RTI con P serán notados como P_C, P_A y P_B respectivamente, al igual que en la RTC. Nótese que por construcción I es el circuncentro de $\triangle P_AP_BP_C$.

El teorema 6 presentado en la RTC en esencia no varía para la RTI, veamos cómo queda enunciado:

Teorema 6': Sea $\triangle ABC \sim \triangle P_AP_BP_C$, I el incentro y O el circuncentro del $\triangle ABC$, I el circuncentro de $\triangle P_AP_BP_C$, entonces la constante de proporcionalidad k entre estos dos triángulos está dada por $k = \frac{AO}{P_AI} = \frac{BO}{P_BI} = \frac{CO}{P_CI}$

Sean $\triangle ABC \sim \triangle P_AP_BP_C$ por definición de semejanza de triángulos se tiene que $k = \frac{AB}{P_AP_B} = \frac{BC}{P_BP_C} = \frac{AC}{P_AP_C}$, además por construcción I es el circuncentro de $\triangle P_AP_BP_C$, y O es el circuncentro de $\triangle ABC$, con esto y por definición de circuncentro $IP_C = P_AI$ y $AO = OC$, si $O \notin \overline{AC}$, entonces $\triangle AOC$ y $\triangle P_CIP_A$ son isósceles (Figura 29. teorema 6' RTI). Como $m\angle P_AP_BP_C = \frac{1}{2} m\angle P_AIP_C$ y $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\angle AOC$, entonces $m\angle P_AIP_C = m\angle AOC$ gracias a la semejanza de $\triangle ABC$ y $\triangle P_AP_BP_C$. Por lo anterior y el teorema de triángulo isósceles $\triangle AOC \sim \triangle P_CIP_A$. La constante de proporcionalidad entre $\triangle AOC$ y $\triangle P_CIP_A$

es k, ya que $\frac{AC}{P_AP_C} = k$, obteniendo $k = \frac{AC}{P_AP_C} = \frac{CO}{P_CI} = \frac{AO}{P_AI}$. Con el razonamiento anterior los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle P_BIP_A$ también son semejantes, como $k = \frac{AB}{P_AP_B}$, se obtiene $k = \frac{AB}{P_AP_B} = \frac{BO}{P_BI} = \frac{AO}{P_AI}$.

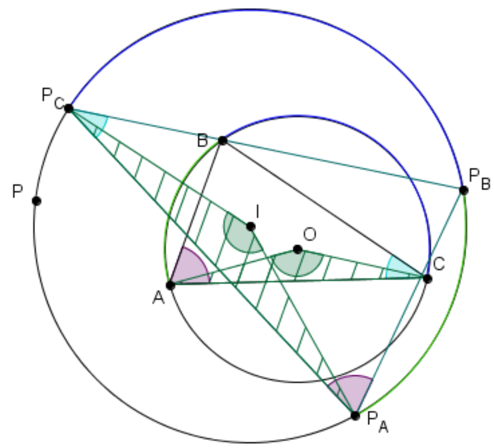


Figura 29. Teorema 6' RTI

En conclusión la constante de proporcionalidad k entre $\triangle ABC$ y $\triangle P_AP_BP_C$ está dada por $k = \frac{AO}{P_AI} = \frac{BO}{P_BI} = \frac{CO}{P_CI}$.

Al igual que para los teoremas hechos para la RTC las demostraciones son análogas, así que si quedase alguna duda respecto al cumplimiento de los teoremas expuestos en el capítulo anterior para la RTI, se presenta a continuación el teorema 8' y la demostración del segundo caso:

Teorema 8': Dado el $\triangle ABC$, I su incentro, sean P y Q puntos diferentes en el plano, P_A, P_B, P_C y Q_A, Q_B, Q_C los puntos en RTI con P y Q respectivamente, entonces $P_AQ_A = P_BQ_B = P_CQ_C = PQ$.

Sí Q, P y O no se encuentran alineados (Figura 30. Teorema 8' RTI) se tienen $\triangle QIQ_B$, $\triangle PIP_B$, $\triangle Q_AIQ_B$, $\triangle P_AOI$, $\triangle Q_AIQ_C$, $\triangle P_AIP_C$, $\triangle PIQ$,$\triangle P_AIQ_A$,$\triangle P_BIQ_B$

y $\triangle P_C I Q_C$. Inicialmente se mostrará que $\triangle P_A I Q_A$,$\triangle P_B I Q_B$ y $\triangle P_C I Q_C$ son congruentes mediante la semejanza $\triangle Q_A I Q_B \sim \triangle P_A I P_B$, $\triangle Q_A I Q_C \sim \triangle P_A I P_C$, después se mostrará la congruencia con el $\triangle PIQ$ con $\triangle P_B I Q_B$ mediante las rectas l_3 y m_3, la recta m_3 es la paralela al segmento $\overline{AC}$ por Q.

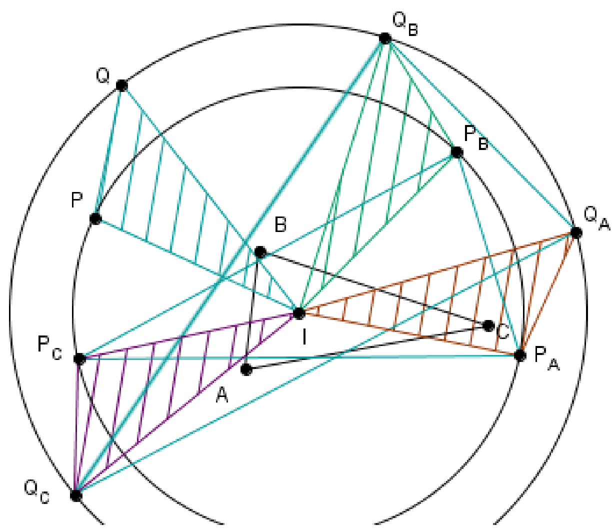


Figura 30. Teorema 8' RTI

La relación entre $Q_B I$ y $P_B I$ la misma que $Q_A I$ y $P_A I$, ya que los dos triángulos son isósceles y estos son sus lados congruentes respectivamente, entonces $\frac{P_B I}{Q_B I} = \frac{P_A I}{Q_A I}$, así mismo por el teorema 6' $P_A P_B = \frac{P_A I}{Q_A I} \cdot Q_A Q_B$, entonces $\triangle Q_A I Q_B$ y $\triangle P_A I P_B$ son semejantes.

