

DISEÑO Y ANÁLISIS DE UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA CIRCUNFERENCIA A TRAVÉS DE CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

Rafael Antonio Arana Pedraza, Julia Xóchilt Peralta García, Omar Cuevas Salazar y Evaristo Trujillo Luque

Instituto Tecnológico de Sonora. (México)

rafael.arana@itson.edu.mx, julia.peralta@itson.edu.mx, omar.cuevas@itson.edu.mx, evaristo.trujillo@itson.edu.mx

RESUMEN: En el presente artículo se desarrolla una propuesta para la enseñanza de la circunferencia en el nivel superior y los elementos relacionados con ella, tomando como base los constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico y la Instrucción Matemática (EOS), la cual emana de las estrategias institucionales para contrarrestar los bajos logros académicos de los estudiantes en sus habilidades matemáticas. A través de un análisis del texto con la noción de configuración epistémica, se revisa la articulación de los objetos primarios que intervienen y emergen del él, así como la identificación de posibles conflictos semióticos.

Palabras clave: circunferencia, configuraciones epistémicas, e ontosemiótico (EOS)

ABSTRACT: This article provides a proposal for the teaching of circumference and its related elements at higher education. It's based on the theoretical constructs of the Onto-semiotic Approach, and Mathematical Instruction. It arises from the institutional strategies to counteract the low academic achievement of students in their mathematical skills. Through an analysis of the text with the notion of epistemic configuration, we review the connection of the primary objects that take part in, and emerge from it, as well as the identification of possible semiotic conflicts.

Key words: Circumference, epistemic configurations, onto- semiotic approach (OSA)

■ Introducción

En México se reconoce que aún existe un gran rezago escolar en las materias de matemáticas del nivel medio superior, esto se muestra en los resultados obtenidos de la Evaluación Nacional del Logro Académico (ENLACE) que de acuerdo a las estadísticas obtenidas del 2008 al 2014, se promedia que el 73.4 % de los estudiantes se encuentran en los niveles Insuficiente y Elemental en la parte de habilidades matemáticas. (Secretaría de Educación Pública, 2014). Como se percibe, en los resultados de los logros en educación matemática a nivel nacional (tabla 1), esta es una de las ciencias donde más deficiencia presentan los alumnos al momento de ingresar al nivel superior.

Tabla 1. Histórico de porcentajes de alumnos por nivel de dominio en la prueba ENLACE 2008-2014

| NIVEL DE DOMINIO | PORCENTAJE DE ALUMNOS DEL ÚLTIMO GRADO EN CADA NIVEL DE DOMINIO | | | | | | |
|------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 |
| INSUFICIENTE | 46.5 | 46.1 | 40.6 | 35.1 | 30.1 | 28.3 | 26.6 |
| ELEMENTAL | 37.8 | 35.1 | 39.1 | 40.2 | 39.1 | 35.4 | 34.1 |
| BUENO | 12.2 | 13.9 | 15.1 | 16.7 | 19.2 | 20.2 | 20.0 |
| EXCELENTE | 3.4 | 4.8 | 5.3 | 8.0 | 11.6 | 16.1 | 19.4 |
| TOTAL | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |

Nota. Fuente: Secretaría de Educación Pública (2014).

El Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) no difiere en esta situación, y reconociendo que no todos los alumnos aspirantes a las carreras de ingeniería tienen el nivel mínimo necesario de conocimientos en matemáticas, aplica un examen diagnóstico con el fin de identificar a aquellos alumnos que requieren un curso remedial denominado Fundamentos de Matemáticas. En un estudio realizado por Peralta, Cuevas, Encinas, Ansaldo y Osorio en 2014, se puede apreciar que a través del tiempo (2010 al 2014) los índices de aprobación y el promedio de calificaciones obtenidos en el examen de diagnóstico de Matemáticas aplicado en ITSON han ido disminuyendo, de un nivel deficiente a un nivel muy deficiente. Además un análisis de la información de los índices de aprobación, reprobación y deserción en el curso remedial de los años anteriores, mostró que alrededor de 60% de la población se encuentra en los índices de deserción y reprobación (ver tabla 2).

