CONSTRUCCIÓN Y DEDUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA MEDIANTE SERIES INFINITAS

Miguel Apolonio. Herrera Miranda, Jorge Antonio Castillo Medina, Israel Herrera Miranda, Juan Villagómez Méndez

Universidad Autónoma de Guerrero. (México)

herrerapolo@hotmail.com, jcastillo7701@gmail.com, israel_hm@hotmail.com, villagomez2008@yahoo.com.

RESUMEN: El presente trabajo se centra en la deducción de la distribución de probabilidad geométrica a través de un problema de aplicación práctica, el cual permite determinar la función de probabilidad mediante el desarrollo de series infinitas, bajo un enfoque constructivista. La estrategia de enseñanza implica la participación de los alumnos, con la guía de los profesores de tal forma que puedan ser capaces de construir algoritmos en base a problemas concretos lo que les lleva a adquirir el conocimiento de la distribución de probabilidad. En este proceso los estudiantes tienen la oportunidad de relacionar conocimientos nuevos con los conocimientos previamente aprendidos con el fin de que logren un aprendizaje significativo. Se pretende que el alumno se acerque a la comprensión de los conceptos involucrados de forma natural e inductiva. El objetivo de esta propuesta de enseñanza es fomentar en los alumnos el desarrollo de habilidades para que construyan e interpreten de manera adecuada conceptos de probabilidad.

Palabras clave: distribución geométrica, probabilidad, series infinitas

ABSTRACT: The present work focuses on the deduction of geometric probability distribution through a problem of practical application, which allows determining the probability function through the development of infinite series, under a constructivist approach. The teaching strategy involves students' participation, with the guidance of teachers in such a way that they can be able to build algorithms based on concrete problems, what leads them to acquire the knowledge of probability distribution. In this process, students can relate new knowledge to previously learned knowledge in order to achieve meaningful learning. It is intended that the student approaches the understanding of the concepts involved in a natural and inductive manner. The aim of this teaching proposal is to encourage students to develop skills to build and correctly interpret concepts of probability.

Key words: Geometric distribution, Probability, Infinite series

Introducción

Es por demás conocido por la comunidad educativa sobre los problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y en especial la Probabilidad, aunado a la repercusión que tiene en la calidad de la educación, así como la problemática social que ocasiona el bajo aprovechamiento engrosando las estadísticas de índices de reprobación y deserción de los estudiantes.

El tema propuesto nace del interés de contribuir en la enseñanza de la probabilidad de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, mediante la construcción y demostraciones de las principales funciones de distribución de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas. En específico, abordamos el tema de distribución de probabilidad geométrica, al igual presenta dificultades de significado, comprensión y aplicación por parte de los alumnos (Takeuchi, 1980)

Esta situación nos conduce a reflexionar tanto a los profesores como los alumnos para proponer acciones didácticas que permitan una mejor comprensión de estos temas, así como la aplicación y significación del objeto de estudio.

Metodología.

Partiendo de que el constructivismo surge como un enfoque compartido por investigaciones en psicológica y educación, basadas en trabajos de: Jean Piaget, Lev Vygotsky, David Ausubel y Jerome Bruner, siendo sus ideas y propuestas la base de esta teoría. Donde un componente importante del constructivismo es que la educación se enfoca en tareas auténticas. Estas tareas son las que tienen una relevancia y utilidad en el mundo real, donde la experiencia conduce a la creación de esquemas, los esquemas son modelos mentales que almacenamos en nuestras mentes. Estos esquemas van cambiando, agrandándose y volviéndose más sofisticados a través de dos procesos complementarios: la asimilación y el alojamiento (Piaget, 1955).

Así podemos decir que el constructivismo, es una teoría que intenta explicar cuál es la naturaleza del conocimiento humano asumiendo que nada viene de nada. Es decir que conocimiento previo da origen a conocimiento nuevo incorporándolo a sus experiencias anteriores y a sus propias estructuras mentales, donde el individuo construye su "propia comprensión en su propia mente (Payer, 2005).

