PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

YEIMI PAOLA HERRERA NARANJO

VICENTE ELISBAN MUÑOZ DÍAZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C

2014

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ABORDAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

YEIMI PAOLA HERRERA NARANJO

CÓDIGO: 2010240035

CC: 1032459206

VICENTE ELISBAN MUÑOZ DÍAZ

CÓDIGO: 2009140040

CC: 1121201039

Trabajo de grado presentado ante el departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor:

MAURICIO BAUTISTA BALLÉN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C

2014

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos”.

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, D.C., 03 12 2014

A mis padres FLOR ELVA NARANJO PARRA y CARLOS ALBERTO HERRERA ACEVEDO, por su esfuerzo y apoyo constante en todos los aspectos de mi vida, principalmente por guiarme y orientarme en el buen camino y por mostrarme la importancia de salir adelante, de estudiar, gracias por sus consejos. Mamita, gracias por estar tan pendiente de mi bienestar, de que la comida, la ropa y todo siempre esté listo. ¡A los dos los admiro y los amo mucho!

A mis hermanos, Andrés y Fabián, porque mi vida sin ellos no sería completa, gracias por compartir tantos momentos conmigo; aunque a veces me producen mal genios, siempre están dispuestos a ayudarme y se preocupan por mí.

A mi compañero, amigo y novio Vicente, por la paciencia tan enorme que tiene conmigo, porque juntos hicimos que este trabajo fuera más de lo que esperábamos; por ser tan especial y brindarme momentos felices, aun cuando tuvimos muchas dificultades; gracias por consentirme tanto, por llegar a mi vida, y hacer que cada día tenga más significado.

YEIMI PAOLA HERRERA NARANJO

A mis padres CARMEN DÍAZ (en los cielos) y ELISBAN MUÑOZ PIRES (en la distancia), quienes han estado presente en cada uno de los momentos, brindándome desde la niñez su amor y cariño incondicional, mostrándome el ejemplo y el valor del esfuerzo, los ánimos y la motivación de lograr la superación, gracias, mis primeros y grandes maestros.

A mis hermanos José, Patricia, y en especial Adolfo, quienes en determinadas circunstancias han estado presente brindando su apoyo; a mis queridos sobrinos y sobrinas, quienes en muchas ocasiones han sido mis primeros estudiantes, los pequeños me han llevado a pensar en la importancia del quehacer docente; en nuestras manos está lograr la motivación para que las generaciones que vienen, logren mayor grado de conciencia, dedicación y estudio.

A Yeimi, mi compañera de academia y vida, por la exigencia y la motivación, por el cariño, afecto y las demostraciones constantes; por mostrar que las metas siempre pueden ser más grandes. Gracias por todo este tiempo de aprendizaje, por llegar a mi vida y compartir todo lo que eres. “te amo, porque eres mi amor, mi cómplice y todo y porque en las largas jornadas y en calle, codo a codo, logramos ser mucho más que dos”

VICENTE ELISBAN MUÑOZ DÍAZ

AGRADECIMIENTOS

Es importante agradecer principalmente a Dios, por permitirnos realizar este trabajo, por mantenernos con la salud necesaria para continuar y luchar siempre por mejorar nuestro trabajo.

Por supuesto, la realización del mismo, no hubiese sido posible sin la colaboración y el apoyo de muchas personas, cuya disposición aportó grandes aprendizajes para nuestras vidas profesionales y para la consolidación del trabajo, en particular, queremos agradecer a los profesores del Departamento de Matemáticas, Orlando Aya, Yeison Sánchez, Luis Guayambuco, Johana Montejo, Claudia Salazar, Edgar Guacaneme y Sandra Rojas, por su colaboración en diferentes actividades, ya sea dándonos consejos en la elaboración del cuestionario, un espacio en sus clases para aplicarlo o solventando nuestras dudas para consolidar el marco de referencia, entre otras; muchas gracias, sus aportes nos permitieron avanzar y mejorar el trabajo.

Es importante también, agradecer a las secretarias del Departamento, en particular, a Paola, Omaira y aunque ya no esté en el cargo, a Chelita, porque son personas que han hecho parte de nuestra carrera desde el comienzo hasta el final, nos han contribuido en diversos aspectos emocionales, motivacionales y de gestión, aún sin recibir nada a cambio, gracias por ser parte tan esencial del Departamento.

A los compañeros Javier Tejero y Andrés Bello, agradecemos por su colaboración, sus sugerencias en el uso de herramientas tecnológicas nos contribuyeron enormemente para realizar un espacio académico virtual al cual se puede acceder muy fácilmente, sin ustedes hubiera sido más complicada esta tarea.

También queremos agradecer, especialmente al profesor Mauricio Bautista Ballén, porque a pesar de que dentro de sus labores no estaba asesorar trabajos de grado, aceptó trabajar con nosotros, se comprometió y se dedicó en todo el proceso en la revisión del mismo, gracias por orientarnos y apoyarnos en todo momento, porque con sus consejos y su experiencia, nos aportó no solamente a la formación profesional, también a la formación como personas.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. *Información General*	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Biblioteca Central, Universidad Pedagógica Nacional
Título del documento	Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática
Autor(es)	HERRERA NARANJO Yeimi Paola MUÑOZ DÍAZ, Vicente Elisban
Director	Mauricio Bautista Ballén
Publicación	Bogotá, D.C., 2014, Universidad Pedagógica Nacional, p. 169
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Función, Pensamiento Variacional, Modelación Matemática, Concepciones de la Función, GeoGebra.

2. *Descripción*
En este documento se presenta un reporte del trabajo de grado realizado en el marco de la Licenciatura en Matemáticas, el cual surge del interés de los autores por generar alternativas que contribuyan en los procesos de enseñanza aprendizaje de uno de los conceptos más importantes de dicha disciplina, la función. Para ello, se realizó la consulta de diversas fuentes, la aplicación y análisis de un cuestionario relacionado con las concepciones de la función que tienen algunos estudiantes de la Licenciatura, además, se diseñó una secuencia de actividades enmarcadas en el pensamiento variacional y la modelación matemática. La propuesta didáctica va dirigida a los docentes, como una alternativa para implementar en el aula en diferentes niveles de escolaridad y a los estudiantes, que ya estén familiarizados con el concepto, para que puedan profundizar en el mismo y pongan en juego diferentes elementos matemáticos involucrados; algunas de las actividades son mediadas por herramientas tecnológicas, por ello, se opta por presentar un CD y una página web, en la cual se exhiben los

Applets de todas las actividades tecnológicas, con el ánimo de facilitar el acceso a las mismas.

3. Fuentes
Para la realización de este trabajo se consultaron diferentes documentos, a saber; doce (12) tesis, de las cuales dos (2) son de pregrado, siete (7) son de maestría y tres (3) son tesis de doctorado; de igual forma se revisaron veinte (20) artículos de revistas, nueve (9) libros de Matemáticas, se tuvieron en cuenta tres (3) documentos oficiales (por ejemplo los EBCM). A continuación se mencionan las principales fuentes bibliográficas: *Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar Matemática.* Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal [Redalyc], 16*(2), 105–125.* *Giraldo, Z. (2012).* Aproximación a las funciones desde la modelación de situaciones cinemáticas de física con estudiante de grado noveno de básica secundaria de la Institución Cocorná *(tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.* *Guevara, C. (2011).* Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación *(tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.* *Jaimes, N. (2012).* La noción de función, un acercamiento a su comprensión (tesis de maestría). *Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.* *López, J., y Sosa, L. (2007).* Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función *(tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Yucatán.* *Ruiz, L. (1993).* Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico *(tesis doctoral). Universidad de Granada, España.* *Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.* Tecnologías Computacionales en el currículo de Matemáticas. Proyecto Zero, Universidad de Harvard., *(2), 77, 68-78.* Villa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J., y Ocampo, D. (2009). *Sentido de Realidad y Modelación Matemática : el caso de Alberto.* 2*(2), 159–180.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/890/1/jhony.pdf, consultado el 10 de marzo de 2014.

4. Contenidos
El trabajo está estructurado en (6) capítulos, a saber: ❖ **Capítulo 1:** Se presenta la justificación y los objetivos. ❖ **Capítulo 2**: Se mencionan los aspectos que fundamentan el trabajo, entre ellos, la evolución histórica y los aspectos conceptuales relacionados con el concepto de función, algunas apreciaciones con respecto al pensamiento variacional, la modelación y modelo matemático, los sistemas de representación del concepto, algunas apreciaciones que resaltan la importancia del uso de la tecnología y finalmente consideraciones de la enseñanza del concepto. ❖ **Capítulo 3:** Se describe la metodología del trabajo. ❖ **Capítulo 4:** Se indica la definición del término “concepción”, se presenta la manera como se construyó, aplicó y analizó el cuestionario dirigido a estudiantes de séptimo semestre para determinar sus concepciones acerca de la función. ❖ **Capítulo 5:** Se presenta la propuesta didáctica, la cual cuenta con 23 actividades divididas en dos partes, la primera enfocada al abordaje del concepto de variable, constante y parámetro; la segunda enmarcada en la modelación matemática; en cada una de las actividades se hace hincapié en el pensamiento variacional. ❖ **Capítulo 6:** Se presentan las conclusiones de la aplicación del cuestionario, del trabajo en general y se plantean algunas recomendaciones e ideas que pueden servir para futuros trabajos relacionados con el presente.

5. Metodología
Los procedimientos metodológicos que se llevaron a cabo en el desarrollo de este trabajo, se realizaron en tres fases. En la primera se realizó la búsqueda de trabajos y publicaciones relacionados con los elementos históricos, teóricos y didácticos del concepto de función, que fundamentaran el marco de referencia del trabajo; en la segunda se efectuó el proceso de elaboración, aplicación y análisis (cualitativo y cuantitativo) de un cuestionario (con preguntas abiertas), que tenía por objetivo la recolección de información para la caracterización de las

concepciones de los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, sobre el concepto de función; en la tercera fase se elabora la propuesta didáctica; las actividades se estructuran en dos partes enfatizando en situaciones de variación, cambio y dependencia, ligadas con la modelación matemática.

6. *Conclusiones*

A continuación se presenta un resumen de las conclusiones a las cuales se llegó durante el avance y culminación del trabajo:

- Se considera que la consulta y estudio de la historia del concepto de función, brinda elementos de reflexión sobre el quehacer del profesor de Matemáticas, lo cual conlleva a generar maneras de enseñar dicho concepto matemático, que tengan mayor significado para los estudiantes.
- La modelación es un proceso que está relacionado directamente con el pensamiento variacional y que permite la realización de actividades en las cuales se pueden identificar elementos importantes del concepto de función, como las variables independiente y dependiente, las relaciones entre ellas, la obtención de un modelo que esta dado en algunas de las representaciones de la función (verbal, gráfica, tabular y algebraica).
- Se puede decir que la mayoría de los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas, a quienes se les aplicó el cuestionario, después de haber cursado diferentes espacios académicos en los cuales se estudia la función, la conciben como algo estático, les cuesta solucionar y desenvolverse en situaciones sujetas al cambio y a la variación. Se encuentra que los estudiantes identifican correctamente qué varía pero no cómo varía, por lo tanto establecen las variables involucradas y las relaciones de dependencia pero no realizan representaciones adecuadas del mismo, se encuentran dificultades para establecer los esbozos gráficos y las expresiones algebraicas y el paso de una representación a otra.
- Las formas como los estudiantes proponen abordar el concepto de función siguen una secuencia similar a la enseñanza tradicional del mismo, es decir, se establecen relaciones entre conjuntos, posteriormente se proponen expresiones algebraicas, luego se realizan tablas que permitan graficar la función y se concluye con aplicaciones, tales formas de enseñar el concepto dejan de

lado aspectos fundamentales en la constitución del mismo como la variación y el cambio. • La actividades incluidas en la propuesta didáctica y en general toda la estructura acogen diferentes elementos históricos, didácticos y matemáticos importantes para conceptualizar de manera más adecuada la función; el uso de herramientas tecnológicas facilitan procedimientos que con lápiz y papel serían prácticamente imposibles de realizar, se tienen en cuenta el pensamiento variacional y junto con ello la modelación matemática.

Elaborado por:	**HERRERA NARANJO Yeimi Paola** **MUÑOZ DÍAZ, Vicente Elisban**
Revisado por:	Mauricio Bautista Ballén

Fecha de elaboración del resumen:	**06**	**11**	**2014**

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

En el estudio de las Matemáticas, la función real se constituye en un concepto importante, tanto por su desarrollo histórico como por su utilidad; es de interés, caracterizar las concepciones de los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas frente al mismo, con el fin de encontrar elementos que aporten a la elaboración de una propuesta didáctica útil para abordar el concepto de función, atendiendo a elementos históricos, didácticos y matemáticos que aporten al desarrollo del pensamiento variacional, en particular, a procesos relacionados con la modelación matemática.

El documento se organiza en cinco capítulos, en el primero se menciona la justificación y los objetivos del trabajo; en el segundo, se abordan los elementos teóricos necesarios para soportar la propuesta didáctica; se menciona la evolución histórica de la función y las concepciones asociadas, en seguida, se presentan los conceptos, definiciones y representaciones matemáticas relacionadas con la función; luego, se alude a diferentes aspectos didácticos, particularmente, el pensamiento variacional, la modelación matemática, los sistemas de representación, el uso de la tecnología y algunas consideraciones frente a la enseñanza de dicho concepto. En el capítulo tres se precisan los elementos necesarios para la constitución de un cuestionario, con el cual se caracterizan las concepciones de función de la población escogida. En el capítulo cuatro se presenta la propuesta didáctica, en la que se encuentra un total de 23 actividades con niveles de complejidad distintos, dirigida a profesores de Matemáticas y a docentes en formación que hayan abordado el concepto. En el capítulo cinco, se presentan las conclusiones del análisis del cuestionario aplicado y del trabajo en general de acuerdo con los objetivos propuestos, finalmente, se exponen algunas recomendaciones y la bibliografía respectiva.

ASPECTOS GENERALES

1.1. JUSTIFICACIÓN

La función es uno de los conceptos más importantes en las Matemáticas y las ciencias, no solo por sus aplicaciones sino porque permite modelar situaciones de diferentes contextos. En cuanto a ello, Ruiz (1993, p.147) afirma que "el concepto de función, tal y como se define actualmente en matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años".

Un concepto de tal naturaleza debe ser abordado con actividades que permitan al estudiante adquirir una concepción que vaya más allá de un procedimiento algorítmico de cálculo, Freudenthal (como se citó en López y Sosa, 2007), Rey, Boubée, Vazquez, y Cañibano (2009), Jaimes (2012), entre otros, señalan que las limitaciones de los estudiantes frente al concepto de función, se relacionan de alguna manera con el excesivo hincapié que se le da al registro algebraico, debido a que no se advierte que las situaciones de variación y cambio le dieron sentido al concepto en la historia, a su vez, se deja de lado la articulación significativa con otros registros y la posibilidad de vislumbrar el carácter modelizador de la función.

Atendiendo a ello, se hace necesario construir una propuesta didáctica que aporte al desarrollo de procesos de modelación y pensamiento variacional en situaciones que involucren relaciones de dependencia, de tal forma que exista un vínculo entre cantidades y se genere la idea de que el cambio en una de ellas, tendrá efectos sobre las otras.

Por otra parte, es necesario mencionar que la modelación matemática, además de ser una herramienta que permite "aprender los conceptos matemáticos de mejor manera, interpretar los significados y usar las herramientas tecnológicas" (Justi y Gilbert, como se citó en Bautista, Wilkerson-Jerde, Tobin y Brizuela, 2013, p. 967), promueve la obtención de modelos que de acuerdo con Villa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo (2009), describen, predicen, solucionan, explican, sistematizan y representan de alguna forma la situación presentada; en el caso de la función, los registros de representación verbal, tabular, gráfica y algebraica, constituyen el modelo. También se considera importante tener en cuenta las conversiones o traducciones (procesos entendidos como el paso de una representación a otra).

Finalmente, se precisan los motivos que condujeron a la aplicación del cuestionario de "concepciones" a los maestros en formación de séptimo semestre; a saber:

- En este semestre de la carrera se debería terminar el ciclo de fundamentación, así que esas personas han estudiado el concepto de función en diferentes espacios académicos, incluso en la secundaria.
- Se considera que las concepciones sobre un concepto matemático en particular, direccionan las formas como pueden abordar el mismo en sus respectivas prácticas de inmersión o profesionales, lo cual puede mostrar la relación entre las concepciones que se tienen y las metodologías que se pueden establecer para abordar el concepto de función.

De esta manera, se debe resaltar que los resultados del análisis del cuestionario aplicado, sirvieron para constatar que a los estudiantes les cuesta desenvolverse en situaciones relacionadas con la modelación, la mayoría poseen una concepción estática de la función, lo cual se considera que se puede ir solventando con el desarrollo de la propuesta didáctica.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Elaborar una propuesta didáctica que permita abordar el concepto matemático función real, teniendo en cuenta la modelación matemática y el pensamiento variacional.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reportar algunos aspectos históricos, matemáticos y didácticos que permitan fundamentar la propuesta didáctica, a partir de la consulta en diferentes fuentes.
- Realizar instrumentos para recopilar información acerca de las concepciones que tienen los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas, con respecto al concepto matemático función real, con el ánimo de obtener algunos elementos asociados, que se puedan considerar en la elaboración de la propuesta didáctica.
- Realizar un análisis de la información recopilada y obtenida en la aplicación del instrumento de la caracterización de las concepciones.
- Elaborar recursos tecnológicos en el software "GeoGebra" que faciliten la exploración, observación y verificación, en algunas actividades planteadas.

MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo, se presentan los elementos históricos, matemáticos y didácticos necesarios para fundamentar la propuesta didáctica; primero, se expone un resumen de la evolución histórica del concepto de función y las concepciones que surgieron a lo largo del desarrollo de la humanidad; segundo, se presenta el marco matemático en el cual se incluyen los conceptos y propiedades asociadas a la función, posteriormente, se mencionan las definiciones de tal concepto, desde las posturas de autores de diferentes textos; al final del apartado, se presenta una definición de función que se pretende privilegiar con la propuesta didáctica; tercero, a partir de las consideraciones de los apartados anteriores, se alude a los elementos didácticos destacando principalmente el "Pensamiento variacional" y la "Modelación Matemática", se mencionan algunos de sus antecedentes, los propósitos de usarla para la enseñanza y las definiciones que diversos autores le atribuyen, también, se considera el tema de "modelo matemático" y la "modelación de funciones"; posteriormente, se exponen los sistemas de representación, la importancia del uso de la tecnología, las maneras como se ha abordado la función, incluyendo las dificultades y errores en el aprendizaje de dicho concepto y algunas críticas de investigadores frente a las formas de abordarlo.

2.1. MARCO HISTÓRICO

2.1.1. Evolución del concepto de función

La función es uno de los conceptos más importantes en el campo de las Matemáticas y las ciencias, no solo por sus aplicaciones, sino porque permite modelar situaciones de diferentes contextos; se hace necesario presentar algunos hitos históricos que contribuyeron en la constitución del concepto de función, en particular, se reseñan algunos sucesos destacados y las concepciones surgidas en su evolución. Se considera que la historia puede brindar elementos matemáticos y didácticos, que hicieron parte del proceso experimentado por la humanidad para desarrollar sus conocimientos, posiblemente los estudiantes incurran en un proceso similar; por tal motivo, es necesario tener en cuenta las situaciones que le fueron dando sentido al concepto para generar una propuesta didáctica que contribuya en el aprendizaje de la función.

A continuación, se presenta un recorrido histórico organizado en siete etapas representativas de la evolución del concepto de función; la estructura dada se basa en la organización propuesta en Ruiz (1993), se hace mención de diferentes acontecimientos encontradas en los trabajos de Boyer (1986), Collette (1985), Jaimes (2012), López y Sosa (2007).

Etapa 1: La antigüedad, hacia una búsqueda de regularidades y proporciones

En la antigüedad el estudio del concepto de función se centraba en la búsqueda de regularidades y proporciones, se generaron situaciones en las que se observaba la dependencia entre cantidades de diferentes magnitudes, las cuales, de acuerdo con Sastre (como se citó en López y Sosa, 2007) "fueron representadas verbalmente, en tablas, en gráficas o con ejemplos" (p. 15). Se destacan dos civilizaciones, los babilonios y los griegos:

❖ *Los babilonios (2000 a. C – 500 a. C)*

Sus estudios se centraron en cálculos astronómicos, problemas de variaciones continuas[1] y el registro de series de potencias con números naturales (las cuales no se garantiza que se hicieran de manera general), se destaca que registraban los resultados obtenidos en tablas dispuestas en dos columnas de manera similar a la representación tabular de la función. Si bien, hay autores que plantean que en este periodo no se presentó alguna idea general de función, la **búsqueda de regularidades** se considera una característica que sentó las bases para el desarrollo del concepto (Ruiz, 1993).

❖ *Los griegos*

La civilización griega dio inicio a un proceso de desarrollo cultural que promovió el estudio de las Matemáticas como una disciplina en sí misma. Fueron grandes sus aportes para el progreso de las ciencias y las Matemáticas; es más, muchos de los planteamientos todavía son resaltados en diferentes contextos. En el caso de la función, existía una idea primitiva contenida en las nociones de cambio y la relación entre magnitudes variables. Para los griegos los conceptos matemáticos no

[1] Como la luminosidad de la luna en periodos de tiempo iguales, o los periodos de visibilidad de un planeta y el ángulo que este forma con el sol (Boyer, 1986).

estaban sujetos al movimiento; la filosofía estática de las Matemáticas llevó a que en lugar de hablar en términos de **variables** y **funciones**, lo hicieran en términos de **incógnitas** y **ecuaciones**; ellos intentaron relacionar por medio de las proporciones los números y las magnitudes, sin embargo, la aparición del problema de la inconmensurabilidad condujo a que se presentara la disociación entre número (relacionado con lo discreto) y magnitud (relacionado con lo continuo). Las proporciones se trabajaron con magnitudes de la misma naturaleza (Ruiz, 1993).

En el "Anexo 1" se presenta un gráfico con información referida a algunos personajes de la época antigua, que contribuyeron en el desarrollo del concepto de función.

ETAPA 2: Representación cinemática y geométrica de las relaciones funcionales: Edad media

En este periodo de la historia se llevaron a cabo investigaciones científicas buscando dar respuesta a cuestiones relacionadas con el descubrimiento y la explicación racional (de manera cualitativa o cuantitativa) de los fenómenos de la naturaleza y la realidad[2]; entre ellos, el estudio y análisis de situaciones sujetas al cambio y al movimiento constituyeron una de las mayores preocupaciones de la edad media. Para dar respuesta a esas cuestiones, se recurrió a las ideas de Platón (las Matemáticas podían servir para definir las causas de los fenómenos) y Aristóteles (las Matemáticas como ciencia de la cantidad abstracta, la matemática estaba alejada de las explicaciones físicas) concernientes a la búsqueda de la causa de los cambios cualitativos del movimiento; estas concepciones, además de dar los fundamentos filosóficos de los estudios, al ser unificadas, ponen las bases de la noción de función (Boyer, 1986).

Tras plantear diversas cuestiones acerca de la relación entre las Matemáticas y la Física, la unificación de las concepciones Platónicas y Aristotélicas llevaron a que esta disciplina y el método experimental, empezará a penetrar en el dominio de las ciencias; es así que, la formulación matemática y cuantitativa de las leyes del movimiento toma mayor importancia al dirigir la atención al **cómo** suceden los cambios en lugar del por qué. Cabe destacar que en este periodo las relaciones funcionales no estaban dadas de forma analítica; estas, se expresaron por medio de dos métodos: el

[2] Como, por qué sopla el viento, por qué la lluvia cae mientras el viento sube o por qué los planetas brillan.

álgebra de palabras (lenguaje sincopado[3]) que permitía generalizar empleando letras del alfabeto en lugar de números y el método geométrico que usaba gráficas (Ruíz, 1993).

En el "Anexo 1" se presenta un gráfico con información referida a algunos personajes de la época, que contribuyeron en el desarrollo del concepto de función.

ETAPA 3: Siglo XV y XVI: El desarrollo de la notación algebraica

En esta etapa se pueden destacar dos aspectos fundamentales, el perfeccionamiento del simbolismo algebraico, el cual contribuyó en el desarrollo de la formulación y la expresión de lo que se considera hoy en día ¨variable¨ en una función e ¨incógnita¨ en una ecuación, y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular de las Matemáticas. En este periodo se continuó con el estudio de los fenómenos sujetos al cambio; se recurrió a la experimentación y observación para introducir ciertos aspectos cuantitativos que podían ser representados por medio de gráficas obtenidas y verificables a partir de las medidas (Boyer, 1986).

Se puede afirmar que los trabajos en torno al surgimiento de la noción de logaritmo, contribuyeron en la definición de las funciones por medio de una correspondencia determinada entre variables independientes y dependientes, mostrando un profundo sentido de la continuidad y la estrecha relación entre número y magnitud (Ruíz ,1993).

En el "Anexo 1" se presenta un gráfico con información referida a algunos personajes de esta época, que contribuyeron en el desarrollo del concepto de función.

ETAPA 4: Siglo XVII: Introducción de la representación analítica

En las etapas anteriores la intención de cuantificar y representar los fenómenos permitió desarrollar algunas ideas del concepto de función. Ahora bien, Youschkevitch (como se citó en Ruiz,

---

[3] Surge en los años 250 a.C a 1500 d.C, este tipo de lenguaje lleva a introducir por primera vez abreviaturas usando letras para las incógnitas y sus potencias, en una combinación del lenguaje retórico con abreviaturas, además, en esta fase todavía predominan los cálculos en lenguaje natural.

González, E. (2012). *Del lenguaje natural, al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento de la resolución de problemas (tesis de maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

1993) plantea que el desarrollo de la teoría de funciones se basó en tres pilares; “el crecimiento de los cálculos matemáticos, la creación del algebra simbólico-algebraica y la extensión del concepto de número (números complejos)” (p. 165).

El desarrollo del algebra jugó un papel fundamental en el descubrimiento del mundo de las representaciones analíticas; se hizo posible la traducción de cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. De esta forma, al buscar relacionar una curva plana algebraica con una ecuación entre las coordenadas de sus puntos, se encontró que una ecuación en x e y era un medio para introducir una dependencia entre dos **cantidades variables**.

Por otra parte, se generó un proceso de asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y la teoría de series, lo cual contribuyó en el nacimiento del “análisis infinitesimal”; las premisas que soportaron este proceso fueron la existencia del álgebra, la introducción en las Matemáticas de la variable y del método de coordenadas y la asimilación de las ideas infinitesimales de los antiguos. Estos y otros cuestionamientos fueron fundamentales para el desarrollo del concepto de número real (Ruiz, 1993).

En el “Anexo 1” se presenta un gráfico con información referida a algunos personajes de esta época, que contribuyeron en el desarrollo del concepto de función.

ETAPA 5: Siglo XVIII: El concepto de función se considera central en las Matemáticas

El siglo XVIII marcó una época en la cual se fueron dando las condiciones para que el concepto de función fuera más universal y adquiriera mayor grado de abstracción, el cual fue producido por diferentes aspectos, como el mejoramiento del sistema de notaciones matemáticas y representaciones (que facilitó el tratamiento, determinación y clasificación de las funciones), el impacto de la continuidad, el planteamiento de definiciones más generales y el desarrollo del análisis infinitesimal como la ciencia general de las variables y las funciones, entre otras (Ruíz, 1993).

El concepto de función toma una forma analítica, con ello se hacen dos consideraciones, primero, se establece la forma de construir las expresiones analíticas mediante operaciones admisibles (siendo admitidos los reales e imaginarios en el argumento). A este tipo de funciones, Euler les adjunta las funciones trascendentes elementales (e^z, $\ln z$ y las funciones trigonométricas), llegando a la siguiente clasificación:

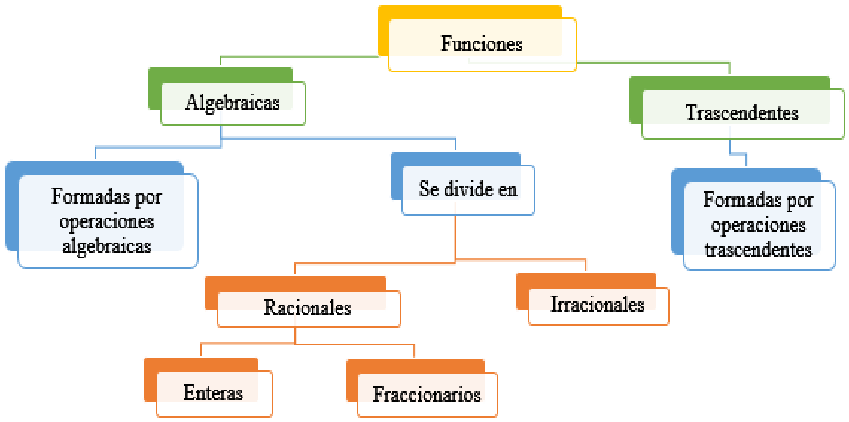


Figura 1. Clasificación de las funciones según Euler (basado en Ruiz, 1993, p.165)

Segundo, se da inicio a la representación de funciones a través de series infinitas; en primera instancia, aquellas dadas por expresiones analíticas. De acuerdo con Ruiz (1993) "el estudio y descubrimiento de las propiedades de esta clase particular de funciones, condujo al análisis de problemas relativos a su continuidad" (p.180).

Por otro lado, la resolución de problemas prácticos, como el de las vibraciones infinitamente pequeñas en una cuerda finita, homogénea y fijada a sus dos extremidades, llevó a Euler a considerar funciones más generales que las analíticas (funciones compuestas por trozos de funciones o mixtas), en las cuales, se mantiene la idea de dependencia sin explicitar la manera como se da (Ruiz, 1993).

Posteriormente, se llegó a afirmar que las series trigonométricas podían ser utilizadas para representar una clase de funciones más generales (entre ellas las mixtas); que no necesitaban ser de tan ¨buen comportamiento[4]". Lo anterior suscitó el problema de determinar en qué condiciones era convergente la serie trigonométrica asociada a una función dada.

En el "Anexo 1" se presenta un gráfico con información referida a algunos personajes de esta época, que contribuyeron en el desarrollo del concepto de función.

---

[4] Es decir, el tipo de funciones en donde hay muchos puntos en los que no existe la derivada o es discontinua.

ETAPA 6: Siglo XIX: La idea de correspondencia arbitraria

En esta etapa, se establece la concepción de las funciones como correspondencias de tipo muy general; se fueron determinando las condiciones de las propiedades relativas a las funciones, liberadas de la exclusividad de la intuición geométrica y las limitaciones de la expresión algebraica. Es así, que la teoría de las funciones se sustenta en los trabajos desarrollados que abordaron temas como, la definición rigurosa, totalmente aritmetizada de continuidad, la formulación de la teoría del número real y el desarrollo de la teoría de conjuntos (Ruiz, 1993).

Se construyeron ciertas definiciones de funciones, en las cuales no se hacía mención de la expresión algebraica o trascendente. En el "Anexo 1" se presenta un gráfico con información referida a algunos personajes de esta época, que contribuyeron en el desarrollo del concepto de función.

ETAPA 7: Siglo XX: El concepto de función como terna

El último periodo hace referencia al concepto de función como terna, este tiene un alto grado de formalización y se presenta de la siguiente manera:

Se llama función a la terna $f = (G, X, Y)$, en donde G, X, Y son conjuntos que verifican dos condiciones, "$G \subseteq X \times Y$ y que para todo $x \in X$ existe un y solo un $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función f. El único elemento $y\ de\ Y$ tal que $(x, y) \in G$ se llama valor de la función $f\ en\ x$, y se utiliza para designarlo $y = f(x)$. En otras palabras la gráfica de la función es el conjunto de parejas ordenadas de la forma $(x, f(x))$" (Ruiz, 1993, p. 186).

Por otro lado, es importante mencionar algunas diferencias entre las definiciones dadas por Dirichlet y los Bourbaki, el primero, asume la función como una correspondencia entre variables, se infiere que el dominio y codominio se restringe al conjunto de números reales, mientras que los Bourbaki, se refiere a una correspondencia entre dos conjuntos y el dominio y codominio no necesariamente son conjuntos de números reales (Jaimes, 2012).

Las etapas históricas de la función, muestran que llegó a ser un concepto propio de las Matemáticas, después de diferentes sucesos en búsqueda de la formalización; se pudo notar cómo el concepto se fue haciendo más abstracto, debido, en gran medida a los desarrollos en el campo del análisis, el álgebra abstracta y de la topología. Freudenthal (como se citó en Ruiz, 1993) señala que aunque la definición de función está construida de una manera lógicamente formalizada, “se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático” (p.188).

En el “Anexo 1” se presenta un gráfico con información referida a algunos personajes de la época, que contribuyeron en el desarrollo del concepto de función.

2.1.2. Concepciones encontradas en la evolución histórica

En términos generales, se puede afirmar que a lo largo de la historia, el concepto de función estuvo ligado a situaciones que permitieron desarrollar trabajos en los cuales se vislumbraron sus creencias y concepciones colectivas o epistemológicas. Las situaciones ligadas a los fenómenos naturales y físicos motivaron el estudio de magnitudes variables; para cuantificar el cambio se recurrió al uso de proporciones, gráficas y ecuaciones con las que se logró caracterizar las relaciones de dependencia. Al tener las expresiones analíticas se representaron las funciones y se estudiaron sus características a través de series infinitas, además, se posibilitó el estudio de problemas físicos (cuerda vibrante) que llevaron a pensar en una noción más general y arbitraria de la función; con ello, y con los intentos de precisión y rigor se logró la definición como terna. De las diferentes concepciones (en la página 38 se hace referencia al término concepción y a sus elementos) asociadas a la evolución histórica de la función, Ruiz (1993), precisa siete, las cuales se muestran en la siguiente figura:

Figura 2. Concepciones asociadas a la evolución histórica de la noción de función (basado en Ruiz, 1993, p. 191)

A continuación, se explicitan las invariantes y las representaciones de cada concepción:

Tabla 1. *Concepciones de la función a través de la historia*

Concepción	Invariantes[5]	Representación
1	Establecimiento de regularidades entre relaciones causa efecto	Tablas
2	Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.	Uso del lenguaje retórico en la expresión de proporciones.
3	Descripción de la cantidad de una cualidad que depende de otra por medio de una figura.	Uso de gráficos que representaban dependencias.
4	"Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o curva". Ruíz (1993, p.189)	Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.
5	Se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas. Se determina una función (mixta) que tiene leyes diferentes sobre dos o más intervalos de su dominio.	Aparecen términos y notaciones, uso de expresión analíticas y series infinitas
6	Se llega a la noción de correspondencia arbitraria; permanece el carácter de asignación entre variables en el cual queda determinado **un único valor** de la variable dependiente.	Se usa los ejes cartesianos, las expresiones $f(x)$ e y; más adelante aparece los diagramas de Venn y la expresión $f: X \to Y$ motivada por la teoría de conjuntos y el estructuralismo Bourbakista.
7	Determinación de una función como terna $f = (F, X, Y)$, se resalta los pares ordenados, así, para que una relación sea función, se debe cumplir que si dos pares ordenados tienen el mismo primer elemento, el segundo elemento debe ser idéntico.	Ejes cartesianos, y las expresiones desarrolladas.

[5] Las invariantes y las representaciones que se referencian son dos de los elementos que componen un concepto posteriormente (en la página 41) se alude a dichos términos.

2.2. MARCO MATEMÁTICO

En este apartado se presentan diferentes definiciones de función real expuestas en algunos libros de texto, junto con algunos elementos que constituyen dicho concepto matemático. Se exponen ciertos conceptos y propiedades asociados a la función; posteriormente, se contemplan algunas definiciones del concepto y finalmente se precisa la definición que se privilegia con la propuesta didáctica.

2.2.1. Conceptos matemáticos asociados a la función

En el estudio de la evolución histórica del concepto de función se pudo notar que se fueron asociando elementos matemáticos, que le dieron la fundamentación teórica a dicho concepto matemático; a continuación, se precisan algunos de ellos, junto con las propiedades que cumplen ciertas funciones.

Tabla 2. *Elementos matemáticos asociados a la función*

Constante	Es una cantidad determinada la cual conserva siempre el mismo valor.
Parámetro	Cantidad o magnitud fija y arbitraria.
Variable	Es una cantidad o magnitud discreta o continua, que puede asumir diferentes valores desde el punto de vista cualitativo o cuantitativo.
Variable independiente	Es una magnitud o cantidad arbitraria que asume valores libremente de acuerdo con la situación presentada.
Variable dependiente	Es una magnitud o cantidad que asume valores de acuerdo con cada valor que tome la variable independiente.
Dominio	Conjunto que puede ser numérico o no, finito o infinito y representa todos los valores que puede tomar la variable independiente.
Rango	Conjunto que puede ser numérico o no, finito o infinito y representa todos los valores que puede tomar la variable dependiente.

2.2.2. Definición de función

Al hacer una revisión de diferentes textos, se encuentra que el concepto de función se define de diferentes formas, Hitt y Torres (1994) (como se citó en Planchart, 2000) señalan cuatro enfoques de la definición (dependientes del tipo de enunciado), de estos se tienen en cuenta las definiciones como pares ordenados o correspondencia y en términos de variables. A continuación, se clasifican las definiciones dadas por diferentes autores teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y observando si en la misma se hacen explícitos aspectos como el dominio, el rango o las formas de representación:

Tabla 3. *Clasificación de las definiciones de función*

Tipo de Definición	**Característica de la definición**	
	No se explicitan los elementos de la función	**Se explicitan los elementos de la función**
CORRESPONDENCIA (Pares Ordenados)	• Taylor y Wade (1975) señalan que "una función es un conjunto no vacío de pares ordenados, de los cuales no hay dos con la primera componente igual (…) a una función que se trabaja en los números reales se le denomina una función real" (p. 38). • Stewart, Redlin, y Watson (2012) establece la siguiente definición: "Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B" (p. 143). • Spivak (1992) hace una definición provisional "una **función** es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real" (p. 49). • Leithold (1998) por su parte dice que "una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x" (p. 2).	• Protter y Morrey (1980) mencionan que ¨una función es un conjunto de pares ordenados $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de números reales, en el que no existen dos pares que tengan el mismo primer elemento. En otras palabras a cada valor de $\boldsymbol{x}$ le corresponde exactamente un valor de $\boldsymbol{y}$. El conjunto de todos los valores de $\boldsymbol{x}$ se llama dominio de la función, y el conjunto de todos los valores de $\boldsymbol{y}$ se llama rango de la función¨ (p. 22). • Larson, Hostetler, y Edwards (2006) establecen la siguiente definición de una función real de variable real: "Sean X e Y conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y. El dominio de f es el conjunto X. El número y es la imagen de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama valor de f en x. El recorrido o rango de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X" (p. 19).

Términos de variables	Almgren y Clark (1998) (como se citó en Planchart, 2000) señala que "una variable y se dice que es función de otra variable x, si cada valor de x determina un único valor de y. Las gráficas de las funciones son trazadas tradicionalmente con la variable independiente sobre el eje horizontal y la variable dependiente sobre el eje vertical" (p. 33).	Ayres (1989) señala que "se dice que una variable y es función de otra x, cuando ambas están relacionadas de forma que para cada valor de x perteneciente a su campo de variación le corresponde un valor de y. La variable y, cuyo valor depende del que tome x, recibe el nombre de variable dependiente, mientras que x es una variable independiente. La relación que liga a la función con la variable puede ser una tabla de valores en correspondencia, una gráfica o una ecuación" (p. 3).