Tabla 2. Índices de aprobación, deserción y reprobación del curso de Fundamentos de Matemáticas

| | EM2015 | | AD2014 | | AD2013 | |
|------------|--------|------------|--------|------------|--------|------------|
| | Total | Porcentaje | Total | Porcentaje | Total | Porcentaje |
| INSCRITOS | 398 | | 959 | | 963 | |
| BAJAS | 7 | 1.76% | 25 | 2.61% | 27 | 2.80% |
| AUSENTES | 175 | 43.97% | 381 | 39.73% | 370 | 38.42% |
| REPROBADOS | 62 | 15.58% | 143 | 14.91% | 184 | 19.11% |
| APROBADOS | 154 | 38.69% | 410 | 42.75% | 382 | 39.67% |

Nota. Fuente: Elaboración propia

Para contrarrestar este fenómeno e incrementar los indicadores académicos, se han implementado diferentes estrategias como la acreditación y capacitación de profesores, talleres y asesoría para alumnos (Peralta, Rojas, Cuevas, Robles y Osorio, 2012). Sin embargo, existe un área de oportunidad en el estudio de los textos utilizados como bibliografía básica del curso.

Realizando un análisis global sobre el texto utilizado, se visualiza una tendencia a la repetición y mecanización de los ejercicios planteados como metodología de la enseñanza, prescindiendo de un análisis más a fondo de las situaciones que pudieran generar la utilización de dichos objetos matemáticos. Esto conduce a la necesidad de desarrollar nuevos materiales para la enseñanza del curso de Fundamentos de Matemáticas, que privilegien un mayor análisis por parte del alumnado.

Dado lo anterior, se planteó generar una propuesta para la enseñanza de cada uno de los temas que comprenden el curso remedial para generar un nuevo libro de texto, específicamente se reporta el diseño de la propuesta para la enseñanza de la circunferencia y aquellos elementos relacionados utilizando los constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS); así como el análisis de la misma a través de la articulación de sus configuraciones epistémicas puntuales y una configuración epistémica global.

■ Marco Teórico.

Según Godino, Batanero y Font (2009), al analizar la práctica matemática para resolver una situación problema, se identifica un lenguaje (verbal y simbólico) que representa la parte ostensiva de una serie

de conceptos, procedimientos y proposiciones que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones realizadas en la práctica son satisfactorias para la resolver la situación que se planea. Estos se clasifican en seis tipos de objetos matemáticos primarios: (1) Situaciones, (2) Lenguaje, (3) Conceptos, (4) Proposiciones, (5) Procedimientos y (6) Argumentos.

De acuerdo a Font y Godino (2006) el análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones (ver figura 1) permiten conocer la anatomía de un texto matemático. Las relaciones que forman los objetos primarios se articulan en lo que se denomina configuración epistémica. Una configuración epistémica es una herramienta útil al profundizar en lo que se entiende por una situación rica, donde una mayor articulación de los objetos primarios (intervinientes y emergentes) generan mejores estructuras en el texto.

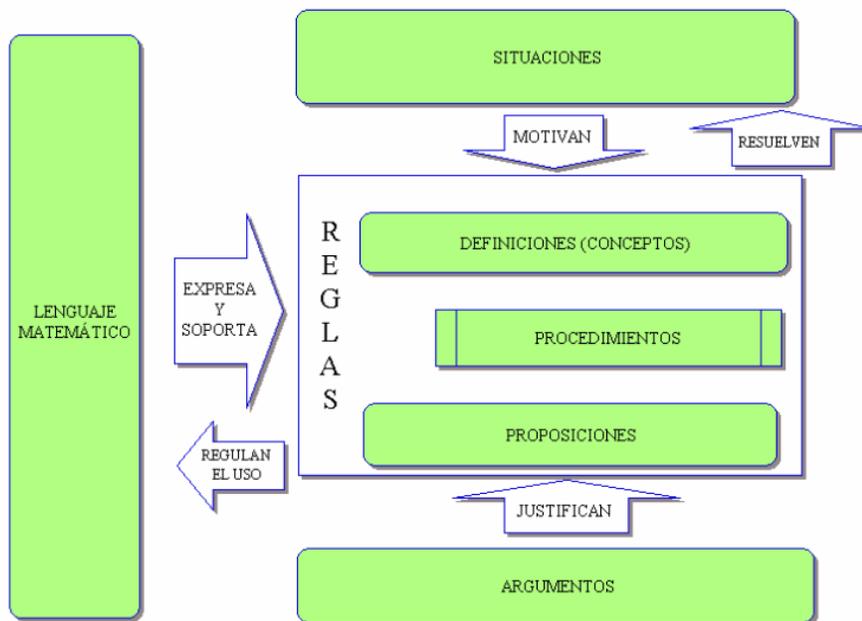


Figura 1. Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica. Adaptado de La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores por Font y Godino, 2006.

