COMPRENSIÓN DE LA ALEATORIEDAD EN MEDICIONES DIRECTAS Y EL TRATAMIENTO DE LAS MEDIDAS EN BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera
CECyT No 4 "Lázaro Cárdenas", DME-Cinvestav Instituto Politécnico Nacional (México)
rogeliomartinez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx, hchavez@cinvestav.mx

RESUMEN: La investigación se desarrolló en condiciones reales e institucionales de enseñanza con 32 estudiantes del sexto semestre del Bachillerato Tecnológico, durante la unidad de aprendizaje de *Probabilidad y Estadística*. Los docentes de Física y de Matemáticas pusieron en juego la estrategia de enseñanza con la práctica de *mediciones directas y calibrador lineal*, en el laboratorio de Física. El interés fue si la propuesta en la enseñanza de una situación experimental en la que interviene el azar promovería la aplicación por el estudiante del enfoque frecuencial de la probabilidad, para compensar la prevalencia del enfoque clásico prescrito en el programa de estudios (DEMS, 2008). De las respuestas de los estudiantes a un cuestionario incluido en el guion de la práctica, de su desempeño durante la enseñanza y en una entrevista semiestructurada a uno de ellos, resultó que no consideraron la intervención del azar en las mediciones y para estimar el valor más probable del conjunto de ellas sólo el 6% lo atribuyó a la media aritmética.

Palabras clave: variación, mediciones experimentales, enfoque frecuencial de probabilidad

ABSTRACT: The research was carried out under real and institutional teaching conditions with a sample of 32 students from the sixth semester of the Technological high school, within the learning unit of probability and statistics. Physics and Mathematics teachers put into practice the teaching strategy by practicing direct measurements and linear calibrator in the Physics laboratory. It focused on whether the proposal related to the teaching of a random experimental situation would make the students apply the frequency approach of probability, to be in a par with the predominance of the classic approach prescribed in the syllabus (DEMS, 2008) From the students' responses to a questionnaire included in the script of the practice, with respect to their performance during the teaching process, and in a semi-structured interview to one of them, we found that they did not consider the random approach in the measurements, and to estimate their most probable value on the whole , only six percent attributed it to the arithmetic mean.

Key words: Variation, experimental measurements, frequency probability approach

Introducción

La actividad tradicional de enseñanza *Mediciones directas y calibrador lineal* devino un ejercicio de docencia interdisciplinaria e investigación. El interés se centró en promover el enfoque frecuencial de la probabilidad y caracterizar la comprensión de los estudiantes de algunas ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), implicadas al realizar un conjunto de mediciones de una misma magnitud y encontrar el mejor valor de esa magnitud. Se aspiraba a que los estudiantes dieran sentido a los datos experimentales de acuerdo a los contenidos enseñados en el aula de *Probabilidad y Estadística*, al considerar los errores aleatorios en las mediciones, derivados de las múltiples fluctuaciones incontrolables. La investigación fue del orden cualitativo (Vasilachis, 2006).

