LOS NIÑOS Y LAS FRACCIONES

4

CAPÍTULO cuatro

Pedro Javier Rojas G.
Luis Oriol Mora V.
Cecilia Barón P.

Profesores Universidad Distrital Francisco José de Caldas

La ubicación de las fracciones en la educación básica es un tema controvertido, pues mientras algunos consideran que dado su escaso uso en la vida cotidiana se debería reducir su enseñanza en la escuela, otros destacan que precisamente la incomprensión acerca de las fracciones es la causa del escaso uso que de ellas se hace. A favor de su estudio también se argumenta la importancia que tienen para la comprensión de la estructura de los números racionales y el ser parte de la herencia cultural de la humanidad. Sin embargo, si se considera importante enseñar fracciones, nuevamente surgen interrogantes relativos a:

- ¿Qué aspectos de la fracción es posible enseñar, con comprensión por parte del niño, en los diferentes niveles de escolaridad?.

- ¿Cómo evitar los errores frecuentes, particularmente en cuanto al cálculo y a relacionar los símbolos numéricos con representaciones en áreas, en conjuntos discretos y en la recta numérica?.

- ¿Existe otras propuestas de enseñanza con un enfoque diferente al que se refleja en los documentos y textos del Ministerio de Educación Nacional (MEN)?.

En este capítulo, se pretende ofrecer algunos elementos para posibilitar al *profesor de matemáticas*, lograr comprensión sobre algunas dificultades asociadas al concepto de fracción, así como ideas relacionadas con propuestas que orienten el diseño de actividades en el aula en relación con tal concepto.

4.1 LAS FRACCIONES Y LO COTIDIANO

En el ámbito escolar, cuando el profesor de matemáticas hace alusión a las fracciones, suele no tener en cuenta que el contexto de referencia al que acuden los niños para significar el discurso del profesor, se encuentra, como es natural, en su cotidianidad, que en general puede no corresponder con los contextos asociables con significados matemáticos. Por ejemplo:

> *Octavos y cuartos de final de un campeonato; cuartos, quintos y sextos puestos en una clasificación; cuartos de una vivienda, litro y medio de gaseosa.*

Dado que los niños ya han utilizado con otro significado las palabras que denominan las fracciones, podrían mantenerlo si no hay unas acciones encaminadas a reconocer la nueva significación.

Los profesores de matemática reconocen que en el estudio de las fracciones los niños y jóvenes encuentran grandes dificultades de aprendizaje; muchos niños de los primeros cursos, que pueden resolver correctamente problemas sencillos con fracciones mediante la argumentación verbal o el uso de modelos concretos, se muestran en incapacidad de resolverlos cuando se les exige usar una representación simbólica.

> *Juan cuenta a sus amigos que sólo le queda la cuarta parte del dinero que le dieron para la semana, pues el lunes se*

> *había gastado la mitad del dinero y el martes la mitad de lo que le quedaba. Sin embargo, cuando su maestra le pregunta ¿Cuánto da 1/2 +1/4?, él contesta: No sé profe, no me acuerdo cómo se suman fracciones heterogéneas.*

Algunos jóvenes de diferentes cursos de secundaria han memorizado reglas para los algoritmos y aunque desde la matemática formal, generalmente es correcto el uso que hacen de ellos cuando se desempeñan dentro de la representación simbólica, muestran incapacidad para resolver situaciones en las cuales deben relacionar las diferentes representaciones de las fracciones.

Un número significativo de estudiantes de los últimos grados de la educación básica tienen interpretaciones de la fracción que les hacen considerar a 2/5 como el valor de la suma de 1/2 con 1/3; la reiterada aparición de estos errores, a pesar de empezar a tematizar las fracciones desde el grado tercero, hace cuestionar el proceso de enseñanza, pues el énfasis en los algoritmos, como el de la suma durante varios años, no ha posibilitado el aprendizaje en los estudiantes.

4.2 CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Al considerar la enseñanza de las fracciones, es necesario analizar el tipo de conocimiento del cual hace uso el profesor de matemática para comprender y abordar los problemas de aprendizaje de sus estudiantes. Tal conocimiento está estrechamente vinculado con su formación inicial y en ejercicio, así como con las fuentes que consulta para el diseño del trabajo de aula.

Si bien el profesor reconoce en el trabajo de los niños dificultad para abordar las fracciones, en tanto encuentra manifestaciones que dan cuenta de dicha dificultad, particularmente en las representaciones numéricas que éstos hacen de las fracciones (dicen, por ejemplo, «tres medios» y escriben 2/3) y en la aplicación de los algoritmos (por ejemplo, 1/2+1/3=2/5), suele justificarla en el desinterés de sus estudiantes, o en las «malas bases» que éstos traen.