Como $m\angle Q_A I Q_B = m\angle Q_A I P_B + m\angle Q_B I P_B$ y $m\angle P_A I P_B = m\angle Q_A I P_B + m\angle Q_A I P_A$, como ya se demostró que $m\angle Q_A I Q_B = m\angle P_A I P_B$ por semejanza de triángulos es posible afirmar que $\angle Q_B I P_B \cong \angle Q_A I P_A$, como $\overline{P_A I} \cong \overline{P_B I}$ y $\overline{Q_A I} \cong \overline{Q_B I}$ por ser radios de C_{IP} y C_{IQ}, por el criterio lado ángulo lado $\triangle P_A I Q_A \cong \triangle P_B I Q_B$. Análogo para $\triangle P_B I Q_B$ y $\triangle P_C I Q_C$, mostrando $\triangle Q_A I Q_C \sim \triangle P_A I P_C$. Entonces, por sustitución se tiene que lado $\triangle P_A I Q_A \cong \triangle P_B I Q_B \cong \triangle P_C I Q_C$, es decir que $P_A Q_A = P_B Q_B = P_C Q_C$.

Sean $\triangle\, QIQ_B$ y $\triangle\, PIP_B$ isósceles por estar en RTI con Q y P respectivamente, se concluye la relación de congruencia entre los ángulos $\angle IPP_B \cong \angle IP_BP$ y $\angle IQQ_B \cong \angle IQ_BQ$. Teniendo en cuenta que las rectas l_3 y m_3 son paralelas (Figura 31. Teorema 8' RTI, caso 1), ya que cada una es paralela a $\overline{AC}$, E y D puntos de intersección entre $\overline{QI}$ y l_3, $\overline{Q_BI}$ y l_3 respectivamente, se tiene que $\angle DEI \cong \angle EDI$, por lo cual $\overline{EI} \cong \overline{DI}$ ya que $\triangle\, EDI$ resulta isósceles.

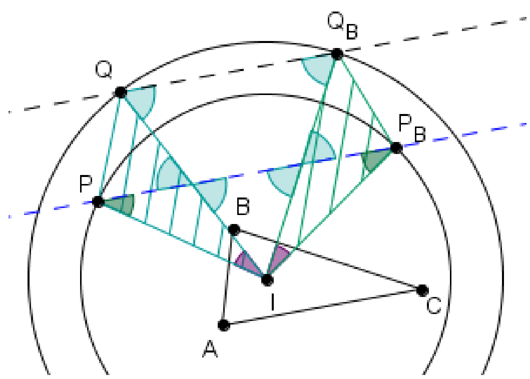


Figura 31. Teorema 8' RTI, caso 1

Los ángulos $\angle PEI$ y $\angle P_BDI$ son congruentes por ser ángulos suplementarios de dos ángulos que son congruentes, por ello se deduce que $\angle EIP \cong \angle P_BID$. Los $\triangle\, EIP$ y $\triangle\, DIP_B$ son congruentes por el criterio lado ángulo lado, de lo cual se dice que $\overline{DP_B} \cong \overline{PE}$. Los ángulos $\angle PEQ$ y $\angle P_BDQ_B$ son congruentes por ser opuestos por el vértice de dos ángulos que son congruentes. Finalmente los $\triangle\, QPI$ y $\triangle\, Q_BP_BI$ son congruentes por el criterio lado ángulo lado, entonces $\overline{P_BQ_B} \cong \overline{PQ}$. Por sustitución $P_AQ_A = P_BQ_B = P_CQ_C = PQ$.

4.2 Independización del punto base; *Relación Triangular*

Como se mostró anteriormente, tanto los teoremas como sus demostraciones son completamente análogas para la RTC y la RTI, lo que permite preguntarse si el punto que se tome como base, es decir el circuncentro, el incentro o cualquier otro punto sea notable o no del triángulo, hace que cambien o no los anteriores resultados. A continuación se presentan los ocho teoremas obtenidos, pero no las demostraciones de estos. Haciendo uso de GeoGebra se comparan los teoremas anteriores con la siguiente definición de *Relación Triangular*, llamada en adelante RT:

Dado el $\triangle ABC$, R un punto del plano, para cada P punto del plano, diremos que P está en RT con P' si se cumple que:

- El $\triangle \mathrm{PRP'}$es isósceles, donde $\overline{PO} \cong \overline{OP'}$.
- La recta que contiene los puntos P y P' es paralela a algún lado de $\triangle \mathrm{ABC}$.

Se presentan los ocho teoremas en el siguiente cuadro:

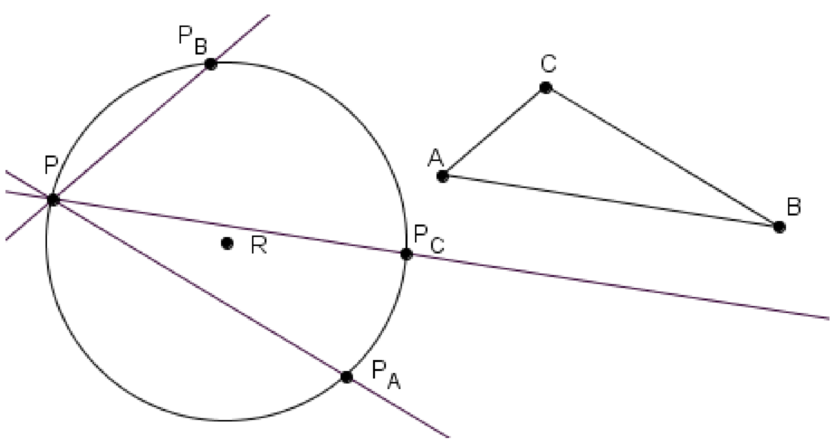
<table>
<tr><th colspan="2">Determinación de los puntos P' que estan en relación con P</th></tr>
<tr><th>RTC</th><th>RT</th></tr>
<tr><td colspan="2">Básicamente la determinación de los puntos tanto en la RTC como en la RT es exactamente la misma, como se muestra en la Figura 32, partiendo del triángulo y los puntos P y R, los cuales son diferentes, se traza una circunferencia con centro en R y radio PR. Después se trazan las rectas paralelas a cada lado del triángulo y por último se marcan los puntos de intersección entre la circunferencia descrita y las rectas paralelas.