Marco de referencia

A diferencia de propuestas actuales para el curriculum, el cual enfoca la formación en Estadística (por ejemplo, Burril y Biehler, 2013), Heitele (1975) propuso diez ideas fundamentales para la enseñanza tanto de Probabilidad como de Estadística, es decir, de estocásticos, con una perspectiva epistemológica: 1) Medida de probabilidad, 2) Espacio muestra, 3) Adición de probabilidades, 4) Regla del producto e Independencia, 5) Equiprobabilidad y Simetría, 6) Combinatoria, 7) Modelo de urna y Simulación, 8) Variable estocástica, 9) Ley de los grandes números, 10) Muestra. El autor también subrayó la trascendencia de vincular esa enseñanza a experiencias intuitivas. En particular, la enseñanza de la ley de los grandes números favorece que los estudiantes desarrollen experiencias concretas de la regularidad estadística creciente de repeticiones de un fenómeno aleatorio bajo las mismas condiciones. La red conceptual en esa ley incluye medida de probabilidad, espacio muestra, independencia, variable estocástica y muestra. Shaughnessy y Ciancetta (2002) han ahondado en las concepciones de variabilidad en fenómenos observados por estudiantes de Estadística y destacan la importancia de que ellos la consideren para dar sentido a los posibles resultados y predecir el rango de variación probable durante la repetición de ensayos. La conexión entre distribuciones de datos y medidas de variabilidad está estrechamente relacionada con el concepto de espacio muestra. Steinbring (1991) subraya la adopción de una perspectiva dinámica en la enseñanza de la probabilidad para que el estudiante asocie la experiencia con la teoría, en lugar de presentar los conceptos de probabilidad ya hechos. El triángulo epistemológico propuesto por el autor es un instrumento central de descripción y análisis de la interacción en la construcción del conocimiento matemático, e indica que no se puede deducir el significado del conocimiento de uno de los vértices, del concepto formal, del objeto o del signo, sino que siempre se requiere de un balance entre los tres vértices del triángulo. Por ejemplo, la Figura 1 presenta un caso de la media de un conjunto de valores de mediciones de un mismo objeto.

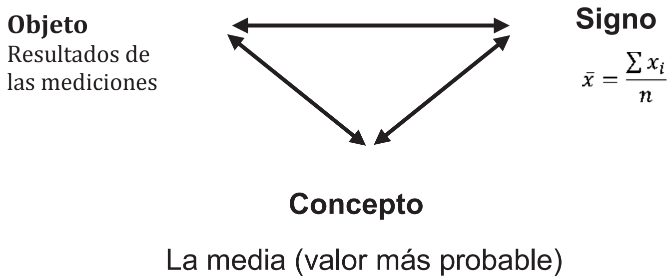

Figura 1. Triángulo epistemológico para el valor más probable de un conjunto de medidas de un mismo objeto.

Método e instrumentos

En la *Docencia Interdisciplinaria* (Martínez y Garnica, 2015), los docentes de disciplinas distintas instrumentan y desarrollan conjuntamente estrategias de enseñanza a partir de contenidos vinculantes. Una estrategia tal ha vinculado la enseñanza de matemáticas con la enseñanza de Física. En el laboratorio de *Física I* se recopilaron datos de 32 estudiantes de 6o. semestre de bachillerato tecnológico acerca de su comprensión de conceptos de estocásticos al aplicarlos a situaciones experimentales de otras disciplinas. Al final del guion habitual de la práctica *Mediciones directas y calibrador Vernier,* los estudiantes contestaron individualmente un cuestionario con cinco preguntas abiertas (véase la Tabla 2), referentes a la variación de los resultados de dos conjuntos de mediciones que ellos efectuaron con un vernier, un flexómetro y una regla métrica, de las dimensiones de dos tipos de objetos. Las medidas obtenidas por todos los estudiantes se concentraron en el pizarrón en una tabla de frecuencias y se calcularon la media aritmética y la desviación estándar, para estimar las magnitudes medidas. Algunos episodios de las sesión del laboratorio se videograbaron y transcribieron para su análisis.

Para obtener más datos de la comprensión de los estudiantes del enfoque frecuencial de la probabilidad, se entrevistó en formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999) a uno de ellos de estrato académico alto, al concluir su bachillerato. Los datos recopilados en la sesión de laboratorio se caracterizaron según la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006): Ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos empleados y referentes (véase la Tabla 1).