Como se puede observar, las definiciones pueden clasificarse de acuerdo con su énfasis; sin embargo, en todas ellas se resalta la **unicidad de la imagen**; esta es la invariante en cada una de las definiciones y en general en el concepto de función. Atendiendo a la manera como se pretende abordar el concepto de función, se plantea la siguiente definición:

Una función es una relación de dependencia arbitraria entre dos variables, en la cual, el cambio de una de ellas, determina un único cambio de la otra; la primera de estas se llama variable independiente y el conjunto de valores que asume se denomina dominio, la segunda se llama variable dependiente y el conjunto de valores que asume se denomina rango.

2.3. MARCO DIDÁCTICO

En este capítulo, se presenta la descripción de los elementos didácticos necesarios para justificar las actividades que se proponen para abordar el concepto de función, el principal aspecto tiene que ver con la modelación matemática, al respecto, se señalan algunos antecedentes, los propósitos de su uso en el aula, algunas definiciones de modelación, modelo matemático y en particular la modelación de funciones; posteriormente se exponen los sistemas de representación de la función, en seguida se encuentra un apartado en el cual se reseñan aspectos relacionados con el uso de la tecnología y su importancia en la modelación.

2.3.1. Pensamiento variacional

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN [Ministerio de Educación Nacional], 1998) se establece el pensamiento variacional como uno de los cinco tipos de pensamiento matemático, el cual se refiere al estudio y comprensión de los procesos de cambio en diferentes ciencias (como las Matemáticas) y la cotidianidad, guarda relación con los demás pensamientos (numérico, métrico, espacial y estocástico) debido a que se ocupa de los procesos de modelación y generalización en diversos contextos como medición, establecimiento de regularidades y uso de diferentes sistemas de representación.

Vasco (2002), precisa que el pensamiento variacional se puede describir como:

> Una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que co-varíen en forma semejante a los patrones de co-variación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (p. 70).

Lo anterior, conlleva a considerar la importancia de la implementación del pensamiento variacional en el aula; se deben generar actividades en las cuales se contemple la observación de fenómenos relacionados con el cambio y la variación, para ello es necesario indagar en tres aspectos: qué cambia, cómo cambia y la manera cómo se relacionan las magnitudes variables. Giraldo (2012, p. 11), señala que partiendo de dichas actividades "es posible promover en los estudiantes la observación, registro y utilización del lenguaje matemático; dada la importancia de la articulación entre múltiples sistemas de representación en el estudio de los conceptos"; de hecho, en la historia de la evolución del concepto de función, el estudio de la variación se desarrolla a partir de la observación y registro de fenómenos sujetos al cambio, para ello, se recurrió al uso de tablas, gráficas, fórmulas algebraicas, etc.; sin embargo, es en el contexto del estudio matemático del movimiento en el que se potencia la construcción de la variación. Se puede decir que el pensamiento variacional tiene antecedentes históricos relacionados con el estudio y desarrollo del concepto de función.

De otro lado, Vasco (2002) plantea que:

> El principal propósito del pensamiento variacional es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios. Al contrario, para mí los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las

> variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional (p. 71).

En esta consideración se observa una relación entre el pensamiento variacional, la modelación, el modelo y el concepto de variable, es por ello que en los siguientes apartados se abordan esos elementos.

2.3.2. La modelación matemática

Antecedentes

La modelación matemática, como se llamó a este constructo teórico, surge, según Biembengut y Melo (2013) alrededor del año 1970 motivado por las diferentes críticas hacia los profesores y los sistemas educativos, producidas por resultados no muy gratos en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, la cual impulsó a muchos docentes a encontrar formas de justificar las Matemáticas en el programa curricular de las escuelas; un ejemplo de ello fue el caso de David Burghes en 1978, quien, trabajando en la Universidad de Cranfield, buscó dar aportes para responder a dichos cuestionamientos; realizó diferentes trabajos a partir de documentos y libros producidos sobre la modelación, ofreció talleres a los maestros y organizó las dos primeras "Conferencias Internacionales sobre la Enseñanza de las Matemáticas Modelización y Aplicaciones", en la Universidad Exeter de Reino Unido, en 1983 y 1985 (Biembengut y Melo 2013).

En los años siguientes, en la literatura internacional, surgen múltiples trabajos relativos a la modelación, en Villa et al. (2009) se considera que:

> Una de la áreas que ha tenido mayor desarrollo en las últimas dos décadas es la modelación matemática, tanto por los usos que se dan al generar modelos en ciertas ciencias, como por su aporte a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; es así, que se pueden observar fuertes vínculos de la modelación con el estudio de situaciones y la solución de problemas del mundo real (p. 159).

El contexto nacional no ha sido ajeno a estas ideas que aportan al desarrollo del currículo de Matemáticas. De hecho, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se declara la implementación de la modelación como un proceso, que al incorporarse en el aula de clase, promueve la construcción de conceptos de forma significativa.

Propósitos del Uso de la Modelación en el Aula

El mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, ha sido uno de los temas de interés de diversos grupos de investigadores; es así que se ha observado que en las líneas de trabajos en los que se ha utilizado la modelación, se han obtenido mejores resultados en los procesos de los estudiantes, por ejemplo, Biembengut y Melo (2013) señalan que se han aprendido de mejor manera los conceptos matemáticos interpretando los significados y usando las herramientas tecnológicas en la resolución de problemas. Actualmente, existen muchas razones para usar dicho elemento didáctico en el aula, Bassanezi (como se citó en Biembengut y Hein (s.f.) señala que “trabajar con modelación matemática en la enseñanza no es solo una cuestión de ampliar el conocimiento, sino sobre todo, de estructurar la manera de pensar y actuar” (p. 5).

Es notable cómo la modelación matemática ha adquirido mayor trascendencia en el aula por las diversas aportaciones en los procesos aprendizaje de los estudiantes, de hecho, está siendo usada como método de enseñanza de las Matemáticas en diferentes países y niveles de escolaridad; Biembengut y Hein (2004) mencionan que utilizando la modelación se puede propiciar:

> Mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos, capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema, estimulación de la creatividad en la formulación y solución de problemas y habilidad en el uso de la tecnología e integración de las Matemáticas con otras áreas del conocimiento (p. 5).

Así, la modelación es una herramienta muy útil e innovadora en el aula de clase que permite no solo aprender mejor los conceptos tratados sino ahondar un poco más en ellos, profundizando en otros elementos que comprenden el objeto matemático estudiado.

Definiciones de modelación matemática

Después de mencionar los antecedentes y los propósitos del uso de la modelación en el aula de clase, es necesario presentar algunas maneras de concebir este término, en particular, Blum et al. (como se citó en Villa et al., 2009) señala que en el *ICMI Study 14* (2004), se determinaron algunos desarrollos y se proporcionaron algunas tendencias y perspectivas de investigación en *Applications and Modelling in Mathematics Education;* entre las que se destacan, "la modelación como una competencia y su relación con otras competencias matemáticas, el desarrollo de la modelación a través de herramientas tecnológicas, la implementación de la modelación como proceso y recurso en el aula de matemáticas…" (p. 160). La modelación se relaciona con otras competencias matemáticas, como la resolución de problemas, la comunicación y el razonamiento[6].

A continuación, se presenta una tabla en la que se precisan algunas definiciones de la modelación, relacionadas con los tres elementos considerados por Blum et al. (como se citó en Villa et al., 2009) con el ánimo de determinar una definición adecuada, de acuerdo con los intereses de la propuesta didáctica, así:

Tabla 4. *Alguna definiciones de modelación*

La modelación matemática

Definición	Autor
La modelación es "una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas"	Treffers y Goffree (como se citó en Giraldo, 2012, p. 17)
La modelación matemática como método de enseñanza y de investigación el cual se vale de la esencia de la modelación que consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático	Biembengut y Hein (s.f.)
La modelación es entendida como un proceso que incluye la actividad cognitiva de conversión entre el lenguaje natural y el registro simbólico algebraico, apoyados en el registro gráfico y tabular	Giraldo (2012, p. 8)

[6] Procesos curriculares planteados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998)

"El proceso de modelación matemática es considerado como una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias"	Villa, Bustamante, Berrio, Osorio, y Ocampo (2009, p. 160)
"La modelación (…) comprende signos o figuras que actúan como expresiones del concepto con los cuales es posible interpretar y predecir fenómenos del mundo físico, fenómenos que a su vez ejemplifican los conceptos matemáticos. Modelar significa construir una representación de algo"	Planchart (2000, p. 45)
Definición	**Autor**
La modelación matemática es una forma de resolución de problemas de la vida real en la que no solo se tiene en cuenta la solución del mismo sino que exige la utilización de un gran número de habilidades matemáticas y no llega solo a una respuesta específica sino a un rango de respuestas que describen la conducta del fenómeno considerado y da al resolutor sentido de participación y control en los procesos de solución.	Castro y Castro (como se citó en Córdoba 2011, p. 47).
"La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa"	Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN, (1998, p. 80)

De acuerdo con las definiciones mencionadas, se puede describir la modelación respondiendo a tres aspectos, qué es, para qué se usa y cómo, este último elemento hace referencia a las formas como se hace visible o en lo que se apoya la modelación; a continuación se presentan dichos aspectos:

Tabla 5. *Elementos de la definición de modelación matemática*

¿Qué es?	¿Para qué se usa?	¿Cómo?
- Actividad científica - Actividad estructurada y organizada - Método de enseñanza y de investigación - Proceso - Forma de resolver problemas	- Describir regularidades y relaciones - Describir la conducta de un fenómeno - Traducir un problema - Obtener un modelo - Representar algo - Construir conceptos matemáticos	- Con el uso de símbolos, signos y figuras - Representaciones (gráfica, tabla, verbal, simbólico algebraica) y conversiones

Si bien, en la tabla anterior se resumen los aspectos considerados en las definiciones propuestas por varios autores, es necesario tener en cuenta que la forma como se abordará el término modelación matemática en el presente trabajo es: *Proceso o actividad estructurada y organizada cuyo fin es la obtención de modelos a partir del abordaje de situaciones o actividades de diferentes contextos (matemático, cotidiano o de otras ciencias).*

Modelo matemático

A partir de las consideraciones anteriores surge el término "modelo matemático", este concepto ha estado presente en muchos de los campos de las ciencias con los que las Matemáticas tienen amplia relación. A continuación se señalan algunas definiciones, a saber:

Tabla 6. *Definiciones de modelo*

Modelo matemático	
Definición	**Autor**
"Se define un Modelo Matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del 'mundo-real'. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales"	Giordano et al., (como se citó en Villa et al., 2009, p. 161)
"Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representan, de alguna manera, el fenómeno en cuestión"	Biembengut y Hein (2004, p.106)
Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, MEN (2006, p. 52)
"Conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación"	Villa et al., (2009, p. 162)
Los modelos son sistemas conceptuales que generalmente suelen ser expresados mediante una variedad de representaciones, los cuales pueden incluir símbolos escritos, lenguaje verbal, gráficas hechas con herramientas computacionales, diagramas o gráficas en papel, o metáforas basadas en la experiencia. Estos deben incluir: (a) Un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos, las relaciones, acciones, patrones y regularidades relevantes que contribuyan a resolver la situación-problema; y (b) acompañar los procedimientos generando construcciones, manipulaciones o predicciones que conlleven a cumplir las metas	Lesh y Harel (como se citó en Albarracín y Gorgorió, 2013, p. 930)
"En general, un modelo es una representación de una idea, un concepto, un objeto o un fenómeno"	Gilbert, Boulter y Elmer (como se citó en Rosa y Orey, 2012, p. 269)
"Es una combinación de una o más 'entidades' matemáticas cuyas relaciones son elegidas para representar aspectos de una situación del mundo real"	Niss (como se citó en Bautista, Wilkerson-Jerde, Tobin, y Brizuela, 2013, p. 961)

Se puede observar cierta similitud en las definiciones presentadas, por ejemplo, el uso de los modelos para representar una situación o fenómeno; los autores plantean que esto se puede realizar de manera gráfica, verbal, con diagramas en computador o con papel y lápiz, con símbolos, etc.; además, añaden características relacionadas con la validación del proceso de modelación el cual se puede realizar a través del modelo, sin embargo, este debe cumplir condiciones como: utilizar representaciones con las que se puedan presentar las ideas de manera clara y sin ambigüedades, precisar un lenguaje conciso que permita la comunicación, el análisis general y particular de la situación que se representa mediante el mismo, por otra parte, debe ser útil para predecir, verificar y explicar los resultados atendiendo a las condiciones iniciales de la situación presentada.

Modelación de funciones

Tras mencionar el tema de la modelación matemática y lo que constituye un modelo, vale la pena presentar algunos elementos que se refieren explícitamente a la modelación de funciones y presentar la manera como aporta ese proceso en la enseñanza y aprendizaje del concepto en cuestión.

La función es un concepto matemático que ha tenido una larga evolución y ha experimentado ciertas dificultades y situaciones que hicieron parte de la constitución del mismo como se conoce actualmente; sin embargo, en su enseñanza muchas veces no se tienen en cuenta esos elementos y no se comprende por qué el aprendizaje de dicho concepto matemático conlleva tantas dificultades. Es necesario recordar que la función surge a partir del tratamiento de fenómenos o situaciones sujetas a la variación y el cambio, sin embargo, la formulación rigurosa y generalizada del concepto ha llevado a que se pierdan estos atributos y que se conciba como algo estático.

Posada y Villa (como se citó en Giraldo, 2012, p. 17) plantean que:

> La variación implica apreciar de qué modo dos o más cantidades covarían, de tal forma que el cambio en una o algunas, determine cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las cantidades están correlacionadas.

Dicha consideración, permite vislumbrar que en el estudio de la función se busca establecer relaciones entre cantidades o magnitudes que varían, lo cual se puede lograr a partir del abordaje de situaciones de modelación matemática. Para sustentar dicha afirmación, a continuación se presentan algunas consideraciones que relacionan la modelación y las funciones:

Tabla 7. *La modelación de funciones*

Modelación de funciones	
Consideraciones	**Autor**
"A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo"	Hitt (como se citó en Guevara, 2011, p. 10)
Cuando se modelan situaciones reales u otras que se enmarcan en el proceso cognitivo de la adquisición del concepto de función, se provoca que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, analice y describa la significación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. En el proceso de simulación y de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, las cuales a su vez, impulsan la construcción de otros registros de representación	(Guevara 2011, p. 10)
"A través de las funciones se pueden modelar matemáticamente diversas situaciones que permiten describir y analizar las relaciones entre magnitudes con el fin de prever los resultados"	Cruz y Medina (2013, p. 72)
"Hallar una función que describa la variación y/o dependencia entre dos variables, se conoce con el nombre de Modelado de funciones."	(Guevara 2011, p. 12).

Se debe hacer claridad que se usa la modelación como el objeto principal de estudio, de tal forma que al solucionar un fenómeno o situación, surjan los elementos que constituyen la función, desde el pensamiento variacional.

A continuación se presenta una figura que ilustra y sintetiza las ideas que se han desarrollado en este capítulo, así

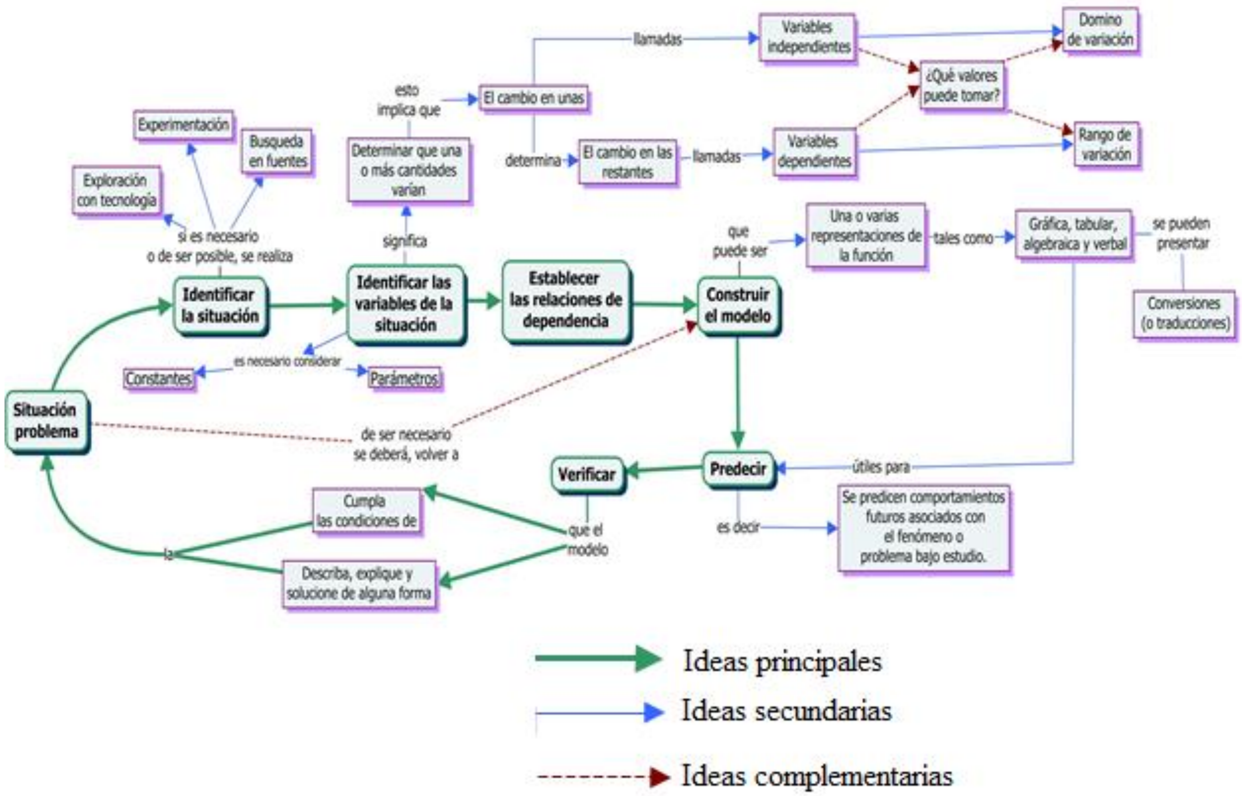


Figura 3. Modelación de funciones desde el pensamiento variacional

En la figura anterior, se muestra la forma como se propone llevar a cabo el proceso de modelación, se puede vislumbrar que se pretende abordar la función haciendo énfasis en el pensamiento variacional. A partir de una situación o fenómeno sujeto a la variación y el cambio se pueden establecer relaciones entre variables e identificar elementos que constituyen el concepto, como las variables independientes y dependientes, la unicidad de la imagen, el dominio, el rango y de ser posible otras características del concepto en general. Al contemplar la modelación de esa forma, se puede decir que no importa la cantidad de modelos resultantes, siempre y cuando cumplan las condiciones del problema y sean coherentes "de alguna forma[7]" con los datos del mismo.

[7] Significa que no necesariamente el modelo generado debe ser coherente con la realidad, se pueden construir uno o varios modelos que expliquen algo de la situación y sí sean coherentes con los datos dados.

Para terminar, es necesario precisar que el modelo, es principalmente una de las representaciones de la función (u otras representaciones), por ende, se privilegia el paso de una representación a otra. En el siguiente apartado se precisarán estos elementos.

2.3.3. Sistemas de representación

Una de las cuestiones que se han trabajado en el campo de la Educación Matemática, está relacionada con la posibilidad de caracterizar la comprensión de los estudiantes con respecto a un objeto particular cuando desarrollan alguna actividad matemática. Gutiérrez y Parada (2007) señalan que "muchos investigadores han tenido en cuenta las representaciones en los procesos de enseñanza – aprendizaje, como herramienta importante en la construcción de significados" (p. 22). El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, NCTM (2003) plantea el uso de los sistemas de representación como uno de los principios, porque mediante ellos, los estudiantes tienen la posibilidad de expresar sus ideas, memorizarlas, entre otras. También señalan la importancia de usar las representaciones para modelar, interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Por estas razones, se debe hacer alusión a los aportes de la teoría de registros de **representación semiótica**[8] de Duval; se plantea por un lado, que es necesario usar las representaciones para caracterizar los objetos matemáticos, debido a que estos no son accesibles a la percepción humana; por otro lado, se señala que la comprensión de un contenido conceptual, reposa en la coordinación (manifestada por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión) de al menos dos registros de representación Duval (como se citó en Guzmán, 2006). En consecuencia, Pecharromán (2008) puntualiza que "dominar un concepto matemático consiste en conocer sus representaciones (…), operar con las reglas internas de cada sistema, traducir entre los sistemas de representación y conocer qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas

[8] "Son producciones constituidas por el empleo de signos, que representan a un sistema de representación (…) Estas pueden ser representadas por medio de un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, una figura geométrica" (Guzmán, 2006, p. 13). En este trabajo se tiene en cuenta esta teoría solo para mostrar que el uso de las representaciones es una forma como se accede a un objeto matemático, en este caso el concepto de función.

propiedades" (p. 37). Ahora bien, "no se deben confundir las representaciones con el objeto matemático, si bien, a partir de ellas se accede a su comprensión, estas no son el objeto mismo" (Rico, como se citó en Guerrero y Ortiz, 2012, p. 28).

De acuerdo con Pecharromán (2008), Gutiérrez y Parada (2007) hay autores tales como Castro y Castro (como se citó en Guerrero y Ortiz, 2012) y Rico (como se citó en Guerrero y Ortiz, 2012), que distinguen dos tipos de representaciones, esto es, la externa y la interna, en este trabajo solo se tendrá en cuenta el primer tipo, el cual se define en el siguiente gráfico:

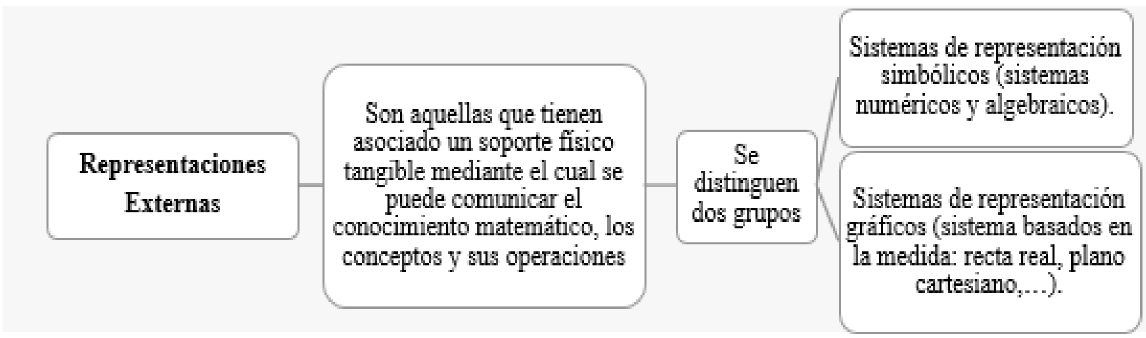


Figura 4. Basado en Pecharromán (2008, p. 36*)*

Se puede notar que con la representación externa, se ilustran las ideas de un concepto matemático de tal forma que se pueda identificar, para ello se usa un lenguaje verbal, simbólico, numérico o gráfico.

Representaciones de las funciones

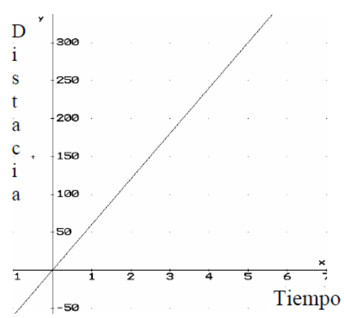
Anteriormente, se aludió a la importancia de los sistemas de representación y las formas como se hacen visibles, ahora, se hablarán acerca de las formas de representar las funciones. Vinner (como se citó en Rey, Boubée, Vazquez y Cañibano, 2009) presenta un modelo de construcción de un concepto, que involucra las representaciones, las propiedades asociadas al concepto y las definiciones del mismo, esto es:

> Sea C un concepto y P una persona. La representación mental que P hace de C es el conjunto de todas las representaciones que se han asociado con C en la mente de P. Esto incluye el gráfico, el diagrama, la tabla, el enunciado verbal o la expresión simbólica

$y = f\ (x)$ de una función. (…), puede haber un conjunto de propiedades asociadas con el concepto (p. 155).

En la consideración anterior se mencionan los diferentes registros de representación de la función, estos son, verbal, tabular, gráfico y algebraico; los cuales también son precisados por Janvier (como se citó en Font, 2001), a continuación, se muestra una tabla en la cual se realiza una descripción de cada registro, junto con un ejemplo, a saber:

Tabla 8. *Representación de funciones*

Representación verbal: Hace referencia a los enunciados que se hacen en lenguaje natural con el fin de mostrar la relación entre los valores de dos magnitudes o variables.	**Representación tabular o numérica:** Se hace una tabla o lista de valores, donde se relacionan algunos de la variable independiente con uno solo de la variable dependiente.	**Representación gráfica**: Es la presentación de puntos sobre una gráfica de una función en el plano coordenado, las coordenadas de los puntos se representan de la forma $(x, f(x))$. Las gráficas permiten representar las funciones en forma muy clara y ayudan a sacar conclusiones respecto de las mismas (Guzmán, 2006).	**Representación algebraica:** Se expresa por medio de una ecuación de dos variables o formula.
Ejemplo: El precio de venta de un producto es igual al costo de éste, incrementado en un 35% debido a gastos administrativos y de publicidad.	**Ejemplo:** T d 1 16 4 64 9 .	**Ejemplo:** 	**Ejemplo:** $y = mx + b$

Según Font (2001, p. 182):

La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra.

De otro lado, se debe precisar que además del manejo de las representaciones, se debe realizar la conversión entre ellas, porque este proceso es crucial a la hora de reconocer si un estudiante maneja un concepto o no. Janvier (como se citó en Guzmán, 2006) indica las habilidades que necesitan los alumnos para realizar una exitosa traducción[9] entre varias representaciones de la función, esto se expresa en la siguiente tabla:

Tabla 9. *Adaptación de la tabla propuesta por Janvier (como se citó en Font, 2001, p. 182)*

Hacia / **Desde**	**Situación, Descripción verbal**	**Tabla**	**Gráfica**	**Expresión analítica**
Situación, Descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación/cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de gráficas	Lectura de gráfica	Variaciones de escalas, unidades, origen. etc.	Ajuste gráfico
Expresión analítica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Se debe tener en cuenta que se pueden presentar conversiones de las representaciones dentro del mismo registro donde se ha formado, esto constituye lo que se denomina “tratamiento” de una representación (Guzmán, 2006).

Los registros de representación de la función (verbal, tabular, gráfico, algebraico,…) que se usan en la actualidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto, son el resultado o producto de las situaciones que motivaron a lo largo de la historia su estudio y desarrollo. La

[9] El término traducción usado por Janvier es equivalente al de conversión usado por Duval, el cual tiene que ver con el paso de una representación a otra que conserva parte del significado de la representación inicial pero al mismo tiempo da otras significaciones del objeto representado (Gutierrez y Parada 2007).

función surgió del estudio de las situaciones sujetas al cambio y la búsqueda de regularidades, a partir de ello, se dieron formas de representar las relaciones encontradas, esto es, expresiones verbales y tabulares, en la medida en que se fue logrando mayor generalidad del concepto se usaron otras representaciones como las gráficas, las expresiones analíticas, las series infinitas, entre otras; que facilitaron el estudio de las propiedades, la obtención de la definición y la aplicación en la solución de situaciones problema.

Con el uso de la Modelación Matemática se busca construir un modelo que en el caso de las funciones, es alguna de sus representaciones, se orientará a que dicho modelo se presente de diferentes formas de tal suerte que resulten conversiones y con ello dar mayor sentido al concepto. Ahora bien, se espera llevar a cabo las conversiones de una forma similar a la que se dio en la historia, atendiendo a las situaciones y problemas que le dieron sentido y significado al mismo y articulando ya sea de manera secuencial o no las representaciones elaboradas.

2.3.4. El uso de la tecnología

En la actualidad, se puede vislumbrar cómo la tecnología ha permeado nuestra vida cotidiana y se le ha establecido un carácter significativo en nuestra sociedad. Por los diversos avances que ha experimentado, se han producido cambios en la manera en que las personas aprenden y producen nuevos conocimientos, más aún, cuando en los últimos años se ha implementado el uso de estrategias tecnológicas en la educación. Al respecto, se han desarrollado gran cantidad de investigaciones y trabajos que muestran el papel decisivo de las estrategias y los recursos didácticos que emplean los docentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje; uno de estos, es el proyecto titulado “Tecnologías computacionales en el currículo de Matemáticas”, el cual, ha mostrado la importancia de las herramientas tecnológicas en el quehacer docente y “la necesidad de hacer grandes esfuerzos para buscar la mejor manera de hacer uso de ellas, en el aula de clase” (Castiblanco, 2002, p. 17). Dicho proyecto se creó para mejorar la calidad de la educación Matemática en Colombia y *para modernizar los ambientes escolares, aprovechar el potencial educativo de las tecnologías y promover su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje* (estas políticas son impulsadas por el sistema educativo colombiano).

Por otro lado, es necesario considerar que como lo afirman Borba y Villarreal (como se citó en Cruz y Medina, 2013) “la tecnología y los artefactos establecen una relación con los seres humanos tal que, de la manera como se genere dicha relación va a depender la forma como un individuo aprende o produce nuevo conocimiento” (p. 60). En ese sentido, la tecnología y los seres humanos no se deben concebir aparte sino de manera relacionada; por un lado, las personas transforman y potencian las herramientas tecnológicas y a su vez, estas influyen en el pensamiento del individuo, en la manera de organizar sus ideas, de explorar y producir conocimiento.

Dichas consideraciones, entre otras, han provocado que se realicen estudios en torno al uso didáctico de recursos informáticos en el aula, como lo afirman Fiallo, Iglesias, y Urbina (2002) “el incorporar la tecnología en la clase de Matemáticas ofrece nuevas estrategias para la solución de situaciones problemáticas, y se constituye en un nuevo entorno para la exploración y la sistematización” (p. 79). Hoy en día existen diversos software que contribuyen en dichas actividades, además de permitir la animación, el arrastre y la verificación; entre estos, se encuentran los programas Cabri Géometre II plus y Geogebra, que al contar con dichas propiedades permiten crear ambientes de aprendizaje experimentales en el aula, dando la oportunidad de modelar, simular, observar, conjeturar, predecir y generalizar. Es precisamente esa la principal razón de usar alguno de dichos software de Matemáticas para la enseñanza del concepto de función y teniendo en cuenta que se pretende abordar a partir del proceso de modelación, aparece la necesidad de utilizar herramientas que faciliten esa actividad Matemática e ilustren elementos que con lápiz y papel no son simples de realizar y en muchas ocasiones se tornan tediosos o imposibles; como en el caso del arrastre; en el caso de la modelación, los software permiten obtener diferentes modelos los cuales son representados de diversas formas (tabular, gráfico, numérico, algebraico), además, como afirma Kaput (como se citó en Vasco, 2002) “la tecnología permite enlazar distintos modelos y representaciones” (p. 77). Vale la pena precisar que no todas las actividades que se proponen en este trabajo requieren del uso de programas informáticos, sin embargo en la mayoría de los casos sí, por esa razón se realiza esta sección del documento.

2.3.5. Algunas consideraciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función

En este apartado se exponen las tendencias más usadas en el abordaje de la función en el aula de clase, debido a que es un concepto de gran relevancia en el estudio de las Matemáticas, tanto en la educación básica y media como en la universidad, por ende, es necesario contemplar si las formas como se ha enseñado el concepto de función permiten una conceptualización adecuada; Planchart (2000) señala que "el concepto de función, en algunas ocasiones, se presenta sencillo y de fácil comprensión, pero investigaciones (…) han mostrado que en algunas ocasiones conlleva a dificultades su comprensión" (p. 9).

Algunos autores como López y Sosa (2007), Jaimes (2012), Giraldo (2012), García, Vázquez y Hinojosa (2004), Ruíz (1993), Hecklein, Engler, Vrancken, y Muller (s.f.), entre otros, han considerado las formas de enseñar la función; señalan que en general, este concepto se aborda desde un enfoque tradicional en el cual se explican directamente los conceptos (sin tener en cuenta la evolución histórica del mismo), privilegiando un manejo esencialmente algorítmico y algebraico. López y Sosa (2007), Planchart (2000) y Jaimes (2012) señalan que la enseñanza tradicional del concepto de función sigue una línea muy marcada, a continuación se presenta un gráfico en el cual se muestra dicha tendencia:

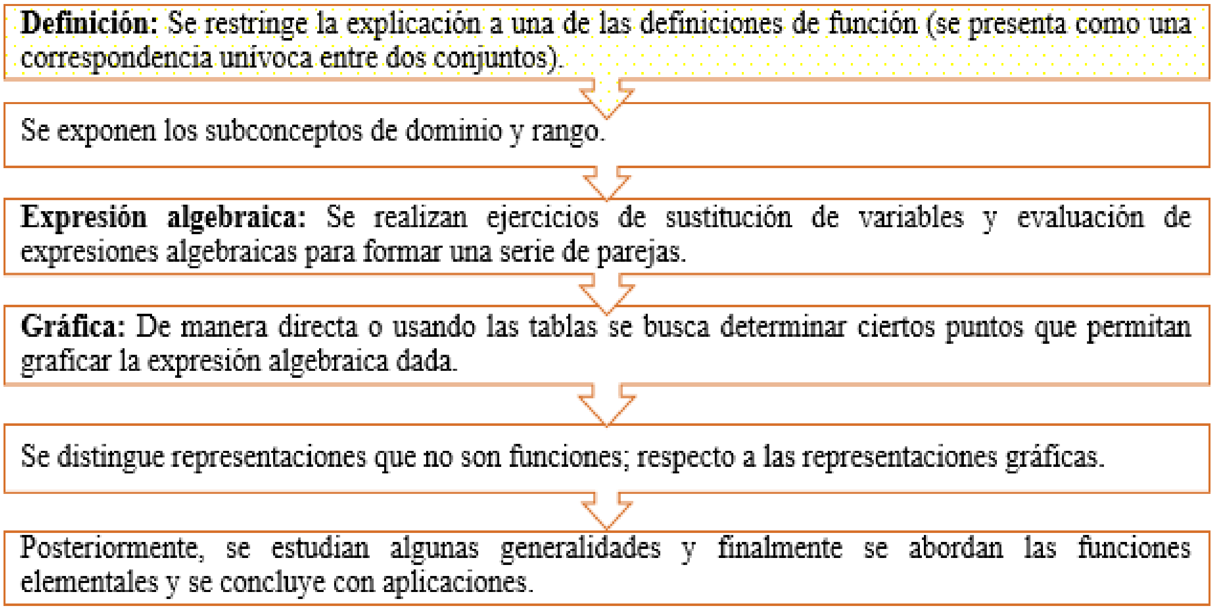


Figura 5. Enseñanza tradicional del concepto de función

Esta forma tradicional de abordar la función ha llevado a que los estudiantes no comprendan el concepto; de hecho, Planchart (2000) advierte que:

> En muchas ocasiones se ha observado que los estudiantes después de estudiar el concepto y los subconceptos de función, tienen una comprensión que, en muchos casos, se limita al uso de una regla para probar cuándo una relación es función o en otros casos a la evaluación de funciones en el contexto algebraico (p. 9).

Los autores precisan que una enseñanza de este tipo genera limitaciones y obstáculos para el aprendizaje y la comprensión tales como:

- No se logra tener una visión amplia del concepto debido a que "se tiene muy arraigada la idea de las funciones escritas con una sola expresión algebraica, que además tiene un dominio continuo" (De la Rosa, 2003, p. 126).
- "Se deja de lado el proceso de construcción del concepto de función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional" López y Sosa (2007, p. 25).

- “Gran parte de los textos coinciden en abordar la noción de función de una manera formal, distanciada del desarrollo histórico y epistemológico en el que los conceptos de variabilidad y cambio son los que constituyen su fundamento” (Jaimes, 2012, p. 29).

Estas consideraciones permiten concluir que centrar la atención en situaciones de dependencia y variación podrían generar un mejor acercamiento a la comprensión de la función, de hecho algunos autores exponen los siguientes planteamientos:

- “La función podría encontrar una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos en el estudio y análisis de la variabilidad de los fenómenos sujetos al cambio” (Jaimes, 2012, p. 30).
- “Usar la modelación matemática como una herramienta que permita hacer una primera mirada a los objetos que cambian y cómo cambian, para fortalecer el concepto de variabilidad y dependencia, propicia la ambientación previa a la noción formal de función” (Jaimes, 2012, p. 30).
- “Proponer que los alumnos y alumnas empiecen desde el preescolar y la primaria por vivenciar y ejercitar los procesos de matematización, por la modelación matemática y el pensamiento variacional, puede parecer utópico, hasta imposible. Mi tesis es que esa es la decisión más realista y factible que podemos tomar desde hoy mismo en la configuración de currículos, programas, unidades didácticas, textos, materiales y juegos matemáticos” (Vasco, 2002, p. 2).

Errores y dificultades en el aprendizaje del concepto de función

En cuanto al aprendizaje de los estudiantes, en lo que refiere a aspectos cognitivos, es necesario contemplar los errores y dificultades que se presentan, en particular, aquellos que se tienen en cuenta en la propuesta didáctica, en los que se considera, se puede contribuir en su superación, a saber:

Tabla 10. *Dificultades y errores en el aprendizaje del concepto de función*

Dificultades	Errores
Durante la enseñanza de los conceptos ecuación y función no suele explicitarse lo que quiere decir la presencia de x en cada una de ellos, es decir, no se pone el debido énfasis en la diferencia que existe entre variables e incógnitas, por lo tanto se generan dificultades en el aprendizaje de los estudiantes (López, 2007).	No se consideran como funciones a aquellas que tiene la característica de tener un domino discreto (López, 2007).
Explícitamente los alumnos responden, sin importar su naturaleza u origen, que las variables involucradas son x e y. (Guzmán, 2006).	No se articulan correctamente los diferentes registros de representación. (Guzmán, 2006)
Bastantes alumnos solo admiten funciones bien definidas, donde se pueda saber qué número corresponde a otro número mediante la aplicación de una regla o la solución de una ecuación (De Prada, 2007, p. 33)	No sustituir correctamente y en algunos casos, realizar procesos algebraicos erróneos para hallar el valor de $f(x)$ dado el valor de x. (López, 2007)

METODOLOGÍA DEL TRABAJO

A continuación, se hará una descripción general de los procedimientos metodológicos que se llevaron a cabo en el desarrollo del presente trabajo de grado (posteriormente, se precisan con más detalle algunos de ellos), el cual es de tipo cualitativo, debido a que se exploran y caracterizan las respuestas de los estudiantes a partir de un cuestionario; además, el trabajo se basa en fundamentos del pensamiento variacional y la modelación matemática, el mismo, fue desarrollado en tres fases fundamentalmente, a saber:

Fase 1: Se realizó la búsqueda de trabajos y publicaciones relacionados con el concepto de función, a partir de ello, se recopiló información de los elementos históricos, teóricos y didácticos, que además de sustentar el marco de referencia, fueron de utilidad para hacer consideraciones de la enseñanza del concepto; se destaca el desarrollo del pensamiento variacional y la modelación matemática.

Fase 2: En la segunda etapa, se realizó el proceso de elaboración, aplicación y análisis de un cuestionario (con preguntas abiertas), el cual se realiza con el objetivo de caracterizar las diferentes concepciones de los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con respecto a la función.

El cuestionario, que incluyó elementos de las situaciones que le dan sentido al concepto, las invariantes y las representaciones (posteriormente se menciona qué se entiende por cada uno de estos elementos), fue aplicado a 20 estudiantes. A partir de la caracterización y estudio de las argumentaciones en cada ítem, se determinaron las categorías de análisis y se realizó una descripción cualitativa y cuantitativa numérica de los datos encontrados, de esta forma, se cumple uno de los objetivos propuestos y se obtuvieron algunas conclusiones importantes del trabajo.