Figura 32. Determinación de los puntos en RT con P</td></tr>
</table>

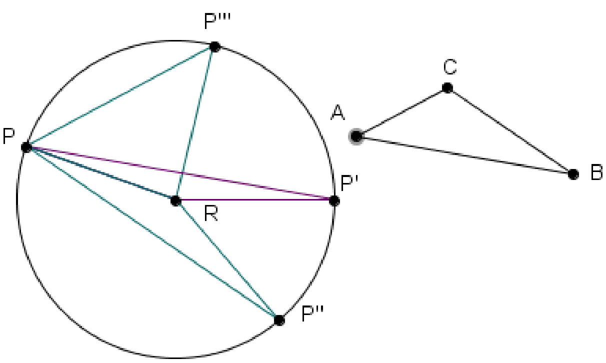
<table>
<tr><th colspan="2">Teorema 1</th></tr>
<tr><th>RTC</th><th>RT</th></tr>
<tr><td>Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro y P un punto en el plano, existen tres puntos que están en RTC con P.</td><td>Dado el $\triangle ABC$, R y P puntos diferentes en el plano, existen tres puntos que están en RT con P.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La esencia de la demostración de este teorema radica en la construcción de los puntos relacionados, como la construcción sitúa a los puntos P', P'' y P''' en la circunferencia, entonces $\triangle \mathrm{PRP}'$, $\triangle \mathrm{PRP}''$ y $\triangle \mathrm{PRP}'''$ son isósceles y las rectas $\overleftrightarrow{PP'}$, $\overleftrightarrow{PP''}$ y $\overleftrightarrow{PP'''}$ son paralelas a algún lado del $\triangle \mathrm{ABC}$.


Figura 33. Teorema 1 RT

En la imagen 33 se puede apreciar que los puntos determinados mediante las rectas paralelas y la circunferencia cumplen con las condiciones de la RT.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Teorema 2</th></tr>
<tr><th>RTC</th><th>RT</th></tr>
<tr><td>Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro y P un punto en el plano, existen únicamente tres puntos que están en RTC con P.</td><td>Dado el $\triangle ABC$, R y P puntos diferentes en el plano, existen únicamente tres puntos que están en RT con P.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Como ocurrió para la RTI, la demostración para la RT es completamente análoga, ya que lo principal de la demostración está en la unicidad de cada recta paralela trazada y el que éstas no pueden determinar más de dos</td></tr>
</table>

puntos de intersección con la circunferencia, lo cual es un hecho en la geometría euclidiana independiente del punto R que se tome.

<table>
<tr><th colspan="2">Teorema 3</th></tr>
<tr><th>RTC</th><th>RT</th></tr>
<tr><td>Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, P un punto en el plano, P', P'' y P''' los puntos que están en RTC con P, este último coincide con uno de los puntos si solo si $\overleftrightarrow{OP}$ es perpendicular a alguna de las rectas que contiene a algún lado del triángulo.</td><td>Dado el $\triangle ABC$, R y P puntos diferentes en el plano, P', P'' y P''' los puntos que están en RT con P, este último coincide con uno de los puntos si solo si $\overleftrightarrow{OP}$ es perpendicular a alguna de las rectas que contiene a algún lado del triángulo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se sabe que para que la recta paralela a algún lado del triángulo sea tangente a la circunferencia, es necesario que sea perpendicular a la recta que contiene el punto de contacto y el centro de la circunferencia, sin importar cuál sea la relación de R con el triángulo, como se muestra en la Figura 34. Así mismo únicamente pueden ser un punto el que coincida con P, ya que no hay dos rectas diferentes que contengan a lados diferentes del triángulo que sean perpendiculares a $\overleftrightarrow{RP}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

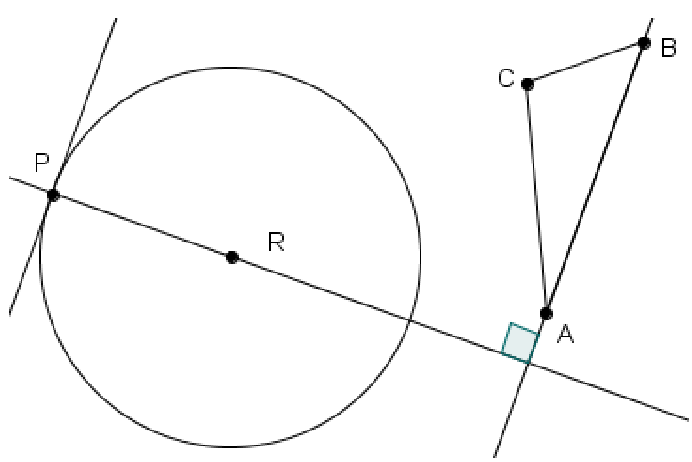


Figura 34. Teorema 3 RT

</td></tr>
</table>

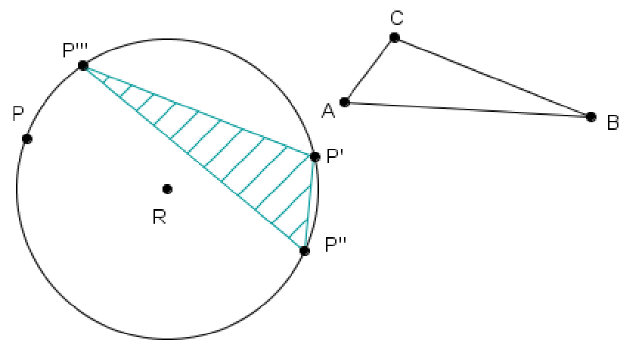
<table>
<tr><th colspan="2">Teorema 4</th></tr>
<tr><th>RTC</th><th>RT</th></tr>
<tr><td>Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, P un punto en el plano y los puntos P', P'' y P''' que están en RTC con P, entonces P', P'' y P''' no son colineales.</td><td>Dado el $\triangle ABC$, R y P puntos diferentes en el plano y los puntos $P'P''$ y P''' que están en RTC con P, entonces P', P'' y P''' no son colineales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Debido que la construcción para la RT es análoga la hecha con la RTC, entonces los puntos al quedar determinados en una circunferencia permiten concluir que no son colineales (Figura 35. Teorema 4 RT), determinando el triángulo cuyos vértices son los puntos relacionados con P.