Godino, Batanero y Font (2007) definen un conflicto semiótico como la disparidad o diferencia en la interpretación entre los significados que le asignan a un objeto o expresión por dos sujetos diferentes (personal o institucional).

■ Contexto

El trabajo que se reporta se realizó en el Instituto Tecnológico de Sonora, en el marco de la reestructuración de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas. Como se mencionó con anterioridad, existía un área de oportunidad con referencia a los materiales que se utilizan como bibliografía básica (manual del curso); por lo que, se desarrolló un libro de texto (en proceso de publicación) para la bibliografía básica, específicamente en este caso, la propuesta didáctica referente a la circunferencia y los elementos que se relacionan con ella.

■ Procedimiento

1. Diseño de la Propuesta. En la elaboración del texto para la enseñanza de manera articulada de las nociones y elementos relacionados a la circunferencia, se tomaron en cuenta los constructos del EOS, al intentar incorporar los seis objetos primarios para el desarrollo de los ejercicios que componen cada uno de los subtemas presentes en el capítulo.
2. Identificación de los Objetos Primarios. Una vez desarrollado el texto, se dividió en unidades de análisis agrupando las situaciones que buscaban la emergencia de un mismo objeto matemático. A su vez cada una de las unidades de análisis se dividieron en secciones, que se denominaron unidades epistémicas, con el objetivo de identificar los objetos primarios que se ponen en juego en cada una de ellas.
3. Articulación de las Configuraciones Epistémicas. Identificados los objetos primarios, se estructuró para cada unidad de análisis una configuración epistémica de los elementos y sus relaciones; proceso que ayudó a identificar posibles conflictos semióticos. Una vez que se realizaron las Configuraciones Epistémicas para cada una de las unidades, se realizó una configuración epistémica global del sistema de prácticas promovidas en el texto propuesto.
4. Caracterización del Significado Institucional del Referencia. A través de las configuraciones puntuales y la configuración epistémica global, se estableció el Significado Institucional de Referencia del texto propuesto.

■ Análisis y resultados

Una revisión global a la bibliografía básica del curso de Fundamentos de Matemáticas, mostraba una tendencia a la mecanización de los ejercicios, realizados de manera repetitiva, prescindiendo de un significado para el alumno. Además, se enseña al alumno cada uno de los temas por separado, es decir tiene una organización fragmentada de los conceptos matemáticos que se ponen en juego.

En consideración de lo anterior, la composición del texto y los objetos matemáticos que se organizaron en la propuesta diseñada, obedecen a la articulación de aquellos conceptos que giran en torno a la

circunferencia, y que a través de las situaciones planteadas se construye el significado de los mismos. La propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia se divide en cuatro subtemas: (1) La distancia entre dos puntos, (2) La ecuación y los elementos de la circunferencia, (3) La recta tangente a la circunferencia y (4) La longitud de arco y el área de sector circular.

El primer subtema de la propuesta didáctica busca la emergencia del concepto de la distancia entre dos puntos, donde se presentan situaciones de las cuales a partir del teorema de Pitágoras propiciarán la construcción de una fórmula para la longitud de arco. En el segundo subtema se generan las definiciones de centro, circunferencia y centro a partir de lo estudiado de la distancia entre dos puntos, y el concepto de diámetro y cuerda. Además de lo anterior, se generan las formas estándar y general de la ecuación de la circunferencia y se estudia el tratamiento necesario para transitar de una ecuación a la otra.

En el tercer subtema se analiza el concepto de recta tangente a la circunferencia utilizando para la resolución de las situaciones planteadas la pendiente y las propiedades de las rectas perpendiculares estudiadas con anticipación en el capítulo uno del libro. Por último, se utilizan los conceptos de área y perímetro, para generar las definiciones y fórmulas de la longitud de arco y el área de sector circular. Asimismo en este subtema, se analizan las unidades de medida de ángulos (grados y radianes) y las conversiones entre ellos.

Al final de cada una de las secciones del capítulo, se presentan una serie de ejercicios con el fin de reforzar los conceptos estudiados en ese subtema.