Bajo este enfoque constructivista se busca ayudar a los estudiantes a interiorizar, reacomodar y transformar la información nueva. Esta transformación ocurre a través de la creación de nuevos aprendizajes y esto resulta del surgimiento de nuevas estructuras cognitivas" (Grennon y Brooks, 1999).

Por lo anterior consideramos que el constructivismo es el marco ideal para desarrollar este modelo, eligiendo el método de proyectos ya que permite interactuar en situaciones concretas y significativas, estimulando el saber, el saber hacer y el saber ser, es decir lo conceptual, lo procedimental y lo referente a las actitudes, donde los alumnos están en un proceso permanente de adquirir conocimientos en todos sus contextos, ya que para el constructivismo lo más importante no es el conocimiento nuevo en sí, si no adquirir nuevas competencias con él, lo que permite a los alumnos generalizar, es decir aplicar lo ya conocido a una situación nueva. En esta situación el docente es: moderador, coordinador, facilitador y mediador o también un participante más, este enfoque supone también un clima afectivo, armónico de mutua confianza, ayudando a que los estudiantes se vinculen positivamente con el conocimiento y por sobre todo con su proceso de adquisición, donde cada nueva información es asimilada y depositada en una red de conocimientos y experiencias que existen previamente en el sujeto, como resultado podemos decir que el aprendizaje, es un proceso subjetivo que cada persona va modificando constantemente a la luz de sus experiencias (Jonassen, 1991).

Planteamiento del problema y desarrollo del proyecto.

El reto principal se presentó a un grupo de alumnos del tercer semestre (agosto 20014-enero 2015) y maestros participantes de la Licenciatura en Matemáticas. Se dedicó un promedio de 5 horas semana-mes durante el semestre. Los recursos didácticos empleados dentro del aula fueron los siguientes: Pizarrón, cañón, libros, información en la red de internet, y computadora personal, programa *Mathematica.*

Se presenta un problema a los alumnos de nivel superior tomado del libro de Estadística Matemática con aplicaciones de los autores (Wackerly, Mendenhall y Scheaffer 2002).

Una agencia de alquiler que renta equipo pesado por días, se da cuenta de que un equipo costoso es arrendado, en promedio, solamente un día de cinco. Si el alquiler en un día es independiente del alquiler en cualquier otro día; encuentre la distribución de probabilidad para el número de días que hay entre dos alquileres.

Usaremos R para denotar *se renta*, y N para *no se renta*, y al mismo tiempo denotar la probabilidad de que el evento suceda, siendo P(R)= 0.2 y P(N)= 0.8 respectivamente.

(donde la variable de interés *Y* representa el número de días sin rentar entre dos alquileres)

0	1	2	…	n
RR				
NRR	RNR			
NNRR	NRNR	RNNR		
NNNRR	NNRNR	NRNNR	…	
⋮	⋮	⋮	⋮	
N..NRR	N…NRNR	N…NRNNR	…	RN…NR
$R^2\sum_{i=0}^{n} N^i$	$R^2\sum_{i=1}^{n} N^i$	$R^2\sum_{i=2}^{n} N^i$	…	R^2N^n

La última fila representa las sumas de las probabilidades de cada columna. Cabe mencionar que estas sumas se pueden reescribir como:

$$R^2\sum_{i=0}^{n} N^i - R^2 = R^2\sum_{i=1}^{n} N^i$$

$$R^2\sum_{i=0}^{n} N^i - R^2 - NR^2 = R^2\sum_{i=1}^{n} N^i - R^2N = R^2\sum_{i=2}^{n} N^i$$

$$\vdots$$

$$R^2\sum_{i=0}^{n} N^i - R^2 - R^2N - R^2N^2 - \cdots - R^2N^{n-1} = R^2\sum_{i=n-1}^{n} N^i - R^2N^{n-1} = R^2N^n \qquad (0.1)$$