Fase 3: se realizó la propuesta didáctica para abordar el concepto de función, la cual atiende a diferentes elementos considerados tanto en el marco de referencia como en el análisis de los cuestionarios; se estructuraron las actividades en dos partes, en las cuales se enfatiza en situaciones de variación, cambio y dependencia, ligadas con la modelación matemática. En total se realizaron 23 actividades, en cada una, se mencionan principalmente, los propósitos, las preguntas orientadoras generales y los recursos, dentro de estos últimos, en algunos casos se elaboraron "Applets" en GeoGebra, los cuales se presentan en una página Web y en un CD para que las personas tengan la oportunidad de acceder de forma completa a las actividades.

CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE SÉPTIMO SEMESTRE DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, CON RESPECTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

En este capítulo se pretende realizar una identificación del tipo de concepción de la función que tienen los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; en el primer apartado se presentan algunos significados de concepción, en seguida se exponen los elementos que la constituyen y en particular, se precisan los elementos del concepto de función, luego se mencionan algunos aspectos importantes que condujeron a la constitución del cuestionario final, después se presentan las respectivas categorías de análisis y finalmente se expone el análisis de los resultados.

Se elige a los estudiantes de séptimo semestre para aplicar el cuestionario porque han cursado diferentes espacios académicos durante la carrera (incluso en la secundaría) en los que han estudiado el concepto de función y porque se considera que las formas como se concibe el concepto, influencian la manera de abordarlo en el aula de clase.

4.1. Noción de concepción

El término concepción es muy utilizado para hacer referencia a las explicaciones de la adquisición del conocimiento, es decir, la indagación que se hace en el discurso educativo cuando interesa identificar el nivel de comprensión de los estudiantes. Es importante realizar algunas consideraciones frente a dicho término, debido a que no es usado de manera general en todas las investigaciones educativas, así, se genera una noción más amplia y establecer los elementos que componen la concepción de los estudiantes frente a un concepto matemático particular.

En Ruíz (1993) se considera que "la palabra concepción se define como 'acción de concebir' y, concebir, a su vez, es 'formar o empezar a tener ciertas cosas en la mente'" (p. 44), además, se mencionan algunos planteamientos que intentan darle significado a la noción de concepción desde la didáctica de las Matemáticas, entre las cuales se encuentran los aportes realizados por Artigue (como se citó en Ruiz, 1993), quien considera que la concepción debe "(…) diferenciar las representaciones y modelos de tratamiento que le son asociados, poner en evidencia su adaptación más o menos buena en la resolución de diferentes tipos de problemas (..)" (p. 46).

Lo anterior permite señalar que si bien no se puede caracterizar el aprendizaje de los estudiantes, sí es posible generar actividades para vislumbrar sus ideas y sus concepciones, en las que se incluye las representaciones y la forma de utilizarlas o adaptarlas en la resolución de algún problema o situación, ya sea de la realidad, de algún contexto de las ciencias o de las Matemáticas.

Es necesario tener en cuenta que "la concepción nos da cuenta del estado de los conocimientos de un alumno en relación a un concepto" (Vergnaud, como se citó en Ruiz, 1993, p. 50).

4.2. Elementos que hacen parte de la concepción

Es necesario precisar los elementos que hacen parte de la concepción; al respecto, Vergnaud (como se citó en Ruiz, 1993) precisa que todo concepto matemático es determinado por una terna que lleva a la comprensión del mismo, la cual se conforma de la siguiente manera:

*"**S**:* el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, ***I**:* el conjunto de invariantes que constituyen el concepto, ***s**:* el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere" (p. 50).

Siguiendo la postura de Verganud, para identificar la concepción de los estudiantes, se caracterizarán las respuestas del cuestionario a partir de tres elementos:

- ✓ **I: Invariantes o intensiones:** conjunto de elementos o notas esenciales que los estudiantes le asocian a la función.
- ✓ **R: Representaciones**: formas de representar el concepto.
- ✓ **S: Situaciones**: en las cuales el sujeto emplea la función.

Con la propuesta didáctica se pretende abordar el concepto de función atendiendo a los siguientes elementos:

- *Situaciones que dan sentido al concepto*: Tiene que ver con situaciones de variación y cambio con el uso de la modelación.
- *El conjunto de invariantes que constituyen el concepto de función*: tienen que ver con características que son indispensables en la definición del concepto, en el caso de la función, se debe tener en cuenta que el cambio en una de las variables determina un único cambio de la (s) otra(s).
- *El uso de las representaciones de la función*: como se precisó anteriormente, las representaciones que se consideran de este concepto son verbal, tabular (o numérica), gráfica y simbólico-algebraica.

También se considera importante tener en cuenta, además del uso de las representaciones, la conversión o traducción entre ellas, entonces se añade a los elementos del concepto de función, para tenerlo en cuenta en la construcción de la propuesta didáctica, el siguiente:

- *La conversión o traducción de las representaciones de la función* (procesos entendidos como el paso de una representación a otra): el estudiante además de usar las representaciones, debe poder moverse entre ellas sin mayor dificultad.

4.3. Proceso de construcción y análisis del cuestionario

Para construir el cuestionario presentado (ver “Anexo 2: Cuestionario de aplicación”) se realizaron las siguientes fases:

1. Selección de posibles ítems a incluir en el cuestionario:

Los ítems recopilados se basaron en trabajos como el de Ruiz (1993) y De Prada (1996), uno de estos se tomó textualmente (se realiza un pie de página en la descripción del cuestionario en el ítem correspondiente (ver numeral 3, “Anexo 2: Cuestionario de aplicación”)).

2. Selección de ítems de acuerdo con algunos criterios:

Con el cuestionario se busca identificar el tipo de concepción de función que tienen los estudiantes, por ello, se incluyen elementos que permitan vislumbrar elementos como:

- Situaciones que le dan sentido al concepto de función

- El conjunto de invariantes que constituyen el concepto de función
- El uso de representaciones

Se definirán las diferentes concepciones de los estudiantes de séptimo semestre a partir de la consideración de estos tres elementos. También, se incluyen cuestiones en las que se involucra el uso de diferentes representaciones, así que se pueden realizar traducciones, sin embargo, en el análisis no se profundizará en ello.

3. Implementación de dos pruebas piloto:

Se realizaron dos pruebas piloto, la primera fue aplicada a dos profesores del Departamento de Matemáticas y dos estudiantes de la Licenciatura, posterior a ello, se realizó un diálogo para comentar los propósitos y preguntar por la claridad y la coherencia de las preguntas, con lo cual se generó una reestructuración del cuestionario. La segunda prueba se realizó en el espacio académico “Cálculo Integral” correspondiente al tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, se contó con un tiempo de 30 minutos, por lo tanto se decidió dividir el cuestionario en tres partes y aplicar cada una por separado a parejas de estudiantes. De ambas pruebas piloto surgieron defectos de forma (comprensión de los enunciados), el tiempo era insuficiente, entre otras.

4. Corrección del cuestionario y finalización del mismo:

Después de corregir los defectos encontrados en la segunda prueba piloto se determinó el cuestionario definitivo, el cual consta de siete ítems y un total de veinte preguntas, de las cuales, la mayoría son abiertas. Se opta por este tipo de preguntas debido a que se pretende estudiar las diferentes argumentaciones y elementos matemáticos y didácticos que se ponen en juego con respecto al concepto de función.

5. Descripción del cuestionario:

El cuestionario consta de siete ítems, con veinte preguntas en total; se divide en tres partes, en cada una se refiere a alguno de los componentes del concepto de función (ver página 38), la primera está conformada por un ítem y dos preguntas en las que los estudiantes pueden mostrar las formas como abordarían el concepto y las actividades que realizarían. La segunda parte contiene trece preguntas distribuidas en cuatro ítems en las que se pretende identificar el uso de tres de las representaciones de la función, gráfica, algebraica y tabular. En la tercera parte, se proponen cinco preguntas distribuidas en dos ítems, las cuales tienen que ver con situaciones de modelación, en las que se involucra la variación de diferentes magnitudes estas son situaciones que le dan sentido al concepto de función.

Primera parte

Esta parte del cuestionario incluye únicamente un numeral que está relacionado con las formas de abordar la función en el aula de clase.

> **1.** El concepto de función en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas aparece en grado noveno; si tuviera que enseñar este concepto para **iniciar su estudio**, ¿cómo lo haría? Mencione las actividades que realizaría en el orden en que las abordaría.

Este ítem del cuestionario se plantea con el ánimo de dar una primera mirada al tipo de concepción que tienen los estudiantes acerca de la función, por tal motivo, se solicita que precisen las formas como introducirían este concepto en el aula; se observarán los elementos que consideran necesarios y el tipo de actividades que plantearían.

Se pueden encontrar respuestas muy variadas, pero en ellas se busca identificar los términos que usan los estudiantes para referirse a la función, por ejemplo; pareja ordenada, relación, dependencia entre variables, conjunto, dominio, rango, gráfica, regla de asignación, ley, etc. Se observará también el orden en que proponen realizar las actividades, esto permitirá observar si las posibles formas como les han enseñado ese concepto y como ellos pretenden hacerlo, corresponden a una enseñanza tradicional que como se mencionó en apartados anteriores (ver "enseñanza de la función") limita el aprendizaje y la comprensión de ese concepto matemático. Los estudiantes cuentan con los recursos que consideren necesarios para explicar sus respuestas, por ese motivo se plantearon las preguntas de forma abierta.

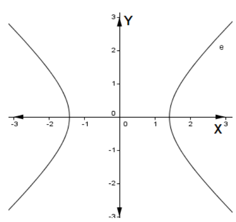
Segunda parte

Dada la importancia del uso de los diferentes registros de representación de la función tanto para el proceso de enseñanza como en la identificación de su comprensión, se debe señalar que las representaciones gráfica, tabular y algebraica son las más utilizadas habitualmente en las clases de

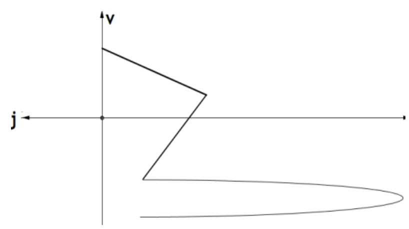
Matemáticas; es por ello, que se busca con las siguientes actividades observar, por un lado, los razonamientos que usan los estudiantes para determinar en qué casos se cuenta con la representación de la función y por otro lado, si utilizan las representaciones habituales, o si por el contrario se dan cuenta que el tener o no la representación de una función es consecuencia de la determinación o escogencia de la variable independiente y la variable dependiente.

2. ***Representación gráfica***: a continuación se presentan varias figuras, en cada caso determine si corresponde o no a la representación gráfica de una función. Justifique su respuesta (los valores presentados en cada gráfica son los únicos valores de cada variable)

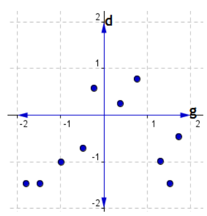
a)



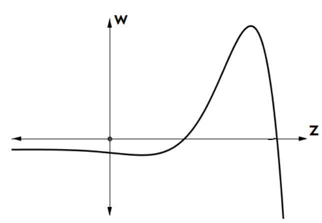
b)



c)



d)



En el numeral 2 del taller, se han establecido cuatro figuras, dos de ellas con ejes graduados; se han nombrado los ejes (variables) con diferentes letras con el fin de inducir a los estudiantes a que determinen el eje de la variable independiente y el eje de la variable dependiente; se debe destacar la escogencia de diferentes figuras, tanto continuas como discretas.

Los estudiantes se encuentran ante varias correspondencias, es así que de forma visual deben observar cuales son unívocas; en cada caso, la unicidad de la imagen de la función, dependerá de la escogencia de la variable independiente y dependiente, es allí donde las argumentaciones o justificaciones realizadas por los estudiantes permitirán observar si el manejo de la representación gráfica habitual (variable independiente-eje horizontal, variable dependiente- eje vertical) de la función limita, o no, la identificación de funciones.

En esta pregunta se espera analizar dos partes, una consiste en decidir si la gráfica representa o no una función, la otra tiene que ver con la justificación respectiva, la cual se puede asociar con la determinación del eje que representa la variable independiente y la dependiente, de esta forma, se pueden establecer para el análisis dos conjuntos de respuestas:

Escogencia en todos los ítems del mismo eje para la variable independiente.

a) Eje horizontal- Variable independiente (representación habitual)

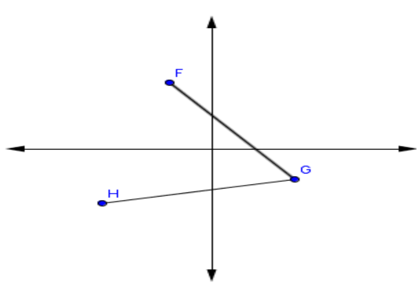
b) Eje vertical -variable independiente

Escogencia en todos los ítems del eje para la variable independiente de acuerdo con lo siguiente:

a) Escogencia de eje-variable independiente para obtener el mayor número de gráficas de funciones

b) Escogencia de eje-variable independiente para obtener el menor número de gráficas de funciones

3. Se le preguntó a un estudiante, cómo sería la gráfica de una función que pasa por los puntos F, G y H. Él ha dado la siguiente respuesta[10]:



a) ¿Es correcta la respuesta que dio el estudiante? Justifique la respuesta

b) ¿Cuántas funciones pueden pasar por los tres puntos dados? Esboce un ejemplo.

i) Una
ii) Dos
iii) Entre 3 y 10
iv) Infinitas

En el numeral 3, se plantea una tarea relacionada con cuatro aspectos, el primero tiene que ver con decidir si es correcta o no la respuesta dada por el estudiante, el segundo se refiere a la justificación, la cual depende de la determinación del eje que representa la variable independiente. El tercero, se relaciona con el uso de la representación gráfica de una función que pasa por tres puntos dados, se espera identificar si el estudiante tiene en cuenta la invariante de la unicidad de la imagen para establecer la cantidad de funciones elegida, esto implica el conocimiento de diferentes tipos de funciones (discretas, continuas o discontinuas).

[10] Basado en (De prada, 1996, p. 12)

4. ***Representación tabular***: incluya valores en las siguientes tablas de tal manera que se obtenga una representación tabular de función (los valores que registre en cada tabla son los únicos valores de cada variable).

T					
H					

Q					
P					

¿Qué consideración hizo para escoger los valores numéricos que se escribieron en la tabla?

En este caso, se pretende observar si se obtiene una de las conclusiones a las que llegó Peralta (como se citó en Gutiérrez y Parada, 2007) en su trabajo titulado "Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal", esto es:

"El registro tabular es visto solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación en sí misma" (p. 61).

Lo anterior, llevaría a plantear que los estudiantes optan por pensar en una expresión algebraica que puede ser de la forma $y = mx + b$, o cualquier otra, antes de la elaboración de la representación tabular, es decir, se puede tener una idea de función expresada básicamente a través de una fórmula, por esta razón, no se concibe la representación tabular como una representación de la función.

5. ***Representación algebraica*****: determine cuáles de las siguientes expresiones representan una función, (n y L son parámetros de valores enteros positivos, $\mathbb{Q}$ corresponde al conjunto numérico de los racionales y $\mathbb{R}$ al de los reales). Justifique su respuesta.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + 2x, & si\ x \neq 0 \\ 2, & si\ x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y^2}{\left(\dfrac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2} - \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2} = 1$$

$$\boldsymbol{f(p) = \begin{cases} 1, & si\ p \in \mathbb{Q} \\ 0, & si\ p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 2, & si\ p = 10 \end{cases}}$$

Se presentan tres expresiones algebraicas, la primera y la tercera están definidas a trozos y en la segunda se hace realizó una transformación algebraica de una expresión que representa la variación de la longitud de la apotema de un polígono regular inscrito en otro[11], para obtener la expresión presentada. Los estudiantes se encuentran ante expresiones algebraicas visualmente no habituales, en las cuales además de las variables se incluyen ciertos parámetros; sin embargo, en el caso de la expresión "a", al considerar el parámetro *n* como un número entero positivo, la expresión en la primera parte es una función polinómica y si se tiene en cuenta la unicidad de la imagen en toda la expresión, no es difícil observar que satisface la definición de función; la representación "b" no es función y se puede ver de manera inmediata si se tiene en cuenta que está dada en la forma $\frac{y^2}{a} - \frac{x^2}{b} = 1$, es decir, una hipérbola, no obstante, se añaden dos parámetros que pueden causar dificultades para reconocer si es una función; en el caso del ítem c, la expresión no es función debido a que no satisface la unicidad de la imagen al considerar que *p=10* asume dos valores.

Tercera parte

La tercera parte del taller la constituyen algunas situaciones problemas de modelación, debido a que el estudio de la variación, el cambio y la dependencia dan sentido al concepto de función. Al respecto Sierpinska (como se citó en Ruiz, 1993) plantea que "la percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelizar relaciones entre magnitudes físicas u otras, es una condición ***Sine qua non*** para dar sentido al concepto de función en su totalidad" (p. 297). Teniendo en cuenta lo anterior, se proponen diferentes situaciones de las cuales se espera que los estudiantes puedan:

- **a.** Identificar la variable independiente y dependiente, así como el dominio y el rango de la función que modela la situación
- **b.** Usar alguna o todas las representaciones de la función para significar la situación, es decir realizar conversiones entre ellas
- **c.** Caracterizar la forma como se establece la variación y la relación de dependencia

[11] Dado un polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados y longitud de lado $\boldsymbol{L}$, en uno de los lados se pone a variar el punto $\boldsymbol{X}$, a partir de este punto se construye un polígono regular de igual número de lados inscrito. Y es la longitud de la apotema.

6. En las situaciones I y II establezca la **relación de dependencia** que se presenta y las diferentes **representaciones** que se pueden obtener de esta:

Situación I[12]: si las entradas del cine son muy baratas, los dueños pueden perder dinero; pero si las entradas son demasiado costosas, irá poca gente y también pueden perder dinero. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.

Situación II: En Colombia existen varios operadores de telefonía móvil que realizan el cobro respectivo de las llamadas. Suponga que se analiza el operador de telefonía Claro, considerando que se tiene un teléfono en plan prepago y que no se tiene la opción de elegidos para llamadas.

Históricamente, la noción de variable dependiente surgió a partir de estudios cualitativos y cuantitativos de cambio, siguiendo esta idea, se plantean dos situaciones en las cuales intervienen diferentes variables; se pone en juego la capacidad que tienen los estudiantes para identificar las que son dependientes y las independientes y si usan la función para representar las relaciones existentes. Se escogen dos situaciones cuya información es reconocida por los estudiantes para que puedan de alguno modo, contrastar las representaciones que realizan con la situación y observar la coherencia entre las mismas.

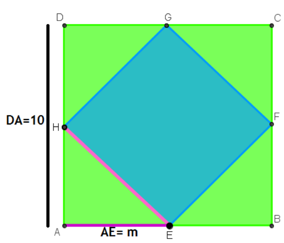
En la situación I se encuentran tres variables, pero la única independiente es el costo de la boleta, los estudiantes pueden relacionarla con la cantidad de personas que asisten o con las ganancias para el dueño; de acuerdo a la información presentada, los estudiantes pueden representar esas relaciones con esbozos gráficos, algunos podrían utilizar otras representaciones asignando valores numéricos para realizar tablas o expresar algebraicamente la relación, entre otras, todas estas se tendrán en cuenta para identificar si realizan conversiones coherentes y para observar la forma como representan la función.

La situación II es más abierta que la anterior, los estudiantes puede proponer cualquier variable que se relacione con la situación, esto podría dificultar la respuesta, sin embargo, se pone a prueba por un

[12] Situaciones tomadas de Ministerio de Educación y Ciencia (1990).

lado, el conocimiento que tienen los estudiantes de variable, así como la capacidad para usar la función para generar un modelo que se represente adecuadamente las variables planteadas; la situación se sesga de alguna forma al precisar que se debe considerar una telefonía (la más usada en Colombia), el plan prepago y no dar la opción de elegidos, entonces algunas variables pueden ser, el costo de la llamada, tiempo de duración, valor de recarga, cantidad de minutos para llamar, incluso, algunos de estos podrían considerarse como parámetros por ejemplo si se tiene una recarga de $2000, las variables pueden ser la cantidad de minutos usados y la cantidad de saldo que queda; esta y otras relaciones entre las variables se pueden encontrar. Se busca identificar las maneras como representan la relación propuesta así como las posibles conversiones que realicen y los términos que usen para referirse a la función. En ambas situaciones se tendrá en cuenta las invariantes que los estudiantes le asignan a la función.

7. En la siguiente imagen se muestra la construcción de un cuadrado EFGH inscrito en otro, el área de este varía en la medida que cambia la posición del punto $\boldsymbol{E}$ a lo largo del segmento $\boldsymbol{AB}$, la longitud de lado del cuadrado ABCD es 10:



a) Determine las variables involucradas en la situación.
b) Establezca una representación gráfica de la variación del área del cuadrado inscrito.
c) Determine la expresión algebraica que representa la variación del área del cuadrado inscrito.

En el numeral 7 del cuestionario, se plantea una situación de variación presentada en un marco geométrico, la variación del área de un cuadrado inscrito en otro. En primera instancia, se pretende identificar las variables que los estudiantes pueden determinar de la situación, las cuales pueden ser, el área del cuadrado *EFGH*, la longitud del lado del cuadrado inscrito y la longitud del segmento *AE*, entre otras; sin embargo se pretende tener en cuenta si logran realizar un esbozo de la situación en la que se involucran datos numéricos (valor del lado del cuadrado grande *DA=10*), que es una parábola cóncava hacia arriba, además, se pretende observar cómo los estudiantes utilizan un "modelo" conocido (fórmula del área de un cuadrado) para adecuarlo a una situación de variación y dependencia.

El dibujo geométrico presentado permite visualizar cómo varía el área del cuadrado en función de la longitud del segmento *AE*. Se espera que los estudiantes logren encontrar la representación algebraica de dicha relación, para lo cual, basta con hallar el valor de la longitud del lado *HE* y elevarla al cuadrado, esto se puede hacer usando el Teorema de Pitágoras con el triángulo *AHE*, *AE=m* y *AH= 10-m*, o también podrían hallar el área del cuadrado grande y restarle el área de los cuatro triángulos congruentes que se forman. El interés no es identificar los procesos de resolución, sino la coherencia de las respuestas, el uso de las representaciones, las conversiones entre ellas, si tienen en cuenta las invariantes y los términos que usan en relación a la función.

6. Aplicación del cuestionario:

La aplicación del cuestionario se realizó con estudiantes de los cursos "Geometrías no Euclidianas" y "Evaluación de la Matemáticas"[13], en dos sesiones (cada una de media hora[14]) por espacio académico, por tal motivo el cuestionario se dividió en dos partes de acuerdo con el tiempo estipulado; en el taller 1 se ubicaron los numerales 1, 2, 4 y 7 y los demás en el taller 2. Se seleccionaron las pruebas de los estudiantes que diligenciaron ambas partes y que pertenecieran a séptimo semestre, por ello, se analizaron en total, **20 pruebas individuales**.

Los estudiantes debían responder lo que entendieran en cada pregunta debido a que no se dio ninguna orientación, precisamente, las pruebas piloto fueron realizadas para que el cuestionario fuera lo más claro posible.

7. Categorías de análisis:

A partir de las respuestas de los estudiantes, se realizó un estudio de las mismas y se identificaron posibles categorías por ítem del cuestionario, se tuvieron en cuenta las consideraciones de la descripción del cuestionario; posteriormente, se establecieron las categorías finales, dispuestas en tablas, que corresponden con las concepciones encontradas, se presentan diferentes respuestas

---

[13] Espacios académicos ubicados en el plan del estudio de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

[14] Se determinó la realización de la prueba en dos sesiones debido a que se tuvo que interrumpir las clases de cada asignatura, por tal motivo el tiempo no debía ser demasiado.

textuales de los estudiantes (ver “Anexo 3: Respuestas del cuestionario categorizadas”) que sirven de sustento en el análisis.

8. Análisis del cuestionario:

Una vez fijadas las categorías de análisis, se realizó la codificación de los datos y su grabación para realizar un análisis numérico y cualitativo, el cual se restringe a la elaboración de tablas y gráficos de cada categoría y caracterización contemplada por ítems del cuestionario aplicado.

Se debe tener en cuenta que se diseñaron preguntas de tal forma que una persona no tuvo por qué responder del mismo modo, por el contrario, las cuestiones presentadas se escogieron para diferenciar las concepciones y por ello, en varias se presenta que la suma de las frecuencias es mayor que el total de las personas debido a que algunos estudiantes utilizan argumentos de diferentes categorías, entonces los resultados **no son mutuamente excluyentes**.

4.4. Categorías y caracterización de las respuestas

Tras cursar varios semestres en la Licenciatura en Matemáticas, los estudiantes de séptimo semestre han tenido la oportunidad de abordar el concepto de función en asignaturas tanto de la línea de cálculo como del algebra; esto sugiere el manejo de las diferentes representaciones de la misma, la identificación de sus características, tales como variables, dominio y rango, y el desarrollo de habilidades para pasar de una representación a otra. Por otro lado, se considera que los conocimientos y concepciones que tienen sobre el concepto matemático en particular, direccionan las formas como pueden abordar el mismo en sus respectivas prácticas de inmersión, lo cual puede mostrar la relación entre las concepciones que se tienen y las metodologías que se establecen para abordar el mismo. El propósito de este capítulo es identificar las concepciones de la función que tienen los estudiantes, por lo tanto, a continuación se describen las categorías de análisis (para ver algunas de las respuestas categorizadas ver “Anexo 3: Respuestas del cuestionario categorizadas” p. 124), las cuales corresponden con los tipos de concepciones encontradas al realizar el análisis.

4.4.1. Ítem 1, cuestiones 1 y 2

El concepto de función en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas aparece en grado noveno; si tuviera que enseñar este concepto para <u>iniciar su estudio</u>, ¿cómo lo haría? Mencione las actividades que realizaría en el orden en que las abordaría.

Tabla 11. *Categorías de análisis ítem 1 cuestión 1*

Categoría	Descripción
Correspondencia	Uso de términos como correspondencia, conjuntos o relación entre conjuntos, asignar, conjunto de llegada o de salida, dominio, rango, pares ordenados. Uso de diagrama sagital, tablas. **Unicidad:** En la respuesta se incluyen términos relacionados con la unicidad de la imagen.
Gráfica	Uso de términos que se relacionen con la gráfica de una función.
Representaciones	Utilización de diferentes representaciones de la función (tabular, algebraica, gráfica, verbal) o conversiones entre estas.
Categoría	**Descripción**
Relación de dependencia	Históricamente, a partir de las relaciones de dependencia entre cantidades variables, surgió el concepto de función. En esta categoría se observa el uso de términos como: relación de dependencia, dependencia entre variables, variación.

Se puede apreciar, que algunos estudiantes involucran en sus respuestas al ítem 1, diferentes terminologías que pueden corresponder a varias de las categorías mencionadas, a continuación se presenta un ejemplo:

- "Para comenzar aplicaría actividades en las cuales los estudiantes reconozcan las relaciones existentes entre conjuntos, siguiente a ello sería comenzar con el estudio de la representación gráfica y a partir de esta buscar que facilite el paso al lenguaje matemático"

Se puede vislumbrar que el estudiante utiliza elementos de "Correspondencia" y de "Representaciones" (menciona la representación gráfica y la tabular y la traducción entre estas). Otro ejemplo, es el siguiente:

- "Comenzaría con el concepto de relación, ejemplos de relaciones, hombre adulto-cédula, persona-no identificación, etc., ejemplo de relación uno a uno, usados, etc., conjunto de salida, conjunto de llegada; variable dependiente e independiente "

Se observa, que el estudiante se encuentra en dos categorías, "Relación de dependencia" y "Correspondencia."

Por otra parte, en la segunda cuestión del ítem 1 se solicitó a los estudiantes que indicaran las actividades que realizarían en el orden respectivo, a continuación se presentan las categorías en las cuales se encuentran las actividades propuestas por los estudiantes:

Tabla 12. *Categorías ítem 1 orden de las actividades*

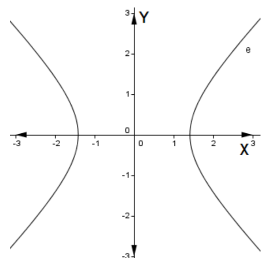
Nombre de la categoría	Caracterización según el ítem	Actividad propuesta relacionada con:
Correspondencia	D. Sagital	Uso del diagrama sagital
	DomRang	Dominio y rango
	R. Conjuntos	Relación entre conjuntos (de llegada, de salida)
Gráfica	Re. Gráfica	Solo la representación gráfica
Representaciones	Re. Tabular	Representación tabular
	Re. Gráfica	Representación gráfica
	Re. Algebraica	Representación simbólico algebraica
	Re. Verbal	Representación Verbal
	Traducciones	Traducciones o conversiones
Relación de dependencia	S. Aplicación	Situaciones cotidianas o de aplicación.
	Def. Variable	Definición de variable
	R. Variables	Relación entre variables dependiente e independiente

Se encuentran estudiantes que mencionan la definición del concepto de función como parte del abordaje del mismo, sin embargo no explicitan cuál, por ello, no se incluye en las categorías pero sí se tiene en cuenta a la hora de mostrar las formas como se propone abordar la función.

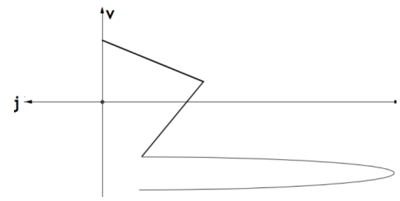
4.4.2. Ítem 2 cuestiones 3 a 6

Representación gráfica: a continuación se presentan varias figuras, en cada caso determine si corresponde o no a la representación gráfica de una función. Justifique su respuesta (los valores presentados en cada gráfica son los únicos valores de cada variable)

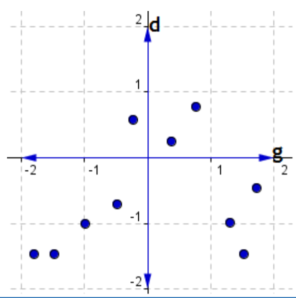
a)



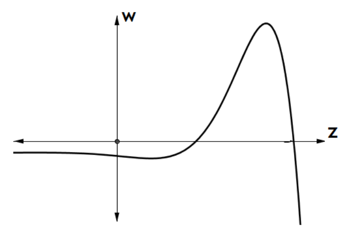
b)



c)



d)



La primera caracterización de las respuestas a este ítem tiene que ver con decidir si la gráfica es función o no, se debe tener en cuenta que:

- La gráfica "a", no es función, independientemente del eje que represente el dominio y el del rango.
- La gráfica "b" es función si el eje "v" representa el dominio y el "j" el rango.
- La gráfica "c" es función si el eje "g" representa el dominio y el "d" el rango.
- La gráfica "d" es función si el eje "z" representa el dominio y el "w" el rango.

Para la clasificación de estas respuestas es necesario tener en cuenta qué eje los estudiantes asignan en cada caso como el que representa el dominio. Más adelante se presenta el análisis de estas respuestas.

En cuanto a las justificaciones en cada cuestión (del ítem 2), a continuación se presentan las categorías:

Tabla 13. *Categorías de análisis ítem 2*

Nombre de la categoría	Caracterización y descripción
Correspondencia	Se incluyen argumentos relacionados con la correspondencia entre los valores de un conjunto y otro, correspondencia entre pre-imágenes e imágenes, valores del eje x (o de las abscisas) con los del eje "y" (o de las ordenadas). **Unicidad**: En las argumentaciones se involucran términos relacionados con la "unicidad" hay estudiantes que precisan esta invariante en sus argumentaciones.
Gráfica	Se usa el criterio de la recta vertical (al trazar una recta paralela al eje "y" o perpendicular al eje "x", si corta a dos puntos o más, no es función). La forma de la gráfica influye para saber si es función o no. **Continuidad:** Se tienen en cuenta si la función es continua.
Relación de dependencia	Se usan términos relacionados con las variables independiente y dependiente.

En este ítem se encuentran respuestas que incluyen términos relacionados con las propiedades o características de las funciones como, "biyectividad", "inyectividad" y "sobreyectividad". En particular, se encuentran las siguientes:

a) "Como que es una función a trozos pero no es biyectiva por eso no es función"

b) "Existe un valor en el codominio que es imagen de dos valores en el dominio" (Implícitamente se menciona la inyectividad)

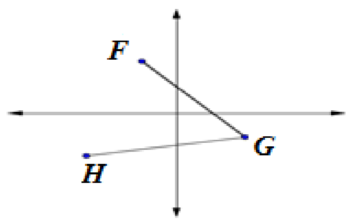
c) "Si cumple con las condiciones para ser biyectiva es decir es inyectiva y sobreyectiva"

En el caso de la respuesta "a" se encuentra el término "biyectiva", además se menciona el tipo de función ("a trozos") lo que corresponde a la categoría "Gráfica". La respuesta "b" se encuentra en la categoría "Correspondencia", sin embargo el argumento muestra que el estudiante al observar que se representa una función inyectiva, no es función. En la respuesta "c", el estudiante argumenta que la biyectividad es lo que da el carácter de función, además precisa qué significa esto.

Las respuestas que solo incluyen términos relacionados con dichas propiedades de las funciones como la "c" no se clasifican en ninguna de las categorías, debido a que estas pueden ser parte de diferentes concepciones, en las respuestas no hay muestra de qué se entiende por inyectividad y sobreyectividad. Aún sin realizar el análisis, parece ser que la representación gráfica permite vislumbrar otros elementos de la función. De otro lado, en este ítem no se encontraron respuestas que pertenecieran a la categoría "Representaciones", es decir, los estudiantes no recurren a otras representaciones de la función diferentes a la gráfica para realizar sus argumentaciones.

4.4.3. Ítem 3, cuestiones 7 a 9

Se le preguntó a un estudiante, cómo sería la gráfica de una función que pasa por los puntos F, G y H, él ha dado la siguiente respuesta:



a. ¿Es correcta la respuesta que dio el estudiante? Justifique la respuesta.

b. ¿Cuántas gráficas que contengan a los puntos H, G y F se pueden construir de tal manera que corresponda a una función? Esboce un ejemplo

- **i.** Una
- **ii.** Dos
- **iii.** Entre 3 y 10
- **iv.** Infinitas

El ítem 3 del cuestionario se divide en tres partes, la primera se relaciona con la identificación de una función dada su representación gráfica; los estudiantes deben mencionar si es función o no lo es y justificar; es necesario tener en cuenta que la gráfica sí representa una función si se considera que en el eje vertical se encuentran los valores del dominio, por lo tanto es necesario observar qué eje se asigna como el que representa dicho conjunto. En cuanto a las categorías referentes a la justificación se presentan las siguientes:

Tabla 14. *Categorías ítem 3 parte "a"*

Nombre de la categoría	Caracterización y descripción
Correspondencia	Se incluyen argumentos relacionados con la correspondencia entre los valores de un conjunto y otro, correspondencia entre pre-imágenes e imágenes, valores del eje x (o de las abscisas) con los del eje "y" (o de las ordenadas). **Unicidad**: En las argumentaciones se involucran términos relacionados con la "unicidad" hay estudiantes que precisan esta invariante en sus argumentaciones.
Gráfica	Se usa el criterio de la recta vertical (al trazar una recta paralela al eje "y" o perpendicular al eje "x", si corta a dos puntos o más, no es función). La forma de la gráfica influye para saber si es función o no.

Como se observa en la tabla anterior, en este caso no surgieron respuestas que se encontraran en las categorías "Representaciones" y "Relación de dependencia".

En la segunda parte, los estudiantes debían mencionar la cantidad de gráficas que contienen a tres puntos dados, como la pregunta es cerrada, la clasificación de las respuestas se realiza de acuerdo con las opciones dadas (i, ii, iii, y iv), es necesario tener en cuenta que la respuesta correcta es la opción "iv" infinitas. La tercera parte, tiene que ver con la construcción de un esbozo como ejemplo de función, estas respuestas se clasifican en:

- Continuas
- Discontinuas

4.4.4. Ítem 4 cuestiones 10 y 11

Representación tabular: incluya valores en las siguientes tablas de tal manera que se obtenga una representación tabular de función (los valores que registre en cada tabla son los únicos valores de cada variable).

T					
H					

Q					
P					

¿Qué consideración hizo para escoger los valores numéricos que se escribieron en la tabla?

En el ítem 4 se ubican dos tablas de tal forma que los estudiantes deben incluir valores que representen una función teniendo en cuenta que los valores registrados son los únicos de cada variable, a continuación se presenta la caracterización de las respuestas junto con la descripción:

Tabla 15. *Caracterización de respuestas ítem 4 para las dos tablas*

Caracterización de las respuestas	Descripción
RegNoRep	Valores que parece que siguen una regularidad y no están repetidos en cada fila: sí es función.
RegRep1	Valores que parece que siguen una regularidad y solo hay repetidos en una de las filas: sí es función.
NoRegRep1	Valores que parece que no siguen una regularidad y solo hay repetidos en una de las filas: sí es función.

Caracterización de las respuestas	Descripción
NoRegNoRep	Valores que parece que no siguen una regularidad y no están repetidos en ambas filas: sí es función.
NoRegRep2	Valores que parece que no siguen una regularidad y hay repetidos en ambas filas: no es función.

Además, en el ítem 4 se solicitó a los estudiantes que escribieran los criterios usados para asignar los valores, por lo tanto se realizaron las siguientes categorías:

Tabla 16. *Categorías consideraciones de valores escritos en las tablas*

Nombre de la categoría	Descripción
Correspondencia	Se incluyen términos relacionados con la unicidad, correspondencia, asignación, relación entre conjuntos.
Gráfica	Se mencionan criterios relacionados con la continuidad de la función. A partir de la representación gráfica de una función se hallan los valores.
Representaciones	Se usa la representación algebraica de una función para hallar los valores, o, se ubican valores que pertenezcan a la gráfica de una función. Se considera esta categoría también, si se usa más de una representación en la consideración.
Relación de dependencia	Se mencionan términos relacionados con las variables dependiente, independiente.

También se encontraron respuestas como:

- “Se puede tomar cualquier valor porque está en los reales”
- “Simplemente tomé valores aleatorios”

Estas respuestas son un poco frecuentes y no se pueden incluir en ninguna de las categorías, por lo tanto no se tienen en cuenta en el análisis.

4.4.5. Ítem 5, cuestiones 12 y 13

Representación algebraica: determine cuáles de las siguientes expresiones representan una función, ($\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{L}$ son parámetros de valores enteros positivos, $\mathbb{Q}$ corresponde al conjunto numérico de los racionales y $\mathbb{R}$ al de los reales). Justifique su respuesta:

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + 2x, & si\ x \neq 0 \\ 2, & si\ x = 0 \end{cases}$

b. $\frac{y^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2} - \frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2} = 1$

c. $\boldsymbol{f(p)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{si\ p} \in \mathbb{Q} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{si\ p} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \mathbf{2}, & \boldsymbol{si\ p} = \mathbf{10} \end{cases}$

La primera parte de las respuestas, se clasifica de acuerdo con las opciones "Es función" o "No es función", sin embargo es necesario tener en cuenta que la opción "a", sí es función, "b", no y "c", no. En la segunda parte, se contemplan las siguientes categorías:

Tabla 17. *Categorías ítem 5 (justificación)*

Nombre de la categoría	Descripción
Correspondencia	Uso de términos como correspondencia, conjuntos o relación entre conjuntos, asignar, conjunto de llegada o de salida, pares ordenados.
Gráfica	Si se puede representar gráficamente es función, se mencionan características de la forma de la gráfica. Relacionar la expresión dada con gráficas de funciones ya conocidas. Criterio de la recta vertical.
Representaciones	En esta categoría se ubican las respuestas en las que se realizan procedimientos como: • Reescribir la expresión algebraica, se identifica qué está en función de qué. • Hacer traducciones entre otras representaciones para garantizar que es función o no. • Evaluar la función para algunos valores para saber si es función o no. Se considera que al presentarse la igualdad, la expresión es una ecuación y no una función.
Relación de dependencia	Se mencionan términos relacionados con las variables dependiente, independiente.