Para realizar un estudio de la propuesta didáctica, se dividieron los subtemas en nueve unidades de análisis agrupando aquellas situaciones que propiciarán la emergencia del mismo objeto matemático; para las cuales se identificaron los objetos primarios intervinientes y emergentes y se realizó una configuración epistémica. Una vez realizadas las configuraciones epistémicas de cada una de las unidades de análisis, se realiza una descripción de las relaciones de cada una de ellas para definir una configuración global, con lo que se establece el sistema de prácticas que se desarrolla en la propuesta didáctica.

En la primera unidad de análisis, se utilizan los conceptos de desplazamientos utilizados en el primer capítulo del libro para introducir el concepto de la distancia entre dos puntos, tomando como argumento el teorema de Pitágoras; a partir de esto, se establece la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, misma que será un concepto interviniente de importancia para propiciar la emergencia de los objetos matemáticos en la propuesta. La primera unidad termina planteando una serie de ejercicios a realizar, mismo que serán la base para los objetos que emergen en la segunda unidad.

Al inicio de la segunda unidad, se definen los conceptos de circunferencia, radio y centro; utilizando las nociones de distancia entre dos puntos para definir los dos primeros objetos matemáticos. A partir de ahí, se plantean dos situaciones donde surge la necesidad de calcular el valor del radio de una circunferencia, recurriendo a la fórmula de la distancia entre dos puntos; estableciendo así el radio

como equivalente de la distancia cuando los puntos que se evalúan son el centro y un punto que pertenece a la circunferencia.

La tercera unidad de análisis, presenta una situación para cuando se asignan valores arbitrarios del centro y el punto que pertenece a la circunferencia, con la finalidad de generar la ecuación de la circunferencia en la forma estándar con centro fuera del origen a través de la fórmula para la distancia. Además, surge la situación donde la circunferencia tiene centro en el origen como un caso en particular, estableciendo una ecuación en la forma estándar con centro en el origen.

En la cuarta unidad de análisis, se utiliza a la ecuación en la forma estándar para corroborar que una ecuación dada representa una circunferencia; más adelante se generaliza la estructura de esta ecuación como la forma general de la ecuación de la circunferencia. Durante esta unidad de análisis se retoman conceptos del capítulo dos del libro para desarrollar los procedimientos de conversión entre una forma y otra de la ecuación de la circunferencia, como lo son: completar el trinomio cuadrado perfecto y el producto notable del binomio al cuadrado; y para encontrar el centro de la circunferencia al conocer dos valores extremos de un segmento de recta que la atraviesa se utiliza el concepto del punto medio. Además de la ecuación en la forma general, emergen los conceptos de diámetro y cuerda. En esta unidad se presenta, en la última situación mostrada, una ruptura en la secuencia dentro de las demás unidades donde se han enlazado cada uno de los objetos emergentes al siguiente.

La quinta unidad de análisis, utiliza los conceptos de radio y centro, en conjunto con las características de las rectas perpendiculares estudiada en el primer capítulo del libro para establecer la ecuación que toca solamente una vez a la circunferencia, emergiendo de esta situación el concepto de recta tangente y punto de tangencia.

De la sexta unidad a la novena unidad, se presentan diferentes situaciones con el objetivo de generar diferentes conceptos para desencadenar al final la emergencia de los conceptos de longitud de arco y área de sector circular.

En la sexta unidad de análisis, se presenta de manera verbal una reseña de datos que permiten conocer los conceptos de perímetro, área encerrada por la circunferencia y círculo, su relación con la constante π y la división en grados del círculo. Además se presentan dos situaciones para calcular el perímetro completo y una octava parte de una circunferencia de radio $r = 1$; dividiendo el perímetro total entre el número de partes que se divide. Este mismo procedimiento de división en partes se retoma en la unidad de análisis siete para calcular la inclinación a la que se debe colocar un radio para que se encuentre en el punto que encierra una octava parte de la circunferencia, solamente que se divide a los 360° que se encierran en el círculo.

En la unidad de análisis ocho, se retoman estos mismos procesos de división en partes utilizados en las unidades anteriores para encontrar el ángulo que se forma con el radio al tener una longitud de arco igual al radio; situación con la cual se propicia la emergencia del radián, utilizado como una

segunda unidad medida de los ángulos y, a través del cual, en la novena unidad de análisis se generan las fórmulas para la longitud de arco y la fórmula y concepto del área de sector circular.

■ Conclusiones

De acuerdo a Font y Godino (2006) el análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones permiten conocer la anatomía de un texto matemático, a través de las relaciones que forman los objetos primarios en una configuración epistémica, la cual resulta ser una herramienta útil al profundizar en lo que se entiende por una situación rica, donde una mayor articulación de los objetos primarios (intervinientes y emergentes) generan mejores estructuras en el texto.

Una vez realizadas la identificación de los objetos primarios y las configuraciones de cada una de las unidades de análisis, se puede observar que se pueden distinguir de manera ostensiva en la propuesta los seis objetos primarios que identifica el EOS, de manera interviniente o emergente.

De forma general en todas las unidades de análisis, se presentan procedimientos de manera ostensiva utilizando las diferentes formas del lenguaje: verbal, gráfico, numérico y en notaciones. Además, la emergencia de los objetos en cada una de las unidades tiene un orden lógico y se retoman los objetos y conceptos de las unidades anteriores para significar los nuevos conceptos que pretenden emerger en cada unidad.

La resolución de las situaciones presentadas se soporta en procedimientos, proposiciones y argumentos que aparecen de manera ostensiva en el texto, haciendo referencia a las mismas unidades de análisis anteriores y capítulos anteriores del libro de texto.

A pesar de lo anterior, se identifican en la propuesta algunos elementos que podrían generar diferentes significados sobre una misma expresión, lo cual Godino, Batanero y Font (2007) definen como conflicto semiótico. En la unidad de análisis uno emerge el concepto de distancia entre dos puntos, la cual se define mediante la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, asignando la literal d como la notación que representa a la distancia entre dos puntos. Durante el desarrollo de la unidad cuatro emerge el concepto del diámetro de una circunferencia, sin embargo, no se asigna de manera explícita una notación que represente dicho concepto, dejando de manera *libre* la notación a utilizar para representarlo. Este posible conflicto semiótico se presenta de manera explícita en la sexta unidad de análisis, cuando al emerger el concepto de perímetro se le asocia para calcularlo una fórmula ($P = \pi * d$), utilizando a d como notación para representar el diámetro.

En la unidad de análisis cuatro, se presenta en la ecuación general de la circunferencia con coeficientes representados por a y b en los términos cuadráticos de la misma, sin embargo, para la circunferencia estos dos coeficientes deberán ser iguales. Además, se presenta una situación cuyo objetivo es la emergencia de los conceptos de diámetro y cuerda, donde se pide encontrar la forma estándar de la ecuación de la circunferencia, sin embargo el objeto matemático utilizado no

corresponde al objeto emergente de la unidad de análisis el cual es la forma general de la ecuación de la circunferencia.

Con el fin de evitar los posibles conflictos semióticos detectados y mejorar la propuesta didáctica, se modificó en la unidad de análisis cuatro al eliminar las literales a y b de los coeficientes de los términos cuadráticos debido a que para estos términos es común que los coeficientes sean iguales a uno. En el caso del diámetro, se asoció una notación de manera explícita al concepto y se realizaron las modificaciones necesarias a las notaciones utilizadas en dicha unidad y en la unidad de análisis seis, específicamente en la fórmula para calcular el perímetro.

En última situación problema planteada en la unidad de análisis cuatro, se cambió el objeto matemático en cuestión por la forma general de la ecuación de la circunferencia con el objetivo de mantener una uniformidad en las situaciones presentadas, lo cual generaría una situación adicional de convertir de la forma estándar de la ecuación (forma a la que se puede llegar a partir de la información gráfica que se presenta) a la ecuación de forma general.

■ Referencias bibliográficas

- Font, V. y Godino, J. (2006) La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matematica Pesquisa*, 8 (1), 67-98. Recuperado de: http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/EMP.pdf
- Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2): 127-135. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf
- Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Peralta, J., Cuevas, O., Encinas, F., Ansaldo, J. y Osorio M. (2014). *Estudio comparativo de conocimientos en Matemáticas para alumnos de nuevo ingreso a una universidad*. En Pizá R., González M., Orduño B. y Vizcarra L. (Comp.). *Gestión del Aprendizaje Universitario* (pp. 106-117). México: ITSON
- Peralta, J., Rojas, J., Cuevas, O., Robles, A. & Osorio, M. (2012). *Diagnóstico comparativo del desempeño académico de los alumnos de bachilleratos tecnológicos*. En Pizá, R., Bojórquez, C. & González, M. (Comp.). *Análisis áulico sobre el Desempeño Profesional*. (pp. 122-133). México: ITSON
- Secretaría de educación Pública: SEP. (2014). ENLACE: estadísticas de resultados 2008-2014. Recuperado de: http://enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/