Observemos en la tabla que cada entrada no vacía de la k-ésima fila tiene dos R y (k-1) letras N, además tiene exactamente k celdas no vacías. A saber:

1	2	3	…	k
RR	NRR, RNR	NNRR, NRNR, RNNR	…	$\underbrace{N\cdots N}_{(k-1)}RR, \underbrace{N\cdots N}_{(k-2)}RNR, \ldots, R\underbrace{N\cdots N}_{(k-1)}R$

Desarrollando la primera suma, substituyendo en lugar de R y N los valores de su probabilidad, respectivamente, llegamos a

$$(0.2)^2\sum_{i=0}^{n}(0.8)^i=(0.2)^2\left\{(0.8)^0+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}$$

denotando, como antes, por S la suma

$$\begin{aligned}S=\sum_{i=0}^{n}(0.8)^i&=\left\{(0.8)^0+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}\\&=\left\{1+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}\end{aligned}\qquad(0.2)$$

y la multiplicamos por 0.8, obtenemos

$$\begin{aligned}(0.8)S&=(0.8)\left\{1+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}\\&=\left\{(0.8)^1+(0.8)^2+(0.8)^3+\cdots(0.8)^n+(0.8)^{n+1}\right\}\end{aligned}\qquad(0.3)$$

Al restar (0.3) de (0.2) obtenemos

$S-(0.8)S=S(1-0.8)=1-0.8^{n+1}$,

de donde

$S=\dfrac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}$.

Hagamos un par de observaciones, n a infinito, entonces dado que $\lim_{n\to\infty}0.8^n=0$

$S=\dfrac{1}{1-0.8}=5;$

Segundo, para la primera suma,

$$\lim_{n\to\infty}R^2\sum_{i=0}^{n}N^i=0.2^2S=0.04(5)=0.2.\qquad(0.4)$$

Ahora estamos en posición de calcular para cada *Y* su probabilidad, de acuerdo a la última fila de la tabla, a (0.1) y (0.4), esta es:

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^0}\right) \\ 0.2-\left(0.2^2\right)=0.2(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^1}\right) \\ 0.2(0.8)-\left(0.2^2\right)(0.8)=0.2(0.8)(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^2}\right) \\ 0.2\left(0.8^2\right)-\left(0.2^2\right)\left(0.8^2\right)=0.2\left(0.8^2\right)(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^3}\right) \\ \vdots \\ 0.2\left(0.8^{n-1}\right)-\left(0.2^2\right)\left(0.8^{n-1}\right)=0.2\left(0.8^{n-1}\right)(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^n}\right) \end{pmatrix}$$

de donde podemos observar que: $P(y)=0.2(0.8^y)=R\left(N^y\right).$

La suma de las P(Y) debe ser igual a uno (es decir, el límite cuando $n\to\infty$ de la suma de la última fila de la tabla debe ser igual a uno) y cumplir:

$$\lim_{n\to\infty} R^2\sum_{i=0}^{n}(i+1)(N^i)=\lim_{n\to\infty}(0.2)^2\sum_{i=0}^{n}(i+1)(0.8)^i=1 \quad . \qquad (0.5)$$

Ahora bien, desarrollando (0.5), de manera general, obtenemos que:

$$R^2\sum_{i=0}^{n}(i+1)\left(N^i\right)=R^2\sum_{i=0}^{n}i\left(N^i\right)+R^2\sum_{i=0}^{n}N^i. \qquad (0.6)$$

Recordemos que: $\lim_{n\to\infty} R^2\sum_{i=0}^{n}N^i=0.2,$

y dado que $R=0.2$ entonces $(1-R)=(1-0.2)=0.8=N.$

Calculemos

$$R^2\sum_{i=0}^{n}i\left(N^i\right)=(.2)^2\left[0N^0+1N^1+2N^2+3N^3+4N^4+\cdots(n-1)N^{n-1}+nN^n\right].$$