4.4.6. Ítem 6, cuestiones 14 a 17

En las situaciones I y II establezca la relación de dependencia que se presenta y las diferentes representaciones que se pueden obtener de esta:

Situación I: si las entradas del cine son muy baratas, los dueños pueden perder dinero; pero si las entradas son demasiado costosas, irá poca gente y también pueden perder dinero. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.

Situación II: En Colombia existen varios operadores de telefonía móvil que realizan el cobro respectivo de las llamadas. Suponga que se analiza el operador de telefonía Claro, considerando que se tiene un teléfono en plan prepago y que no se tiene la opción de elegidos para llamadas.

En el ítem 6, se presentan dos situaciones de modelación, en cada una, los estudiantes deben establecer una relación de dependencia y las representaciones, a continuación se presenta la caracterización de las respuestas correspondientes a la situación I:

Tabla 18. *Caracterización de las respuestas, relaciones de dependencia situación I*

Caracterización de las respuestas	Descripción
Personas-Costo	Una relación de dependencia puede ser el número de personas que va a cine dependiendo del costo de la entrada
Ganancia-Costo	Una relación de dependencia puede ser la ganancia obtenida dependiendo del costo de la entrada
No relaciones	Esta categoría se incluye cuando se plantean situaciones que no son relaciones de dependencia.

En cuanto a las representaciones de las relaciones mencionadas, se tienen las siguientes categorías:

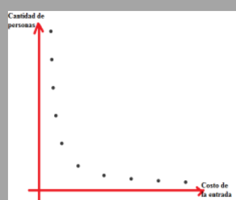
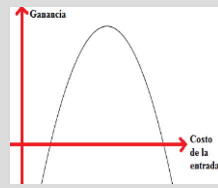
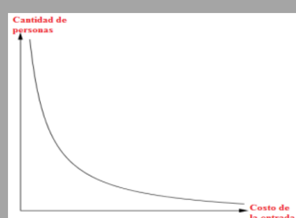
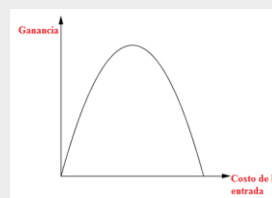
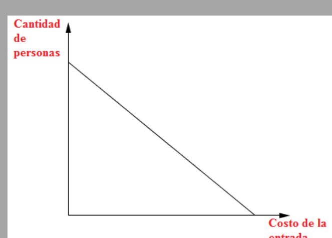
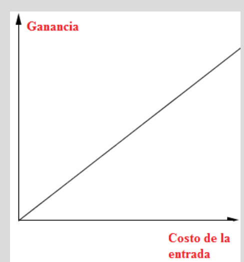
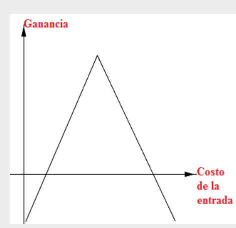
Tabla 19. *Categorías formas de representación de la relación de la situación I*

Categoría	Descripción
Correspondencia	Se utiliza el diagrama sagital para representar la situación.
Gráfica	Solo se utiliza la representación gráfica para representar la situación
Representaciones	Se incluyen dos o más representaciones de la función de las siguientes: Tabular, verbal, gráfica, algebraica.

En el enunciado de la situación no se presentan valores numéricos, por tal motivo, las representaciones con diagrama sagital, tabla, incluso con representación algebraica no se consideran adecuadas para representarla, sin embargo, se incluyen en las categorías y se tendrán en cuenta para mostrar las formas como los estudiantes representan la función que modela una situación.

Además, las representaciones gráficas de las respuestas se pueden caracterizar de la siguiente forma:

Tabla 20. *Caracterización de los esbozos realizados como representación de la situación I*

<table>
<tr><th>Personas-Costo</th><th>Ganancia-Costo</th></tr>
<tr><td>Propuesta:

</td><td>Propuesta:

</td></tr>
<tr><td>Hipérbola: Forma de una rama de una hipérbola

</td><td>Parábola: Forma de una parábola que pasa por el origen

</td></tr>
<tr><td>Recta-Afín

</td><td>Lineal

</td></tr>
<tr><td>Discretas: diferentes a la propuesta</td><td>Otra

</td></tr>
</table>

Se debe tener en cuenta que la caracterización denominada “propuesta” es un esbozo gráfico que se consideró más acorde de acuerdo con la situación, debido a que tiene en cuenta los valores de cada variable y la forma como se relacionan y varían.

En seguida, se presenta la caracterización de las respuestas de la situación II:

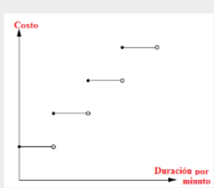
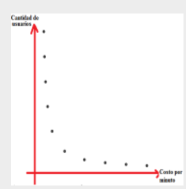
Tabla 21. *Caracterización relaciones de dependencia situación II*

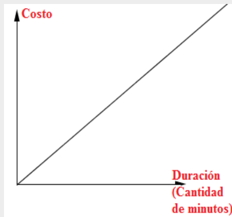
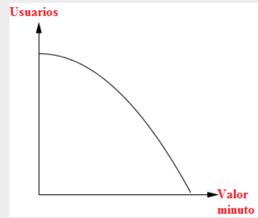
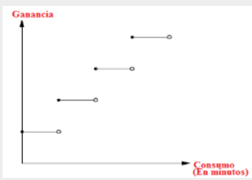
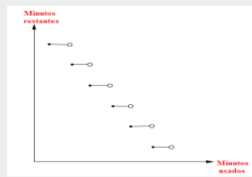
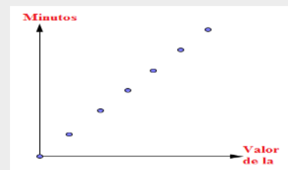
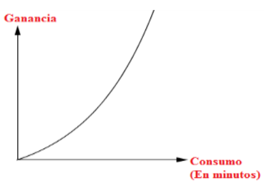
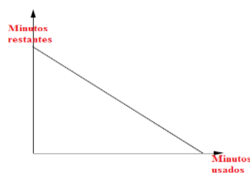
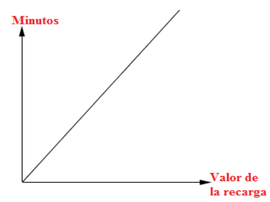
Caracterización de las respuestas	Descripción
Costo-Duración	El costo dependiendo de la duración de la llamada o el número de minutos usados.
Usuarios-Valor minuto	El número de personas que usan la telefonía dependiendo del valor del minuto.
MinutosR-MinutosU	El número de minutos restantes depende de la cantidad de minutos usados.
Minutos-Recarga	Cantidad de minutos dependiendo el valor de la recarga.
Ganancia-Consumo	Ganancias del operador dependiendo del consumo de los usuarios.
No relación	En esta categoría se presenta cuando se establezcan relaciones que no son de dependencia debido a que, por ejemplo, no hay una sola variable independiente.

En cuanto a las representaciones de las relaciones mencionadas, se tienen las mismas categorías establecidas en la “Tabla 19”.

Por otro lado, las representaciones gráficas se pueden caracterizar de la siguiente forma:

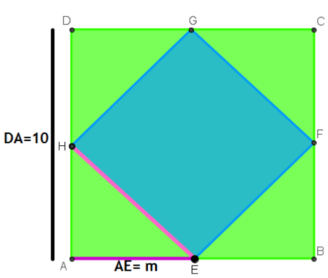
Tabla 22. *Categorías de los esbozos realizados como representación de la situación II*

Costo-Duración	Usuarios-Valor minuto
Propuesta 	**Propuesta** 

<table>
<tr><th colspan="3">Costo-Duración</th><th colspan="2">Usuarios-Valor minuto</th></tr>
<tr><td colspan="3">Lineal
</td><td colspan="2">Curva 1
</td></tr>
<tr><th>Ganancia-Consumo</th><th colspan="2">MinutosR-MinutosU</th><th colspan="2">Minutos-Recarga</th></tr>
<tr><td>Propuesta
</td><td colspan="2">Propuesta
</td><td colspan="2">Propuesta
</td></tr>
<tr><td>Curva 2
</td><td colspan="2">Recta-Afín
</td><td colspan="2">Lineal
</td></tr>
</table>

4.4.7. Ítem 7, cuestiones 18 a 20

En la siguiente imagen se muestra la construcción de un cuadrado EFGH inscrito en otro, el área de este varía en la medida que cambia la posición del punto $\boldsymbol{E}$ a lo largo del segmento $\boldsymbol{AB}$, la longitud de lado del cuadrado ABCD es 10:



a) Determine las variables involucradas en la situación.
b) Establezca una representación gráfica de la variación del área del cuadrado inscrito.
c) Determine la expresión algebraica que representa la variación del área del cuadrado inscrito.

A continuación se presentan la caracterización de las respuestas para cada uno de los ítems:

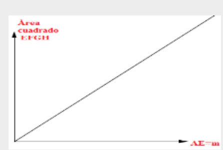
a) La variables se pueden clasifican de la siguiente forma:

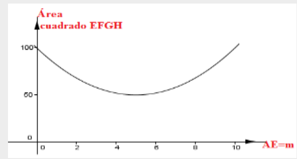
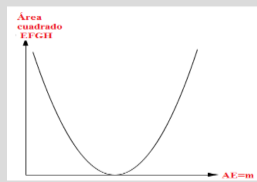
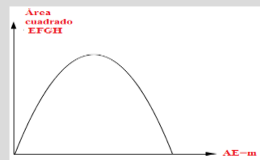
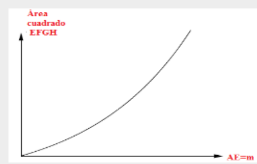
Tabla 23. *Caracterización de las respuestas ítem 7 cuestión "a"*

Caracterización de las respuestas	Descripción
Área	Se reconoce que el área de algunas figuras cambia como el área del cuadrado EFGH.
Longitud	Se consideran como variables ciertas longitudes, como *HE*, *AE=m*, *HD*.
Puntos	Se consideran algunos puntos de la figura como las variables (aunque esto es incorrecto), por ejemplo, los puntos H, E, F y G. No se explicita que la variable es la posición de los puntos sobre su respectivo lado que lo contiene.
Perímetro	Se considera que el perímetro del cuadrado EFGH cambia.
DomRang	Se considera que el dominio o el rango de la situación varían.
No variables	Se consideran cantidades o magnitudes que no son variables, diferentes de los puntos, por ejemplo la medida de la longitud del lado del cuadrado circunscrito, que es una constante.

b) La caracterización de los esbozos gráficos de la variación del área del cuadrado *EFGH* con respecto a *m* son:

Tabla 24. *Caracterización de las respuestas ítem 7 esbozos gráficos*

Caracterización de las respuestas	Descripción
Constante	Recta *y=k*, función constante 
Lineal	Recta *y=x*, función lineal 

Caracterización de las respuestas	Descripción
Parábola correcta	
Parábola no correcta	Parábolas diferentes a la solución correcta, por ejemplo parábolas cóncavas hacia abajo o parábolas cóncavas hacia arriba que tocan el eje de la variable independiente, entre otras.  
Otra	Se representan otros tipos de gráficas. 

c) Las categorías de las expresiones algebraicas que representa la variación solicitada, se enuncian a continuación:

Tabla 25. *Caracterización de las respuestas del ítem 7, cuestión "c" expresión algebraica*

Caracterización de las respuestas	Descripción
Área cuadrado	La expresión algebraica es la fórmula de un cuadrado en general $A = l^2$
Área constante	El área es constante, no varía
Correcta	Se tienen en cuenta expresiones equivalentes a: $A = m^2 + (10 - m)^2$ $A = 2m^2 - 20m + 100$
Otras	Se presentan otras expresiones algebraicas porque por ejemplo no se tiene en cuenta los datos dados o se realizan interpretaciones erróneas, en algunos casos se escriben expresiones con más de una variable independiente.

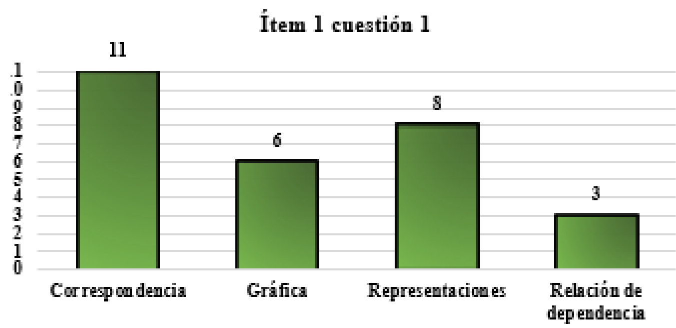
4.5. Análisis de los resultados

A continuación se realiza un estudio de los resultados del cuestionario y los análisis que se determinaron del mismo se incluyen gráficos o tablas y en seguida el análisis o comentarios respectivos.

4.5.1. Análisis ítem 1, cuestiones 1 y 2

Tabla 26. *Análisis ítem 1*

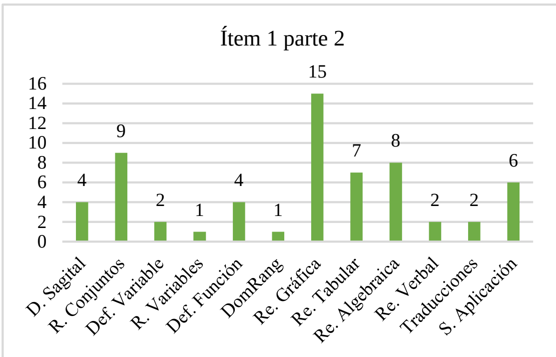
Gráfico o tabla de análisis



Categoría	Frecuencia	Porcentaje
Correspondencia	11	55%
Gráfica	6	30%
Representaciones	8	40%
Relación de dependencia	3	15%

Análisis, comentarios

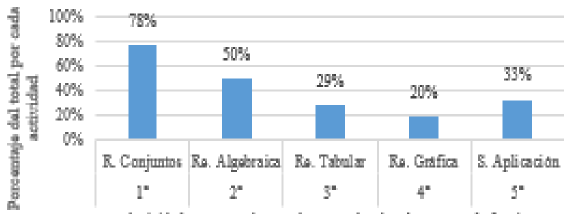
- Se observa que la mayoría de los estudiantes consideró como forma de abordar el concepto de función, el uso de aspectos relacionados con la correspondencia, en particular, se usaron términos como “relación entre conjuntos”, incluso, se mencionaron los conjuntos, como “llegada” y “salida” otros se refirieron al “dominio” y al “rango”; se utilizaron términos como “imagen”, “pre imagen”; se encontró el uso del diagrama sagital y el de pares ordenados.
- En una cantidad significativa de las respuestas se encuentra que los estudiantes privilegian el uso de diferentes representaciones para abordar el concepto de función, tales como, verbal, tabular y gráfica; algunos propusieron el uso de las conversiones entre estas.
- En 6 de las respuestas, se mencionó que una forma adecuada de abordar el concepto de función es usar solo una de las representaciones de la función, la gráfica, los estudiantes precisaron que con ejemplos y contraejemplos de funciones es posible enseñar dicho concepto.
- Solo en 3 respuestas se evidencia el uso de términos relacionados con la dependencia, el cambio o la variación, como parte de las formas como se abordaría la función, algunos estudiantes mencionaron ejemplos de situaciones que propondrían para abordar la relación entre variables, entre las respuestas se encuentra, “describir el comportamiento de la medida del lado de un rectángulo inscrito en un cuadrado a medida que uno de los vértices del rectángulo se desplaza sobre el segmento del cuadrado”.

<table>
<tr><th>Gráfico o tabla de análisis</th><th>Algunos comentarios</th></tr>
<tr><td>Gráfico de la cantidad de personas que incluyen en las formas de abordar el concepto, tareas relacionadas con la clasificación presentada

</td><td>En el “Anexo 3: Respuestas del cuestionario categorizadas”, en la segunda tabla se ubican las respuestas de las tareas en el orden en que cada estudiante propone abordar el concepto.
• Se observa que los estudiantes privilegian la realización de actividades relacionadas con el uso de gráficas de la función para abordar el concepto[15].
• Las formas que más se usan para abordar el concepto de función tienen que ver con las representaciones, gráfica, tabular o algebraica, así como la relación entre conjuntos, que es la segunda más usada; también se proponen actividades o situaciones de aplicación aunque solo 3 estudiantes mencionan el uso de situaciones que contemplen la variación y el cambio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Se observa que la representación verbal se propone solo 2 veces, esto muestra el privilegio por ciertos tipos de representaciones y se deja un poco de lado el uso del lenguaje “natural” (palabras) y “sincopado” (palabras y algunos símbolos) que podría ser más accesible para los estudiantes que aún no han usado otros tipos de representación.
Entre las últimas formas de representar la función que se usaron en la historia se encuentran las gráficas con los ejes cartesianos y expresiones analíticas, sin embargo, estas dos formas de representar la función son las más privilegiadas por los estudiantes para introducir el concepto.
• Anteriormente se mencionó la importancia del uso de las traducciones entre las representaciones, en particular, Pecharromán (2008) puntualiza que uno de los elementos para dominar un concepto matemático, consiste en conocer sus representaciones y la traducción entre ellas, en este caso se puede notar, que solo 2 estudiantes pretenden realizar procesos de traducción entre las representaciones.</td></tr>
</table>

[15] Como se mostró anteriormente, 6 estudiantes usaron solo la gráfica de la función, sin embargo, para observar el orden de las actividades que se proponen al introducir el concepto se une esa cantidad con el total de personas que mencionan la gráfica junto con otra(s) representación(es), que son 9.

Gráfico o tabla de análisis

Gráfico resultado de la relación entre el total de personas que usan determinado elemento de acuerdo con la posición que plantean usarlo[16].



Posición	Resultados orden	
1°	R. Conjuntos	78%
2°	Re. Algebraica	50%
3°	Re. Tabular	29%
4°	Re. Gráfica	20%
5°	S. Aplicación	33%

Análisis, comentarios

- Se observa que el orden como la mayoría de los estudiantes pretenden abordar el concepto es: Un 78% propone utilizar relaciones entre conjuntos, un 50% menciona en segundo lugar el uso de la representación algebraica, el 29% precisa que en tercer lugar se abordaría la representación tabular, con una cantidad no muy significativa, el 20 % de la población propone el uso de la representación gráfica, en cuarto lugar; por último el 33% mencionan que realizarían aplicaciones en el quinto lugar. Vale la pena mencionar que estos porcentajes se obtienen de analizar la cantidad de estudiantes que usan dicha forma en cada orden, con respecto a la cantidad total de estudiantes que usan en cualquier instante la misma, por ejemplo, de los 9 estudiantes que en algún momento usa la relación entre conjuntos (“R. Conjuntos”), 7 la ubican en primer lugar, por ende la población referida son esos estudiantes que representan el 78%.

Se encuentra una relación muy similar a la enseñanza tradicional del concepto de función considerada por López y Sosa (2007), Planchart (2000) y Jaimes (2012), quienes señalan que se sigue una línea muy marcada, empezando por la definición de función como una correspondencia unívoca entre dos conjuntos, posteriormente se da la expresión algebraica y se busca determinar ciertos puntos para realizar la representación gráfica, se concluye con aplicaciones.

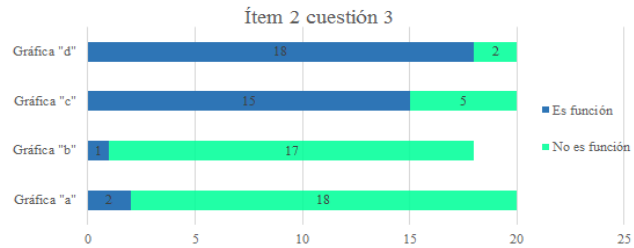
[16] Este gráfico se realizó a partir de una tabla en la que se menciona el orden de las diferentes actividades que los estudiantes plantean para abordar el concepto de función, se realiza otra tabla en la cual se ubica la posición de 1 a 7 (7 es la máxima cantidad de elementos usados) y se realiza la frecuencia por actividad en cada posición. Como se observa que las actividades propuestas más usadas son “Re. Gráfica”, “R. Conjuntos”, “Re. Algebraica”, “Re. Tabular” y “S. Aplicación” se realiza la relación entre la cantidad total de personas que usan cada actividad junto con la cantidad en **cada posición**, así se obtiene la tabla y gráfico presentados.

4.5.2. Análisis ítem 2, cuestiones 3 a 6

Tabla 27. *Análisis ítem 2*

Gráfico o tabla de análisis

	Gráfica "a"	Gráfica "b"	Gráfica "c"	Gráfica "d"
Es función	2	1	15	18
No es función	18	17	5	2

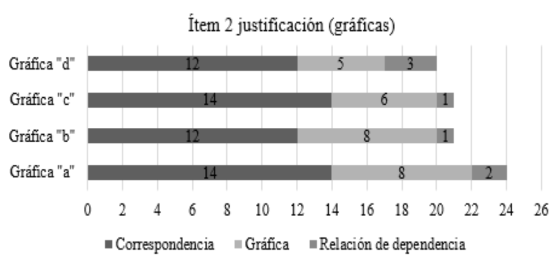


Análisis, comentarios

- La gráficas que se reconocen por gran parte de los estudiantes como función son las gráficas "c" y "d"; teniendo en cuenta que el eje que representa el dominio es el horizontal, estas respuestas son correctas. Posiblemente los estudiantes han estudiado tipos de funciones diferentes a las continuas, en este caso, la gráfica "c" era una función discreta.
- En cuanto a la gráfica "a", 18 estudiantes de los 20 en total, reconocen que esta no es una función, lo cual es acertado independientemente del eje que represente el dominio.
- En la gráfica "b" se presenta mayor número de estudiantes que consideran que no representa una función tomando el eje horizontal para el dominio, en este caso la respuesta es acertada; solo una persona al considerar este mismo eje menciona que sí es función, lo cual no es acertado teniendo en cuenta que no se cumple la unicidad de la imagen. Se observa que la totalidad de las respuestas relacionadas con la gráfica "b" es 18 porque hubo dos personas más que contestaron que esta gráfica sí es función al considerar el eje vertical para el dominio, lo cual es acertado.

La respuesta a esta pregunta muestra que gran parte de los estudiantes utilizan el eje horizontal como el que representa la variable independiente, esto puede deberse a la forma estereotipada de representar las funciones.

Gráfico o tabla de análisis



Categoría	Porcentaje
Correspondencia	65%
Gráfica	34%
Relación de dependencia	9%

Análisis, comentarios

- Como se puede observar, una forma muy utilizada de justificar que la gráfica representa una función, es usar términos de la categoría "correspondencia", los estudiantes tienen en cuenta en sus argumentos, la unicidad de la imagen, en la mayoría de la respuestas se encuentran consideraciones similares a, "porque a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango".
- Otra de las formas más utilizadas para justificar la respuesta es considerar elementos en la forma de la gráfica, por ejemplo la continuidad, "son puntos que no conforman nada" o "es discontinua pero sí es función"; o si es una gráfica conocida, como "es una hipérbola", "es una función a o trozos". En las argumentaciones se encontró que la mayoría de las respuestas en esta categoría, se usa el "criterio de la recta vertical", lo cual se considera una forma poco adecuada; se sugiere usar criterios que no estereotipen las representaciones de las fucniones, por ejemplo, la representación gráfica se refiere a una función si al trazar alguna recta perpendicular al eje de la variable independiente, esta no corta a dos o más puntos.

El uso de términos relacionados con la variación, la dependencia y la relación entre variables para justificar las respuestas, es casi nulo; las respuestas que se clasifican en la categoría “Relación de dependencia” incluyen comentarios de la relación entre la variable independiente con la dependiente, además, se precisa correctamente el nombre de los ejes (dado en la gráfica), aspecto que prácticamente ningún estudiante tiene en cuenta en las otras categorías.

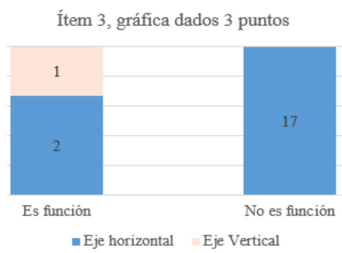
En las respuestas de los estudiantes se presenta un uso muy frecuente para nombrar al eje horizontal como “x” y al vertical “y”, se encuentran varias respuestas como, “a cada punto del eje *x* le corresponde solo uno en *y*”.

También se observa que la representación gráfica conlleva a considerar aspectos de la función como la continuidad y otros como la inyectividad, incluso, la biyectividad. Se debe tener en cuenta que en este numeral del cuestionario no se menciona la categoría “Representaciones” debido a que ningún estudiante recurre a otros tipos de representaciones de la función para dar su respuesta.

4.5.3. Análisis ítem 3, cuestiones 7 a 9

Tabla 28. *Análisis ítem 3*

Gráfico o tabla de análisis

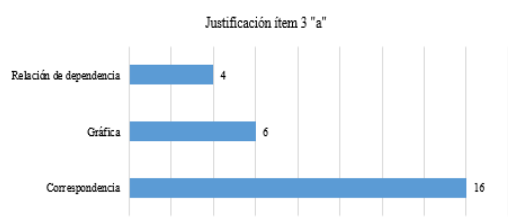


	Eje horizontal	Eje Vertical
Es función	10%	5%
No es función	85%	0%

Análisis, comentarios

- Se observa que una cantidad de 17 personas, que corresponden al 85% considera que la representación gráfica realizada por un estudiante (parte “a” del ítem 3 del cuestionario) no corresponde a una función, nuevamente, se consideró el eje horizontal para la variable independiente. Por otro lado, hay 2 estudiantes que mencionaron que la gráfica sí es una función tomando ese mismo eje horizontal, se considera que esta respuesta no es correcta porque no se presenta la unicidad de la imagen. Por otro lado, solo un estudiante menciona que sí es función si se asigna el eje vertical para la variable independiente, lo cual es acertado.

Gráfico o tabla de análisis



Categoría	Frecuencia Absoluta	Porcentaje
Correspondencia	16	80%
Gráfica	6	30%
Relación de dependencia	4	20%

Análisis, comentarios

- Los comentarios de esta parte del ítem son similares a los presentados para el ítem 2.

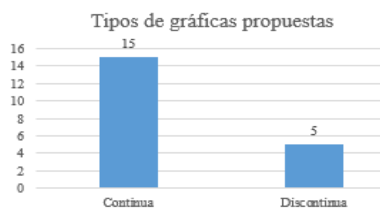
Gráfico o tabla de análisis

Caracterización	Porcentaje
Una gráfica	5%
Dos gráficas	0%
Entre 3 y 10	10%
Infinitas	85%

Análisis, comentarios

- Se observa que la mayoría de los estudiantes, específicamente el 85%, considera que es posible construir infinitas gráficas que contengan a tres puntos dados y que representen funciones, sin embargo hay tres estudiantes que no contemplan esto, los que mencionaron que hay entre 3 y 10 gráficas, consideran que el número de puntos influye para determinar las gráficas; no se conocen las razones del estudiante que indica que solo se puede construir una gráfica. Es posible que ese 15% de la población no tenga en cuenta los diferentes tipos de funciones que hay y que por ejemplo se puede alterar el dominio, puede ser una forma de determinar que hay infinitas formas para representar una función dados tres puntos.

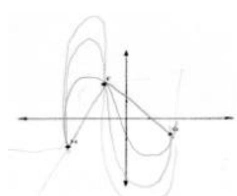
Gráfico o tabla de análisis

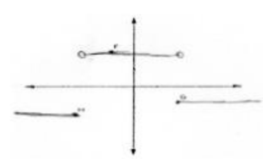


Caracterización	Frecuencia	Porcentaje
Continua	15	75%
Discontinua	5	25%

Análisis, comentarios

- 15 de los estudiantes, propone como ejemplo de gráfica que representa una función y que contiene a los tres puntos dados, funciones continuas, solo 5 de ellos considera funciones discontinuas, en particular, funciones a trozos. En el ítem anterior se observó que la mayoría de los estudiantes consideraron que la representación discreta de la gráfica "c" sí era función, sin embargo, no tienen en cuenta esto para presentar un ejemplo de función discreta.



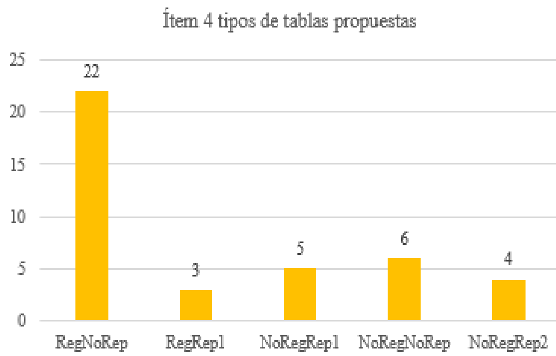


Posiblemente en el estudio de diferentes asignaturas en las cuales se aborda la función, se contemplan funciones continuas y se le da poco tratamiento a las de tipo discreto, a trozos y en general a las de tipo discontinuo.

4.5.4. Análisis ítem 4, cuestiones 10 y 11

Tabla 29. *Análisis ítem 4*

Gráfico o tabla de análisis



Caracterización	Frecuencia	Porcentaje
RegNoRep	22	55%
RegRep1	3	7%
NoRegRep1	5	13%
NoRegNoRep	6	15%
NoRegRep2	4	10%

Análisis, comentarios

Para la construcción de estos gráficos y el conteo de los datos, se observaron las 40 tablas en total, debido a que se solicitó diligenciar dos por estudiante.

- Como se puede observar, hay una gran diferencia en los criterios usados para completar las tablas, en el 55% de estas se observaron regularidades y no se incluyeron valores repetidos en sus filas, por ejemplo:

Q	1	2	3	4	5
P	1	4	9	16	25

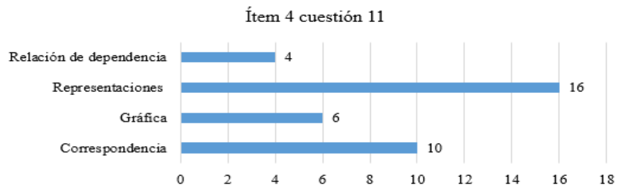
Se observa una regularidad en ambas filas, en la primera se le suma 1 a cada número, en la segunda parece que cada número de la fila Q se multiplica por sí mismo. Otra opción es que a los números de la fila P se les saque raíz cuadrada para obtener los de Q.

- En el 15% de las tablas diligenciadas no se observó el seguimiento de una regularidad, además no se repitieron valores en las filas. En el 13% de las tablas no se observó una regularidad y tampoco se repitieron valores en una de las filas. En el 7% de las tablas, se encontró el seguimiento de una regularidad y se ubicaron valores repetidos en una de las filas.

En estos cuatro primeros casos se observa que las tablas corresponden a la representación tabular de funciones, independientemente de la fila que represente el dominio o el rango.

- En el 10 % de las tablas no se observó el seguimiento de regularidades, se repitieron valores en ambas filas, por lo tanto esas tablas no representan funciones.
- También se encontró que 32 tablas se diligenciaron únicamente con números enteros, 4 incluyeron números racionales representados en fracción o en decimal, las 4 restantes involucran otros números reales, en particular, números irracionales como $\pi, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gráfico o tabla de análisis



Categoría	Frecuencia	Porcentaje
Correspondencia	10	50%
Gráfica	6	30%
Representaciones	16	80%
Relación de dependencia	4	20%

Análisis, comentarios

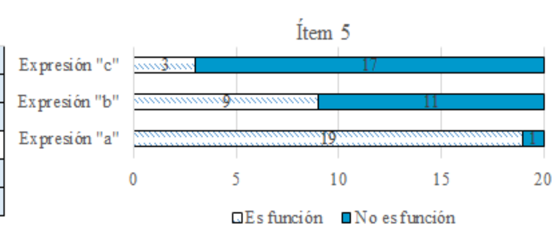
- En este caso, para registrar los valores de las tablas, en el 80 % de las respuestas se utilizaron argumentos relacionados con el uso de otras representaciones, algunos de los estudiantes recurrieron a funciones en su representación algebraica, particularmente se usaron funciones simples como lineales y cuadráticas incluso algunos, precisaron que "pensaron funciones estándar o las más usadas en el colegio"; otros, mencionaron que además de usar uno de estos tipos de función, realizan la tabla y luego la grafican. Se observa que la mayoría de los estudiantes recurren a más de un tipo de representación para obtener los valores de las tablas, parece ser que no se ve el registro tabular como una representación en sí misma de la función, por lo tanto se corrobora de cierta manera la apreciación de Peralta (como se citó en Gutiérrez y Parada, 2007) "El registro tabular es visto solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación en sí misma" (p. 61).
- En el 10% de las respuestas, se encuentran consideraciones relacionadas con el uso de términos referentes a la relación entre conjuntos, se menciona el "domino" y el "rango" o el conjunto de "llegada" y de "salida" además, se hace referencia a la unicidad de la imagen, en particular se encuentran respuestas similares a: "que no hubiese dos imágenes con dos pre imágenes", "que no hayan elementos del dominio con más de dos imágenes", entre otras.
- El 30% de los estudiantes para completar las tablas, usan la representación gráfica, ya sea que a partir de ella se escriban los valores o para corroborar que se trata de la representación de una función; algunos estudiantes se refirieron al plano cartesiano, precisan que se toma una de las letras como eje horizontal y la otra como la vertical.
- Las respuestas que se clasificaron en la categoría "Relación de dependencia" que constituyeron el 20% de la población, se refieren al uso de terminología relativa a, variables independiente, dependiente, relación entre variables, entre otras; se tiene en cuenta la determinación de la letra en la cual se ubican los valores de cada variable.

4.5.5. Análisis ítem 5, cuestiones 12 y 13

Tabla 30. *Análisis ítem 5*

Gráfico o tabla de análisis

	Expresión "a"	Expresión "b"	Expresión "c"
Es función	19	9	3
No es función	1	11	17
Porcentaje			
Es función	95%	45%	15%
No es función	5%	55%	85%



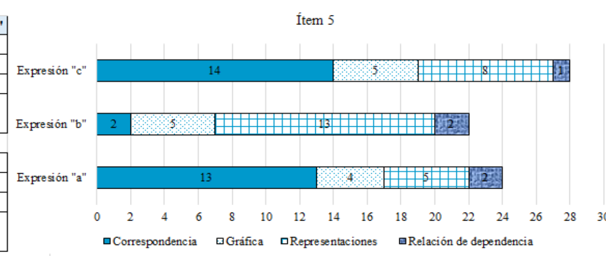
Análisis, comentarios

- El 95% de los estudiantes reconoce que la expresión “a” sí es función; es necesario reconocer que esta es una expresión a trozos que satisface la unicidad, por lo tanto sí es función.
- Para la expresión “b” se encuentra que las respuestas están casi divididas en la mitad, 9 estudiantes mencionan que sí es función y 11 precisan que no, sin embargo la expresión no representa una función debido a que no satisface la unicidad de la imagen, se debe recordar que la expresión representa una cónica, en particular, una hipérbola.
- En el caso de la expresión “c”, el 85% de las personas consideró que no representaba una función, es una cantidad de personas alta con respecto al total; efectivamente, esta expresión no corresponde a una función.

Se observa en general que la mayoría de las personas identifican acertadamente cuándo una expresión algebraica representa una función, aunque se incluyen en las opciones, funciones a trozos, parece ser que no hay dificultades en el reconocimiento de este tipo de representaciones; a continuación se describen las justificaciones dadas en cada expresión.

Gráfico o tabla de análisis

Categoría	Expresión "a"	Expresión "b"	Expresión "c"
Correspondencia	13	2	14
Gráfica	4	5	5
Representaciones	5	13	8
Relación de dependencia	2	2	1
Porcentaje			
Correspondencia	65%	10%	70%
Gráfica	20%	25%	25%
Representaciones	25%	65%	40%
Relación de dependencia	10%	10%	5%



Análisis, comentarios

- Para justificar que la expresión algebraica “a” corresponde o no a la representación de una función, los estudiantes en mayor medida usan términos de la categoría “correspondencia”, se refieren a la unicidad, a la relación entre un conjunto y otro, así como a las imágenes, pre imágenes, entre otras. El 25% de la población recurre al uso de distintos tipos de representación, como tablas de valores, gráficas, algunos usan argumentos a partir de la representación algebraica por ejemplo, “porque $\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ es función y $2x$ también y la suma de funciones es función”. El 20% utilizan argumentos solo de la gráfica, por ejemplo mencionan que al poderse representar gráficamente la expresión, sí es función; en un porcentaje casi nulo del 10%, los estudiantes plantean argumentos de la categoría “Relación de dependencia”, en particular, se refieren a las variables, por ejemplo, “es función porque existe una relación de dependencia entre las variables x y n”.
- En el caso de la expresión “b” hay un cambio significativo en la categorización de las respuestas, el 65% usa distintas representaciones, no solo la gráfica, para explicar su respuesta; los estudiantes tuvieron la necesidad de reescribir la expresión algebraica o precisaron que debían “hacer muchas cuentas”, la forma como está escrita la expresión conduce a determinar que es una ecuación; otros realizaron tablas y gráficas. El 25% de la población recurre a la gráfica, por ejemplo mencionan “es una hipérbola” y por tanto concluyen que no es función, estos argumentos se refieren a la gráfica de la función. Hay un 10% de la población que menciona en sus consideraciones aspectos de la categoría “Correspondencia”, la misma cantidad se encuentra en la “Gráfica”
- En la expresión “c” se usa mayor cantidad de argumentos, el 70% menciona aspectos de la categoría “correspondencia”, similares a los precisados para la expresión “a”, el 40% usa diferentes representaciones, solo la gráfica no se incluye aquí; el 25% sí utilizan solo la gráfica y solo una respuesta se clasificó en la categoría “Relación de dependencia”.

4.5.6. Análisis ítem 6, cuestiones 14 a 17

Tabla 31. *Análisis ítem 6*

Gráfico o tabla de análisis

1

Caracterización	Frecuencia
Personas-Costo	8
Ganancia-Costo	13
No relaciones	2

2

Categoria	Frecuencia
Correspondencia	1
Gráfica	13
Representaciones	8

3

	Personas-Costo		Ganancia-Costo
Propuesta	0	Propuesta	2
Hipérbola	4	Parábola	2
Recta-Afín	2	Lineal	6
Discretas	1	Otra	1

Análisis, comentarios

- En la tabla "1" se muestra la frecuencia de las relaciones mencionadas, se debe recordar que los resultados no son mutuamente excluyentes, la mayoría de los estudiantes reconocieron en esta situación, qué varía, precisan adecuadamente las variables y las relacionan. En la tabla "2" se encuentra que una cantidad muy significativa de las respuestas tienen que ver con argumentos de tipo gráfico, en general, cuando se les solicitó a los estudiantes realizar representaciones de las relaciones entre las variables, muchos usaron solo la gráfica, sin embargo algunos no indican la variable que representa cada eje y los que sí lo hacen suelen llamarlos *x* e *y* correspondientemente. En 8 respuestas se observa que los estudiantes no usan la gráfica, o no únicamente; representan de manera algebraica, tabular incluso algunos de manera verbal, la manera como varían las cantidades. En cuanto a la categoría "Correspondencia", se observa que solo hubo una respuesta asociada, en la cual se utilizó el diagrama sagital para representar la situación.
- En cuanto a la forma de representar gráficamente la situación y teniendo en cuenta que una cantidad significativa de personas usaron esbozos gráficos, se puede decir que si bien, se logra expresar de manera adecuada las cantidades que varían, el cómo se da esta variación no se logra representar de la mejor manera, debido a que no se tienen en cuenta factores como: no puede haber un número racional de personas, los estudiantes tienden a usar representaciones continuas como una rama de una hipérbola o rectas. En otros casos, no se tiene en cuenta el enunciado de la situación, no se logra traducir el lenguaje verbal al gráfico.