Figura 35. Teorema 4 RT</td></tr>
<tr><th colspan="2">Teorema 5</th></tr>
<tr><th>RTI</th><th>RT</th></tr>
<tr><td>Dado el $\triangle ABC$, I su incentro, para cada P punto en el plano y sus puntos P', P'' y P''' que están en RTC con P, se tiene que $\triangle ABC$ y $\triangle P''P'''P'$ son semejantes.</td><td>Dado el $\triangle ABC$, R y P puntos diferentes en el plano y sus puntos P', P'' y P''' que están en RT con P, se tiene que $\triangle ABC$ y $\triangle P''P'''P'$ son semejantes.</td></tr>
</table>

Como se pudo ver en la demostración de este teorema hecha para la RTI, lo único que se hizo diferente a la demostración de la RTC, fue reemplazar el punto O por el punto I. Al no cambiar de alguna manera la demostración en la RTI, ésta tampoco cambia en la RT.

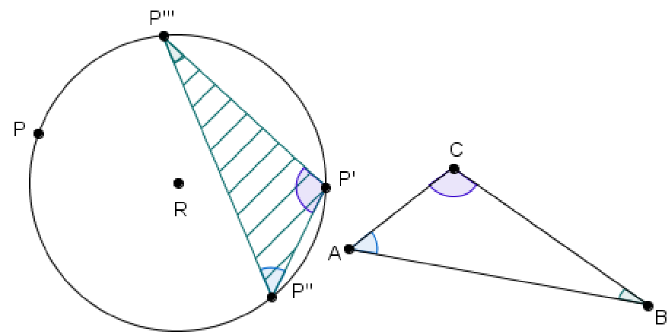


Figura 36. Teorema 5 RT

En esta figura se muestra la correspondencia en los ángulos de cada triángulo, permitiendo notar su relación de semejanza.

<table>
<tr><th colspan="2">Teorema 6</th></tr>
<tr><th>RTI</th><th>RT</th></tr>
<tr><td colspan="2">Como fue probada la semejanza entre $\triangle ABC$ y $\triangle P''P'''P'$, se mantiene la notación utilizada en la RTC y la RTI.</td></tr>
<tr><td>Sea $\triangle ABC \sim \triangle P_AP_BP_C$, I el incentro y O el circuncentro del $\triangle ABC$, I el circuncentro de $\triangle P_AP_BP_C$, entonces la constante de proporcionalidad k entre estos dos triángulos está dada por $k = \frac{AO}{P_AI} = \frac{BO}{P_BI} = \frac{CO}{P_CI}$</td><td>Sea $\triangle ABC \sim \triangle P_AP_BP_C$, O el circuncentro del $\triangle ABC$, R el circuncentro de $\triangle P_AP_BP_C$, entonces la constante de proporcionalidad k entre estos dos triángulos está dada por $k = \frac{AO}{P_AR} = \frac{BO}{P_BR} = \frac{CO}{P_CR}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">El teorema 6 indica que la relación numérica existente entre $\triangle ABC$ y $\triangle P_AP_BP_C$, la cual está dada por los radios de C_{OC} (sin perder generalidad) y C_{RP}, hace completamente análoga la demostración de la RT como la RTI (Figura 37. Teorema 6 RT).</td></tr>
</table>

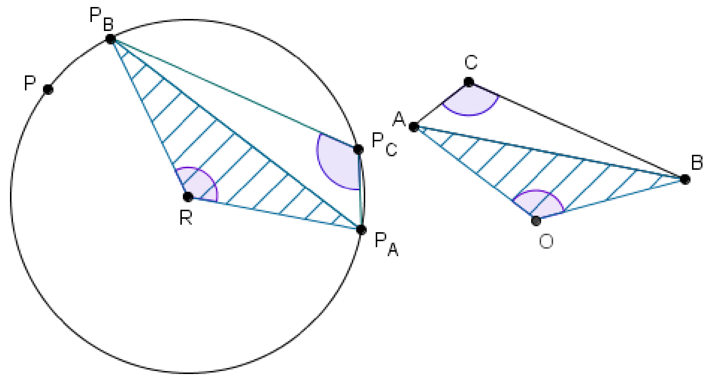


Figura 37. Teorema 6 RT

Teorema 7	
RTC	**RT**
Dado el $\triangle ABC$, O su circuncentro, sean P y Q puntos diferentes en el plano, si P, Q y O son colineales entonces sus correspondientes puntos relacionados son colineales a su vez.	Dado el $\triangle ABC$, R, P y Q puntos diferentes en el plano, si P, Q y R son colineales entonces sus correspondientes puntos relacionados son colineales a su vez.

Al igual que para la RTI, el teorema 7 para la RT se demuestra de la misma forma que para la RTC, cambiando únicamente el punto O por el punto R.

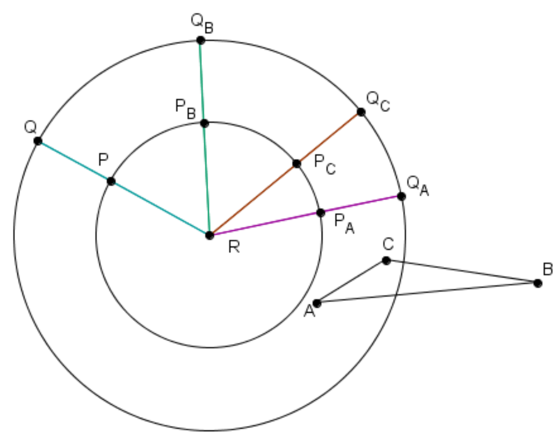


Figura 38. Teorema 7 RT

Esta imagen permite ver lo enunciado en el teorema 7 de la RT, ya que se presenta la colinealidad entre Q, P y R y sus puntos asociados.

Teorema 8	
RTI	**RT**
Dado el $\triangle ABC$, I su incentro, sean P y Q puntos diferentes en el plano, P_A, P_B, P_C y Q_A, Q_B, Q_C los puntos en RTI con P y Q respectivamente, entonces $P_AQ_A = P_BQ_B = P_CQ_C = PQ$.	Dado el $\triangle ABC$, R, P y Q puntos diferentes en el plano, P_A, P_B, P_C y Q_A, Q_B, Q_C los puntos en RT con P y Q respectivamente, entonces $P_AQ_A = P_BQ_B = P_CQ_C = PQ$.

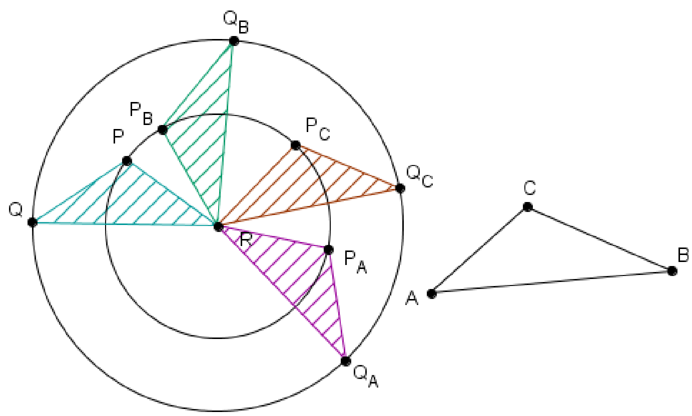


Figura 39. Teorema 8 RT

De cierta forma la demostración para este teorema está sustentada con el teorema 7, lo cual permite saber que es válida para la RT. Esta imagen muestra los triángulos que permiten demostrar el teorema 8 de la RT.

Con lo anterior se puede concluir que la RTC y la RTI son casos donde se especifica el punto base del $\triangle ABC$, es decir que son casos particulares de la RT.

Capítulo 5: la RT vista como una función

Teniendo en cuenta la definición de RT obtenida en el capítulo anterior, se concluyó que el punto base de la definición es independiente del triángulo, es decir no es algún punto notable de él o un punto que tenga una relación directa con él. Por teoremas anteriores se sabe que para cada P del plano existen tres puntos que están en RT con él, así mismo que por cada lado del triángulo existe un punto que está en RT con él P escogido. Por ello se decide continuar con este trabajo de grado estudiando la función que asigna a cada punto P del plano el único punto que está en RT con él, esto se logra tomando de forma independiente una recta que contenga un lado del triángulo base, el punto P y el punto R, con el fin de conocer si esta información es relevante y aporta al estudio de propiedades asociadas a la definición.

5.1 Determinación de la coordenada del punto P' en RT con un P del plano

Para comenzar, se va a utilizar el plano cartesiano como sistema de referencia, además como el punto base en la definición de la RT es fijo, se decide que éste será el origen del plano cartesiano, es decir $R(0,0)$, la otra coordenada y las ecuaciones que son necesarias para la determinación de la coordenada del punto P' en RT con un P del plano son:

- La ecuación de la recta en la cual está contenido algún lado del triángulo base es considerada como $y = mx + h$.
- La coordenada del punto P cualquiera de la definición, es denotado como $P(a, b)$.
- La ecuación de la circunferencia con radio RP y centro R es notada como $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, ya que tiene su centro en el origen.

- La recta paralela al lado del triángulo escogido por el punto P esta dada por la ecuación $y = m(x - a) + b$, ya que al ser paralela a la recta $y = mx + h$ tiene igual pendiente y se conoce que pasa por el punto $P(a, b)$.

El punto P' tendrá componentes a' y b'.

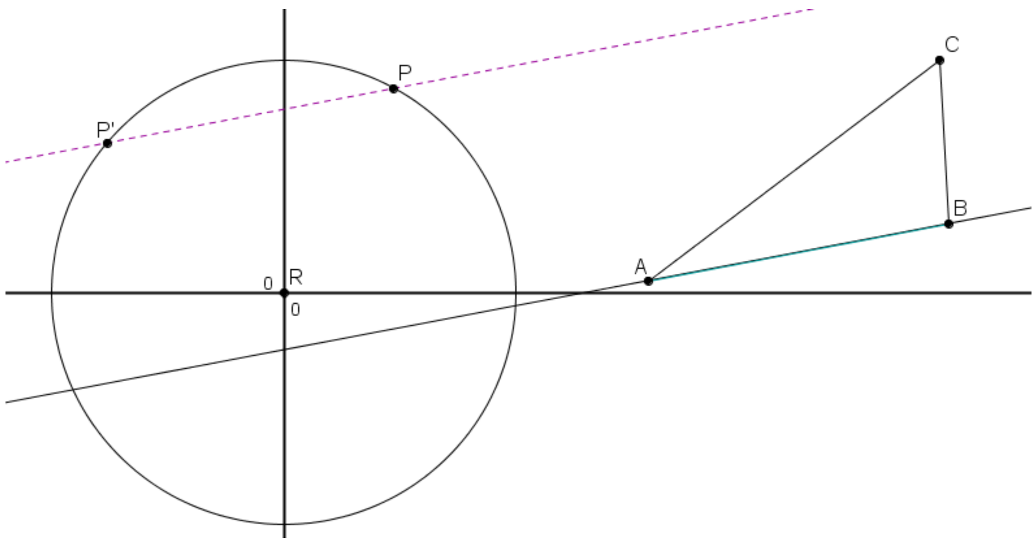


Figura 40. Función RT

Para comenzar se piensa hallar la coordenada en x del punto P', como éste está determinado por la intersección entre la recta $y = m(x - a) + b$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ entonces se sustituye en la ecuación de la circunferencia y por $m(x - a) + b$:

$$x^2 + (m(x - a) + b)^2 = a^2 + b^2$$

Es decir:

$$x^2 + \left((b - ma) + mx\right)^2 = a^2 + b^2$$

Desarrollando $\left((b - ma) + mx\right)^2$ se obtiene:

$$x^2 + (b - ma)^2 + 2m(b + ma)x + m^2x^2 = a^2 + b^2$$

Agrupando los términos:

$$x^2(1+m^2)+2m(b-ma)x=a^2+b^2-(b-ma)^2$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad por $1+m^2$, con el objetivo de completar el cuadrado en seguida se obtiene:

$$x^2+\frac{2m(b-ma)}{1+m^2}x=\frac{a^2+b^2-(b-ma)^2}{1+m^2}$$

Luego:

$$x^2+\frac{2m(b-ma)}{1+m^2}x+\frac{m^2(b-ma)^2}{(1=m^2)^2}=\frac{a^2+b^2-b^2+2mab-m^2a^2}{1+m^2}+\frac{m^2(b-ma)^2}{(1+m^2)^2}$$