Denotemos por W la suma

$$W=\sum_{i=0}^{n}iN^i=0N^0+1N^1+2N^2+3N^3+4N^4+\cdots(n-1)N^{n-1}+nN^n \qquad (0.7)$$

Multiplicando (0.7) por N obtenemos

$$\begin{aligned} NW &= 0N^1N^0 + 1N^1N^1 + 2N^1N^2 + \cdots(n-1)N^1N^{n-1} + nN^1N^n n \\ &= 0 + N^2 + 2N^3 + 3N^4 + 4N^5 + \cdots(n-1)N^n + nN^{n+1}. \end{aligned} \quad (0.8)$$

Restando (0.8) de (0.7) llegamos a

$$\begin{aligned} W - NW &= 0N^0 + 1N^1 + 2N^2 + 3N^3 + 4N^4 + \cdots(n-1)N^{n-1} + nN^n \\ &\quad -\left(0 + N^2 + 2N^3 + 3N^4 + 4N^5 + \cdots(n-1)N^n + nN^{n+1}\right) \\ &= N^1 + N^2 + N^3 + N^4 + N^5 + \cdots N^{n-1} + N^n - nN^{n+1} \\ &= N\left(1 + N^1 + N^2 + N^3 + N^4 + N^5 + \cdots N^{n-1} - nN^n\right). \end{aligned}$$

Recordando que la suma $S = \sum_{i=0}^{n} N^i = \dfrac{1-N^n}{1-N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S = \dfrac{1}{1-N} \quad \text{si} \quad |N| < 1,$

en el caso que estamos tratando $0 < N < 1,\ R = 1 - N,$ por lo que la condición $|N| < 1$ se cumple por defecto. De donde $WR = W(1-N) = N\sum_{i=0}^{n} N^i,$ por lo tanto, haciendo tender n a infinito, llegamos a que $W \to \dfrac{R}{1-N} = \dfrac{N}{(1-N)^2}.$ Ahora Regresando a (0.6)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{R^2\sum_{i=0}^{n} i\,N^i + R^2\sum_{i=0}^{n} N^i\right\} = R^2\left[\frac{N}{(1-N)^2} + \frac{1}{1-N}\right] = (1-N)^2\left[\frac{N+1-N}{(1-N)^2}\right] = 1. \quad (0.9)$$

Para el caso en particular que estamos tratando, sabemos que, $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} N^i = 5,$ y $N = 0.8$ donde, $W(1-N) = N\sum_{i=0}^{n} N^i,$ es calculado $W(1-0.8) = 0.8(5) \Rightarrow W = \dfrac{4}{1-0.8} = \dfrac{4}{0.2} = 20$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} 0.2^2 \sum_{i=0}^{n} i\left(0.8^i\right) = 0.04(20) = 0.8,$$

y (0.6) conduce a que: $\lim_{n\to\infty}\left\{0.2^2\sum_{i=0}^{n} i\left(0.8^i\right) + 0.2^2\sum_{i=0}^{n}\left(0.8^i\right)\right\} = 0.8 + 0.2 = 1.0$

Conclusiones

Generalizando, dado que una función de probabilidad debe satisfacer

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) = 1,$
3. Por (1.5), (1.6) y (1.9) hemos probado el siguiente teorema

Dado que: $f(X = x_i) = p\,(1-p)^{x_i} = p\, q^{x_i}$, con $x_i = 0,1,2,3,\cdots,$ y $0 < p < 1,\ q = 1-p,$ entonces: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} p\, q^i = 1.$

Ejemplos de aplicación: 1.- Un explorador de petróleo perforará una serie de pozos en cierta área para encontrar un pozo productivo La probabilidad de que tenga éxito en una prueba es 0.2 (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pozo productivo sea el tercer pozo perforado? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el explorador no vaya a encontrar un pozo productivo si solamente puede perforar a lo más 10 pozos?