Tabla 1. Contenido de estocásticos de la estrategia de enseñanza en el Laboratorio de Física

Criterio de análisis	Práctica: Mediciones directas y errores
Ideas fundamentales de estocásticos	Variable estocástica, muestra, ley de los grandes números, medida de probabilidad.
Otros conceptos matemáticos	Número, valor posicional, operaciones aritméticas, números racionales, fracciones equivalentes, proporcionalidad.
Recursos semióticos	Notación matemática simbólica, lengua natural escrita, tabla de distribución de frecuencias, recta numérica, figuras trazadas en el pizarrón de los objetos medidos.
Términos empleados	Posible, cierta certeza, con certeza, incertidumbre, tendencia central, dispersión, error, error sistemático, error de paralaje, error aleatorio; probabilísticos, fortuitos o casuales. Puede ocurrir o no, fluctuaciones, variación, valor más probable, desviación estándar, análisis estadístico, valor verdadero, valor medido o de la medición, incontrolable e independiente, marca de clase, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, frecuencia acumulada, media aritmética, desviación estándar, rango.
Situaciones referentes	En laboratorio de *Física I*, efectuar 32 mediciones directas de: el largo de un tornillo y de monedas con vernier, de la mesa de trabajo con regla métrica y flexómetro. Concentración de los datos en una tabla de distribución de frecuencias y su descripción estadística.

Resultados

En general, no se consiguió que los estudiantes otorgaran sentido a la media de un conjunto de medidas como una estimación más probable de ellas, ni que consideraran la frecuencia relativa de los valores de las mediciones para estimar su probabilidad, de acuerdo con el enfoque frecuencial de la probabilidad, fundamentado por la ley de los grandes números.

*Sesión de enseñanza en el laboratorio***.** Al principio de la práctica de laboratorio, el docente de Física (D_f) se refirió al rol de la percepción del sujeto que efectuaba la medición con el vernier y que ocasionaría variación en las medidas obtenidas:

D_f	Por ejemplo, aquí sería que está pasadito del 27 más una fracción. Entonces, para mí coincidiría en 27 y el 2 *exacto*, entonces sería 27.2.
	Si fuera entre el 2 y el 3, entonces sería 27.25, pero para mí sería 27.2.
	Si yo *se lo pasara a otra persona, a lo mejor vuelve a hacer la medición y dice: "para mí es otra medida", y de hecho va a ser otra medida.*

En consecuencia, D_f se refirió a un factor que puede ocurrir y ocasionar variación, que afecta al valor de la medida por exceso o por defecto; en este sentido, se puede identificar la idea fundamental de variable estocástica (Heitele, 1975). Las mediciones variaron, conforme a lo esperado, puesto que los estudiantes, por ejemplo al medir el largo de la mesa de trabajo que tenía más de dos metros, usaron una regla de madera con longitud de un metro, pero descuidaron la coincidencia del extremo superior de la medición anterior con el extremo inferior de la siguiente, ya que colocaron su lápiz apuntando con la goma como referencia para medir la siguiente parte, lo que ocasionó valores distintos en las medidas de las magnitudes. Conforme se avanzó en el desarrollo de la práctica, no obstante haber indicado a los estudiantes que cada quien anotara el valor que hubiera obtenido de su medición, se acercaban para a ver el resultado del compañero; algunos advirtieron que al no tener el mismo ángulo de lectura del instrumento de medición el resultado no era el mismo, por ello consideramos indicios del reconocimiento de los errores de paralaje y aleatorios, descritos en el guion de la práctica. Después de que los estudiantes realizaran las mediciones, el docente de matemáticas (D_m) presentó en el pizarrón una tabla de frecuencias (véase la Figura 2) para concentrar los valores de las 32 mediciones. Cada estudiante calculó los valores de la media aritmética y la desviación estándar. A pesar de ello, un estudiante (E) preguntó a I por la última, pues debería responder la pregunta 3 del cuestionario al final de la práctica:

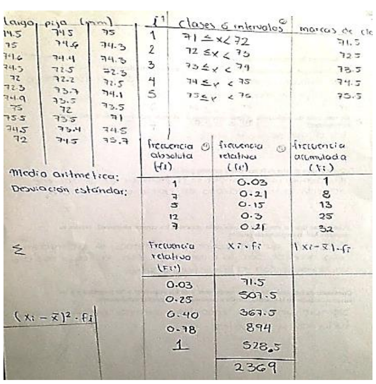

Figura 2. Tabla de frecuencias presentada en el pizarrón por D_m.