Factorizando:

$$\left(x+\frac{m(b-ma)}{1+m^2}\right)^2=\frac{a^2+2mab-m^2a^2}{1+m^2}+\frac{m^2(b-ma)^2}{(1+m^2)^2}$$

En seguida se busca reducir términos así que se hacen las operaciones correspondientes en el lado derecho de la igualdad:

$$\left(x+\frac{m(b-ma)}{1+m^2}\right)^2=\frac{(1+m^2)[a^2+2mab-m^2a^2]+m^2(b-ma)^2}{(1+m^2)^2}$$

$$\left(x+\frac{m(b-ma)}{1+m^2}\right)^2=\frac{a^2+2mab-m^2a^2+m^2a^2+2m^3ab-m^4a^2+m^2b^2-2m^3ab+m^4a^2}{(1+m^2)^2}$$

Con lo anterior se obtiene:

$$\left(x+\frac{m(b-ma)}{1+m^2}\right)^2=\frac{a^2+2mab+m^2b^2}{(1+m^2)^2}$$

Factorizando:

$$\left(x+\frac{m(b-ma)}{1+m^2}\right)^2=\frac{(a+mb)^2}{(1+m^2)^2}$$

Al sacar raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad se determina el x_1 y el x_2, alguna de estas dos respuestas es la que determina la componente en x del punto P y el otro la componente en x de P' :

$$x_1 = \frac{a + mb - m(b - ma)}{1 + m^2}$$

Entonces:

$$x_1 = \frac{a + mb - mb + m^2 a}{1 + m^2}$$

Obteniendo al factorizar:

$$x_1 = \frac{a(1 + m^2)}{1 + m^2}$$

Es decir:

$$x_1 = a \text{ y } x_2 = -\left(\frac{a + mb - m(b - ma)}{1 + m^2}\right)$$

Es decir:

$$x_2 = \frac{-a - mb - mb + m^2 a}{1 + m^2}$$

Obteniendo al factorizar:

$$x_2 = \frac{a(m^2 - 1) - 2mb}{1 + m^2}$$

El resultado de x_1 indica que la recta $y = m(x - a) + b$ se interseca con la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ en a, lo que indica que es la componente en x del punto P, por ello x_2 es la coordenada en x del punto P', es decir a'.

Ahora se reemplaza x_2 en $y = m(x - a) + b$ para obtener la componente en y del punto P', es decir b':

$$b' = y = m\left(\left(\frac{a(m^2-1)-2mb}{1+m^2}\right)-a\right)+b$$

Entonces:

$$b' = m\left(\frac{-2a-2mb}{1+m^2}\right)+b$$

Eliminando los paréntesis:

$$b' = \frac{-2ma-m^2b+b}{1+m^2}$$

Obteniendo finalmente:

$$b' = \frac{b(1-m^2)-2ma}{1+m^2}$$

Las componentes en x y y del punto P' son:

$$a' = \frac{a(m^2-1)-2mb}{1+m^2} \quad \text{y} \quad b' = \frac{b(1-m^2)-2ma}{1+m^2}$$

5.2 RT vista como una transformación

Como se está haciendo la correspondencia en el plano indicando que a cada punto P le corresponde un único punto P', en consecuencia se puede ver esta transformación como una función. La matriz asociada a esta transformación está determinada por las coordenadas de los puntos a' y b', de la siguiente forma:

$$a' = \frac{1}{1+m^2}[a(m^2-1)-2mb] \text{ y } b' = \frac{1}{1+m^2}[b(1-m^2)-2ma]$$

Así que la matriz para el vector $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$ está dada por:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Transformaciones como simetrías, homotecias, rotaciones y traslaciones tienen una matriz asociada, a continuación se buscan las condiciones necesarias para que la matriz que se obtuvo con las coordenadas del punto P' determine algunas de las transformaciones nombradas.

La simetría tiene asociada las siguientes matrices de acuerdo al eje de simetría:

- Si el eje de simetría es respecto al eje x, entonces debe existir valores de m que validen la igualdad $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Para ello resolver las siguientes ecuaciones permitirá conocer el valor de m, para el cual se determina una simetría respecto al eje x.

- $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2} = 1$, al resolver la ecuación se presenta que $1 = -1$ lo cual es falso.

Como m no puede satisfacer $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2} = 1$, entonces se determina que no hay una simetría respecto al eje x en algún caso.

- Si el eje de simetría esta dado respecto al eje y, entonces entonces debe existir valores de m que validen la igualdad $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para ello resolver las siguientes ecuaciones permitirá conocer el valor de m, para el cual se determina una simetría respecto al eje y.

- $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2} = -1$, entonces $m = 0$
- $-\frac{2m}{1+m^2} = 0$, entonces $m = 0$
- $\frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2} = 1$, entonces $m = 0$

Como m satisface las anteriores tres ecuaciones, entonces se puede determinar que cuando la pendiente de la recta que contiene a un lado del triángulo sea cero, entonces el punto P' está en simetría respecto al eje y con P'.

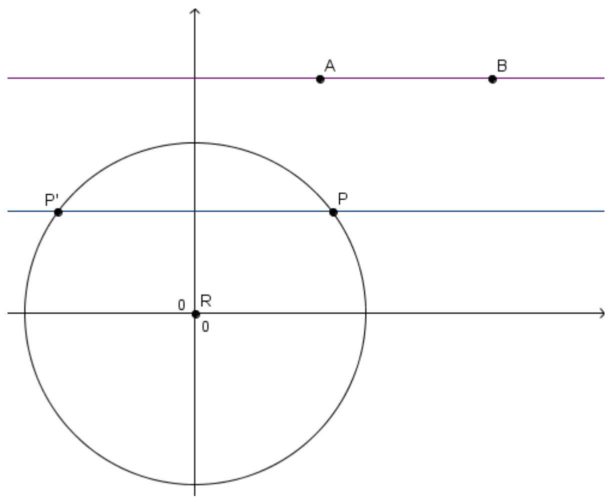


Figura 41. Simetría respecto el eje y

- Si el eje de simetría esta dado respecto a la recta $y = x$, entonces entonces debe existir valores de m que validen la igualdad $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Para ello resolver las siguientes ecuaciones permitirá conocer el valor de m, para el cual se determina una simetría respecto a la recta $y = x$

- $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2} = 0$, entonces $m = 1$ o $m = -1$

- $-\frac{2m}{1+m^2} = 1$, entonces $m = -1$
- $\frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2} = 0$, entonces $m = 1$ o $m = -1$

Como m satisface las anteriores tres ecuaciones cuando es -1, entonces se puede determinar que cuando la pendiente de la recta que contiene a un lado del triángulo es -1, entonces el punto P' está en simetría respecto a la recta $y = x$ con P'.