(a) $P(Y) = q^{y-1}\, p = (.8)^2\, (0.2) = 0.12800000000000003$

(b) $P(Y) = q^y = (0.8)^{10} = 0.10737418240000011$

Ejemplo 2.- Al contestar una pregunta con respecto a un tema controversial como ¿“alguna vez ha fumado mariguana"?, muchas veces la gente no quiere contestar Afirmativamente, obtenga la distribución de probabilidad para Y, el número de personas que se necesitaría entrevistar hasta obtener una sola respuesta afirmativa, sabiendo que el 80% de la población contestaría verídicamente "no" a la pregunta y que del 20 % que deberían de contestar verídicamente "sí", un 70 % miente.

Tenemos que el 80 % contestaría verídicamente "no" y del 20 % que debería de contestar verídicamente "si" un 70% de los 20 miente cuando dice "si" o sea que 14 de los 20 debería de contestar no verídicamente por lo tanto los sumamos: 80+14=94 % NO y 6 % Si. Por lo tanto, la distribución de probabilidad es:

y	1	2	3	...	n − 1	n
p (y)	$(0.94)^{1-1}$ (0.06)	$(0.94)^{2-1}$ (0.06)	$(0.94)^{3-1}$ (0.06)	...	$(0.94)^{n-1-1}$ (0.06)	$(0.94)^{n-1}$ (0.06)

y	p (y)	
1	$(0.94)^0$ (0.06)	0.06
2	$(0.94)^1$ (0.06)	0.0564
3	$(0.94)^2$ (0.06)	0.053016
.	.	
.	.	
n − 1	$(0.94)^{n-2}$ (0.06)	
n	$(0.94)^{n-1}$ (0.06)	

$P(Y) = (0.06)\ (0.94)^{Y-1}$, $Y = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

Ejemplo 3.-Dado que ya se ha lanzado una moneda normal 10 veces, y se han obtenido cero caras, ¿cuál es la probabilidad de que se tenga que lanzar al menos dos veces más para obtener la primera cara. Resultado:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\frac{1}{2} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5$$

nota: Ya sucedió que cayeron 10 cruz, no afecta a lo que suceda después y que se tenga que lanzar al menos dos veces más implica que el primer lanzamiento tiene que ser cruz y el segundo cara

Conclusiones

La complejidad del problema requirió el entendimiento claro de lo que se persigue, para lo cual fue preciso someterlo a discusión con los alumnos, orientados por el maestro. El análisis guiado permitió bosquejar y poner en contexto el problema, identificando las expresiones algorítmicas a utilizar para poder demostrar que la aplicación planteada era una distribución de probabilidad.

Al final los alumnos, con ayuda de los profesores participantes, fueron construyendo las expresiones algorítmicas que fundamentan esta distribución de probabilidad. Donde los estudiantes relacionan los conocimientos nuevos con los anteriores con el fin de que logren un aprendizaje significativo que comprenda: Significatividad lógica material (secuencia lógica de conceptos), Significatividad psicológica del material (conexión de nuevos conocimientos con anteriores), Acomodación (ubicarlos en sus estructuras cognitivas).

Referencias bibliográficas

Brooks, M., & Grennon Brooks, J. (1999). The courage to be constructivist. *Educational Leadership, 57*(3), 18-24.

Casella, G. (2002). *Statistical inference*. México: Thomson Learning.

Hogg R. & Craig A. (1995). *Introduction to mathematical statistics*. Englewood Cliffs, CA: Prentice Hall.

Jonassen, D. H. (1991). *Evaluating constructivistic learning*. Educational Technology.

Mood, A. M. (2001). *Introduction to the theory of statistics*. New York: MacGraw-Hill.

Payer, M. (2005) Teoría del constructivismo social de Lev Vygotsky en comparación con la teoría Jean Piaget. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación.

Piaget, J. (1985). De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Barcelona: Paidós (original publicado en 1955).

Takeuchi, Y. (1980). *Sucesiones y series*. Tomo 1 y 2. México: Limusa

Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheffer R. (1998). *Estadística matemática con aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamericano.