

## ENRIQUECIMENTO DA IMAGEM DE CONCEITO DE DERIVADA DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**Roberto Seidi Imafuku, Vera Helena Giusti de Souza, William Vieira**

IFSP/UNIAN.(Brasil), IME-USP.(Brasil), IFSP/UNIAN.(Brasil),  
robertoseidi@yahoo.com.br, verahgsouza@gmail.com,

**RESUMO:** Apresenta-se um recorte de uma pesquisa com a qual se busca investigar que elementos presentes na *Imagem de Conceito* de derivada são manifestados por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática que já estudaram este conceito na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. A investigação é de caráter diagnóstico, com análise qualitativa dos dados e, a partir dos resultados obtidos, pretende-se estruturar atividades para modificar e/ou ampliar as *Imagens de Conceito* de derivada e o entendimento da relação entre os gráficos da função e de sua primeira derivada do grupo investigado.

**Palavras-chave:** derivada, imagem de conceito

**ABSTRACT:** We present a part of a research that seeks to investigate which elements present in the image of the concept of derivative are shown by students of a degree course in Mathematics who have studied this concept in the discipline Differential and Integral Calculus. The investigation is of a diagnostic nature, with qualitative analysis of the data from the obtained results. It is intended to structure activities to modify and / or extend the images of the concept of derivative and the understanding of the relationship between the graphs of the function and its first derivative of the investigated group.

**Key words:** Derivative, Image of the concept

## ■ Introdução

O trabalho aqui apresentado é um estudo diagnóstico que faz parte de uma pesquisa sobre a aprendizagem do conceito de derivada para estudantes de Licenciatura em Matemática. Decidimos desenvolver esse estudo, pois, além das aplicações dentro da própria Matemática, a noção de derivada também é amplamente utilizada em outras áreas do conhecimento, como na Física, quando se estuda a velocidade e a aceleração de uma partícula ao longo do tempo ou se esboça trajetórias de partículas; nas Engenharias, no estudo de problemas de máximo ou mínimo e de taxas relacionadas; nas Ciências Médicas e Biológicas, ao analisar o crescimento de um tumor, a pressão sanguínea, a propagação de uma epidemia.

Nosso foco está em estudantes de Licenciatura em Matemática, pois estes farão parte dos processos de ensino, de aprendizagem e de formação de futuros profissionais das áreas destacadas. De acordo com Bisognin, E. e Bisognin, V. (2011), entendemos que

o conceito de derivada é fundamental na Matemática e sua compreensão tem implicações na resolução de problemas em níveis avançados. Assim, o conhecimento que os alunos têm sobre a derivada e a exploração de suas múltiplas representações, com ênfase nas conexões entre os aspectos analíticos e gráficos, precisam ser discutidos em profundidade em cursos de formação inicial e continuada de professores e, também, nos demais cursos de graduação das áreas de ciências exatas e tecnológicas, nas disciplinas de Cálculo (Bisognin & Bisognin, 2011, p. 525).

Uma inquietação, que também nos motivou a realizar essa pesquisa, surgiu quando tivemos contato com o texto de Thurston (1994), em que o autor apresenta sete concepções de derivada: infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, taxa, aproximação e microscópica, o que nos deixou com uma preocupação em relação ao significado que os estudantes atribuem às derivadas, pois em nossa prática como professor de Cálculo, constatamos que grande parte deles simplesmente aplica as “regras de derivação”. Também nos inquietou uma discussão que tivemos sobre a relação entre o gráfico da função e o de sua respectiva derivada uma vez que, em nossa prática, não dávamos atenção a isso e utilizávamos a derivada apenas como uma ferramenta para resolver problemas.

Entendemos que o uso das TIC pode nos auxiliar na busca de respostas para nossas inquietações, por isso decidimos incluí-las na pesquisa. Para orientar a elaboração de nossos instrumentos e a análise dos dados, nos apoiamos nas ideias de Tall e Vinner (1981) de Imagem de Conceito e Definição de Conceito e nas concepções de derivada de Thurston (1994). Nossos objetivos são: enriquecer e/ou modificar as Imagens de Conceito de derivada e a da relação entre o gráfico de uma função de uma variável real e o de sua derivada, de estudantes do Ensino Superior, que já estudaram estes conceitos e ideias.

## ■ Imagem de Conceito e Definição de Conceito

As ideias de Imagem de Conceito e de Definição de Conceito foram desenvolvidas por David Tall e Shlomo Vinner em 1981. Segundo eles, devemos distinguir entre os conceitos matemáticos definidos formalmente e os processos cognitivos pelos quais estes são desenvolvidos (Tall & Vinner, 1981), o que significa que a abordagem de um novo conceito não deve se dar apenas por sua definição formal, mas também possibilitar seu reconhecimento em situações reais e sua utilização em contextos apropriados. Esse processo requer um conjunto de ideias sobre esse novo conceito, para que se possa formar a Imagem de Conceito, que estes pesquisadores definem como

a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (Tall & Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa).

Vinner (1992) diz que “a Imagem de Conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito” (p.68). Para ele, a Imagem de Conceito pode ser composta por uma representação visual do conceito, caso este tenha representações visuais; pode ser também um conjunto de impressões ou experiências adquiridas pelo sujeito.

Esse conjunto de imagens mentais, representações visuais, impressões e experiências associadas ao nome do conceito, segundo Vinner (1992), pode ser traduzido pelo sujeito em formas verbais, o que permite a comunicação, a representação e a manipulação dos objetos matemáticos.

A imagem de conceito de derivada de um indivíduo, por exemplo, pode ter elementos como formas de representação (algébrica, gráfica, tabelas), propriedades (derivada da soma, derivada do produto) e elementos da definição (limite da razão incremental).

Segundo Tall e Vinner (1981), a Imagem de Conceito não precisa ser coerente o tempo todo pois, dependendo do estímulo que é dado, um indivíduo pode ativar diferentes partes dessa Imagem, desenvolvendo-a de forma a não constituir um todo coerente. Por exemplo, no estudo das funções, os alunos podem ter na Imagem de Conceito apenas a associação de um número real do domínio a um número real do contra domínio e, ao estudarem sequências numéricas, podem não relacioná-las com a ideia de função.

Quando passam a trabalhar com as derivadas das funções reais de variável real, os estudantes têm na Imagem de Conceito de derivada, em geral, a concepção de derivada como a inclinação da reta tangente e a concepção simbólica (regras de derivação), mas muitas vezes não estabelecem relação entre elas. Somente essas concepções não são suficientes para uma Imagem de Conceito de derivada suficientemente rica, o que pode dificultar a compreensão do conceito de derivada.

Quando a imagem de conceito é pobre, isto é, tem poucos elementos relacionados ao conceito, a Imagem de conceito original precisa ser enriquecida e/ou modificada. De acordo com Tall e Vinner (1981), “[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na Imagem de Conceito” (p. 152, tradução nossa).

Ao nos depararmos com uma situação em que temos que resolver um problema que envolve um conceito matemático, precisamos ativar uma parte de nossa Imagem de Conceito associada a esse objeto matemático. A essa parte ativada da Imagem de Conceito, Tall e Vinner (1981) chamam de Imagem de Conceito Evocada.

Outra ideia importante é a de Definição de Conceito, que Tall e Vinner (1981) definem como

[...] um conjunto de palavras usadas para especificar aquele conceito. Ela pode ser aprendida por um indivíduo de uma forma mecânica ou compreendida e relacionada com um maior ou menor grau com o conceito como um todo (Tall & Vinner, 1981 p.152, tradução nossa).

Podemos entender a Definição de Conceito, segundo Tall e Vinner (1981), como o conjunto de palavras que o sujeito usa para explicar sua Imagem de Conceito Evocada. A definição de conceito pode variar de tempos em tempos, isto é, pode ser reconstruída pelo estudante, por ser algo individual. Desta forma, segundo Tall e Vinner (1981) “[...] uma definição do conceito pessoal pode diferir de uma definição formal do conceito, sendo este último uma definição de conceito que é aceita pela comunidade matemática em geral” (p.152).

Tall e Vinner (1981) dizem que a Definição de Conceito é uma porção da Imagem de Conceito do sujeito e que, dependendo do sujeito, pode ser vazia ou, até mesmo, inexistente. Em outros casos, pode, ou não, estar relacionada com outras partes da Imagem de Conceito de maneira coerente.

A Definição de Conceito de derivada em um ponto, por exemplo, pode ser apenas um conjunto de palavras que foram memorizadas por um estudante, mas que não está relacionada com nenhuma outra parte da Imagem de Conceito de derivada desse sujeito.

Tendo em vista essas ideias sobre a Definição de Conceito e Imagem de Conceito, concordamos com Giraldo (2004) que afirma que

uma definição de conceito (mesmo uma que corresponda à definição formal) sem uma imagem de conceito rica poderia ser inútil; uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada pode ser traiçoeira. Uma definição de conceito inconsistente com a definição formal não é necessariamente parte de uma imagem de conceito pobre ou inconsistente; nem uma imagem de conceito pobre necessariamente inclui uma definição de conceito incorreta (Giraldo, 2004, p. 10).

Além disso, Giraldo (2004) também defende que ao se abordar um conceito matemático deve-se buscar o enriquecimento da Imagem de Conceito desenvolvida pelo estudante e não apenas a compreensão da definição formal.

Isso não quer dizer que não se deva abordar a definição formal de um conceito. Entendemos que no estudo de um conceito matemático a definição formal é parte fundamental do processo de aprendizagem, uma vez que, sem ela, o estudante pode aplicar propriedades do objeto matemático em situações inadequadas. Por exemplo, se um estudante não conhece as condições para que uma função seja derivável, pode calcular a derivada da função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt{x}$  no ponto em que  $x = 0$ , mesmo sendo essa função não derivável nesse ponto. Outro exemplo é o caso em que o aluno conhece a definição de reta tangente a uma circunferência, dada nas aulas de geometria euclidiana e não resolve uma atividade para traçar a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto por achar que a reta tangente só pode “tocar” a curva no ponto de tangência.

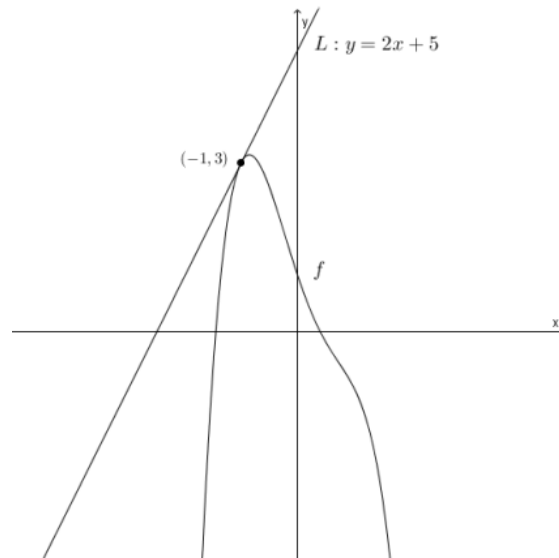
### ■ Percurso Metodológico

A coleta de dados será realizada em três fases. Na primeira, aplicamos um questionário diagnóstico sobre as concepções de derivada, baseado nas ideias de Thurston (1994). Na segunda, a partir dos resultados da primeira fase, elaboramos dois conjuntos de atividades nos quais exploramos o conceito de derivada, que serão aplicados em um ambiente informático, com auxílio dos softwares Geogebra e SimCalc. Na terceira fase, reformulamos e reaplicamos o questionário diagnóstico da primeira fase. A partir da comparação entre os resultados obtidos nas análises dos questionários, pretendemos verificar se houve, ou não, modificações e/ou ampliações na *Imagem de Conceito* (Tall & Vinner, 1981) de derivada dos participantes.

Neste artigo, apresentamos três questões que fazem parte do questionário da primeira fase de nossa investigação. A primeira questão aborda a concepção geométrica da derivada, como inclinação da reta tangente; a segunda, a relação entre os gráficos da função e o de sua primeira derivada e a terceira, a Definição de Conceito de derivada.

#### Questão 1

Suponha que a reta  $L$  é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $(-1, 3)$  como indicado na Figura 1. Determine  $f(-1)$  e  $f'(-1)$ .



**Figura 1**

Nosso objetivo, com essa questão, é verificar se o participante tem, em sua Imagem de Conceito de derivada, a concepção desta como inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto de tangência. Optamos por fornecer a equação reduzida da reta tangente, para saber se os participantes têm, na Imagem de Conceito de derivada, a ideia de que o coeficiente angular que aparece destacado na equação reduzida é o valor da derivada da função no ponto de tangência.

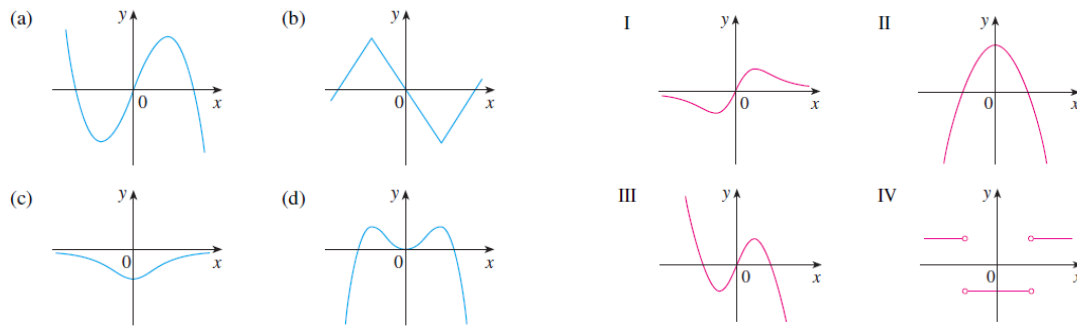
Destacamos que, para responder esta questão, é preciso que os participantes tenham, na Imagem de Conceito de reta, em Geometria Analítica, que, na equação reduzida de uma reta  $y = m \cdot x + n$ , o parâmetro  $m$  é o coeficiente angular da reta, para que possam associar esse valor à derivada, vista como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto de tangência.

### Questão 2

Associe os gráficos de função apresentados nos itens a, b, c e d (

Figura 2 **a**) com os gráficos das derivadas dessas funções, apresentados em I, II, III e IV (

Figura 2 **b**) Explique suas respostas.



**Figura 2 a**

**Figura 2 b**

Nosso objetivo, com essa questão, é verificar se o participante tem, em sua Imagem de Conceito de derivada, a relação entre o gráfico de uma função e o gráfico da primeira derivada dessa função, isto é, se consegue associar o comportamento do gráfico da primeira derivada de uma função com o gráfico da função.

Para relacionar o gráfico da função com o de sua primeira derivada, o participante precisa saber identificar onde a inclinação da derivada é positiva, negativa ou nula, para relacionar com o gráfico da derivada, que traz um comportamento segundo essas inclinações.

### Questão 3

Descreva, com suas palavras, como você define a derivada de uma função.

Nosso objetivo, com essa questão, é verificar qual a Definição de Conceito de derivada de cada participante e se utilizam alguma concepção de derivada para apresentar a definição.

### ■ Considerações finais

Em nossa prática docente, por muitas vezes, nos deparamos com situações em que estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, que já haviam estudado o conceito de derivada e as técnicas de derivação, não conseguiam resolver problemas que envolviam taxas de variação, só conseguiam resolver problemas com características simbólicas, isto é, problemas que solicitavam para calcular a derivada de algumas funções utilizando as técnicas de derivação. Fato que evidencia a prevalência de uma abordagem em que se privilegiam as técnicas de cálculo, no mundo simbólico, em detrimento do estudo com a compreensão do conceito abordado com características formais.



Entendemos que a falta de características do Mundo Formal em estudantes de um curso de formação de professores de Matemática é muito preocupante, uma vez que, além da falta de um conhecimento mais sólido dos conceitos matemáticos, os estudantes podem não valorizar tais características durante a prática profissional.

Frente a essa realidade, em nossa investigação buscamos verificar quais concepções de derivada (Thurston, 1994) estão presentes na Imagem de Conceito de estudantes que já estudaram este assunto em disciplinas de Cálculo e se estes estudantes relacionam os gráficos de uma função e o de sua primeira derivada.

As atividades relacionadas ao uso da tecnologia dependem da análise dessa primeira intervenção. Essas atividades serão desenvolvidas utilizando recursos presentes nos softwares SimCalc e Geogebra e os resultados serão discutidos em artigos futuros.

### ■ Referências bibliográficas

- Bisognin, E. e Bisognin, V. (2011). Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. *Educação Matemática Pesquisa* 13(3), 509 – 526.
- Giraldo, V. (2004). *Descrições e conflitos computacionais: O caso da Derivada*. Tese de Doutorado não publicada, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Brasil.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
- Thurston, W. P. (1994). On prof and progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* 30(2), 161-177.