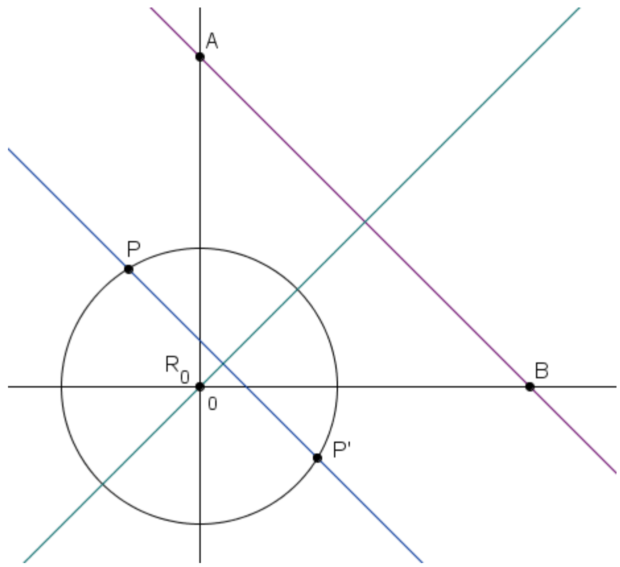


Figura 42. Simetría respecto a la recta $y = x$

Para la homotecia se deben buscar valores de m que validen la igualdad $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, entonces:

- $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2} = k$, entonces $m = \sqrt{\frac{k+1}{1-k}}$
- $\frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2} = k$, entonces $m = \sqrt{\frac{1-k}{k+1}}$

Al igualar $m = \sqrt{\frac{k+1}{1-k}}$ y $m = \sqrt{\frac{1-k}{k+1}}$, se obtiene:

$$\sqrt{\frac{1-k}{k+1}} = \sqrt{\frac{k+1}{1-k}}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados:

$$\frac{1-k}{1+k} = \frac{k+1}{1-k}$$

Multiplicando $1-k$ por $1-k$ y $k+1$ por $1+k$, se obtiene:

$$k^2 - 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$$

Así que:

$$-2k = 2k$$

Entonces k debe ser igual a 0, si esto ocurre entonces la matriz asociada a la transformación es una matriz nula, lo que indica que no puede darse una homotecia.

La rotación tiene asociada la matriz $\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$, entonces veamos cuales valores de m satisfacen $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$:

- $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2} = cos\theta$, entonces $m = \sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}}$
- $\frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2} = cos\theta$, entonces $m = \sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}}$
- $-\frac{2m}{1+m^2} = -sen\theta$, entonces $m = \frac{cos\theta+1}{sen\theta}$ o $m = \frac{1-cos\theta}{sen\theta}$
- $-\frac{2m}{1+m^2} = sen\theta$, entonces $m = \frac{cos\theta-1}{sen\theta}$ o $m = \frac{-1-cos\theta}{sen\theta}$

Al igualar $m = \frac{cos\theta+1}{sen\theta}$ y $m = \frac{cos\theta-1}{sen\theta}$, se tiene que 1 es igual que -1, lo cual es falso. Al igualar $m = \frac{cos\theta+1}{sen\theta}$ y $m = \frac{-1-cos\theta}{sen\theta}$, se tiene que $cos\theta$ debe ser igual a 1, lo cual solo se logra con un $\theta = 0$, como $sen0 = 0$ entonces se indetermina el cociente $\frac{-1-cos\theta}{sen\theta}$, lo cual hace que se descarte esa opción. Probando con $m = \frac{1-cos\theta}{sen\theta}$ y $\frac{cos\theta-1}{sen\theta}$, se obtiene $cos\theta = 1$, entonces se indetermina el cociente $\frac{1-cos\theta}{sen\theta}$. Igualmente al tomar $m = \frac{1-cos\theta}{sen\theta}$ y $m = \frac{-1-cos\theta}{sen\theta}$, se obtiene que 1 es igual que -1, lo cual es falso. Por lo anterior se descarta la rotación como transformación en la RT.

La traslación tiene asociada la matriz $\begin{bmatrix} a+u \\ b+v \end{bmatrix}$, entonces veamos cuales calores de m satisfacen $\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix} m^2-1 & -2m \\ -2m & 1-m^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+u \\ b+v \end{bmatrix}$:

- $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2}a - \frac{2m}{1+m^2}b = a+u$, entonces $m = \frac{\sqrt{b^2-2au-u^2}-b}{u}$
- $-\frac{2m}{1+m^2}a + \frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2}b = b+v$, entonces $m = \frac{\sqrt{a^2-2bv-v^2}-a}{2b+v}$

La posibilidad de que haya una traslación depende únicamente de los valores que se le asignen a u y v, es decir u debe ser $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2}a - \frac{2m}{1+m^2}b - a$, así mimo v debe ser $-\frac{2m}{1+m^2}a + \frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2}b - b$, cuando u y v cumplan estas ecuaciones simultáneamente con los valores de la ecuación de la recta que contiene un lado del triángulo, se dará la traslación.

La información que se obtuvo de la función que asigna a cada punto P del plano un punto P' que está en RT con él, es la simetría respecto al eje y y a la recta $y = x$ cuando la pendiente de la recta inicial es 0 y -1 respectivamente, así mismo mediante la matriz asociada a la función de la

RT es posible determinar que esta función no es una homotecia ni una rotación. Finalmente para que la función sea traslación debe tener condiciones específicas presentadas anteriormente.

Conclusiones

A pesar de que desde el inicio del trabajo se pensó que al estudiar la RTC se encontrarían diferentes propiedades a las encontradas cuando se modifica el punto base, se presenta una generalidad que de acuerdo con el estudio realizado, se puede concluir que la RTC es un caso particular de la relación denominada como RT, ya que al cumplirse la definición de RT para cualquier punto base del plano, la RTC pasa a ser una particularización del punto base, escogiendo a este como el circuncentro del triángulo, lo mismo ocurre para la RTI, este un caso particular de la RT ya que se toma el incentro del triángulo base. Por ello, la definición que permite generalizar el estudio hecho es el de la relación llamada RT.

Se determinó que hay únicamente tres puntos diferentes en RT con un punto P del plano, en un caso particular si la recta que contiene el punto P y el punto base de la definición es perpendicular a alguna de las rectas del triángulo, uno de los puntos en RT con P coincide con P. Además se demostró que solo un punto en RT puede coincidir con el punto P del plano.

Una vez determinados los tres únicos puntos en RT con un punto P del plano, fue posible determinar un triángulo y realizar un estudio entre la relación del triángulo base y el triángulo determinado por los P', obteniendo una semejanza entre ellos y en consecuencia un factor de semejanza dado por el cociente entre el radio de la circunferencia que inscribe el triángulo base, y el radio de la circunferencia que inscribe el triángulo determinado por los puntos en RT.

Otra relación encontrada entre los puntos que están en RT con puntos P y Q, siendo estos puntos diferentes en plano, se asocia a la interestancia, si los puntos P, Q y el punto base R son colineales, sus puntos relacionados también lo son, además los puntos en RT guardan la misma relación de interestancia, es decir si la relación está dada por $Q-P-R$ entonces se obtiene $Q'-P'-R$.

La RT como una función, esta vista desde el plano cartesiano y es es una transformación que al asignar a cada punto P del plano un único P' que está en RT con él, no corresponde a una homotecia, una rotación, ni a una simetría respecto al eje x, aun aso esta transformación corresponde a una simetría respecto al eje y cuando la pendiente de la recta que contiene a un lado del triángulo y sobre la cual se hace la transformación es 0, además también se presenta una simetría respecto a la recta $y=x$ cuando la pendiente de esa recta es -1. La RT corresponde a una traslación cuando los valores de u y v cumplen $\frac{\mathrm{m}^2-1}{1+m^2}a-\frac{2m}{1+m^2}b-a$ y $-\frac{2m}{1+m^2}a+\frac{1-\mathrm{m}^2}{1+m^2}b-b$ simultánea y respectivamente. Así que la RT es una transformación en el plano que diferente a las usuales.

Bibliografía

Artigue, M. (2004). Problemas y Desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la Didáctica de la Matemática para Afrontarlos? Recuperado el 2 abril de 2014, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516302

Barnet, R., Uribe, J. (1994). Algebra y Geometría 2. Segunda edición adaptada.

Burner. (1961). The act of discovery. *Harvard Education Review*, 21-32.

Caicedo, Y., & Contreras, D. (2009). *Relacion Interdiagonal en el Plano.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Fundación Polar. (s.f.). *Cienciateca*. Recuperado el 24 de Octubre de 2013, de Matemática Maravillosa: http://www.cienciateca.com/simetria.html

Grossman, S. (1992). *Álgebra Lineal con aplicaciones, cuarta edición.* México: McGRAW-HILL.

Hohenwarter, & Preinter, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Applications*.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra Lienal, octava edición.* México: PEARSON EDUCACIÓN.

Lehemann, C. H. (2011). *Geometría Analítica.* México: Limusa.

Moise, E., & Downs, F. (1986). *Geometría Moderna.* U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana , S.A.

Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra.* Salzburg: University of Salzburg.

Swokowski, E. W. (1988). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, segunda edicion .* México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.

Anexos

Anexo 1.

La notación que será utilizada en el presente trabajo de grado en su mayoría es traída del libro de Moise & Downs (1986), a continuación se especifica:

- Las letras mayúsculas como $A, B, C, \ldots$ serán utilizadas para notar puntos.
- El símbolo $\overline{AB}$, se utilizará para notar el segmento cuyos extremos son los puntos A y B.
- El símbolo $\overrightarrow{AB}$, se utilizará para notar el rayo cuyo origen o extremo es el punto A y tiene su dirección hacia B.
- El símbolo $\overleftrightarrow{AB}$, se utilizará para notar la recta donde están contenidos los puntos A y B. Las rectas también serán representadas con letras minúsculas en cursiva.
- La simbolización $\angle ABC$, se utilizará para notar el ángulo cuyos lados son los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. En ocasiones se notarán los ángulos con letras minúsculas griegas como α, β. $\gamma \ldots$
- El triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, se escribirá como $\triangle ABC$.
- La circunferencia con centro en A y radio AB, se escribirá como C_{AB}.
- El arco cuyos extremos son los puntos A y B, se escribirá como $\widehat{AB}$, si este arco hace parte de una circunferencia, el arco nombrado será el que tenga menor longitud. Así mismo si se tienen los puntos A, B y C los cuales hacen parte de un arco se notará como $\widehat{ABC}$ siempre y cuando B esté entre A y C.
- La relación de paralelismo entre dos rectas será indicada con $\parallel$. Por ejemplo l es paralela a m lo que en significado es igual que escribir $l \parallel m$.

- La relación de perpendicularidad entre dos rectas será indicada con $\perp$. Por ejemplo l es perpendicular a m lo que en significado es igual que escribir $l \perp m$.
- La relación de congruencia entre figuras geométricas será notada con $\cong$. Por ejemplo sean los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ congruentes entonces escribir $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ significa lo mismo. Se da la congruencia entre segmentos, arcos, triángulos y ángulos en este trabajo de grado.
- La relación de semejanza en triángulos será notada con $\sim$. Por ejemplo $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$ lo que en significado es igual que escribir $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Al escribir $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se hace una correspondencia en la congruencia de los ángulos cuyos vértices son los vértices de cada triángulo, es decir $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\angle ACB \cong \angle DFE$.
- Cuando se escribe $m\angle ABC$ y $m\widehat{AB}$, se hace referencia a la medida del ángulo o el arco nombrado respectivamente.
- Al escribir AB, se hace referencia a la longitud del segmento $\overline{AB}$.
- El símbolo $\cap$ se utilizará para notar la intersección entre dos objetos geométricos. Por ejemplo $\overline{AB} \cap \overline{BC} = B$.