E	¿Qué es la desviación estándar?
I	¿Cómo que no sabes que es la desviación estándar? De tus clases de estadística ….

E	¿La variación?
I	¡Desviación!
E	Bueno, pero a ver usted …
I	El nombre desviación, ¿a qué o de qué …..?
E	Pues que se va desviando, es comooo ……
I	¿Se desvía de qué? ¿Cuál es la referencia?
E	¿Pues de algo que ya está fijo?
I	Piénsalo bien. Pon lo que entiendes pero escríbelo. Esto [no borres lo escrito] déjalo.
E	Pero esto que varía, así como lo que a uno le dio …

El cuestionario

La Tabla 2 resume los resultados de la aplicación del cuestionario al final de la práctica.

Tabla 2. Porcentajes de tipos de respuestas de 32 estudiantes al cuestionario en Laboratorio de Física.

Preguntas	Porcentajes de respuestas		
1. ¿A qué atribuyes la variación en los resultados obtenidos en las mediciones?	A la persona 56%	A instrumentos 41%	Otros factores 3%
2. En una serie de mediciones, ¿cómo encontramos el valor más confiable o con mayor certidumbre?	El que más se repite: 66%	Al promedio 6%	Otros 28%
3. ¿Qué significa el valor de la desviación estándar para ti?	Con argumento 1%	Sin argumento 99%	
4. ¿Consideras que en este experimento están presentes los errores aleatorios? Explica tu respuesta lo más ampliamente posible:	Sí 97%	No 3%	
5. Considerando los resultados de tus mediciones y de tus respuestas a las preguntas y a las tareas solicitadas en la práctica, escribe a continuación tus propias conclusiones:	Referencia a la aleatoriedad 88%	Referencia a instrumentos 12%	

En la primera pregunta, 97% atribuyeron la variación en las medidas a la diferente percepción de cada quien o a los instrumentos; es decir, no consideraron de forma explícita a la intervención del azar. Aunque para la cuarta pregunta también 97% de los participantes asintieron a la presencia de errores aleatorios en las mediciones de las dimensiones de las mesas de trabajo con una regla métrica de madera y con un flexómetro, y de seis tornillos, aparentemente iguales, con el calibrador vernier, no lograron explicar en qué consistía la desviación estándar. La Figura 3 muestra la respuesta de un estudiante a la pregunta 4 del cuestionario, que pareció haber reconocido la influencia de errores aleatorios.

¿Consideras que en este experimento están presentes los errores aleatorios?, explica tu respuesta lo más ampliamente posible:

Si por que cada persona mide distinto a cada otro y al comparar las mediciones varean

Figura 3. Respuesta con respecto a la presencia de los errores aleatorios en las mediciones.

Veintiún estudiantes (66%) se refirieron a la moda como el valor más probable de los valores de las mediciones y sólo dos a la media aritmética, el otro 28% se refirió a otros factores como usar mejores instrumentos de medición (véase la Tabla 2).

Únicamente dos estudiantes respondieron a la pregunta 3. La Figura 4 presenta la respuesta y el argumento de un estudiante en consideración a la desviación estándar.

¿Qué significa el valor de la desviación estándar para ti?

Es una medida de dispersion, que nos indica cuanto pueden alejarse los valores respecto al promedio, es util para buscar probabilidades

Figura 4. Respuesta respecto al significado de la desviación estándar.

En sus respuestas, los estudiantes usaron como sinónimos “exactitud” y “precisión”, por lo que es necesario que en la enseñanza se les distinga en casos concretos de conjuntos de datos de mediciones.