Gráfico o tabla de análisis

Caracterización	Frecuencia
Costo-Duración	5
Usuarios-Valor minuto	3
MinutosR-MinutosU	4
Minutos-Recarga	3
Ganancia-Consumo	2
No relación	4

Categoria	Frecuencia
Correspondencia	1
Gráfica	12
Representaciones	5

Costo-Duración		Usuarios-Valor minuto		Ganancia-Consumo		MinutosR-MinutosU		Minutos-Recarga
0	Propuesta	1	Propuesta	0	Propuesta	0	Propuesta	0
4	Curva 1	2	Curva 2	2	Recta-Afín	4	Lineal	3

Análisis, comentarios

- Nuevamente, se observa que los estudiantes establecen relaciones entre las variables, en este caso se identificaron más que en la situación I, posiblemente porque en el enunciado no eran explícitas, esto pudo causar que en 4 respuestas se encontraran "no relaciones".
- Se utiliza en mayor medida solo la representación gráfica; también otras como verbal, tabular, algebraica y varias a la vez, en algunos casos también se incluye la gráfica. Sin embargo, otra vez la forma de representar las relaciones en la mayoría no se considera adecuada, porque no se tienen en cuenta factores que influyen en la situación.

4.5.7. Análisis ítem 7, cuestiones 18 a 20

Tabla 32. *Análisis ítem 7*

Gráfico o tabla de análisis

1

Caracterización de las respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Área	13	65%
Longitud	15	75%
Puntos	3	15%
Perímetro	4	20%
DomRang	3	15%
No variables	4	20%

2

Caracterización de las respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Constante	7	35%
Lineal	5	25%
Parábola correcta	3	15%
Parábola no correcta	4	20%
Otra	1	5%

3

Caracterización de las respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Área cuadrado	9	45%
Área constante	3	15%
Correcta	3	15%
Otras	5	25%

Análisis, comentarios

- En la tabla "1" se muestra la frecuencia y porcentaje de las variables mencionadas por los estudiantes, se observa que la mayoría las reconoce adecuadamente; además, se incluyen variables como el dominio y el rango, sin embargo, algunos mencionan que ciertos puntos involucrados en la construcción varían, lo cual se considera incorrecto, entonces el total de estudiantes que mencionan no variables es el 35% de la población.
- En cuanto a la representación gráfica, se observa en la tabla "2" que la mayoría de los estudiantes menciona que la variación del área del cuadrado con respecto a la longitud del segmento *AE* es constante, precisan que el "cuadrado siempre será cuadrado" por lo tanto el área no varía, se guían por la representación geométrica y no por la variación entre las magnitudes. El 25% de la población considera que el cambio es lineal, de nuevo, influye la construcción geométrica y no se realiza una representación adecuada debido a que en el origen el área no es cero, además, no se tiene en cuenta que la magnitud puesta en juego es el área por lo tanto, la representación no puede ser una recta. El 15% realiza el esbozo de una parábola no necesariamente adecuada, debido a que la construyen cóncava hacia abajo, lo cual no concuerda con la situación. Solo el 20% realiza el esbozo gráfico adecuado.
- En cuanto a la representación algebraica solicitada, se observa en la tabla "3" que la mayoría de los estudiantes menciona la fórmula del área de un cuadrado en general, esto muestra que por un lado los estudiantes no relacionan los datos dados en la construcción y que no hay traducciones adecuadas entre la representación gráfica y la algebraica, esto último se refleja también en la cantidad de personas que mencionan una función constante con la cantidad de personas que esbozaron una recta constante.
- Se observa en algunas respuestas que algunos estudiantes utilizan diferentes representaciones no solicitadas como la tabla y la representación verbal.

Para finalizar este capítulo, a continuación se presenta una tabla en la cual se diferencian los tipos de concepciones encontradas durante la revisión y análisis de las respuestas de los cuestionarios, atendiendo a los elementos que conforman una concepción de acuerdo con Vergnaud (como se citó en Ruíz, 1993), estos son, invariantes, representaciones y situaciones que le dan sentido al concepto.

Tabla 33. *Caracterización de las concepciones encontradas en el análisis del cuestionario*

Nombre de la concepción	**Invariantes**	**Representaciones**	**Situaciones**
Correspondencia	Una función es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, estos pueden ser el dominio y el rango o el conjunto de llegada y de salida. Es necesario tener en cuenta la unicidad de la imagen.	Diagramas sagitales, conjunto de pares ordenados, puntos (x, y) sobre los ejes y el plano cartesiano.	Estas invariantes se usan principalmente para abordar el concepto de función y para justificar cuándo una representación dada es función o no.
Representaciones	Es función si se puede representar de distintas formas y se pueden realizar traducciones entre estas. Es necesario saber qué está en función de qué, cuando no es explícito se realizan procedimientos algebraicos o gráficos para llegar a formas "icónicas" o "sintácticas" conocidas.	Representación tabular, algebraica, gráfica y verbal.	Identificación de funciones conocidas; principalmente se usan las invariantes en el reconocimiento de expresiones algebraicas y para representar situaciones de variación.
Gráfica	La función puede representarse en un gráfico cartesiano mediante una curva. En el eje horizontal se identifica el dominio y en el vertical el rango. El uso de rectas perpendiculares al eje horizontal que no corten a más de un punto es una forma de reconocer cuando es función.	Expresiones gráficas como rectas, parábolas, a trozos y otras no funciones como hipérbolas.	Se usan las invariantes para abordar el concepto de función, en las situaciones de variación y en el estudio analítico de las funciones. La gráfica permite identificar propiedades de las funciones como la continuidad, la discontinuidad y en ocasiones la inyectividad y la biyectividad.
Relación de dependencia	Una función es una relación entre cantidades de magnitudes variables. Es necesario identificar las variables independiente y dependiente.	Se enuncia verbalmente la forma como las variables cambian de acuerdo con la relación.	Se establecen adecuadamente las variables, la relación de dependencia y la forma como varían principalmente en situaciones de contexto geométrico.

PROPUESTA DIDÁCTICA "EL CONCEPTO DE FUNCIÓN A PARTIR DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y EL PENSAMIENTO VARIACIONAL"

La propuesta didáctica planteada se estructura en dos momentos, para la determinación de la misma se tuvo en cuenta las consideraciones realizadas en los capítulos anteriores del trabajo; por ejemplo, una de las conclusiones obtenidas al aplicar el cuestionario a estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas; se observó que se tiene una concepción estática del concepto; se presentan dificultades para solucionar y desenvolverse en situaciones sujetas al cambio y a la variación. Es por ello que en el primer momento se abordan situaciones para conceptualizar las ideas de variables, parámetros y constantes, en el segundo se plantean actividades teniendo en cuenta ciertos periodos de la historia del concepto de función; al mismo tiempo, se utilizará el potencial modelizador de las funciones para crear modelos de diferentes contextos.

Se plantea una estructura general de organización que acoja aquellos elementos y que contribuya a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, atendiendo a tres elementos, **situaciones que le dan sentido al concepto de función** (variación, cambio y dependencia), **invariantes** (el cambio en una de las variables determina un único cambio en las restantes), **sistemas de representación,** junto con ello se promueven el uso de **las conversiones entre las representaciones**.

Vale la pena considerar que esta propuesta didáctica va dirigida a los docentes, como una alternativa para implementar en el aula en diferentes niveles de escolaridad y a los estudiantes, que ya estén familiarizados con el concepto, para que puedan profundizar en el mismo y pongan en juego diferentes elementos matemáticos involucrados.

A continuación se presentan los objetivos generales de las actividades de la propuesta didáctica:

- Estudiar el concepto de variable a partir de distintas situaciones.
- Diferenciar las variables de las constantes, así como la variable independiente de la dependiente.
- Identificar las constantes, parámetros y variables (tanto independiente como dependiente) involucrados en cada situación.

- Establecer los valores posibles que pueden asumir cada una de las variables y determinar las relaciones de dependencias entre las variables.
- Establecer modelos que permitan verificar, predecir y solucionar de alguna manera la situación con alguna de las representaciones de la función (verbal, tabular, gráfica y simbólica-algebraica) u otras.

Por otra parte, es necesario contemplar la estructura de la propuesta didáctica, la cual se presenta en seguida:

Tabla 34. *Estructura de la propuesta*

<table>
<tr><th colspan="3">La modelación matemática y las funciones en el pensamiento variacional</th></tr>
<tr><th>Partes</th><th>Sub partes</th><th>Situaciones</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.
Situaciones previas</td><td>Situaciones verbales</td><td>• Secuencia de puntos
• Temperatura del agua
• Reproducción de un microorganismo</td></tr>
<tr><td>Situaciones experimentales</td><td>• Resorte
• Llenado de envases</td></tr>
<tr><td>Situaciones geométricas con el uso de tecnología</td><td>• Rectángulo con área constante
• Rectángulo con perímetro constante
• Intersección de la diagonal</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2.
Situaciones de desarrollo</td><td>Búsqueda de regularidades</td><td>• Una secuencia de polígonos regulares
• Un conteo de triángulos equiláteros</td></tr>
<tr><td>Razón y proporción</td><td>• El trueque: una práctica social y económica entre comunidades indígenas del Cauca</td></tr>
<tr><td>Representación de relaciones funcionales (estilo Oresme)</td><td>• Relación entre un ángulo y el lado de un triángulo
• Trabajando con una espiral</td></tr>
<tr><td>Situaciones geométricas de variación (El uso de varias representaciones de la función)</td><td>• Cuadrilátero inscrito en otro
• Área figura lado
• Área figura perímetro - Ventana-triángulo-área
• Caja sin tapa
• Automóvil
• Rueda de Chicago
• Segmento-arco</td></tr>
<tr><td>Actividad complementaria</td><td>• Retomando las situaciones previas</td></tr>
</table>

	Otras situaciones en contextos no geométricos	• Problema del crecimiento de la población de una colmena de abejas • Planes de telefonía móvil

En el "Anexo 9: Expresiones algebraicas". Se presentan algunas de las expresiones algebraicas obtenidas al establecer relaciones de dependencia en las actividades planteadas.

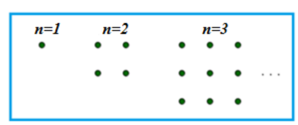
5.1. Parte 1: Los conceptos de constante, variable y parámetro

Se considera que el concepto de variable es de gran importancia para abordar el estudio de la función, por ello, en este apartado se presentan actividades en las cuales se busca identificar las variables de una situación ya sea en el ámbito matemático o en situaciones de otras ciencias.

5.1.1. Situaciones verbales

Actividad 1: "Secuencia de puntos"

Tabla 35. *Actividad 1*

<table>
<tr><th>Propósitos</th><th>Enunciado</th></tr>
<tr><td>Se pretende que el estudiante identifique que las variables son la posición de la figura y el número de puntos que la conforma. Por otro lado, se espera que el estudiante observe que en la situación, el número de puntos sigue cierta regularidad que depende de la posición, es decir, el rango no es el conjunto de los números naturales.</td><td>Se ha elaborado una secuencia de puntos presentados en una posición ($\boldsymbol{n}$) establecida que siguen cierta regularidad.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas orientadoras generales:
a. ¿Cuántos puntos tendrá la figura en la posición 3?
b. ¿Cuántos puntos tendrá la figura en la posición 5?
c. Intente construir una figura que siga la regularidad de la secuencia usando solamente 12 puntos, ¿qué observa?
d. Intente construir una figura que siga la regularidad de la secuencia usando solamente 26 puntos, ¿qué observa?
e. Intente construir una figura que siga la regularidad de la secuencia usando solamente 47 puntos, ¿qué observa?
f. ¿En qué posición está la figura compuesta por 121 puntos?
g. Mencione cinco valores de la posición, para cada uno, determine la cantidad de puntos que conforma la figura, ¿qué se tuvo en cuenta para realizar el ejercicio?</td></tr>
</table>

Actividad 2: "Temperatura del agua"

Tabla 36. *Actividad 2*

Propósitos	Enunciado
Se pretende que el estudiante identifique que las variables son el tiempo y la temperatura del agua, esta última, depende del tiempo transcurrido después de abierta la llave del agua; por otro lado, se busca que el estudiante identifique los posibles valores que pueden asumir las variables para reconocer que cambian.	La temperatura del agua antes de abrir una ducha de agua caliente es cercana a la temperatura ambiente debido a que el agua ha estado en los tubos. Una vez abierta la llave de la ducha, un dispositivo puesto en ella, eleva la temperatura del agua.
Preguntas orientadoras generales: **a.** ¿Qué sucede con la temperatura del agua si no se abre la llave? **b.** ¿Qué sucede con la temperatura del agua después de abierta la llave? **c.** ¿La temperatura del agua en algún instante puede alcanzar los 100ºC? Justifique su respuesta. **d.** Si se deja abierta la llave de la ducha durante cierto tiempo y luego se cierra, ¿qué sucede con la temperatura del agua que está en los tubos?	

Actividad 3: "Propagación de un microorganismo"

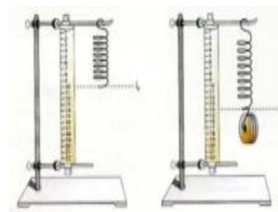
Tabla 37. *Actividad 3*

Propósitos	Enunciado
Se pretende que el estudiante identifique que las variables son el tiempo y la cantidad de microorganismos presentes en el recipiente; esta última depende del tiempo. Se espera que el estudiante observe que el número de microorganismos se relaciona con la cantidad de reproducciones.	Un microorganismo se propaga por división simple (se duplica), cada división toma 3 minutos para completarse. Cuando ese microorganismo se pone en un recipiente de vidrio con un fluido nutriente, el recipiente está lleno de microorganismos en una hora.
Preguntas orientadoras generales: **a.** ¿Cuántos microorganismos se tendrán en el recipiente después de 6 minutos? **b.** ¿Cuántos microorganismos se tendrán en el recipiente después de 9 minutos? **c.** ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que en el recipiente hayan 128 microorganismos? **d.** ¿Se puede saber la cantidad de microorganismos presentes en el recipiente sin conocer los minutos que han transcurrido? ¿por qué? **e.** ¿Cuánto tiempo transcurre para que el recipiente esté lleno con microorganismos hasta la mitad? **f.** ¿Cuánto tiempo transcurre para que el recipiente esté lleno hasta la cuarta parte?	

5.1.2. Situaciones experimentales

Actividad 4: “Resorte”

Tabla 38. *Actividad 4*

<table>
<tr><th>Propósitos</th><th>Enunciado</th><th>Recursos</th></tr>
<tr><td>Se pretende que el estudiante identifique que las variables son la longitud del resorte y la masa de los objetos que se cuelgan de él, además que observe que dichas variables se pueden cuantificar.</td><td>Se construye un soporte fijo al cual se sujeta un resorte; de manera secuencial se colgará en el resorte unos objetos que tienen ciertos pesos.
</td><td>Dos resortes de distinta elasticidad, un soporte, un juego de masas, cinta métrica, reglas, balanza.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Con los materiales anteriores se hace el montaje para realizar dos experimentos, uno con el primer resorte y otro con el segundo resorte.
Preguntas orientadoras generales:
1. Conteste las siguientes preguntas a partir de la experimentación con el primer resorte:
a. ¿Cuál es la longitud inicial del resorte?
b. ¿Qué sucede con el resorte cuando se cuelga de este un objeto con una masa?
c. ¿Qué sucede con el resorte cuando se cuelgan dos o más objetos, cada uno con igual masa del objeto tomado en el ítem anterior?
d. ¿Se puede determinar la longitud alcanzada por el resorte (sin recurrir a la medición) sin necesidad de conocer la masa del objeto que cuelga de él? ¿cómo?
2. Conteste las preguntas del numeral anterior, a partir de la experimentación con el segundo resorte.</td></tr>
</table>

Actividad 5: “Llenado de envases”

Tabla 39. *Actividad 5*

Propósitos	Enunciado	Recursos
Se pretende que el estudiante identifique en esta situación distintas variables, entre ellas, el tiempo, la altura que alcanza el nivel del agua en el envase, el volumen del agua en el envase; por otra parte, se espera que los estudiantes observen que hay algunas variables que se pueden cuantificar (por ejemplo el tiempo y la altura).	A dos envases de almacenamiento de agua de distinta forma, se les vierte de manera constante la misma cantidad de líquido hasta llenarlos.	Envases transparentes con la forma de las figuras del enunciado.

<table>
<tr><td></td><td> </td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">

Preguntas orientadoras generales: Con los materiales anteriores se hace el montaje para realizar dos experimentos, uno con el primer envase y otro con el segundo.

1. Inicie la actividad con el envase que tiene la forma de la figura de la izquierda, recuerde que después de abrir la llave, el agua fluye de manera constante. A partir de las observaciones realizadas, conteste:

a. ¿Cuánto tiempo transcurre para que el envase esté lleno completamente (sin que el agua se desborde)?

b. ¿Qué cantidad de agua habrá en el envase al transcurrir la mitad del tiempo de llenado?

c. ¿En qué momento la cantidad del agua alcanza la mitad de la altura del envase?

d. ¿Se puede determinar la cantidad de agua en el envase sin necesidad de conocer el tiempo que ha transcurrido? ¿por qué?

e. A medida que se va llenando el envase, ¿qué ocurre con la altura del agua en el envase?

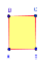
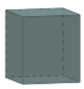
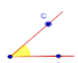
2. Conteste las preguntas del numeral anterior, a partir de la actividad de llenado del envase que tiene la forma de la figura de la derecha.

</td></tr>
</table>

5.1.3. Situaciones geométricas con el uso de tecnología

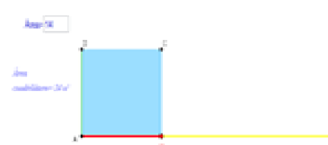
Es importante mencionar algunas consideraciones referentes al concepto de magnitud, al respecto, Guacaneme (2001) señala que se puede definir como el conjunto de las cantidades de las cualidades comunes de los objetos de la misma naturaleza, junto con la operación suma y la relación de orden. A partir de la consideración presentada se plantea la siguiente tabla, en la cual se hace alusión a las magnitudes geométricas, a saber:

Tabla 40. *Magnitudes geométricas*

Objeto geométrico	**Cualidad del objeto geométrico**	**Cantidad de cualidad (Magnitud)**	**Medida**
Segmento 	Longitud	Cantidad de longitud (distancia)	m
Cuadrado 	Superficie	Cantidad de superficie (área)	m^2
Cubo 	Volumen	Cantidad de volumen	m^3
Ángulo 	Amplitud angular	Cantidad de Amplitud angular	Grados Radianes

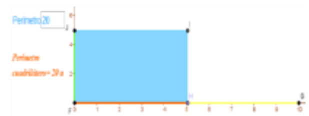
Actividad 6: "Rectángulo con área constante"

Tabla 41. *Actividad 6*

Propósitos	**Enunciado**	**Recursos**
Se pretende que el estudiante identifique que entre las variables se encuentran la longitud del segmento AW (lado del rectángulo variable independiente) y el otro lado del rectángulo (dependiente), además el área del rectángulo que puede tomarse como una constante o un parámetro. Por otro lado, se busca que se observe la relación de dependencia y el dominio de variación de ambas variables.	Un rectángulo mantiene la misma área. 	Applet en GeoGebra "Actividad 6" (ver "Anexo 4: Applets propuesta didáctica")
Preguntas orientadoras generales: **1. Exploración del Applet:** **a.** ¿Qué entiende por el enunciado "un rectángulo mantiene la misma área"? **b.** ¿Qué se puede mover libremente (puntos, segmentos, polígonos) en el Applet "Actividad 6"? **c.** ¿Qué magnitudes o cantidades geométricas se encuentran en la construcción? **d.** ¿A medida que se mueve el punto W qué magnitudes están variando? **2.** Conteste las siguientes preguntas: **a.** ¿Qué sucede con la longitud de cada uno de los segmentos si no se mueve el punto W? **b.** ¿Qué sucede con la longitud del perímetro del rectángulo si no se mueve el punto W?		

Actividad 7: "Rectángulo con perímetro constante"

Tabla 42. *Actividad 7*

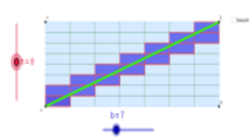
Propósitos	**Enunciado**	**Recursos**
Se pretende que el estudiante identifique magnitudes variables como la longitud el segmento FH (independiente) y el área del rectángulo (dependiente) y el perímetro del rectángulo, que puede tomarse como una constante o un parámetro. Por otro lado, se busca que el estudiante encuentre los valores que toma cada variable.	Un rectángulo mantiene la medida del perímetro. 	Applet en GeoGebra "Actividad 7" (ver "Anexo 4: Applets propuesta didáctica")

Preguntas orientadoras generales:

1. Exploración del Applet:
   - **a.** ¿Qué entiende por el enunciado "un rectángulo mantiene la medida del perímetro"?
   - **b.** ¿Qué se puede mover libremente (puntos, segmentos, polígonos) en el Applet "Actividad 7"?
   - **c.** ¿Qué magnitudes o cantidades geométricas se encuentran en la construcción?
   - **d.** ¿A medida que se mueve el punto H qué magnitudes están variando?
2. Conteste las siguientes preguntas:
   - **a.** ¿Qué sucede con la longitud de cada uno de los segmentos si no se mueve el punto H?
   - **b.** ¿Qué sucede con el área del rectángulo si no se mueve el punto H?

Actividad 8: "Intersección de diagonal"

Tabla 43. *Actividad 8*

Propósitos	**Enunciado**	**Recursos**
Se pretende que el estudiante identifique variables como el valor de b (independiente) y el número de rectángulos intersecados por la diagonal (dependientes) entre otras; en la situación se puede tomar el valor de h como una constante o un parámetro. Por otro lado, se busca que el estudiante observe que si se deja el valor de h fijo y el valor de b variable, el número de rectángulos intersecados por la diagonal depende del valor de b.	Se tiene un rectángulo dividido en $\boldsymbol{h}$ filas y $\boldsymbol{b}$ columnas, en el cual se determinan $\boldsymbol{m}$ rectángulos, de tal manera que $\boldsymbol{m = hb}$. En dicha figura se traza una de las diagonales del rectángulo. 	Applet en GeoGebra "Actividad 8" (Anexo 4: Applets propuesta didáctica)

Preguntas orientadoras generales:

1. **Exploración del Applet:**
   - **a.** ¿Qué se puede mover libremente (puntos, segmentos, polígonos) en el Applet?
   - **b.** ¿Qué magnitudes o cantidades geométricas se encuentran en la construcción?
   - **c.** ¿A medida que se cambia el valor de b qué magnitudes o cantidades están variando?
   - **d.** ¿A medida que se cambia el valor de h qué magnitudes o cantidades están variando?
2. **Conteste las siguientes preguntas:**

a. Si se tiene que $h = 2$ y b toma cualquier número natural mayor o igual que 1, ¿cuántos rectángulos se determinan?, ¿Qué pasa con el número de rectángulos que son cortados por la diagonal?
b. Si se tiene que $h = 3$ y b toma cualquier número natural mayor o igual que 1, ¿cuántos rectángulos se determinan?, ¿Qué pasa con el número de rectángulos que son cortados por la diagonal?

5.1.4. Actividad de conclusión

Tabla 44. *Actividad de conclusión*

La actividad de cierre y conclusión de este conjunto de situaciones se desarrolla en dos partes, en la primera se aborda la identificación de magnitudes y cantidades, mientras que en la segunda se puntualizan las ideas de variables y constantes.

1. Identificación de magnitudes y cantidades:

Use la tabla que se muestra en el ejemplo (ver “Anexo 5: Tabla identificación de magnitudes y cantidades”) para responder las siguientes preguntas:

a. ¿Qué cantidades o magnitudes no varían?
b. ¿Qué cantidades o magnitudes varían?
c. ¿Qué valores pueden tomar cada una de las magnitudes mencionadas en el ítem “b”?
d. ¿Los valores que toman cada una de las magnitudes mencionadas en el ítem b se pueden obtener de manera directa, es decir, se pueden asignar libremente?

Ejemplo: ¨La cantidad de dinero recibida en una tienda de telas por la venta de lino, solo se vende por metros, cada metro tiene un costo de $5000 ¨.

Situación	*Magnitudes. o cantidades que NO varían*	*Magnitudes. o cantidades que SI varían*	*Valores que toma cada magnitud o cantidad.*	*¿Los valores de la cantidad o magnitud se asignan libremente?*
1	Costo por unidad de metro de tela		$5000	No, es un precio dado.
		Metros de tela comprados	1, 2, 3, 4, 5, …	Si
		Dinero recibido	$5000, $10000, $15000…	No, depende de los metros de tela comprados

2. Identificación de variables y constantes:

Para finalizar este conjunto de actividades se hace necesario precisar lo siguiente:

a. Las magnitudes que no varían cuyo valor no se asigna libremente, sino que es dado, se llaman constantes.
b. Las magnitudes que no varían cuyo valor es fijo pero arbitrario, se llaman parámetros.
c. Las magnitudes que sí varían se llaman variables.
d. Las magnitudes o cantidades que varían libremente se llaman variables independientes.
e. Las magnitudes o cantidades que no varían libremente se llaman variables dependientes

De acuerdo con esta información y el trabajo realizado en cada una de las actividades complete la siguiente tabla (ver “Anexo 6: Tabla identificación de variables y constantes”)

Situación	*Constantes*	*Parámetros*	*Variable independiente*	*Variable dependiente*
1				

5.2. Parte 2: Actividades de desarrollo

Teniendo en cuenta que el concepto de función es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años, se ha organizado la segunda parte de la propuesta teniendo en cuenta algunos aspectos de la evolución histórica del mismo.

5.2.1. Búsqueda de regularidades en situaciones de variación

En esta sección se abordan ciertas actividades que de alguna manera se sustentan con los primeros estudios que dieron el origen al concepto de función, es decir, la búsqueda de regularidades presentes en situaciones numéricas y geométricas.

Recursos: Applets en GeoGebra (ver "Anexo 4: Applets propuesta didáctica") en las dos actividades, papel y lápiz.

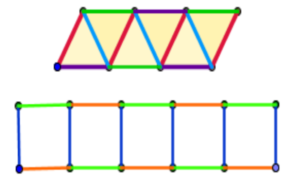
Actividad 9: "Una secuencia de polígonos regulares"

Tabla 45. *Actividad 9*

Introducción Los polígonos regulares tienen propiedades (congruencia de lados y ángulos) que conducen a la realización de procesos de generalización; en ese sentido, se plantea una situación en la cual se pretende observar las regularidades encontradas cuando se construyen figuras compuestas por varios polígonos regulares ordenados consecutivamente, cada uno de los polígonos, excepto los ubicados en los extremos, comparte un lado con el polígono anterior y otro lado con el siguiente.
Propósitos Se busca que los estudiantes realicen en primera instancia la exploración del Applet para identificar la manera como se determina la figura y la cantidad de segmentos, puntos y polígonos que la conforma; a partir de ello, se deben establecer las variables. En este caso el número de polígonos es la variable independiente y las variables dependientes pueden ser, el número de segmentos que conforma la figura, el número de segmentos interiores o exteriores, entre otros. Se privilegia el uso de la representación tabular y algebraica para describir las relaciones de dependencia.

Enunciado

Se ha determinado una secuencia de polígonos, cada uno de ellos, excepto los ubicados en los extremos, comparte un lado con el polígono anterior, y otro lado con el siguiente; lo anterior puede ser observado en el Applet de la actividad.



Preguntas orientadoras generales:

Se recomienda responder cada uno de los interrogantes en el orden planteado

1. Realice una exploración en el Applet "Actividad 9" de GeoGebra, de acuerdo con ello:
- **a.** Mencione qué valores pueden modificarse
- **b.** ¿A qué corresponden dichos valores?
- **c.** Describa qué figuras se obtienen al cambiar los valores del ítem "a"
- **d.** ¿La forma de las figuras obtenidas en el ítem "b" se modifican si la figura inicial cambia de tamaño? ¿Cómo se puede corroborar?

2. A partir de las observaciones realizadas en el punto anterior responda lo siguiente:
- **a.** ¿Qué valores son constantes?, ¿cuáles son parámetros?
- **b.** Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación.
- **c.** Determine la variable independiente
- **d.** ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?
- **e.** Determine las variables dependientes
- **f.** ¿Qué valores pueden tomar cada una de las variables dependientes?

3. Abordando relaciones de dependencia:
- **a.** ¿Se puede establecer alguna relación de dependencia? Enumere cada una de ellas
- **b.** Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella, complete la siguiente tabla, escriba los valores de la variable independiente y la variable dependiente

- **c.** ¿Qué sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente?
- **d.** Es posible encontrar una expresión general que permita determinar cualquier valor de la variable dependiente. ¿Cuál es esta expresión?

4. Verificación:
- **a.** Verifique que la expresión resultante es correcta, dándole algunos de los valores de la tabla realizada en el ítem "3b"
- **b.** Verifique que la expresión resultante es correcta para cualquier valor de la variable independiente, para facilitar este ejercicio, utilice la opción "Verificación[17]" del Applet para comparar los resultados obtenidos

---

[17] Para observar los valores de verificación digite el número **9** en la opción "Valor", esta opción se establece para que el docente les brinde a los estudiantes dicho número después de que ellos hayan realizado las actividades anteriores.

Actividad 10: "Un conteo de triángulos equiláteros[18]"

Tabla 46. *Actividad 10*

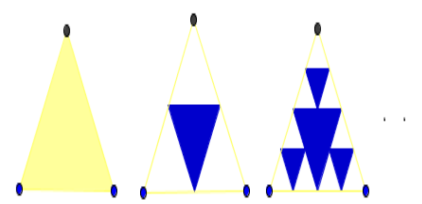
Introducción

En las últimas décadas en el campo de las Matemáticas se ha desarrollado la teoría de la geometría fractal, en la cual se destacan dos elementos importantes: la "iteración" y "auto-semejanza". Se presenta una situación en la cual se construye un fractal a partir de un triángulo equilátero, se puede observar la construcción del mismo de acuerdo con el número de iteraciones realizadas, por lo cual, se pueden establecer ciertas relaciones de variación y dependencia.

Propósitos

Se busca que los estudiantes realicen en primera instancia la exploración del Applet para identificar la manera como se determina la figura; a partir de ello, se deben establecer las variables. En este caso el número de la iteración es la variable independiente, de esta dependen el número de triángulos total obtenidos, el número de triángulos de cierto color y las partes en las cuales se divide cada segmento del triángulo inicial. Se privilegia el uso de la representación tabular y algebraica para describir las relaciones de dependencia.

Enunciado: Un fractal es el producto de la iteración o repetición de un proceso geométrico elemental que da lugar a una estructura final extraordinaria, en esta, cada porción del objeto tiene la información necesaria para reproducirlo completamente. Parte del proceso de construcción de un fractal puede ser observado en el Applet de la actividad.



Preguntas orientadoras generales:

Se recomienda responder cada uno de los interrogantes en el orden presentado.

1. Realice la exploración en el Applet "Actividad 10" de GeoGebra con cada una de las herramientas[19] "iteración", de acuerdo con ello:
- **a.** Describa qué figura se genera con cada una de las herramientas "iteración"
- **b.** ¿La forma de las figuras obtenidas en el ítem anterior se modifican si la figura inicial cambia de tamaño? ¿por qué?

2. A partir de las observaciones realizadas en el numeral anterior conteste lo siguiente:
- **a.** Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación
- **b.** Determine la variable independiente
- **c.** ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?
- **d.** Determine las variables dependientes
- **e.** ¿Qué valores pueden tomar cada una de las variables dependientes?

3. Abordando relaciones de dependencia:
- **a.** ¿Se puede establecer alguna relación de dependencia? Enumere cada una de ellas
- **b.** Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella, completa la tabla siguiente escribiendo las variables tomadas

---

[18] Actividad basada en Jaimes (2012, p.44)

[19] Una herramienta es un comando que se crea para realizar unas construcciones particulares.

c. ¿Qué sucede con los valores que asume la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente?
d. Es posible encontrar una expresión general que permita determinar cualquier valor de la variable dependiente. ¿Cuál es esta expresión?

4. Verificación:
a. Verifique que la expresión resultante es correcta con varios ejemplos particulares, utilice la tabla realizada en el ítem "b"

5.2.2. Razón y proporción

Se presenta una actividad en la cual se tiene la posibilidad de resolver problemas con el uso de razones y proporciones; si bien, no se sigue fielmente el desarrollo geométrico que realizaron los griegos, se plantea esta actividad para seguir la secuencia de desarrollo histórico del concepto de función, se debe señalar que en la actividad se da por superado uno de los obstáculos epistemológicos que se tuvo en la edad antigua, esto es, el no poder comparar mediante razones y proporciones magnitudes de distinta naturaleza.

Actividad 11: "El trueque: una práctica social y económica entre comunidades indígenas del Cauca[20]"

Tabla 47. *Actividad 11*

Introducción
Desde tiempos inmemorables el ser humano ha tenido la necesidad de cambiar aquellos objetos que poseía y no necesitaba por otros objetos que realmente necesitaba, dicha actividad comercial en la cual no hay dinero involucrado se denominó trueque. Para lograr que las relaciones comerciales fueran de beneficio para las partes involucradas, se requirió establecer patrones para medir los productos que se intercambian.
Propósitos
Se busca que los estudiantes interpreten la información de un contexto real, de tal manera que se puedan encontrar expresiones para comparar las cantidades de productos que guardan relación de proporcionalidad. En esta actividad se privilegia el uso de la representación tabular y la simbólica (ya sea mediante razones y proporciones o algebraica) para describir las relaciones de dependencia.

---

20 La información que se presenta en esta situación es tomada de: ¨El Trueque en el Cauca: ¿Es un Sistema Alternativo Frente a las Políticas de Globalización? (…) ¨. Olga Cadena y Sandra Muñoz. Disponible en http://www.unicauca.edu.co/porik_an/imagenes_3noanteriores/No.12porikan/articulo4.pdf

Enunciado

Las prácticas del trueque se han empezado a desarrollar regionalmente en las comunidades indígenas del departamento del Cauca desde Octubre del 2003 en el municipio de Alto del Rey; estas prácticas son de alta complejidad por cuestiones de la siembra, el cultivo de los productos y los desplazamientos a los puntos de encuentro; sin embargo, uno de los problemas más complejos a solucionar es la determinación de la medida de cambio general de los intercambios, debido a que debe ser reconocida socialmente por todos los participantes.

A continuación se presentan algunos de los ejemplos de las medidas determinadas por los pueblos indígenas del Cauca:

Tipo de producto que se ofrece	Cantidad ofrecida	Tipo de producto por el que se intercambia	Cantidad recibida en el intercambio
Papa	$\frac{1}{2}$ bulto	Plátano verde, café tostado, Naranjas, Limones, aguacates	4 racimos grandes, 1 libra, 3 docenas, 2 bolsas, 7 unidades
Papa	2 bultos	Panela	2 arrobas y media
Cebolla larga	5 atados	Plátano maduro	3 racimos
Ajo	9 bolsas	Banano	2 racimos y medio
Leche	1 litro	Plátano	1 caja
Plátano	1 racimo	Papa	1 arroba
Panela	2 libras	Papa	2 arrobas
Coliflor	2 unidades	Plátano	1 racimo
Cilantro	3 atados	Yucas	2 unidades
Piña	2 unidades	Fresas	1 bolsa
Fresas	10 bolsas	Yuca	5 unidades
Queso	1 libra	Papa	2 bolsas
Aguacate	2 docenas	Yuca	5 unidades
Jabón de coco	1 barra	Naranjas	12 unidades
Barras de manteca	3 unidades	Yuca	3 unidades
Camisa para hombre	1 prenda	Plátano verde, Panela	1 racimo, 1 grande (10 arrobas)

Preguntas orientadoras generales:
1. De acuerdo con la información presentada en la tabla anterior, conteste: **a.** Una persona se encarga de elaborar camisas para hombre, si desea intercambiar 8 camisas ¿Qué cantidad de papa le darán? **b.** Si desea intercambiar 36 camisas ¿Qué cantidad de papa le darán? **c.** Es posible encontrar una expresión general que permita determinar la cantidad de papa que le darán a la persona si tiene disponibles m camisas para el trueque. ¿Cuál es esta expresión? **d.** ¿Qué variables se encuentran en la situación anterior? **e.** ¿Qué relaciones de dependencia se pueden establecer? **f.** Establezca una tabla que relacione la cantidad de camisas para hombre que se intercambian por cierta cantidad de papa **g.** Establezca una expresión que relacione de manera general la cantidad de camisas para hombre con la cantidad de papa **2.** Establezca una expresión que relacione de manera general la cantidad de coliflor con la cantidad de naranjas **3.** Escoja dos productos que se relacionen, establezca la expresión general relación de dependencia **4.** Intercambie los resultados obtenidos con los compañeros para verificar y comparar las respuestas

5.2.3. Uso de figuras para representar relaciones de dependencia

En esta parte, se realizarán ciertas actividades en las cuales se pretende asociar la búsqueda de regularidades con la obtención de representaciones gráficas de magnitudes cuantitativas numéricas o cuantitativas no numéricas, se privilegia el uso de representaciones como las desarrolladas por Oresme (en el “Anexo 1”, p. 113 se incluyen algunas de las gráficas propuestas por Oresme).

Recursos: Applets en GeoGebra (ver “Anexo 4: Applets propuesta didáctica”) en las dos actividades, papel y lápiz.

Actividad 12: “Relación entre un ángulo y el lado de un triángulo”

Tabla 48. *Actividad 12*

Introducción Se presenta una situación en la cual a partir de dos segmentos se pueden determinar ciertos triángulos, al variar el ángulo que forman dichos segmentos; es posible establecer varias relaciones de dependencia en función del ángulo formado por los segmentos dados.
Propósitos Se busca que los estudiantes a partir de la exploración del Applet, identifiquen la variable amplitud del ángulo (independiente) y las variables longitud del tercer lado y área del triángulo, entre otras (dependientes). En la situación también se pueden observar los parámetros (longitud de los segmentos iniciales) y representar la relación de dependencia gráficamente, para ello, se tiene la posibilidad de replicar una figura que se asemeja a la planteada por Oresme para representar relaciones de dependencia cualitativamente.

Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con papel y lápiz:
- **a.** Dibujar en una hoja de papel dos segmentos.
- **b.** ¿Cuántos triángulos se pueden construir de tal manera que dos de sus lados tengan la misma medida de los segmentos del ítem anterior?
- **c.** ¿Qué tipo de triángulo resulta? Clasifíquelo de acuerdo a sus lados y a sus ángulos
- **d.** Con la medida de los segmentos construidos en el ítem "a", construya varios triángulos

2. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 12"):
- **a.** Realice una exploración de los elementos del Applet.
- **b.** Escriba las variables que se pueden establecer en la situación.
- **c.** Determine la variable independiente
- **d.** ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?
- **e.** Determine las variables dependientes
- **f.** ¿Qué valores pueden tomar las variables dependientes?

3. Abordando relaciones de dependencia:
- **a.** ¿Se puede establecer alguna relación de dependencia? Enumere cada una de ellas.
- **b.** Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella, establezca una gráfica o un dibujo que represente dicha relación

4. Verificación:
- **a.** Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas
- **b.** Verificación de la representación gráfica con el uso del Applet[21]

Actividad 13: "Trabajando con una espiral"

Tabla 49. *Actividad 13*

Introducción Teodoro de Cirene filósofo y matemático de pensamiento pitagórico a partir de la construcción de triángulos rectángulos consecutivos logró determinar la espiral que lleva su nombre, en la cual, las diagonales de los triángulos construidos representan la medida de ciertas raíces cuadradas de números naturales. Se ha construido un Applet en el cual se puede replicar la construcción de la espiral de manera secuencial mediante el uso de una herramienta denominada Iteración-Espiral; interesa estudiar las relaciones de dependencia que se encuentra en dicha situación.
Propósitos Se busca que los estudiantes a partir de la exploración del Applet logren identificar la variable iteración (independiente) y las variables (dependientes) longitud del segmento obtenido de la iteración, área de triángulos, entre otras. En la situación también se puede observar el parámetro (longitud del segmento inicial) y representar la relación de dependencia gráficamente, para ello, se tiene la posibilidad de replicar una construcción en el Applet para representar relaciones de dependencia cualitativamente. En particular, interesa encontrar un modelo que represente la variación de la longitud de la hipotenusa de los triángulos construidos de acuerdo con el número de la iteración llevada a cabo.

[21] En el Applet al seleccionar esta opción "Gráfica", y digitar el numeral de la actividad "**12**" en la casilla "Valor" aparece una representación gráfica que relaciona la amplitud del ángulo con la longitud del tercer lado del triángulo

Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 13"):
   - **a.** Realice una exploración de los elementos del Applet
   - **b.** Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación.
   - **c.** Determine la variable independiente
   - **d.** ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?
   - **e.** Determine las variables dependientes
   - **f.** ¿Qué valores pueden tomar las variables dependientes?
2. Abordando relaciones de dependencia:
   - **a.** ¿Se puede establecer alguna relación de dependencia? Enumere cada una de ellas
   - **b.** Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella, establezca un dibujo que represente dicha relación
3. Verificación:
   - **a.** Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas.
   - **b.** Verificación de la representación gráfica con el uso del Applet[22]

5.2.4. Situaciones geométricas de variación (el uso de varias representaciones de la función)

En esta parte de la propuesta se plantean una serie de actividades geométricas en el plano o en el espacio; se busca observar la variación de algunas magnitudes o cantidades (longitud y número de lados, área,…) que dependen de otras. Se presentan situaciones de modelación geométrica en las cuales se busca identificar elementos de la función tales como variables, dominio, rango, la construcción del modelo que representa la relación de dependencia y las representaciones posibles de la función.

Recursos: Applets en GeoGebra (ver "Anexo 4: Applets propuesta didáctica") en las siete actividades, papel y lápiz.

[22] En el Applet al seleccionar esta opción "Gráfica", y digitar el número "**33**" en la casilla "Valor" aparece una representación gráfica que relaciona la variación de los segmentos de la espiral en función del número de la iteración.

Actividad 14: “Cuadrilátero inscrito”

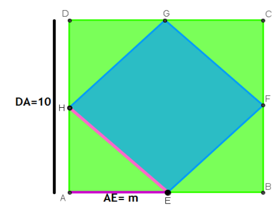
Tabla 50. *Actividad 14*

Introducción

Los polígonos regulares tienen propiedades (congruencia de lados y ángulos) que conducen a la realización de procesos de generalización; en este caso se estudiará las diferentes relaciones de dependencia encontradas a partir del análisis de una situación de variación de un cuadrilátero inscrito en otro.

Propósitos: Se busca que los estudiantes a partir de la exploración del Applet logren identificar las variables que se relacionan con longitudes de segmentos, áreas de figuras geométricas (entre ellas el cuadrado inscrito) y amplitudes angulares; por otro lado, se pretende identificar, establecer y representar varias relaciones de dependencia, por ejemplo el área de un cuadrilátero inscrito en otro. En esta actividad se privilegia el uso de la representación verbal, gráfica y algebraica para describir las relaciones de dependencia.

Enunciado: Se realiza la construcción del cuadrilátero EFGH inscrito en otro, la longitud del lado del cuadrilátero ABCD es 10 unidades.



Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con el uso de tecnología (Applet “Actividad 14”):
- **a.** Realice una exploración de los elementos del Applet
- **b.** ¿Qué partes de la figura se pueden mover?
- **c.** Escriba las constantes o los parámetros de la situación
- **d.** Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación
- **e.** Determine la variable independiente y los valores que puede tomar
- **f.** Determine las variables dependientes y los valores que pueden tomar

2. Abordando relaciones de dependencia:
- **a.** ¿Qué variables encontradas en la construcción, se pueden relacionar? Y ¿Qué variables dependen de otra? Enumere cada una de ellas

3. Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella:
- **a.** Escriba que sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente
- **b.** Establezca un dibujo o un esbozo que represente la relación de dependencia escogida (use el plano de coordenadas cartesianas)
- **c.** Encuentre una expresión algebraica que represente la variación anterior

4. Verificación:
- **a.** Intercambie los resultados obtenidos en el numeral anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas
- **b.** Los estudiantes pueden verificar sus respuestas en el Applet
  - **i.** Verificación de la representación gráfica obtenida con el uso del Applet[23]
  - **ii.** Verificación de la expresión algebraica obtenida con el uso del Applet[24]

---

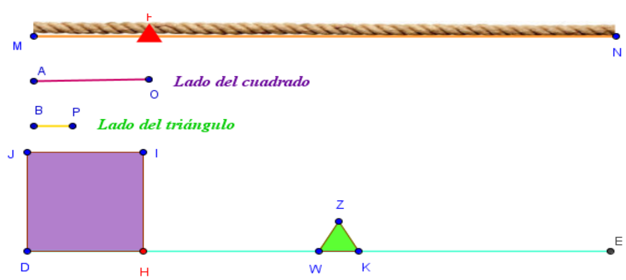
[23] En el Applet al seleccionar la opción **“vista gráfica 2”** se puede escoger y observar unos puntos que al darle la opción traza describe la gráfica de algunas relaciones de dependencias (entre ellas el área del cuadrado inscrito).

5. Generalización: **a.** A partir del trabajo realizado anteriormente, aborde la situación al considerar que el número de lados de los polígonos regulares es 5[25] **b.** Intente generalizar la relación de dependencia escogida cuando se consideran polígonos con cualquier número de lados[26]	

Actividad 15 y 16: "Área figura lado" y "Área figura perímetro"

En vista de que la actividad 15 y 16 tienen mucha similitud y ambas se desarrollan de la misma manera se organizan en una misma tabla.

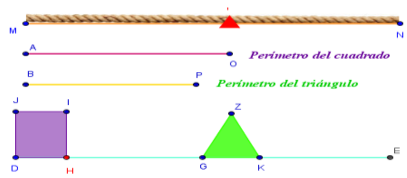
Tabla 51. *Actividad 15 y 16*

Actividad 15	
Introducción Se presenta una situación en la cual a partir de una cuerda (segmento) se determinan dos figuras geométricas (polígonos regulares); se cumple que la suma de las medidas de sus perímetros es igual a la medida de la longitud del alambre dado.	**Propósitos** Se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del Applet identifiquen las variables, determinen las relaciones de dependencia y realicen las representaciones (y conversiones) verbales, gráfica y algebraicas que describen la variación en la relación de dependencia, teniendo en cuenta el dominio y rango de las mismas. En este caso la variable independiente es la longitud del segmento MF y entre las variables dependientes se encuentran las áreas y los perímetros de las figuras.
Enunciado Una cuerda de a cm de longitud se corta en dos partes. Una de ellas se dobla para formar un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equilátero.	
Actividad 16	

[24] Al igual que en la verificación gráfica, se tiene la posibilidad de verificar si la expresión obtenida representa la relación de dependencia; se selecciona la **"vista gráfica 2"** y se digita en la casilla de entrada la expresión obtenida, si la gráfica de esta expresión coincide con los respectivos puntos se verificar que la expresión es correcta.

[25] En el "Anexo 7: Generalización de la situación "polígono regular inscrito en otro con el mismo número de lados"" se desarrolla la situación para un pentágono regular; esta es una parte de los resultados presentados en una ponencia en el VI congreso de formación y modelación en ciencias básicas, realizado del 7 al 9 de mayo del 2014, en la Universidad de Medellín-Colombia.

[26] En el "Anexo 8: se presentan dos tablas en las cuales se muestra los resultados de la generalización de las expresiones algebraicas de la situación

Introducción	**Propósitos**
Se presenta una situación en la cual a partir de una cuerda (segmento) se determinan dos figuras geométricas (polígonos regulares); se cumple que la suma de las medidas de sus perímetros es igual a la medida de la longitud de la cuerda dada.	Se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del Applet identifiquen las variables, determinen las relaciones de dependencia y realicen las representaciones (y conversiones) verbales, gráfica y algebraicas que describen la variación en la relación de dependencia, teniendo en cuenta el dominio y rango de las mismas. En este caso la variable independiente es la longitud del segmento MF y entre las variables dependientes se encuentran las áreas y los perímetros de las figuras.
Enunciado Una cuerda de a cm de longitud se corta en dos partes. Una de ellas se dobla para formar un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equilátero.	

Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 15"):
   a. Realice una exploración de los elementos del Applet
   b. ¿Qué partes de la figura se pueden mover?
   c. Escriba las constantes o los parámetros de la situación
   d. Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación
   e. Determine la variable independiente y los valores que puede tomar
   f. Determine las variables dependientes y los valores que pueden tomar
2. Abordando relaciones de dependencia:
   a. ¿Qué variables encontradas en la construcción, se pueden relacionar? Y ¿Qué variables dependen de otra? Enumere cada una de ellas
3. Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella:
   a. Escriba que sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente
   b. Establezca un dibujo o un esbozo que represente la relación de dependencia escogida
   c. Encuentre una expresión algebraica que represente la variación anterior
4. Verificación:
   a. Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas
   b. Los estudiantes pueden verificar sus respuestas en el Applet, es importante que este ejercicio se realice al finalizar los anteriores
      i. Verificación de la representación gráfica obtenida con el uso del Applet[27]
      ii. Verificación de la expresión algebraica obtenida con el uso del Applet[28]
5. Resuelva las mismas preguntas anteriores para el Applet "Actividad 16"

[27] En el Applet al seleccionar la **"vista gráfica 2"** se muestra la representación gráfica de diferentes relaciones de dependencia. Esto se puede realizar en ambas actividades (15 y 16).

[28] Al seleccionar la **"vista gráfica 2"** y digitar en la casilla de entrada la expresión algebraica obtenida, se puede verificar que la expresión es correcta. Esto se puede realizar en ambas actividades (15 y 16).

Se debe destacar que en todos los Applets siguientes se puede verificar o comprobar algunos resultados en la "vista gráfica 2" en GeoGebra, es por ello, que solo se dejará expresada la indicación de "verificar los resultados".

Actividad 17: "Ventana"

Tabla 52. *Actividad 17*

Introducción

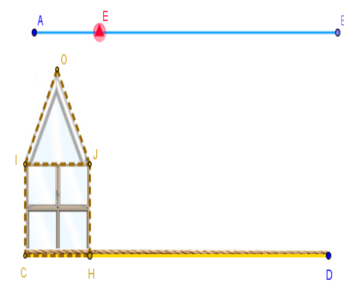
Se presenta una situación en la cual se analiza la variación de las dimensiones de una ventana, se ha dado la longitud del perímetro exterior de la misma.

Propósitos

Se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del Applet identifiquen las variables, determinen las relaciones de dependencia y realicen las representaciones (y conversiones) verbales, gráficas y algebraicas que describen la variación, teniendo en cuenta el dominio y rango de las mismas. En este caso la variable independiente es la longitud del segmento AE y entre las variables dependientes, se encuentran las áreas y los perímetros de las figuras como la del rectángulo y la del triángulo o la del pentágono completo, entre otras.

Enunciado

Una ventana inglesa tiene la forma de rectángulo coronado con un triángulo equilátero. Es necesario tener en cuenta que el perímetro de la ventana es $\boldsymbol{m}$[29].



Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 17"):
   a. Realice una exploración de los elementos del Applet
   b. ¿Qué partes de la figura se pueden mover?
   c. Escriba las constantes o los parámetros de la situación
   d. Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación
   e. Determine la variable independiente y los valores que puede tomar
   f. Determine las variables dependientes y los valores que pueden tomar
2. Abordando relaciones de dependencia:
   a. ¿Qué variables encontradas en la construcción, se pueden relacionar? Y ¿Qué variables dependen de otra? Enumere cada una de ellas
3. Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella:
   a. Escriba que sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente
   b. Establezca un dibujo o un esbozo que represente la relación de dependencia escogida
   c. Encuentre una expresión algebraica que represente la variación anterior

[29] El término perímetro hace referencia a la suma de la medida de los lados exteriores de la ventana.

4. Verificación:
   a. Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas
   b. Los estudiantes pueden verificar sus respuestas en el Applet, es importante que este ejercicio se realice al finalizar los anteriores
      i. Verificación de la representación gráfica obtenida con el uso del Applet
      ii. Verificación de la expresión algebraica obtenida con el uso del Applet

Actividad 18: "Caja sin tapa"

Tabla 53. *Actividad 18*

Introducción

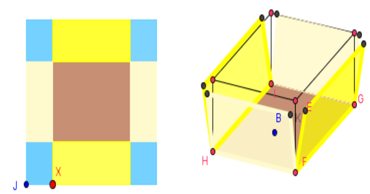
El problema de la optimización del volumen de una caja construida a partir de un pedazo de cartón es uno de los ejercicios que se presenta en un gran número de libros de texto de cálculo; así, en muchos casos se inicia la aplicación de la derivada en la resolución de problemas; ahora bien, en dicha situación se pueden abordar un buen número de relaciones de dependencia.

Propósitos

Se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del Applet identifiquen las variables, determinen las relaciones de dependencia y realicen las representaciones (y conversiones) verbales, gráficas y algebraicas que describen la variación, teniendo en cuenta el dominio y rango de las mismas. En este caso la variable independiente es la longitud del segmento JX y entre las variables dependientes se encuentran el volumen, las áreas y los perímetros de las figuras que conforman la caja.

Enunciado

Se ha de construir una caja sin tapa, a partir de un trozo rectangular de cartón con ciertas dimensiones, cortando cuadrados de igual lado en cada esquina y luego doblando hacia arriba los lados.



Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 18"):
   a. Realice una exploración de los elementos del Applet
   b. ¿Qué partes de la figura se pueden mover?
   c. Escriba las constantes o los parámetros de la situación
   d. Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación
   e. Determine la variable independiente y los valores que puede tomar
   f. Determine las variables dependientes y los valores que pueden tomar
2. Abordando relaciones de dependencia:
   a. ¿Qué variables encontradas en la construcción, se pueden relacionar? Y ¿Qué variables dependen de otra? Enumere cada una de ellas
3. Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella:
   a. Escriba que sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente
   b. Establezca un dibujo o un esbozo que represente la relación de dependencia escogida
   c. Encuentre una expresión algebraica que represente la variación anterior
4. Verificación:
   a. Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y

comparar las respuestas

b. Los estudiantes pueden verificar sus respuestas en el Applet, es importante que este ejercicio se realice al finalizar los anteriores
   i. Verificación de la representación gráfica obtenida con el uso del Applet
   ii. Verificación de la expresión algebraica obtenida con el uso del Applet

Actividad 19: "Automóvil"

Tabla 54. *Actividad 19*

Introducción

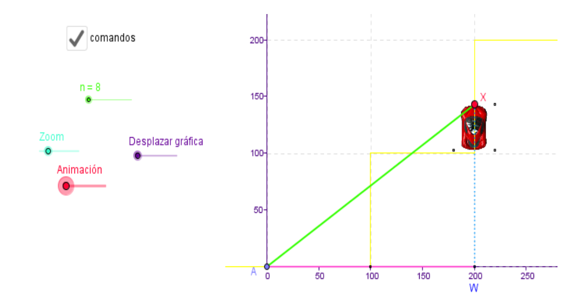
Se presenta una situación de variación particular concerniente al recorrido hecho por un móvil.

Propósitos

Se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del Applet identifiquen las variables, determinen las relaciones de dependencia y realicen las representaciones (y conversiones) verbales, gráficas y algebraicas que describen la variación en las relaciones de dependencia, teniendo en cuenta el dominio y rango de las mismas. En este caso la variable independiente es la distancia recorrida por el móvil y entre las variables dependientes se encuentran la distancia AX, la distancia AW y la distancia WX.

Enunciado

Suponga que un móvil se mueve desde un punto A hasta un punto D, este solo puede desplazarse por las vías de manera horizontal y vertical.



Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 19"):
   a. Realice una exploración de los elementos del Applet
   b. ¿Qué partes de la figura se pueden mover?
   c. Escriba las constantes o los parámetros de la situación
   d. Determine la variable independiente y establezca el dominio
   e. Determine la variable dependiente y establezca el rango
2. Abordando relaciones de dependencia[30]:
   a. ¿Qué variables encontradas en la construcción, se pueden relacionar? Y ¿Qué variables dependen de otra? Enumere cada una de ellas
3. Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella:
   a. Escriba que sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente
   b. Establezca un dibujo o un esbozo que represente la relación de dependencia escogida

---

[30] Una de las relaciones de dependencia es la siguiente; dado el punto de partida **A**, y ***X*** la posición del móvil después de recorrer cierta distancia; se establece la relación que representa la distancia Euclidiana (distancia usual) del segmento AX con relación al recorrido hecho.

   c. Encuentre una expresión algebraica que represente la variación anterior
4. Verificación:
   a. Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas
   b. Los estudiantes pueden verificar sus respuestas en el Applet, es importante que este ejercicio se realice al finalizar los anteriores
      i. Verificación de la representación gráfica obtenida con el uso del Applet
      ii. Verificación de la expresión algebraica obtenida con el uso del Applet

Actividad 20: "Rueda de Milenium"

Tabla 55. *Actividad 20*

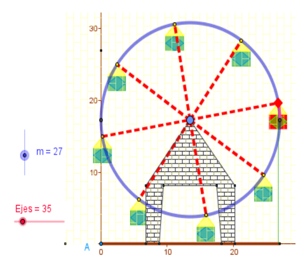
Introducción

La "Rueda Milenium" es la atracción emblema del parque de diversiones "Salitre mágico", esta es una rueda panorámica de 46 metros de altura (aproximadamente), tiene 40 góndolas y gira sobre su eje.

Propósitos

Se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del Applet identifiquen las variables, determinen las relaciones de dependencia y realicen las representaciones (y conversiones) verbales, gráficas y algebraicas que describen la variación en las relaciones de dependencia, teniendo en cuenta el dominio y rango de las mismas. En este caso la variable independiente es la longitud del arco OF y entre las variables dependientes se encuentran las alturas de ciertas partes de una de las góndolas (en particular la coordenada en y de los puntos F y F_m).

Recursos: Applets en GeoGebra, papel y lápiz

Enunciado	
Se sabe que cierta rueda de Millenium tiene una altura máxima y mínima. Suponga que la rueda da una vuelta cada "t" segundos una vez alcanza la velocidad máxima permitida por los parámetros de seguridad.	

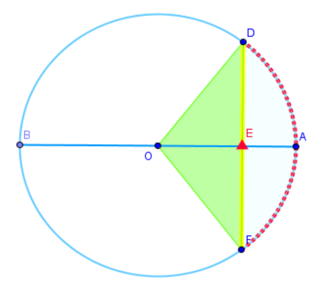
Preguntas orientadoras generales:

1. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 21"):
   a. Realice una exploración de los elementos del Applet
   b. ¿Qué partes de la figura se pueden mover?
   c. Escriba las constantes o los parámetros de la situación
   d. Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación
   e. Determine la variable independiente y los valores que puede tomar
   f. Determine las variables dependientes y los valores que pueden tomar
2. Abordando relaciones de dependencia:
   a. ¿Qué variables encontradas en la construcción, se pueden relacionar? Y ¿Qué variables dependen de otra? Enumere cada una de ellas
3. Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella:
   a. Escriba que sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente.

b. Establezca un dibujo o un esbozo que represente la relación de dependencia escogida **c.** Encuentre una expresión algebraica que represente la variación anterior **4.** Verificación: **a.** Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas **b.** Los estudiantes pueden verificar sus respuestas en el Applet, es importante que este ejercicio se realice al finalizar los anteriores i. Verificación de la representación gráfica obtenida con el uso del Applet ii. Verificación de la expresión algebraica obtenida con el uso del Applet

Actividad 21: "Segmento - arco"

Tabla 56. *Actividad 21*

<table>
<tr><td colspan="2">Introducción
Se presenta una situación en la cual se analiza la variación de diferentes magnitudes geométricas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propósitos
Se pretende que los estudiantes a partir de la exploración del Applet identifiquen las variables, determinen las relaciones de dependencia y realicen las representaciones (y conversiones) verbales, gráficas y algebraicas que describen la variación, teniendo en cuenta el dominio y rango de las mismas. En este caso la variable independiente es la longitud del segmento AE y entre las variables dependientes se encuentran las áreas, lados, arcos y perímetros de las figuras</td></tr>
<tr><td>Enunciado
Se construye una circunferencia con centro en O y radio OA; se determina el diámetro AB. Sea E un punto que se mueve en el diámetro desde A hasta B, se traza por E una perpendicular al segmento AB, y se determinan los puntos de intersección (C y D) de la recta con la circunferencia</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Preguntas orientadoras generales:
1. Actividad con el uso de tecnología (Applet "Actividad 21"):
a. Realice una exploración de los elementos del Applet
b. ¿Qué partes de la figura se pueden mover?
c. Escriba las constantes o los parámetros de la situación
d. Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación
e. Determine la variable independiente y los valores que pueden tomar
f. Determine las variables dependientes y los valores que pueden tomar
2. Abordando relaciones de dependencia:
a. ¿Qué variables encontradas en la construcción, se pueden relacionar? Y ¿Qué variables dependen de otra? Enumere cada una de ellas
3. Escoja una de las relaciones de dependencia enumeradas en el ítem anterior, a partir de ella:
a. Escriba que sucede con los valores de la variable dependiente cuando varían los valores de la variable independiente
b. Establezca un dibujo o un esbozo que represente la relación de dependencia escogida
c. Encuentre una expresión algebraica que represente la variación anterior</td></tr>
</table>

4. Verificación: **a.** Intercambie los resultados de las gráficas obtenidas en el ítem anterior con los compañeros para verificar y comparar las respuestas **b.** Los estudiantes pueden verificar sus respuestas en el Applet, es importante que este ejercicio se realice al finalizar los anteriores **i.** Verificación de la representación gráfica obtenida con el uso del Applet **ii.** Verificación de la expresión algebraica obtenida con el uso del Applet

5.2.5. Situaciones complementarias

En las actividades previas se realizó un estudio de las variables, constantes y parámetros; en las actividades complementarias, el interés es direccionar el trabajo, a la obtención de diferentes relaciones de dependencia y a la búsqueda de diferentes representaciones del modelo (es importante obtener la expresión algebraica en los casos que sean posibles).

5.2.6. Otras situaciones en contextos no geométricos

En esta parte de la propuesta se plantean dos actividades en las cuales se incluye la consulta de fuentes o documentos que permitan obtener información del comportamiento o la forma como se presentan las relaciones de dependencia en situaciones de variación y cambio; se espera que al llegar a estas actividades los estudiantes ya hayan trabajado de buena forma con el concepto de función.

Actividad 22: "Problema del crecimiento de la población de una colmena de abejas[31]

Tabla 57. *Actividad 22*

Introducción La búsqueda de modelos matemáticos que permitan comprender profundamente una situación ha sido uno de los intereses de investigadores de distintas disciplinas, es decir que cuando se trabaja un problema ligado a la realidad, se hace necesario entenderlo en diferentes niveles para facilitar la toma de decisiones frente a los objetos estudiados. En ese sentido, se presenta una situación que se podría vincular a la Biología, esta está relacionada con el crecimiento de la población de una colmena de abejas.
Propósitos: Se busca que los estudiantes realicen en primera instancia la consulta de diferentes textos o páginas de internet de las cuales puedan obtener información que les permitan determinar las variables, las constantes, los parámetro (si los hay) y demás datos para construir un modelo que represente la relación de dependencia planteada; se privilegia en esta actividad el uso de las distintas representaciones de la función y la conversión entre las mismas.

[31] Actividad basada en Bassanezi & Biembengut (1997)

Recursos: Los recursos a utilizar son libros de biología o páginas web que expliquen las maneras como crece la población de una colmena de abejas.
Enunciado Las abejas se agrupan en colmenas formadas por millares de individuos divididos en tres clases que cumplen con ciertas tareas, la abeja reina encargada de poner una cantidad de huevos por día, los zánganos encargados de aparearse con la reina en el vuelo nupcial y las obreras que entre sus múltiples tareas se encargan de alimentar a las larvas y vigilar la colmena. La abeja reina debe mantener una postura diaria significativa (poner una cantidad considerable de huevos por día) para que no se promueva el desarrollo de una nueva reina. Cuando se disminuye la postura, la nueva reina tiene su vuelo nupcial, de tal forma que al regresar a la colmena desaloja a la antigua reina, la cual parte con un séquito aproximado de 10000 abejas obreras para formar una nueva colmena.
Preguntas orientadoras generales: **1.** Actividades de carácter previo: Consultar en diferentes fuentes y contestar las siguientes preguntas: **a.** ¿Cuál es el promedio de vida de una abeja reina? ¿Cuántos huevos pone en promedio diariamente la abeja reina? **b.** ¿Cuánto tarda en nacer una abeja obrera? **c.** ¿Cuál es el promedio de vida de una abeja obrera? **d.** ¿Con cuánta población se estabiliza la colmena de abejas? **2.** Actividades de desarrollo: **a.** Determine las variables involucradas en el crecimiento de la población de la colmena de abejas. **b.** Establezca la relación de dependencia encontrada. **c.** A partir de la información obtenida en las actividades de carácter previo plantee las hipótesis para obtener el modelo de la situación. **d.** Construya el modelo (una función) que muestre la manera como crece la población de la colmena de abejas planteada. Tener en cuenta los datos obtenidos en las actividades de carácter previo y las hipótesis establecidas en el ítem anterior. **e.** Represente el modelo de diferentes maneras.

Actividad 23: “Planes de telefonía móvil”

Tabla 58. *Actividad 23*

Introducción En Colombia existen varios operadores de telefonía móvil, cada uno de ellos le ofrece a los usuarios una serie de paquetes de servicios ya sean de prepago o pos pago para motivarlos a adquirir y consumir dichos planes durante cierto periodo de tiempo, es decir durante la duración del contrato establecido entre las partes.
Propósitos: Se busca que los estudiantes realicen la consulta de diferentes textos o páginas de internet en las cuales se pueda obtener información que les permita determinar las variables, constantes, parámetros (si los hay) y demás datos para construir un modelo que represente la relación de dependencia planteada; se privilegia en esta actividad el uso de las distintas representaciones de la función y la conversión entre las mismas.
Recursos: Los recursos a utilizar son textos de información de los operarios de telefonía móvil o páginas web que expliquen las maneras como se realizan los cobros en cada uno de los servicios ofrecidos.

Enunciado En Colombia existen varios operadores de telefonía móvil que realizan el cobro respectivo por sus servicios (llamadas, mensajes de texto, internet).
Preguntas orientadoras generales: **1.** Actividades de carácter previo: **a.** Elija uno de los siguientes operadores de telefonía móvil. **Claro __________ Movistar __________ Tigo ___________ Uff ___________** **b.** Elija alguno de los planes[32] que ofrece el operador de telefonía móvil indicando si está en: **Prepago __________ Pospago __________** **c.** A partir de los ítems anteriores conteste las preguntas: **i.** ¿Cuál es el costo mensual del plan[33]? ¿Cuántos minutos se puede hablar durante ese periodo de tiempo? **ii.** ¿Cuántos mensajes de texto se pueden enviar durante ese periodo de tiempo? ¿Cuál es la capacidad del internet? **2.** Actividades de desarrollo: **a.** Escriba las constantes o los parámetros de la situación **b.** Escriba todas las variables que se pueden establecer en la situación **c.** Determine la variable independiente y los valores que puede tomar **d.** Determine las variables dependientes y los valores que pueden tomar **3.** Abordando relaciones de dependencia: **a.** Establezca una relación de dependencia encontrada en la situación **b.** Construya el modelo (una función) que muestre la relacionan de dependencia considerada. Tener en cuenta los datos obtenidos en las actividades de carácter previo **c.** Represente el modelo de diferentes maneras

[32] Si es un plan en pospago señale el nombre del mismo, si es prepago solo diga que es un “plan prepago”

[33] Si se escogió el plan en “prepago” señale algún costo de recarga, por ejemplo “una recarga de $10000 pesos”

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se mencionan las conclusiones del trabajo, referidas inicialmente a los objetivos específicos planteados, los cuales contribuyeron al alcance del objetivo general; además se mencionan algunas conclusiones y recomendaciones generales.

6.1. Conclusiones relativas a los objetivos

Para la elaboración del trabajo se planteó un objetivo general y cuatro objetivos específicos, a continuación se evalúa cada uno de estos, los cuales contribuyeron al alcance del objetivo general.

Se realizó un reporte estructurado en el cual se presentan los fundamentos teóricos necesarios para realizar la propuesta didáctica, se puede concluir que:

- Las etapas de evolución del concepto de función presentadas en el marco histórico, fueron de gran ayuda para establecer una estructura general de la propuesta didáctica, en la cual se tuvieron en cuenta las formas de representación y algunos tipos de situaciones que motivaron el estudio de la función a lo largo de la historia, se considera que esta, brinda herramientas al profesor de Matemáticas para establecer las formas de enseñar dicho concepto matemático, las cuales pueden generar mayor significado para los estudiantes.
- La modelación es un proceso que está relacionado directamente con el pensamiento variacional y que permite la realización de actividades en las cuales se pueden identificar elementos importantes del concepto de función, como las variables independiente y dependiente, las relaciones entre estas, la obtención de un modelo que se representa de manera verbal, gráfica, tabular, algebraica u otras.
- En los libros de texto consultados se encuentra que la definición más empleada para abordarlo está relacionada con la correspondencia entre conjuntos, la cual tiene un enfoque matemático que deja de lado las situaciones de variación y se considera la función, como algo estático.

En cuanto a la elaboración del instrumento para caracterizar las concepciones de los estudiantes con respecto al concepto de función, se infiere que:

- Se debe centrar la atención en los elementos que constituyen un concepto, en particular se hizo referencia a tres, las situaciones que le dan sentido al concepto, las invariantes y las representaciones, al contemplar estos elementos se pudo caracterizar las concepciones de los estudiantes.

En cuanto al objetivo referente al análisis de los resultados de la aplicación del cuestionario se infiere que:

- Es necesario consultar diferentes trabajos relacionados con la caracterización de las concepciones de la función, que permitan observar las formas como se establecen las categorías de análisis y posteriormente las maneras de analizar las respuestas.
- Los elementos referidos a la concepción "Correspondencia" son los que más emergen en las respuestas de los estudiantes; es posible que en el estudio del concepto de función se haya privilegiado en mayor medida el abordaje formal del mismo.
- Las formas como los estudiantes proponen abordar el concepto de función siguen una secuencia similar a la enseñanza tradicional del mismo, es decir, se establecen relaciones entre conjuntos, posteriormente se proponen expresiones algebraicas, luego se realizan tablas que permitan graficar la función y finalmente se concluye con aplicaciones, estas formas de enseñar el concepto dejan de lado aspectos fundamentales en la constitución del mismo, como la variación y el cambio. En ese sentido, el análisis realizado en el capítulo de Concepciones, permite establecer la necesidad de plantear actividades que se relacionen con el estudio de la función desde otras concepciones, en particular, desde la concepción relacionada con la variación y cambio.
- Las maneras como se concibe el concepto influyen en la forma como se propone abordarlo, se observa que la mayoría de los estudiantes se encuentra en la concepción "Correspondencia" y también la mayoría propone abordar elementos referidos a esta en primer lugar.
- Se distinguen las concepciones "Gráfica" y "Representaciones" porque se observó que varios estudiantes usaron solo argumentaciones referidas a la representación gráfica, además, se encuentra que al presentarse en uno de los ítems solo este registro, los estudiantes mencionan otros elementos de la función, como la continuidad, la discontinuidad, la biyectividad e inyectividad, elementos que no se mencionaron al presentarse los otros tipos de representaciones.
- Se observa que la mayoría de los estudiantes no considera la representación tabular como una representación de la función en sí misma.
- La concepción como "Relación de dependencia" surgió en muy pocas respuestas. Puede ser, que la realización de situaciones referidas a dicha concepción, no se realice en diferentes espacios académicos en los cuales se estudia la función, de tal forma que no se tiene en cuenta el potencial modelizador de las funciones, ni su importancia para desarrollar el pensamiento variacional.

- Los estudiantes se guían por la construcción geométrica, consideran que el cambio del área del cuadrado es constante porque la forma se mantiene al modificar una longitud en la construcción, por lo tanto no identifican la variación y el cambio entre las magnitudes.
- En las respuestas a las situaciones de variación, se encuentra que los estudiantes identifican correctamente qué varía pero no cómo varía, por lo tanto establecen las variables involucradas y las relaciones de dependencia pero no realizan representaciones adecuadas del mismo, se encuentran dificultades para establecer los esbozos gráficos y las expresiones algebraicas y el paso de una representación a otra.

En cuanto al uso de herramientas tecnológicas se puede decir que:

- Han adquirido gran importancia en los procesos de enseñanza aprendizaje, debido a que facilitan los procesos matemáticos que se realizan en el aula y es posible realizar actividades de visualización, animación y verificación, las cuales, en el caso de la función, conducen al uso de sus representaciones y se privilegian las conversiones entre estas.

6.2. Conclusiones generales y recomendaciones

- Se puede decir que la mayoría de los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas, a quienes se les aplicó el cuestionario, después de haber cursado diferentes espacios académicos en los cuales se estudia la función, la conciben como algo estático; les cuesta solucionar y desenvolverse en situaciones sujetas al cambio y a la variación.
- La actividades incluidas en la propuesta didáctica y en general toda la estructura, acogen diferentes elementos históricos, didácticos y matemáticos importantes para conceptualizar de manera más adecuada la función, se usan herramientas tecnológicas que facilitan procedimientos y se tienen en cuenta el pensamiento variacional, en particular, la modelación matemática. Parte de las actividades han sido presentadas en diferentes espacios académicos; tales como las Jornadas del Educador Matemático de la Universidad Pedagógica nacional y el VI Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas.
- Se debe tener en cuenta que la modelación se toma como objeto de estudio, es decir que después de terminado el proceso de modelación no interesa profundizar o tipificar un tipo de función particular (aunque también se puede hacer); se debe considerar que para obtener las expresiones algebraicas de las actividades 20 y 21, los estudiantes deben tener un manejo de las funciones trigonométricas y sus

inversas, por lo cual, el docente al aplicar las actividades debe desarrollarlas con anterioridad y establecer la pertinencia de la obtención de dichas expresiones algebraicas.

- El estudio de la historia del concepto de función, permitió vislumbrar diferentes aspectos, como las situaciones, las invariantes y las representaciones; se observa que transcurrió mucho tiempo, para desarrollar el concepto en su forma actual. No se pueden dejar de lado esos procesos en el aula, al contrario, el docente debe ser consciente de los errores y dificultades en los que los estudiantes pueden incurrir; se recomienda tener en cuenta la Historia de las Matemáticas, porque su estudio permite generar reflexión acerca del quehacer docente y contemplar aspectos que hacen parte del aprendizaje de los estudiantes y de sus concepciones.
- Se espera que con la construcción de la página web se logre establecer canales de comunicación con estudiantes y docentes que estén interesados en desarrollar este tipo de actividades en las aulas de clase; el poder aplicar la propuesta didáctica en diferentes contextos, permitirá vislumbrar los aportes de la misma en el mejoramiento de la enseñanza- aprendizaje del concepto de función.
- Se puede realizar una continuación del presente trabajo, aplicando la propuesta didáctica para verificar que esta contribuye en el aprendizaje del concepto de función y que al considerar principalmente el pensamiento variacional, se obtienen mejores resultados comparados con las formas tradicionales de enseñanza, las cuales dejan de lado su potencial modelizador y las situaciones de variación y cambio que fueron las que le dieron sentido en la historia.

BIBLIOGRAFÍA

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013). Fermi Problems Involving Big Numbers: Adapting a Model to Different Situations [Problemas Fermi con números grandes: Adaptación de un modelo a diferentes situaciones]. In B. Ubuz, H. Cigdem, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedingss of eighth congress of the European society for research in Mathematics education* (pp. 930–940). Congreso llevado a cabo en el CERME 8 [European Society for Research in Mathematics Education]. Manavgat-Side/ Antalaya Turkíye.

Ayres, F. (1989). *Serie de compendios Schaum: teoría y problemas de cálculo diferencial e integral*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Bassanezi, R., y Biembengut, S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, (32), 13–25.

Bautista, A., Wilkerson-Jerde, M., Tobin, R., y Brizuela, B. (2013). Diversity in Middle School Mathematics Teachers' Ideas about Mathematical Models: The Role of Educational Background [Diversidad en las ideas de los profesores de Matemáticas de secundaria sobre los modelos matemáticos: El papel del contexto educacional]. In B. Ubuz, H. Cigdem, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedingss of eighth congress of the European society for research in Mathematics education* (pp. 960–970). Congreso llevado a cabo en el CERME 8 [European Society for Research in Mathematics Education]. Manavgat-Side/ Antalaya Turkíye.

Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar Matemática. *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal [Redalyc]*, *16*(2), 105–125.

Biembengut, M. S., y Hein, N. (s.f.). Modelo, Modelación y Modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas. *Departamento de Matemática-CCEN*, Universidad Regional de Blumean, Brasil.

Biembengut, M., y Melo, E. (2013). Mathematical modelling in teacher education courses: style of thought in the international community - ICTMA [Modelación matemática en cursos de formación de profesores: Formas de pensamiento en la comunidad internacional]. In B. Ubuz, H. Cigdem, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedingss of eighth congress of the European society for research in Mathematics education.* (pp. 980–990). Congreso llevado a cabo en el CERME 8 [European Society for Research in Mathematics Education]. Manavgat-Side/ Antalaya Turkíye.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática* (Mártinez, Ed.). Madrid, España: Alianza Universidad Textos.

Collette, J.-P. (1985). *Historia de las matemáticas I*. (P. González, Ed.). Buenos Aires, Argentina: Siglo ventiuno editores.

Castiblanco, A. (2002). El proyecto de incorporación de Nuevas Tecnologías al currículo de Matemáticas de la Educación Media y sus avances. *Ministerio de Educación Nacional República de Colombia*, (2), 16–43.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa : una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* (tesis de maestría). Instituto Politecnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnologia Avanzada, México.

Cruz, J., y Medina, Y. (2013). Funciones en contexto. Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva. *Revista S y T*, *Colciencias*, *11*(26), 59–80.

De la Rosa, A. (2003). Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización. *Mosaicos Matemáticos*, (11), 121–133.

De prada, M. (1996). El concepto de función: dificultades en su aprendizaje. Análisis de una experiencia con estudiantes de enseñanza media. *Monografías I.E.P.S [Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas],3(20), 1-50.*

Fiallo, J., Iglesias, R., y Urbina, J. (2002). La modelación como estrategia de verificación y generalización en la solución de un problema de optimización. *Ministerio de Educación Nacional República de Colombia*, (2), 79–86.

Font, V. (2001). Reflexiones didácticas desde y para el aula. *Revista EMA*, *6*(2), 180–200.

García, L., Vázquez, R. A., y Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías*, *7*(24), 27–34.