La entrevista

Dos investigadores (I_1, I_2) solicitaron al entrevistado (E) que ampliara su respuesta a la primera pregunta del cuestionario (véase la Tabla 1), ya que él admitió la variación en los valores obtenidos pero por incorrección en la medición; sin embargo, inadvirtió la presencia de errores aleatorios en las mediciones que efectuó en el laboratorio:

E Bueno, yo pienso que si el tornillo se elabora por medio de una máquina, bueno, sí es de la misma medida, pero en sí **la lógica te dice** que si los tornillos son de la misma medida tiene que salir lo mismo. A lo que me refiero yo es que **a lo mejor** el alumno no ha utilizado el vernier y el profesor lo ocupa seguido.

Se pidió a E que midiera la longitud, el diámetro de la cuerda y de la cabeza, de seis tornillos de los mismos que se utilizaron en la práctica. Para ello se le proporcionaron un vernier, una cinta métrica y tres reglas: la primera metálica de 10 cm, la segunda metálica de 15 cm y la tercera plástica de 30 cm, todas ellas graduadas en centímetros y en pulgadas. E eligió la regla metálica de 15 cm para medir la longitud de los tornillos porque el cero coincidía con la orilla de la regla. Por tanto, no consideró para las dimensiones de los objetos a medir la sensibilidad de los instrumentos a su disposición, ya que la sensibilidad (o módulo) de la regla plástica de 15 cm era de 1 mm, y la del vernier era de .05 mm, de modo que la variación en los valores de las medidas para los tornillos podía ser menor de 5 centésimas de milímetro usando el vernier. Cuando E midió el largo del tornillo, lo colocó verticalmente sobre la mesa frente a donde estaba sentado, acercaba la regla quedando paralela al tornillo y al hacer la lectura giraba su cabeza. En el siguiente pasaje de la entrevista, E argumentó la variación en las medidas obtenidas y reconoció el error de paralaje:

I_1	¿Tu posición desde la pupila hasta el punto que estabas midiendo varió o no?
E	Bueno, yo ocupé esta regla porque el origen empieza desde la orilla y tuve este grado de visión; algunas veces inclinaba la cabeza para tener un mejor ángulo….
I_1	¿Y esas variaciones a qué las atribuyes?
E	Sí, no tuve una posición fija….
I_1	¿Se puede?
E	Yo pienso que sólo que fuera una máquina…
I_1	Y una máquina inclusive puede tener fallas.

E	¡Tiene errores! [sostiene dos tornillos y muestra que en la cabeza de uno se nota una pequeña inclinación]
I_1	Pero piensa en el lote.
E	¡Sí, claro que no todos van a ser iguales!

Al preguntarle cómo encontrar la mejor estimación dada una serie de mediciones respondió que la moda era el valor más probable y atribuyó la variación en las medidas de tornillos, en apariencia iguales, a que pudieron ser producidos por máquinas distintas. A la pregunta de por qué comúnmente se le pedía la media aritmética de sus calificaciones y no la moda, contestó “para ver cómo vas… como una estabilidad”. La desviación estándar, recordada como fórmula para realizar un cálculo, obstaculizó que el entrevistado advirtiera su carácter funcional de medida de variación de los datos respecto a la media e indagara para qué valor sería mínima; aún la confundió con la desviación media. Aunque en la práctica E calculó la media aritmética y la desviación estándar para cada conjunto de medidas obtenidas, no explicó en la entrevista su significado para cada conjunto. Hacia el final del interrogatorio, E distinguió entre errores aleatorios y de paralaje; y por último reconoció la intervención del azar como una fuente de la variación de las medidas obtenidas.

Se preguntó a E para qué le habían pedido que calculara la media de las medidas obtenidas, en el laboratorio, a lo que contestó que eso estaba en las indicaciones de la práctica, que “el docente no nos dijo”. Esta respuesta muestra que E considera a las expresiones matemáticas (fórmulas) como mero cálculo, sin preguntarse por los conceptos subyacentes.

Como lo ha señalado Steinbring (1991), la articulación entre la experiencia empírica (resultados de las mediciones) con el aspecto formal, de cálculo e interpretación del contexto para consolidar el concepto (véase la Figura 1), requiere de una retroalimentación interactiva para verificar, mejorar y modificar la concepción de los conceptos matemáticos.

Conclusiones

La actividad de enseñanza puesta en juego fue planteada bajo la consideración de que la enseñanza de estocásticos debe vincularse a experiencias intuitivas (Heitele, 1975). Los eventos de azar no ocurren con absoluta certeza de acuerdo a las leyes deterministas de la Física, las predicciones se elaboran dentro de la teoría, los fenómenos reales y resultados experimentales se pueden observar en situaciones prácticas (Steinbring, 1991). En este sentido, consideramos que la implementación de actividades de enseñanza, como la práctica de mediciones directas y errores, coadyuva a la comprensión de conceptos probabilísticos y estadísticos implicados en el tratamiento de los resultados de las mediciones.

En el laboratorio, cada estudiante elaboró una tabla de distribución de frecuencias con los 32 valores de las medidas que se concentraron en el pizarrón, sin dificultad aparente. A pesar de ello, sólo dos estudiantes pudieron explicar el significado de la desviación estándar, lo que sugiere que el sentido que otorgaron los estudiantes a la actividad fue medir y realizar operaciones, pero para ellos el objetivo no fue explícito. Por tanto, la revisión de esta práctica al regreso al aula de *Probabilidad y Estadística* sería una oportunidad para retroalimentar y revertir algunas de las dificultades de los estudiantes acerca de la concepción e interpretación que confieren a los conceptos matemáticos en cuestión, como por ejemplo: media aritmética, moda, desviación estándar, muestra, frecuencia relativa, medida de probabilidad. De igual manera, es necesario tratar el concepto de precisión, que se puede referir a las medidas de dispersión y depende de la distribución de los resultados; y distinguirlo del concepto de exactitud que, aunque cualitativo, refiere a la mayor diferencia entre los valores medidos y el valor más probable (verdadero) de la magnitud en cuestión.

Heitele (1975) ha propuesto las diez ideas fundamentales de estocásticos como una guía continua para preparar en ellos al estudiante, desde un nivel intuitivo hasta uno formal. En el bachillerato tecnológico se propone el estudio de los estocásticos hasta el sexto y último semestre, luego de dos años y medio de su acercamiento a esos contenidos en secundaria. A la unidad *Probabilidad y Estadística* (DEMS, 2008) le anteceden cinco cursos semestrales de matemáticas: *Álgebra*, *Geometría y Trigonometría*, *Geometría Analítica*, *Cálculo Diferencial*, *Cálculo Integral*. La enseñanza de estas unidades de aprendizaje ha presentado a los estudiantes de manera predominante el razonamiento determinista. Aunque la unidad de estocásticos inicia con Estadística Descriptiva, para la enseñanza de probabilidad no es categórico el enfoque frecuencial, sino el enfoque clásico acompañado de los axiomas de la probabilidad. No obstante, tanto en las ciencias como en nuestra vida cotidiana, enfrentamos sucesos que no son susceptibles de la aplicación de la equiprobabilidad, por lo que no es suficiente emplear el enfoque clásico de la probabilidad. Pero para fenómenos que son susceptibles de repetición, se puede recurrir al enfoque frecuencial de la probabilidad, fundamentado por la ley de los grandes números.

Referencias bibliográficas

Burrill, G., Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement*, *4*(1), 5-24.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS) (2008). *Programa de Estudios de Probabilidad y Estadística*. México: IPN.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205.

Martínez, R., Garnica, I. (2015). El laboratorio de Física I para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en el Bachillerato Tecnológico. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29, 619-626. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años*, pp. 195-214. México: Santillana-Cinvestav.

Shaughnessy, M., Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics,* (pp. 295-312).

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22: 503-522. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Barcelona: Gedisa.

Zazkis, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions*. Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.