Giraldo, *Z. (2012). Aproximación a las funciones desde la modelación de situaciones cinemáticas de física con estudiante de grado noveno de básica secundaria de la Institución Cocorná (tesis de maestría). Univer*sidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*, (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Guerrero, F., y Ortiz, J. (2012). Modelización matemática en Educación Media. Un estudio de competencias en un grupo de estudiantes. *Epsilon: Revista de Educación Matemática*, *29*(2), 27–40.

Guevara, C. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Gutiérrez, S., y Parada, D. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Guzmán, R. (2006). *Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal* (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Guerrero.

Hecklein, M., Engler, A., Vrancken, S., y Muller, D. (s.f.). Variables, funciones y cambios. exploración de las nociones que manejan los alumnos de una escuela secundaria. 23–39.

Jaimes, N. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometría analítica*. México: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1998). *El cálculo*. México: Oxford University.

López, J., y Sosa, L. (2007). *Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función* (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Yucatán.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Matemáticas. *Bogotá : Magisterio*.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, 46–95.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* (Félix Alayo, trad.). *Servicio Editorial Universidad del país Vasco*. España.

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (M. Fernández., Ed.). Sevilla : SAEM Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas*. Universidad de Valladolid.

Planchart, O. (2000). *La visualización y la Modelación en la adquisición del concepto de función* (tesis de doctorado). Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Instituto de Ciencias de la Educación, Unidad de Matemática Educativa, Cuernavaca-Morelos. México.

Protter, M. H., y Morrey, C. B. (1980). *Cálculo con geometría analítica*. (H. Pereyra y M. López, Eds.). Fondo educativo interamericano.

Rey, G., Boubée, C., Vazquez, P. S., y Cañibano, A. (2009). Ideas para Enseñar Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (20), 153–162.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2012). A Modelagem como um Ambiente de Aprendizagem para a Conversão do Conhecimento Matemático [Modelado como un ambiente de aprendizaje para la Conversión de conocimiento matemático]. *Bolema, Río Claro (SP).*, *26*(42), 261–290.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Sierpinska, A. (1992). *Sobre la comprensión de la noción de función* (C. Delgado, trad.). Washington D.C: Universidad de Concordia.

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal*. Barcelona, España: Reverté. Recuperado de http://valle.fciencias.unam.mx/licenciatura/bibliografia/spivak.pdf., consultado el 25 de julio de 2014.

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. (S. R. Cervantes y T. Eliosa, Eds.). México: Cengage Learning.

Taylor, H. E., y Wade, T. L. (1975). *Cálculo diferencial e integral*. Monterrey, México: Limusa.

Vargas, E. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Tecnologías Computacionales en el currículo de Matemáticas. Proyecto Zero, Universidad de Harvard.*, (2), 77, 68-78.

Villa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J., y Ocampo, D. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática : el caso de Alberto. *2*(2), 159–180. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/890/1/jhony.pdf, consultado el 10 de marzo de 2014.

ANEXOS

8.1. Anexo 1: Personajes y hechos históricos relacionados con el concepto de función

A continuación, se presentan algunos gráficos con el resumen de algunos hechos importantes sucedidos en la historia de la función, de acuerdo con las etapas mencionadas en el apartado “Evolución del concepto de función”.

Etapa 1: La antigüedad: hacia una búsqueda de regularidades y proporciones

En seguida se mencionan algunos aportes al concepto de función, reseñados en Boyer (1986):

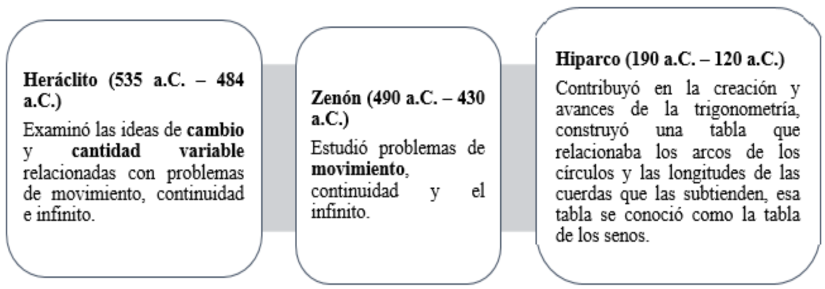


Figura 6. Evolución el concepto de función en la Edad Antigua.

ETAPA 2: Representación cinemática y geométrica de las relaciones funcionales: Edad media

En seguida se mencionan algunos aportes al concepto de función, reseñados en Boyer (1986) y Collette, (1985), así:

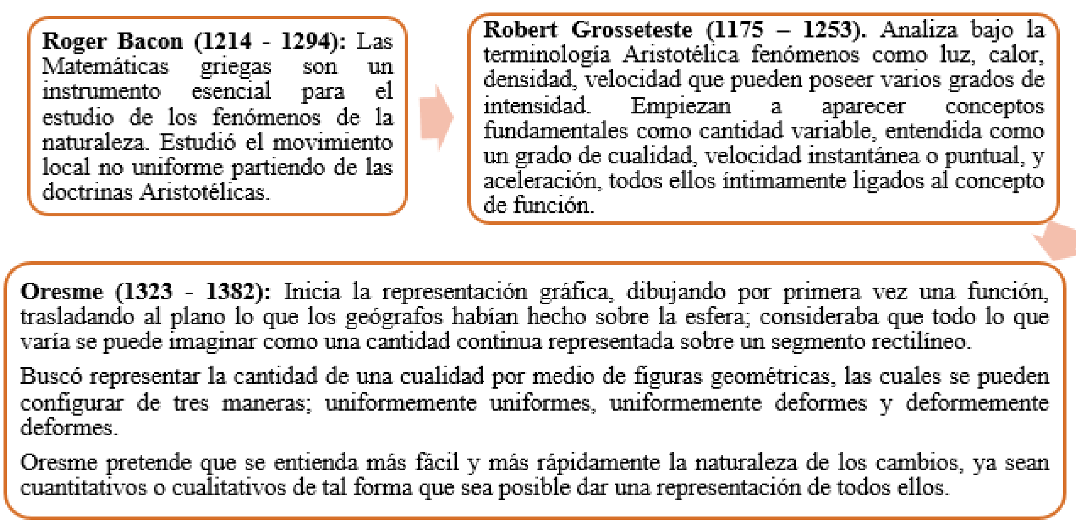


Figura 7. Evolución del concepto de función Edad Media

ETAPA 3: Siglo XV y XVI: El desarrollo de la notación algebraica

En seguida se mencionan algunos aportes al concepto de función, reseñados en Boyer (1986), Vargas (2011), Jaimes (2012) y Ruíz (1993) así:

Muller – Regiomontano (1436 – 1476).

Escribió la obra "Cinco libros sobre triángulos de cualquier tipo" en la cual la trigonometría fue separada de la astronomía y tratada como una ciencia independiente de las Matemáticas. Construyó múltiples tablas de funciones trigonométricas denominadas tangente y cotangente.

Galileo Galilei (1564 – 1642).

A través de la experimentación y la observación buscó resultados más exactos y verdaderos en sus estudios cuantitativos del movimiento (la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida); este deseo de relacionar los fenómenos contribuyó en el desarrollo de la concepción de variable dependiente.

Chuquet (1455-1488).

Contribuyó en la noción de logaritmo, estudió la correspondencia entre los términos de una sucesión aritmética y geométrica lo cual contribuyó con la idea de definir las funciones por medio de una correspondencia determinada entre variables independientes y dependientes.

Stieffel (1487-1567).

Completó la observación de Chuquet y condujo a la definición de los logaritmos. Mediante estos dos aportes se gestó la idea moderna de función definida directamente por una correspondencia determinada entre la variable dependiente y la independiente.

Napier (1550-1617). Introdujo los logaritmos por medio de la comparación de dos movimientos, con ello, se mostró la relación entre número y magnitud.

Vieté (1540-1603). Creación del álgebra simbólica.

Bombelli (1526-1572). La extensión del concepto de número al de números reales.

Figura 8. Evolución del concepto de función siglos XV y XVI

ETAPA 4: Siglo XVII: Introducción de la representación analítica

En seguida se mencionan algunos aportes al concepto de función, reseñados en Collette (1985), Boyer (1986), Sierpinska (1992) y Vargas (2011) así:

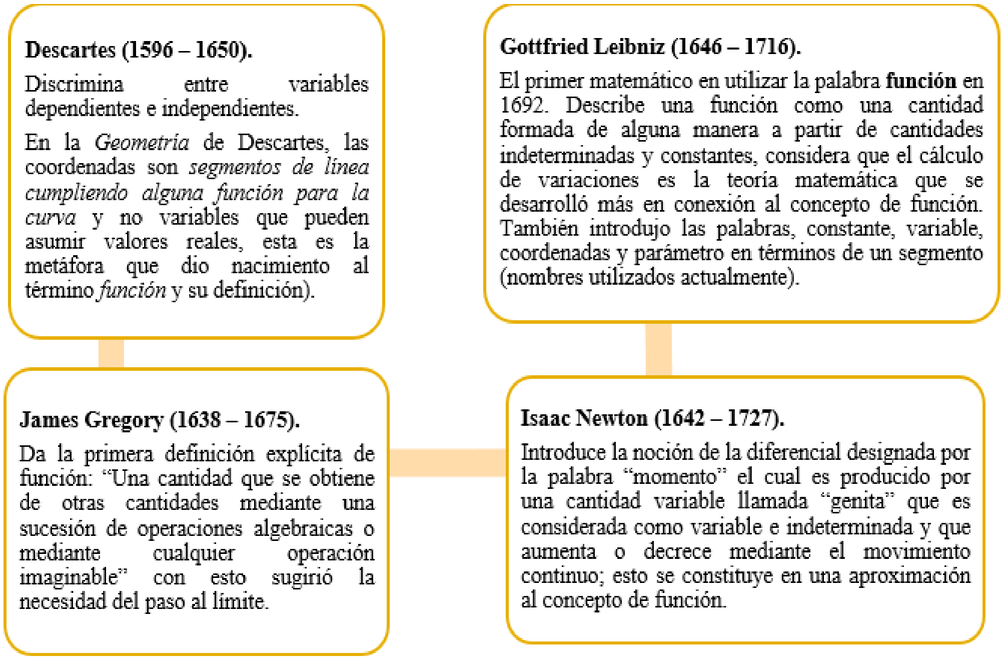


Figura 9. Evolución del concepto de función siglo XVII

ETAPA 5: Siglo XVIII: El concepto de función se considera central en las Matemáticas

En seguida se mencionan algunos aportes al concepto de función, reseñados en Collette (1985), Boyer (1986), Vargas (2011) y Ruíz (1993), así:

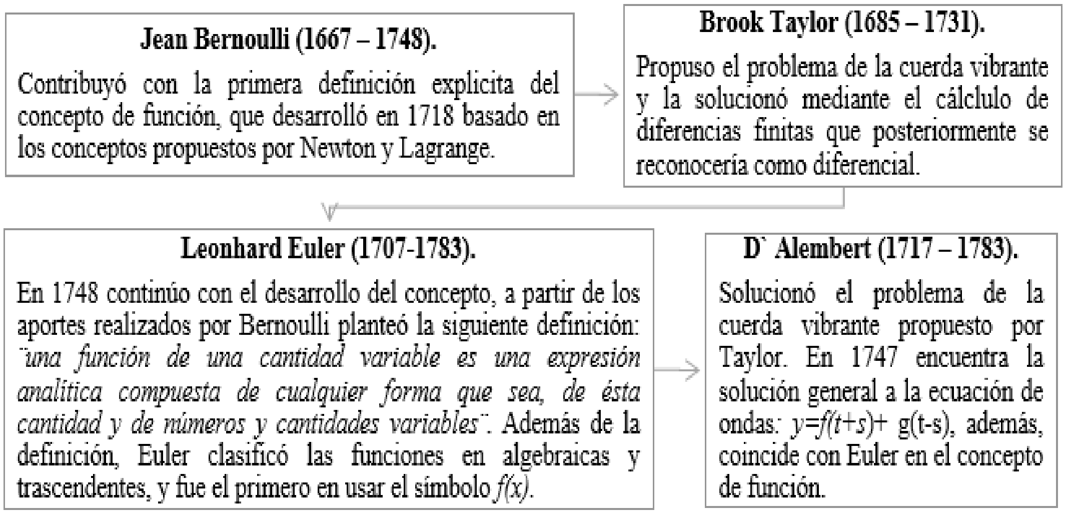


Figura 10. Evolución concepto de función siglo XVIII

ETAPA 6: Siglo XIX: La idea de correspondencia arbitraria

En seguida se mencionan algunos aportes al concepto de función, reseñados en Collette (1985), Boyer (1986), Ruiz (1993), Vargas (2011), Sierpinska (1992) y Jaimes (2012):

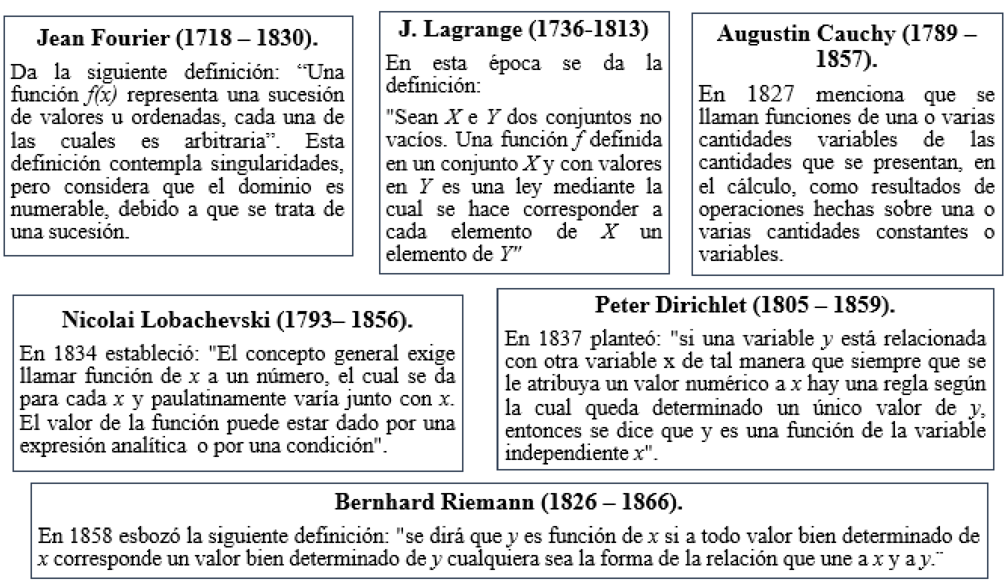


Figura 11. Evolución del concepto de función siglo XIX

ETAPA 7: Siglo XX: El concepto de función como terna

En seguida se mencionan algunos aportes al concepto de función, reseñados en Collette (1985), Vargas (2011) y Ruíz (1993):

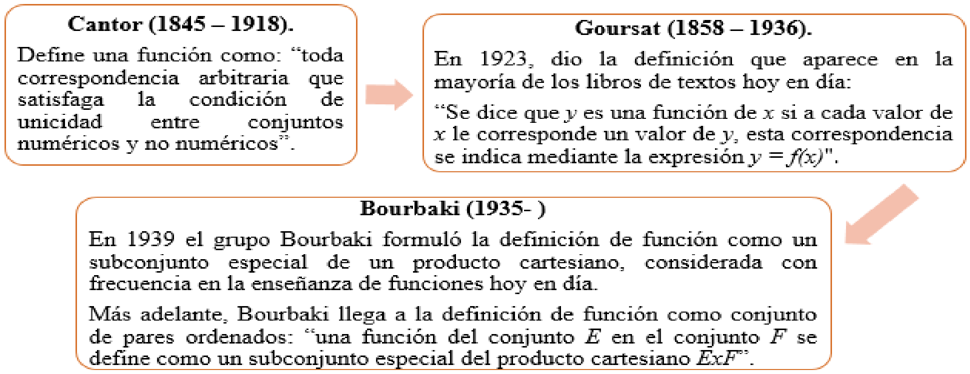


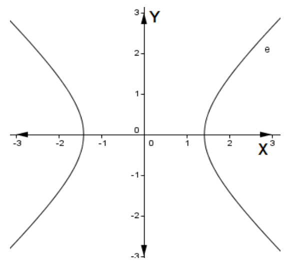
Figura 12. Evolución del concepto de función en el siglo XX.

8.2. Anexo 2: Cuestionario de aplicación

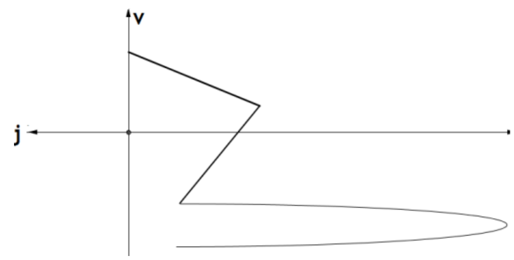
1. El concepto de función en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas aparece en grado noveno; si tuviera que enseñar este concepto para <u>iniciar su estudio</u>, ¿cómo lo haría? Mencione las actividades que realizaría en el orden en que las abordaría.

2. *Representación gráfica*: a continuación se presentan varias figuras, en cada caso determine si corresponde o no a la representación gráfica de una función. Justifique su respuesta (los valores presentados en cada gráfica <u>son los únicos</u> valores de cada variable)

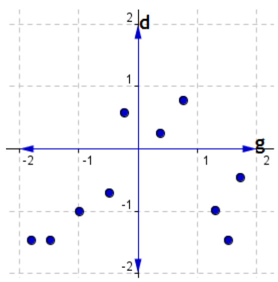
a)



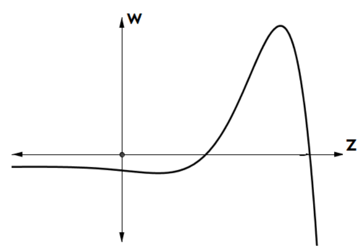
b)



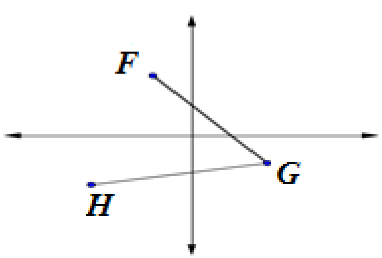
c)



d)



3. Se le preguntó a un estudiante, cómo sería la gráfica de una función que pasa por los puntos **F**, **G** y **H**, él ha dado la siguiente respuesta:



a) ¿Es correcta la respuesta que dio el estudiante? Justifique la respuesta.

b) ¿Cuántas gráficas que contengan a los puntos H, G y F se pueden construir de tal manera que corresponda a una función? Esboce un ejemplo

- **i.** Una
- **ii.** Dos
- **iii.** Entre 3 y 10
- **iv.** Infinitas

4. *Representación tabular*: incluya valores en las siguientes tablas de tal manera que se obtenga una representación tabular de función (los valores que registre en cada tabla son los únicos valores de cada variable).

T					
H					

Q					
P					

¿Qué consideración hizo para escoger los valores numéricos que se escribieron en la tabla?

5. *Representación algebraica*: determine cuáles de las siguientes expresiones representan una función, ($\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{L}$ son parámetros de valores enteros positivos, $\mathbb{Q}$ corresponde al conjunto numérico de los racionales y $\mathbb{R}$ al de los reales). Justifique su respuesta:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + 2x, & si\ x \neq 0 \\ 2, & si\ x = 0 \end{cases}$

b) $\frac{y^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2} - \frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2} = 1$

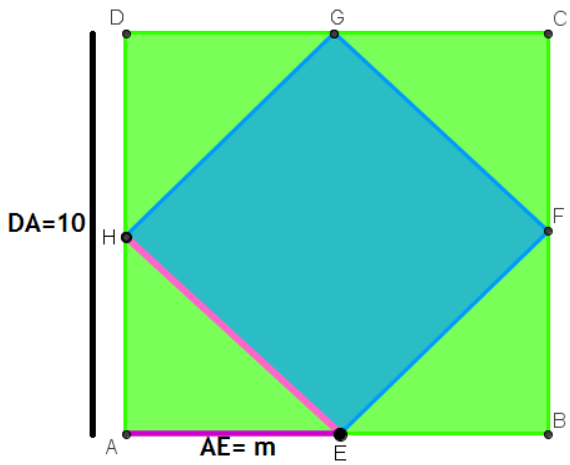
c) $\boldsymbol{f(p)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{si\ p} \in \mathbb{Q} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{si\ p} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \mathbf{2}, & \boldsymbol{si\ p} = \mathbf{10} \end{cases}$

6. En las situaciones I y II establezca la relación de dependencia que se presenta y las diferentes representaciones que se pueden obtener de esta:

Situación I: si las entradas del cine son muy baratas, los dueños pueden perder dinero; pero si las entradas son demasiado costosas, irá poca gente y también pueden perder dinero. Por lo tanto, un cine debe cobrar un precio moderado para obtener beneficio.

Situación II: En Colombia existen varios operadores de telefonía móvil que realizan el cobro respectivo de las llamadas. Suponga que se analiza el operador de telefonía Claro, considerando que se tiene un teléfono en plan prepago y que no se tiene la opción de elegidos para llamadas.

7. En la siguiente imagen se muestra la construcción de un cuadrado EFGH inscrito en otro, el área de este varía en la medida que cambia la posición del punto $\boldsymbol{E}$ a lo largo del segmento $\boldsymbol{AB}$, la longitud de lado del cuadrado ABCD es 10:



a. Determine las variables involucradas en la situación.
b. Establezca una representación gráfica de la variación del área del cuadrado inscrito.
c. Determine la expresión algebraica que representa la variación del área del cuadrado inscrito.

Sección de respuestas

1.

2.

a. Marque: Es función_______________ No es función_____________

Justificación:

b. Marque: Es función_______________ No es función_____________

Justificación:

c. Marque: Es función_______________ No es función_____________

Justificación:

d. Marque: Es función_______________ No es función_____________

Justificación:

3.

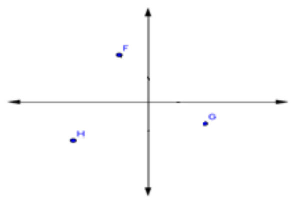
a. La respuesta del estudiante: Es correcta________ No es correcta_________

Justificación:

b. Marque**:**

i) ____ii)____ iii)____ iv)_____

ESBOZO:



4. Valores de la tablas:

T					
H					

Q					
P					

Consideración:

5.

a. Marque: Es función______________ No es función____________

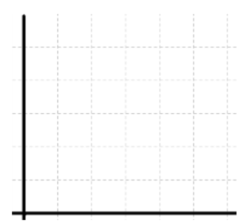
Justificación:

b. Marque: Es función_______________ No es función_____________ **Justificación:**
c. Marque: Es función_______________ No es función_____________ **Justificación:**

6.

Situación I: **Relación de dependencia:**	**Representación(es):**
ituación II: **Relación de dependencia:**	**Representación(es):**

7.

a.	**b.** 

c.

8.3. Anexo 3: Respuestas del cuestionario categorizadas

A continuación, se presentan algunas repuestas de los estudiantes de acuerdo a las categorías presentadas anteriormente,

Ítem 1 (Preguntas 1 y 2)

CATEGORÍA	**ALGUNAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES**
Correspondencia	- “Presentar la función como una relación en el que se tiene un conjunto de ‘entrada’ (dominio) y un conjunto de ‘llegada’ (codominio)” - “Primero les pondría dos conjuntos tal que haya alguna relación entre estos, le pondría conjunto X y al otro conjunto Y, por ejemplo en el conjunto X escribiría nombres de los estudiantes y en el conjunto Y el peso ¿para qué esto? Para mostrarles que a cada individuo del conjunto X le corresponde un único peso en el conjunto Y, pero que dos individuos del conjunto X sí pueden tener el mismo peso” - “Haciendo uso del tema conjuntos y pueden ilustrar de esa forma una correspondencia entre los ‘elementos’ de los conjuntos” - “Dados dos conjuntos A, B, no vacíos, uno de partida ‘A’ y otro de llegada ‘B’ decimos que una función es una relación entre dichos conjuntos de tal forma que para cada elemento del conjunto de partida ‘A’ hay un único elemento en el conjunto de llegada ‘B’ ”
Gráfica	- “Abordaría el concepto de función con el uso de gráficas. Observar gráficas y determinar por qué son funciones y por qué no” - “Inicialmente comenzaría dando a los estudiantes una serie de gráficas en donde algunas de ellas son funciones” - “Ejemplos y no ejemplos de gráficas para que intenten construir su definición”
Representaciones	- “Presentaría el concepto de función desde su representación tabular para que a partir de esta realizar la representación gráfica” - “Lo haría presentando las diferentes representaciones que puede tener una función (simbólica, tabular, gráfica, etc.)” - “Teniendo en cuenta las diferentes representaciones que tienen las funciones (gráfica, tabular, diagrama, verbal y algebraica), realizaría un taller en donde involucren estas representaciones” - “La función es un concepto matemático que se puede representar de distintas formas (verbal, tabular, gráfica y algebraica)”

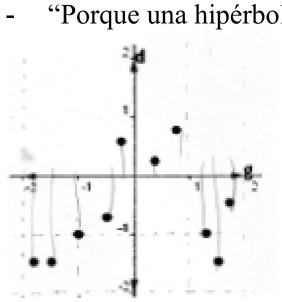
	- “Tratar la representación tabular, la representación gráfica, la representación algebraica y el paso de una transformación a otra”
Relación de dependencia	- “Comenzaría con el concepto de relación. Ejemplos de relaciones, hombre adulto-cédula, persona-no identificación, etc. Ejemplos de relación uno a uno, usados, etc. Variable dependiente e independiente” - “Utilizaría las situaciones donde sea evidente la variación de una variable respecto a otra. Un ejemplo, describir el comportamiento de la medida del lado de un rectángulo inscrito en un cuadrado a medida que uno de los vértices del rectángulo se desplaza sobre el segmento del cuadrado”

Ítem 1 (Orden de las actividades propuestas, cuestión 2)

Estudiante / Caracterización	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**
D. Sagital	2		1							3					2					
R. Conjuntos	1		2		1			1			1	1			1		3			1
Def. Variable							1										1			
R. Variables																	4			
Def. Función	3	4					3													2
DomRang							2													
Re. Gráfica		3	4	1	2	1	5	1	1	1		4	1	1		4		2	1	
Re. Tabular		2	3		2		4			2		3				3			1	
Re. Algebraica		1			2		6			5		2				2			1	
Re. Verbal										4						1				
Traducciones							7												2	
S. Aplicación	4	5								6		5					3	1		

Ítem 2 (Justificación de la respuesta)

CATEGORÍA	**ALGUNAS RESPUESTAS**
	- “Porque hay valores de *x* que tienen dos o más imágenes ” - “Existen valores en el dominio con más de una imagen en el co-dominio” - “A cada ‘punto’ del eje x le corresponden dos valores del eje de la ordenada” - “No es una función porque asigna una pareja de coordenadas más de un valor”

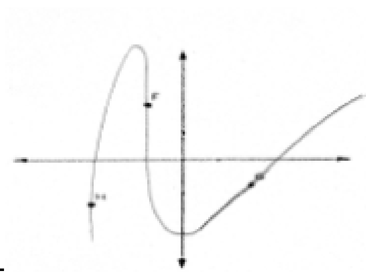
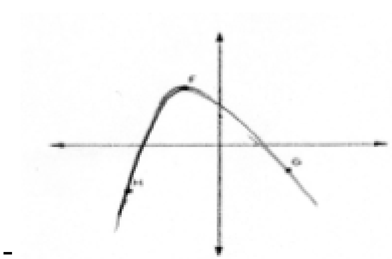
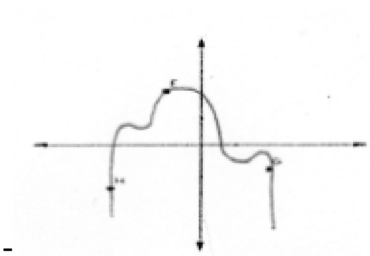
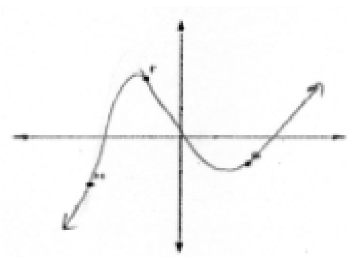
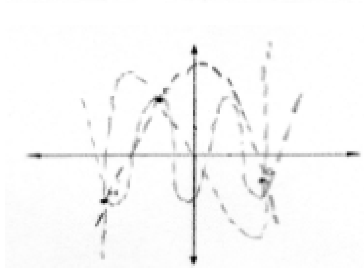
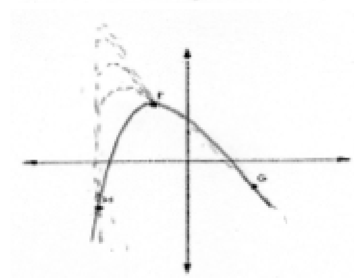
Correspondencia	- “Sí es función si toma a *v* como dominio y a *j* como codominio” **Unicidad:** En algunas repuestas se precisa la “unicidad” - “Porque no atiende a la definición de función a cada elemento de un conjunto, le asigna un único elemento de otro” - “A cada valor del dominio le corresponde una sola imagen en el codominio” - “Si es función porque para cada elemento x existe una única imagen y” - “Porque para valores en *x* hay un correspondiente valor en *y*, y es único” - “Cumple con la noción de que a cada punto del eje *x* le corresponde uno y solo uno de los puntos del eje *y*” - “Cada valor que toma g tiene una única imagen”
Gráfica	- “Tomando la ayuda gráfica si trazamos una recta paralela al eje ‘y’ y que sea conveniente, esta tocaría a dos, tres y hasta cuatro puntos en la misma función” - “Es fácil observar que no cumple el teorema de la línea recta (si al cortar una gráfica en cualquier punto, con una línea perpendicular a la horizontal, se obtienen 2 o más puntos de intersección entonces no es función)” - “Hipérbola” - “Porque una hipérbola es una cónica no una función (…)”  **Continuidad** - “Si porque la gráfica es continua lo que quiere decir que sí es función” - “Una función discontinua pero es función”
Relación de dependencia	- “*v* independiente y *j* independiente”

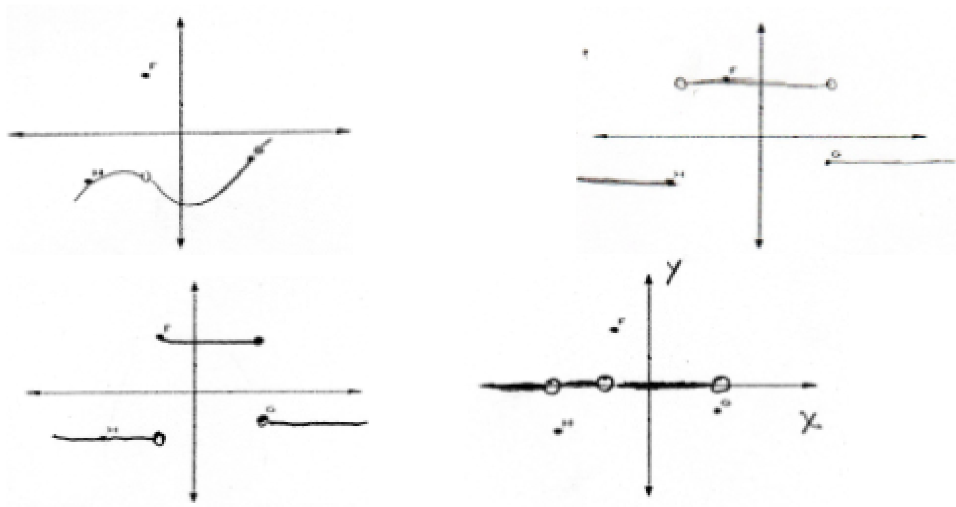
Ítem 3 (cuestión “a”)

Categoría	**ALGUNAS RESPUESTAS**
Correspondencia	- “Para algunos valores de *x*, hay dos imágenes en ‘y’ por tal motivo no sería función” - “No es función ya que a cada *x* se le asigna más de un *y*”
Gráfica	- “Ya que al trazar una recta perpendicular al eje x, se observa que a un mismo punto de las *x* le corresponde 2 de la imagen”

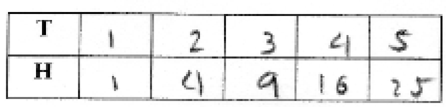
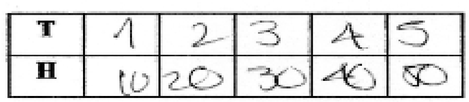
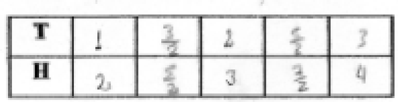
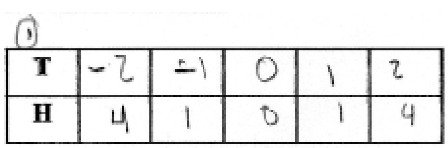
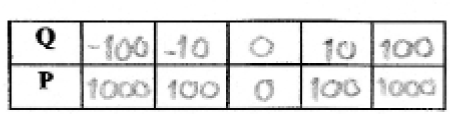
	 -

Ítem 3 (cuestión “b” esbozos)

Caracterización	ALGUNAS RESPUESTAS
Continua	 -  -  -  -  -  -

<table>
<tr><td>Discontinua</td><td>
</td></tr>
</table>

Ítem 4 (cuestión 1 y 2 completar tablas)

<table>
<tr><th>Caracterización</th><th>ALGUNAS RESPUESTAS</th></tr>
<tr><td>RegNoRep</td><td>

<table>
<tr><td>T</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>H</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>T</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>H</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>T</td><td>1</td><td>3/2</td><td>2</td><td>5/2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>H</td><td>2</td><td>5/2</td><td>3</td><td>7/2</td><td>4</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>RegRep1</td><td>

1
<table>
<tr><td>T</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>H</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Q</td><td>-100</td><td>-10</td><td>0</td><td>10</td><td>100</td></tr>
<tr><td>P</td><td>1000</td><td>100</td><td>0</td><td>100</td><td>1000</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

NoRegRep1

T	0	1	-1	2	-2
H	1	1	1	1	1

NoRegNoRep

Q	$\sqrt{2}$	3	π	5	10
P	8,4	12	20	22,4	30

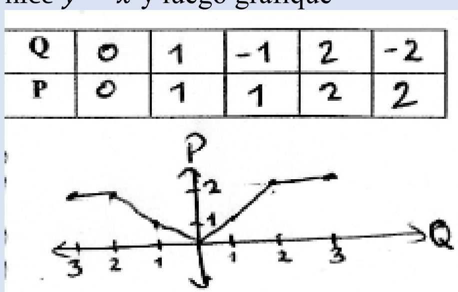
Q	-10	-3	0	3	10
P	-1000	-27	0	27	1000

NoRegRep2

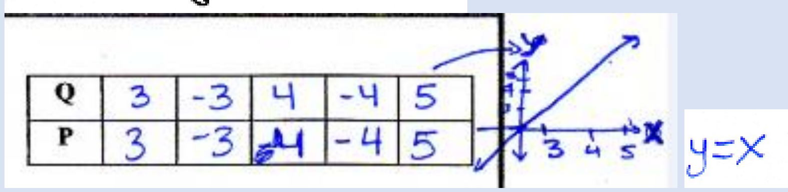
Q	1	2	3	2	0
P	3	4	1	3	4

Ítem 4 (cuestión 3 consideraciones para completar las tablas)

Nombre de la categoría	**ALGUNAS RESPUESTAS**
Correspondencia	- “Para cada T o Q hay un único H o P respectivamente” - “Que no hayan elementos del dominio con más de dos imágenes” - “Que no hubiese dos imágenes con dos pre imágenes” - “Como no sé los conjuntos, cuál es el que representa el dominio o el rango, traté de no repetir en ninguno, algún elemento correspondiente” - “En la representación tabular 1, consideré la relación de que a cada elemento del conjunto T, lo relacionaba con un elemento del conjunto H, de manera tal que lo relacionara con su doble”
Gráfica	- “Usé la gráfica del punto 2, la ‘a’ solo una de la parte de la hipérbola ” - “Que se toma a la primer fila como el eje horizontal y la segunda como la vertical”
Representaciones	- “Consideré que tomara valores en $\mathbb{R}^{+}$y en $\mathbb{R}^{-}$, que abarcaran una buena “distancia” entre valor y valor, como para que, si se gráfica, esa representación abarque valores considerables en el domino (…)” - “Que al graficar los puntos en el plano ‘cartesiano’ cumple una de las condiciones de función”

- “Pensé en una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, luego llamé a T y Q variables independientes y teniendo en cuenta esos valores y la función pensada obtuve los valores de H y P respectivamente”
- “Son las funciones que más se trabajan en el colegio” (Función cuadrática y función lineal)
- “En la primera tabla representé una función lineal la cual el dominio y el rango son $\mathbb{R}$. En la segunda realicé una función cuadrática, donde solo restrinjo los valores del dominio de tal forma que cumpla las características de función”
- “En el primer caso consideré la clásica función lineal desplazada una unidad hacia arriba. Consideré la función $f(x) = x^2 + x$”
- “Se crean expresiones algebraicas que modelen cada una de las situaciones”
- “Para la segunda hice $y = x^2$”
- “Ubiqué unos valores de la función $y = 1$ en el primer caso y en el segundo hice $y = x$ y luego grafiqué”
- 

Q	0	1	-1	2	-2
P	0	1	1	2	2

- 

Q	3	-3	4	-4	5
P	3	-3	4	-4	5

Relación de dependencia

“(…) llamé a T y Q variables independientes e hice la relación de acuerdo a una función pensada, así obtuve los valores de las variables independientes H y P respectivamente”

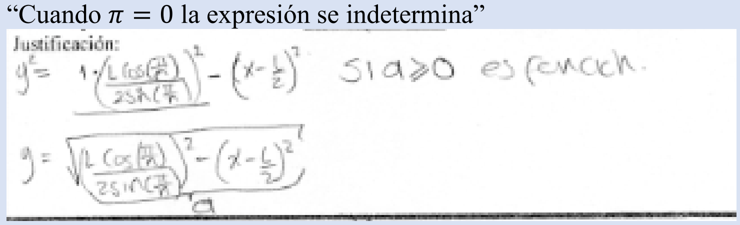
Ítem 5 (cuestiones 13 a 15)

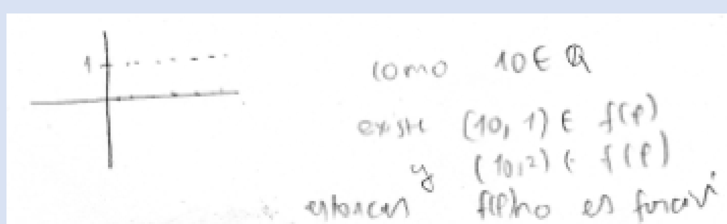
CATEGORÍA	**ALGUNAS RESPUESTAS**
Correspondencia	- “Porque a cada elemento del conjunto de entrada (dominio) está relacionado con un único elemento del conjunto de llegada” - “No sería función a $p = 10$ le corresponden 2 valores 1 y 2” - “Sí es función ya que para cada elemento de *x* existe uno y solo uno de *y*” - “Cuando *x=10* le corresponden 2 imágenes”
Gráfica	- “Es una función a trozos” - “Porque al realizar el esbozo se evidencia que es una función” - “Porque se puede determinar si es función o no” - “Al trazar una recta perpendicular a la gráfica de la expresión dada, corta en más de

un punto”

- “No estoy seguro pero creo que es una cónica, puede ser una elipse o una hipérbola, luego no sería función”
- “Creo que es una hipérbola”
- “Al graficar van a quedar huecos”
- “Pues $\frac{cos}{sen} = cot$ y pensando en la gráfica de cotangente esta tiene asíntotas entonces puede haber asíntotas”
- “Pues esta tiene una forma de una elipse”
- 
- 

Representaciones

- “Porque si tomamos $p = 10$ tenemos que $p \in Q$ entonces f(p)=1 pertenece, pero si tomamos $p = 10$ también tenemos que su imagen es *2*” “Ya que al despejar la variable dependiente (y) nos da que $y = \left|x - \frac{L}{2}\right|$ la cual es una función”
- “Porque podemos ver $\frac{cosy}{seny}$ como $cotangente\, y$ esto nos garantiza que el denominaros siempre exista”
- “Se puede despejar la variable *y* para que quede una función”
- “No se tiene como tal la notación de función, y no se sabe si es *x* en función de *y* o *y* en función de *x*”
- “Si solo tomamos la parte positiva de la raíz, es función”
- “Es una identidad”
- “Cuando $\pi = 0$ la expresión se indetermina”
- 

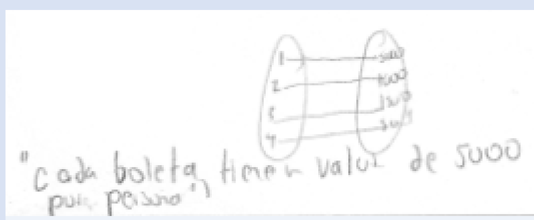
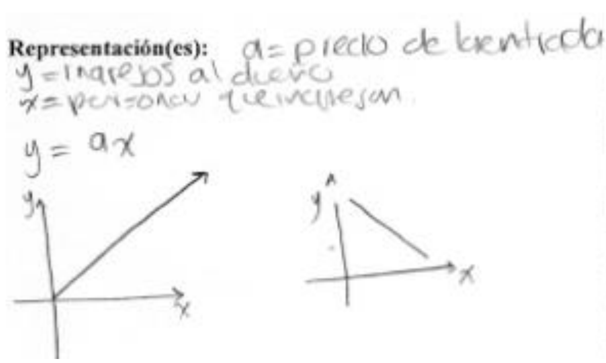
- 

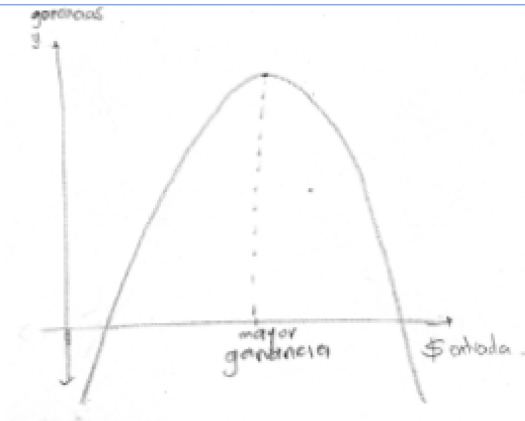
- “Yo lo veo por el lado de ser una identidad o una ecuación”
- “Porque cada valor del eje x le corresponde uno y solo uno de los valores de y”
- “Inicialmente se puede pensar que es una ecuación (si *x* o *y*) son parámetro (uno de ellos). Es una igualdad, si *x* y *y* son parámetros”
- “Si se reemplazan los valores de los parámetros *n* y *L* se podrían encontrar los valores de x o y pero esto es para una ecuación”

Ítem 6 (Relaciones de dependencia situación I)

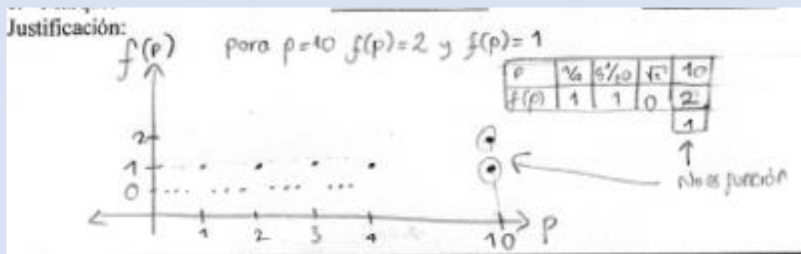
Caracterización	ALGUNAS RESPUESTAS
Personas-Costo	- “La demanda del público depende del precio de las boletas” - “Personas que ingresan al cine- costo de entrada por persona” - “La relación de dependencia, está dada pos, la cantidad de personas, que asistan al cine, y por el valor de las entradas” - “*a=precio de la boleta, b= número de gente en el cine*. La relación de dependencia es que *b* depende de *a*”
Ganancia-Costo	- “Las ganancias dependen de los precios de las entradas” - “El ganar o perder dinero depende del valor que se le dé a la entrada a cine” - “Las ganancias dependen del precio de las entradas” - “La ganancia que obtiene el cine depende de lo que cuesta la boleta” - “La ganancia depende del valor de las boletas”
No relación	- “Cantidad de gente y ganancias” - “El precio de las boletas depende las ganancias o pérdidas del dueño del cine”

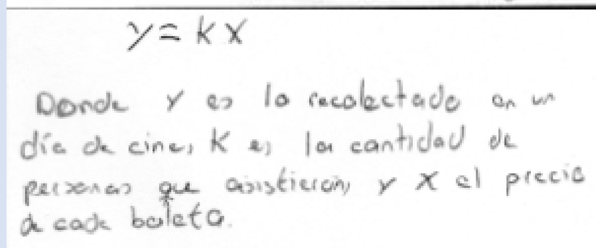
Ítem 6, (formas de representación de la relación de la situación I)

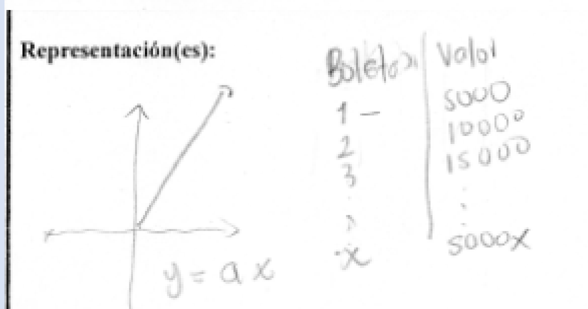
Categoría	ALGUNAS RESPUESTAS
Correspondencia	- 
Gráfica	- 

- 

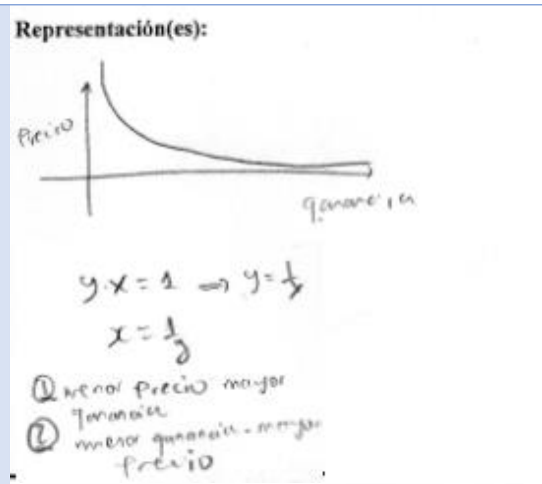
Representaciones

- 

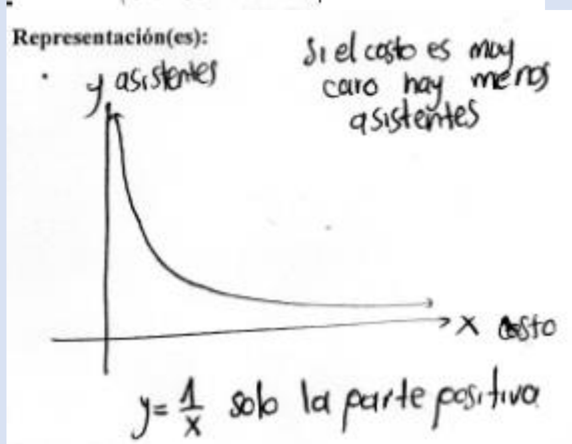
- 

- 

- 

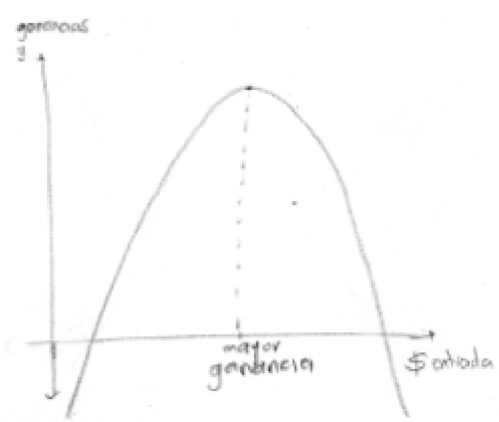


-

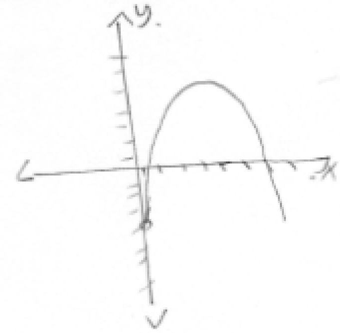


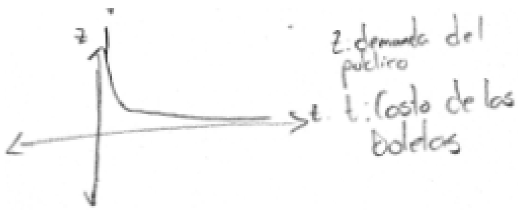
-

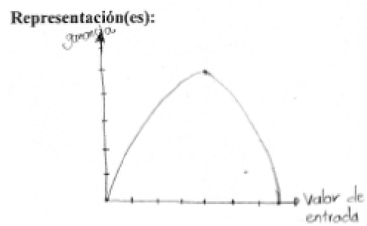
Ítem 6, esbozos realizados como representación de la situación I

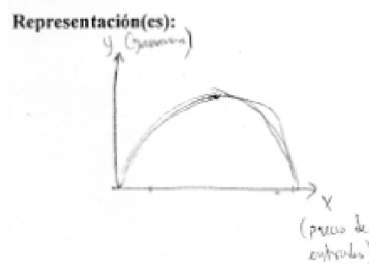
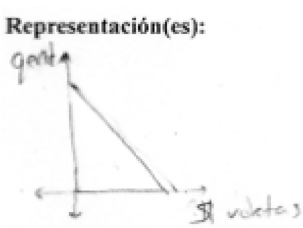
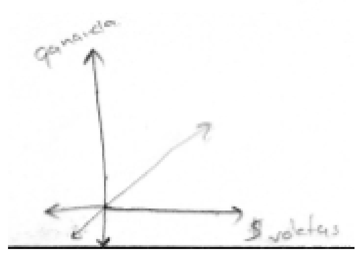
Personas-Costo	Ganancia-Costo
Correcta **Ninguna**	**Correcta** 

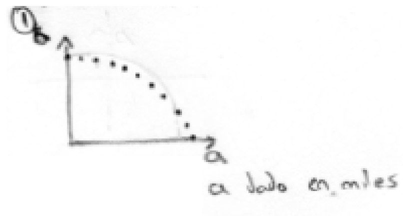
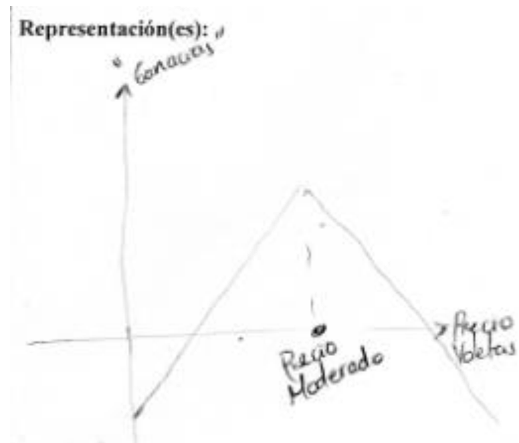
-

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

-</td>
</tr>
<tr>
<td>Hipérbola



</td>
<td>Parábola



</td>
</tr>
<tr>
<td>Recta-Afín

</td>
<td>Lineal

</td>
</tr>
</table>

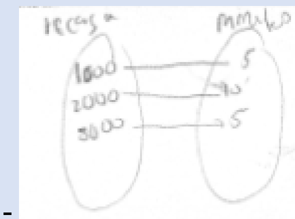
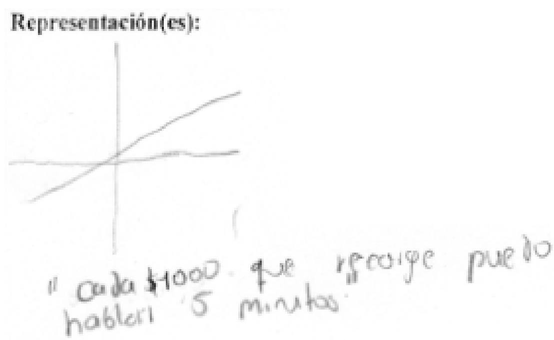
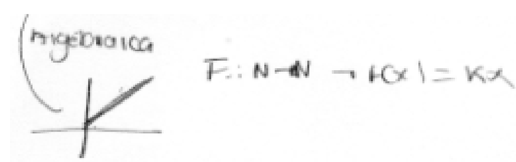
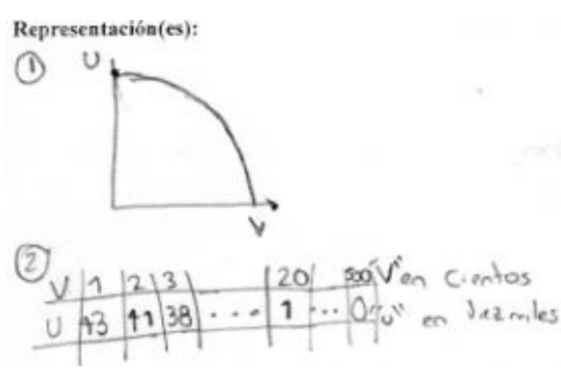
Discretas	**Otra**
	

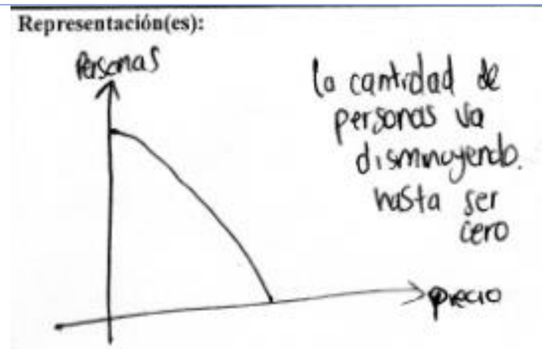
Ítem 6, relaciones de dependencia situación II

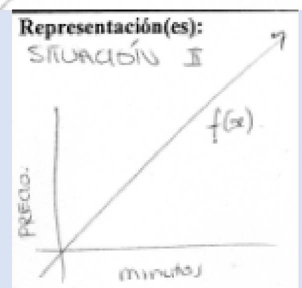
Caracterización	Descripción
Costo-Duración	- "El valor que se paga depende de los minutos que se gastan" - "Valor del minuto en prepago vs el número de minutos utilizados"
Usuarios-Valor minuto	- "La cantidad de personas depende del precio del minuto" - "v= Valor del minuto, u= número de usuarios. La relación de dependencia es que u depende de v" - "La cantidad de personas que usan el operador depende del precio de minuto"
MinutosR-MinutosU	- "La duración del saldo depende de la duración de las llamadas" - "Variable independiente son los minutos disponibles y la independiente los gastados"
Minutos-Recarga	- "Recarga-minutos"
Ganancia-Consumo	- "De acuerdo a los que ofrece el operador Claro la relación sería ganancia dependiendo de la cantidad de minutos de los clientes" - "Suponiendo que el análisis que se haga sea de las ganancias que obtiene la compañía, se podría establecer un modelo en el que las ganancias dependen del consumo de los usuarios"
No relación	- "No entiendo bien a mi manera de ver está mal redactado. Pero creo que la cantidad de minutos disponibles depende del saldo de su plan prepago "

	- "Número de llamadas del cliente se relaciona con el cobro de la llamada" - "La relación sería las recargas que hace el usuario de claro con respecto a usuarios de otras telefonías"

Ítem 6, formas de representar las relaciones de dependencia de la situación II

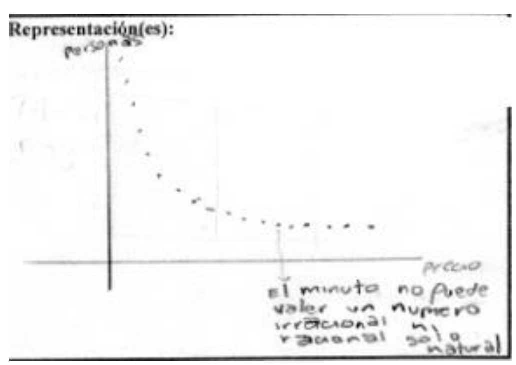
CATEGORÍA	ALGUNAS RESPUESTAS
Correspondencia	- 
Representaciones	-  -  - 

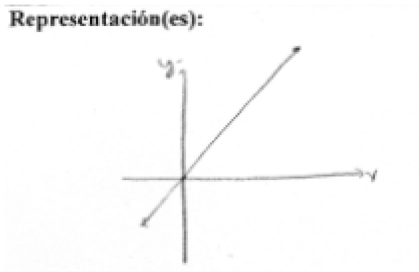
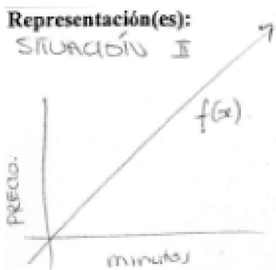
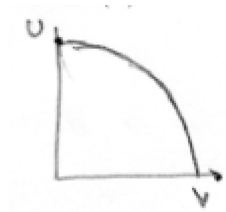
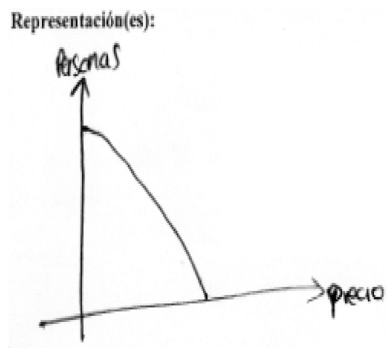
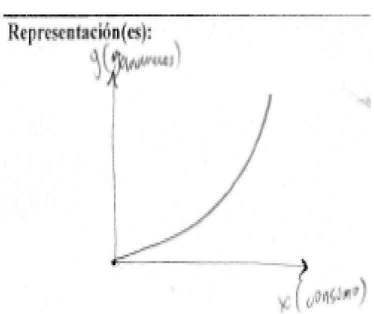
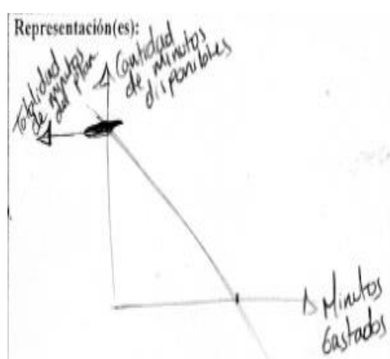
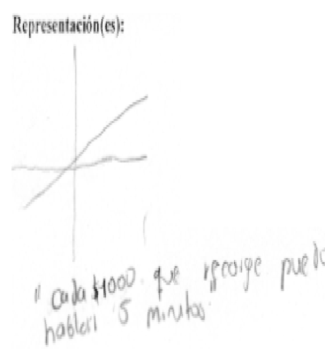
<table>
<tr><td></td><td>-

</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>-

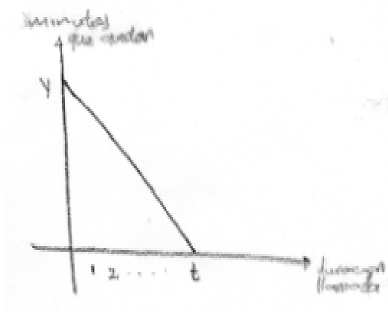
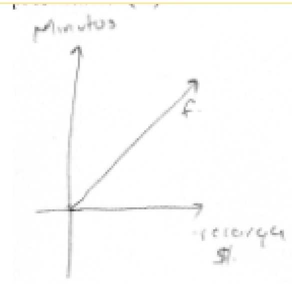

-

</td></tr>
</table>

Ítem 6, esbozos realizados como representación de la situación II

<table>
<tr><th>Costo-Duración</th><th>Usuarios-Valor minuto</th></tr>
<tr><td>Correcta

Ninguna</td><td>Correcta

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Lineal 1

</td><td>Curva 1

</td></tr>
<tr><td>Ganancia-Consumo</td><td>Saldo-MinutosU</td><td>Minutos-Recarga</td></tr>
<tr><td>Propuesta
Ninguna</td><td>Propuesta
Ninguna</td><td>Propuesta
Ninguna</td></tr>
<tr><td>Curva 2
</td><td>Recta-Afín
</td><td>Lineal 2
</td></tr>
</table>

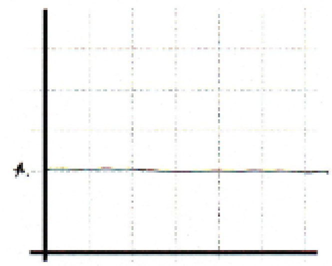
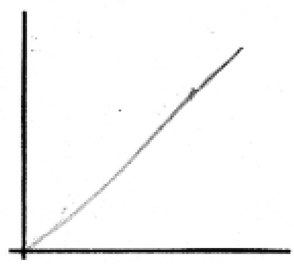
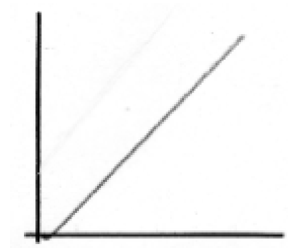
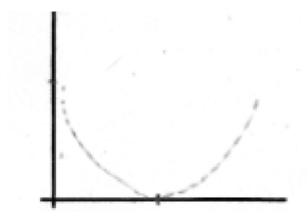
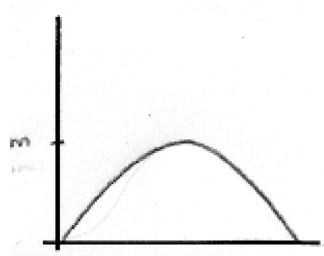
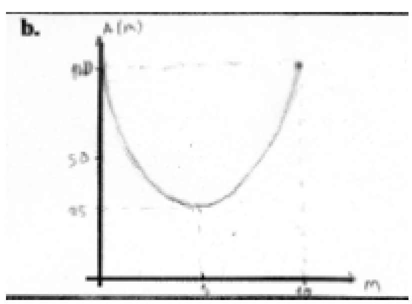
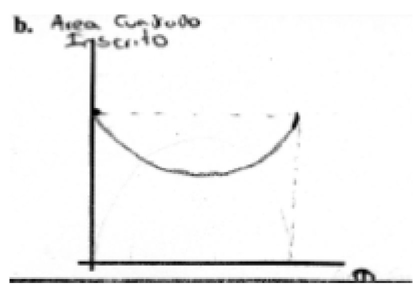
		

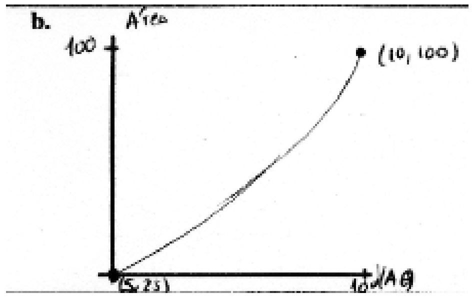
Ítem 7 cuestión "a"

Caracterización	ALGUNAS RESPUESTAS
Área	- “Área del cuadrado” - “Área cuadrado EFGH”
Longitud	- “Longitud de HE, lado $AE=m$” - “Longitud de m” - “Las variables involucradas son la medida del segmento *AE* es decir *m*” - “$AE=m$” - “La variable involucrada es *m*” - “$d\overline{AE}, d\overline{AH}$” - “La longitud del lado del cuadrado”
Puntos	- “La posición del punto *E* sobre el segmento *AB* (longitud de *m*)” - “Variables: G, F, E, H” - “A dependiente”
Perímetro	- “Perímetro” (Parece ser que se refiere al perímetro del cuadrado inscrito EFGH)
DomRang	- “El dominio y el rango”
No variables	- “Medida de la longitud del lado del cuadrado circunscrito”

Ítem 7 esbozos gráficos

Caracterización	ALGUNAS RESPUESTAS

Constante	 
Lineal	 
Parábola no correcta	 
Parábola correcta	 

Otras	

Ítem 7 cuestión "c" expresión algebraica

Caracterización	Descripción
Área cuadrado	$f(m) = l^2$ o $f(m) = x^2$ donde x es el lado del cuadrado $\begin{cases} \overline{DA} = 10 \\ l^2 = 10^2 \end{cases}$ $Area_{\square} = l^2$ porque es un cuadrado
Área constante	$\boxed{Area = 25}$ $f(m) = C$
Correcta	$\boxed{A = l^2 - 2lm + 2m^2}$ En el caso de $l = 10$ resulta la expresión correcta. $Area\ \square EFGH = (HE)^2 = 2m^2 - 20m + 100$ $HE = \sqrt{m^2 + (10-m)^2}$ $= \sqrt{m^2 + 100 - 20m + m^2}$ $= \sqrt{2m^2 - 20m + 100}$

	$z^2 = x^2+(10-x)^2$ $z = \cancel{x^2}+(100-20x+x^2$ $z = 2x^2-20x+100$
Otras	$f(x) = (x+a)^2+5.$ $c^2+m^2=h^2$ $\sqrt{c^2+m^2}=h$ $h^2=$ area $\square EFGH$ $A_{\square EFGH} = 100 - 4(\tfrac{1}{2}(10-m)^2 + m^2)^2$

8.4. Anexo 4: Applets propuesta didáctica

Se anexa un CD en el cual se ubican todos los “Applets” (en total 15) realizados en GeoGebra, organizados de acuerdo con la propuesta didáctica, además están nombrados con el número de la actividad correspondiente; se recomienda usar la versión de GeoGebra 5, que también se anexa.

Se elaboró una página web con el ánimo de que se tenga la posibilidad de acceso a las actividades diseñadas en dicho software, se recomienda ingresar al siguiente link:

http://propuestaparaabord.wix.com/abordarlafuncion

8.5. Anexo 5: Tabla identificación de magnitudes y cantidades

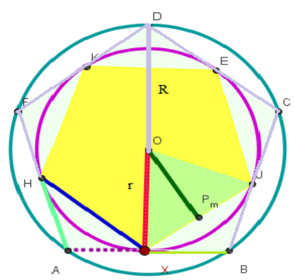
Actividad	*Magnitudes o cantidades que NO varían*	*Magnitudes o cantidades que SI varían*	*Valores que toma cada magnitud o cantidad*	*¿Los valores de la cantidad o magnitud se asignan libremente o dependen de algo?*
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

8.6. Anexo 6: Tabla identificación de variables y constantes

Situación	*Constantes*	*Parámetros*	*Variable independiente*	*Variable dependiente*
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

8.7. Anexo 7: Generalización de la situación "polígono regular inscrito en otro con el mismo número de lados"

A continuación se presentan los elementos que deben tenerse en cuenta para generalizar la situación de variación del área de un polígono regular inscrito en otro polígono regular de igual número de lados, se desarrolla el caso particular del pentágono regular, sin embargo, el mismo procedimiento permite generalizar la situación. Esta fue una actividad, parte de la ponencia titulada "Una función obtenida con GeoGebra a partir de la modelación de polígonos regulares", realizada en el VI congreso de formación y modelación en ciencias básicas, realizado del 7 al 9 de mayo del 2014, en la Universidad de Medellín-Colombia.



1. La expresión del radio (R) de la circunferencia (1) que circunscribe el polígono regular de mayor tamaño:4

Dado L la longitud del lado del polígono regular de mayor tamaño, se tiene que:

$\frac{L}{2} = R\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, al despejar R se obtiene que $R = \frac{L}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

2. Longitud de la apotema (AP_1) del polígono regular de mayor tamaño

Usando trigonometría se puede establecer que:

$AP_1 = R\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, luego al sustituir R se obtiene que:

$$AP_1 = \frac{L}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}\cot\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$AP_1 = \frac{L\cot\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}$$

3. La expresión de la variación del radio (r) de la circunferencia (2) que circunscribe el polígono regular inscrito.

Del análisis gráfico se llega a que:

$r = \sqrt{(AP_1)^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}$, al sustituir AP_1 se obtiene:

$$r = \sqrt{\left(\frac{L\cot\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{L^2\cot^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} + \frac{L^2}{4} - Lx + x^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{L^2\csc^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2}$$

4. La expresión de la variación de la apotema (AP_2) del polígono regular inscrito.

Del análisis gráfico se obtiene que:

$AP_2 = r\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, luego al sustituir r en la expresión anterior se obtiene:

$$AP_2 = \left(\sqrt{\frac{L^2\,\mathrm{Csc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$AP_2 = \left(\sqrt{\frac{L^2\,\mathrm{Csc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

5. La expresión de la variación del lado (l) del polígono regular inscrito.

Del análisis gráfico se obtiene que:

$\frac{l}{2} = r\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, luego:

$l = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$, al sustituir r en la expresión anterior se obtiene:

$$l = 2\left(\sqrt{\frac{L^2\,\mathrm{Csc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

6. La expresión de la variación del área β del polígono regular inscrito de n lados.

En vista que el área de un polígono regular inscrito se obtiene conociendo la longitud del lado, de la apotema y el número de lados, es que se obtiene:

$\beta = \frac{5\, l\, AP_2}{2}$, al sustituir la expresión de l y AP_2 se obtiene:

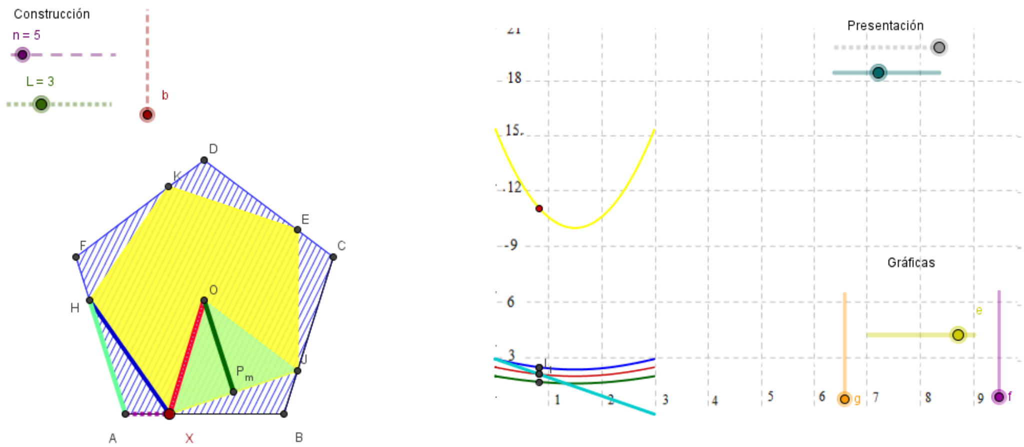
$$\beta = \frac{5 *\ 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\sqrt{\frac{L^2\,\mathrm{Csc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\sqrt{\frac{L^2\,\mathrm{Csc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2}\right)}{2}$$

$$\beta = \frac{5 *\ 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\sqrt{\frac{L^2\,\mathrm{Csc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2}\right)^2}{2}$$

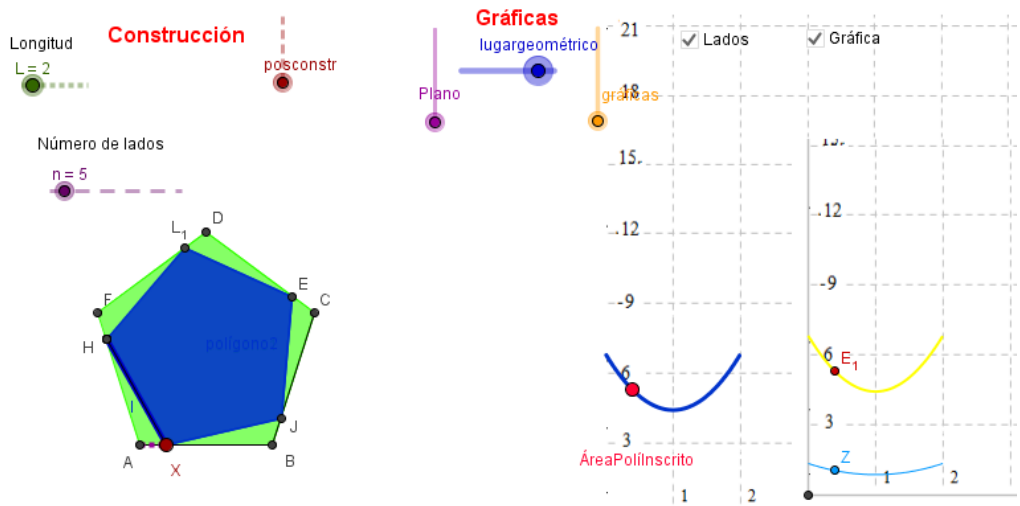
$$\beta = \frac{5 *\ 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\frac{L^2\,\mathrm{Csc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4} - Lx + x^2\right)}{2}$$

$$\beta = 5\frac{L^2}{4}Cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - 5\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}Lx + 5\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}\ x^2$$

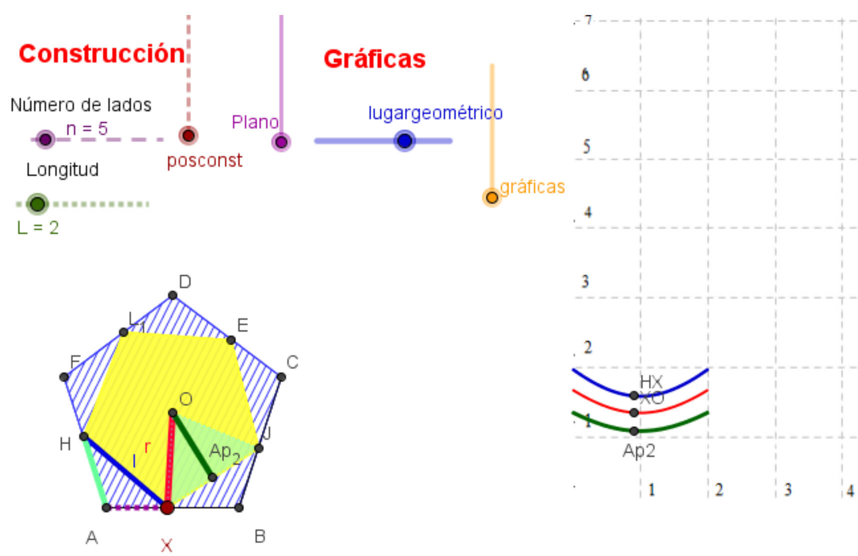
Vale la pena destacar, que con la ayuda del software GeoGebra se presentaron las gráficas de las relaciones de dependencia establecidas y después de determinar las expresiones algebraicas, estas fueron insertadas en el software para verificar los resultados. A continuación se muestran algunas ilustraciones en la que aparecen las diferentes gráficas obtenidas, en el CD del anexo 5 se ubica una carpeta aparte en la que se incluyen los Applets en GeoGebra construidos para la presentación en el Congreso, así:



Construcción
n = 5
L = 3
b
D
K
E
C
F
O
H
P
J
A
X
B
Presentación
18
15
12
9
6
3
Gráficas
e
g
f



Longitud
L = 2
Construcción
posconstr
Gráficas
lugargeométrico
Plano
gráficas
Lados
Gráfica
Número de lados
n = 5
D
E
C
F
H
I
J
A
X
B
polígono2
ÁreaPolíInscrito
Z



Construcción
Gráficas
Número de lados
n = 5
Plano
lugargeométrico
posconst
gráficas
Longitud
L = 2
D
E
C
F
O
H
r
Ap2
J
A
X
B
HX
XO
Ap2

8.8. Anexo 8: Resultados Generalización de la situación "polígono regular inscrito en otro con el mismo número de lados"

A continuación se presentan tablas en las cuales se muestran las expresiones algebraicas obtenidas para cada una de las magnitudes variables presentes en la situación de un polígono regular inscrito en otro:

"HIPÉRBOLAS [34]			
Magnitud (Color de la gráfica en el Applet)	RADIO de la circunferencia que circunscribe el polígono regular inscrito $(\boldsymbol{r})$	APOTEMA del polígono inscrito $(\boldsymbol{AP_2})$	LADO del polígono regular inscrito $(\boldsymbol{l})$
Ecuación inicial (obtenida a partir del análisis de la situación problema)	$r=\sqrt{\frac{L^2\operatorname{Csc}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4}-Lx+x^2}$	$AP_2=\left(\sqrt{\frac{L^2\operatorname{Csc}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4}-Lx+x^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$	$l=2\left(\sqrt{\frac{L^2\operatorname{Csc}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4}-Lx+x^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
Forma canónica	$\frac{y^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2}-\frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2}=1$	$\frac{y^2}{\left(\frac{L\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\,Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2}-\frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2}=1$	$\frac{y^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1}\right)^2}-\frac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{\left(\frac{L\,Cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^2}=1$

PARÁBOLAS		
Magnitud	ÁREA (a) de uno de los triángulos que conforma el polígono regular inscrito.	ÁREA $(\boldsymbol{\beta})$ del polígono regular inscrito en el otro.
Ecuación inicial (obtenida a partir del análisis de la situación problema)	$a=\frac{L^2}{4}Cot\left(\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}Lx+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}x^2$	$\beta=\frac{n}{2}\left(\frac{L^2}{2}Cot\left(\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)Lx+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)x^2\right)$
Forma canónica	$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(y-\frac{L^2}{4}\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)Cot\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)=\left(x-\frac{L}{2}\right)^2$	$\frac{1}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(y-\frac{nL^2}{4}\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)Cot\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)=\left(x-\frac{L}{2}\right)^2$

[34] En la gráfica solo aparece la parte positiva que es la que modela la situación.

8.9. Anexo 9: Expresiones algebraicas de algunas relaciones de dependencia en diferentes situaciones

A continuación se presentan algunas de las expresiones algebraicas que se pueden obtener en ciertas relaciones de dependencia, a saber:

Actividad	Relación de dependencia	Expresión algebraica	convención
Actividad 10	Variación de la cantidad de triángulos de color blanco con respecto al número de la iteración	$f(I) = 3^I$	I : número de la Iteración
Actividad 12	Variación de la longitud del tercer ángulo de un triángulo con respecto al ángulo	$f(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$	a : longitud de un lado b : longitud de otro lado α: ángulo que forman los dos lados
Actividad 13	Variación de los segmentos hipotenusas con respecto al número de la Iteración	$f(I) = \sqrt{o^2 + I}$	o : longitud del segmento inicial I : número de Iteración
Actividad 15	Variación de la suma de las áreas del cuadrado y el triángulo rectángulo con respecto a la variación de la longitud del lado del cuadrado (l)	$f(l) = l^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(L - 4l)^2$	L: longitud de la cuerda l: longitud del lado del cuadrado
Actividad 16	Variación de la suma de las áreas del cuadrado y el	$f(p) = \frac{l^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(L - p)^2$	L: longitud de la cuerda

	triángulo rectángulo con respecto a la variación del perímetro del cuadrado (p)		p: perímetro del cuadrado
Actividad 17	Variación del área de la ventana con respecto a la variación del ancho	$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}x^2 + \frac{x(m-3x)}{2}$	x: Longitud del lado del ancho de la ventana. m: longitud (constante perímetro de la ventana)
Actividad 18	Variación del volumen de la caja con respecto a la variación de uno de los lados del cuadrado que se corta en los extremos del trozo rectangular de cartón	$f(x) = 4x^3 - 2(u+v)x^2 + uvx$	u: ancho del trozo de cartón v: largo del trozo de cartón x: medida de la longitud del lado del cuadrado que se recorta en los extremos del rectángulo