Lo anterior refleja una mirada simple ante un problema específico de la profesión «profesor de matemáticas», y pone de manifiesto una carencia de elementos para abordar las dificultades de aprendizaje e indagar, con cierta sistematicidad, acerca de sus causas. Así, debe reconocerse un problema en la formación del docente: *no le posibilita complejizar su mirada sobre lo que acontece en el aula, en relación con temáticas específicas de la matemática escolar*, debido a que el aprendizaje de las nociones matemáticas no ha sido objeto de estudio, pues en las anteriores décadas (e incluso actualmente), en Colombia, se aceptaba que para enseñar matemáticas bastaba con que el profesor supiera matemáticas (refiriéndose a ésta como el estudio de axiomas, teoremas y ejercicios).

En la actualidad se comienza a enfatizar la necesidad del docente de ***aprender a enseñar matemáticas***, tendencia que privilegia el *conocimiento del contenido pedagógico* del profesor[1] , que implica ligar conocimiento de contenido matemático con conocimiento de pedagogía y se traduce en la capacidad del profesor de buscar formas de representar el contenido para hacerlo entendible a sus estudiantes y proponer tareas pertinentes en las que los procesos que soportan esos contenidos se evidencien. Tal conocimiento se genera de la integración de tres tipos de conocimiento, a saber: conocimiento matemático, conocimiento sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas y conocimiento sobre el proceso instructivo.

En los *conocimientos de matemáticas* se incluyen los conceptos matemáticos, la actividad matemática y el currículum de las matemáticas; los *conocimientos sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas* tienen que ver con ideas y concepciones previas de los estudiantes de diferentes edades, y con propuestas específicas para guiar el aprendizaje de cada concepto; los *conocimientos sobre el proceso instructivo* comprende planificación de la enseñanza, representaciones instruccionales, recursos didácticos, rutinas instruccionales, características de las interacciones didácticas, y tareas académicas.

[1] LLINARES, S. El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y el desarrollo profesional. En : SANTALÓ, L. La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. Madrid: Rialp, 1994. p. 315.

En el aprendizaje de las nociones matemáticas, y particularmente con respecto a las fracciones, existe un saber producto de investigaciones realizadas en las últimas décadas que aunque está publicado en diferentes textos sobre Educación Matemática y orienta algunas propuestas de aula en otros paises (por ejemplo, en E.U y España) aún no ha sido divulgado y estudiado entre los profesores de matemática de este país. En la sección 4.4 se presenta, de manera general, algunos de los resultados de investigaciones en este campo, que se constituyen en referentes importantes para el trabajo en el aula y, por tanto, en parte del conocimiento profesional del profesor.

4.3 LAS FRACCIONES Y LOS TEXTOS ESCOLARES

En los textos de matemática para la educación básica, cuyo uso es bastante popularizado en nuestro país, desde los primeros acercamientos al concepto de fracción, se recurre a los símbolos numéricos y al uso de algoritmos para operar. Conviene contrastar esta característica de los textos, con resultados de investigaciones que muestran unas etapas secuenciales que se requiere alcanzar para comprender algunas de las interpretaciones del concepto de fracción y con propuestas donde se explicita la necesidad de trabajar diferentes representaciones previo al uso de los símbolos.

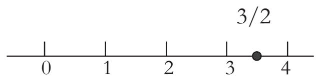
El trabajo en los textos usuales, durante los últimos años, se apoya en la propuesta curricular del MEN, que toma como referencia un estudio de Vasco (1994): *El archipiélago fraccionario*, en el cual reconoce las cinco interpretaciones de la fracción propuestas por Kieren (1976): partidores, medidores, razones, proporciones y operadores, pero propone introducir los fraccionarios a partir de la «isla principal» de los operadores activos, pues argumenta que a ella se puede llegar desde cualquier sistema concreto, y que a partir de ésta puede echarse los puentes a las demás islas. En este sentido difiere de las ideas de Kieren, quien plantea que la interpretación básica [isla según Vasco] es la de los partidores (relación parte-todo). Más aún, Vasco plantea que la «isla» de los partidores es la más peligrosa por sus «arenas movedizas» (en tanto confusión entre operaciones físicas sobre objetos y los operadores conceptuales sobre magnitudes), pues dice que Kieren no distingue entre los sistemas simbólicos (las fracciones como figuritas) y los sistemas conceptuales (los fraccionarios), lo cual puede deberse según él, a que en inglés hay una sola palabra: «fractions» , que se usa para las fracciones y los fraccionarios.

Sin embargo, en los textos se ha interpretado la idea del MEN como la necesidad de trabajar desde lo numérico y en el uso de algoritmos, a lo cual se llega con excesiva rapidez y con escasa referencia a otras representaciones. En contraste, se plantean propuestas en las que se reconoce la necesidad de considerar las distintas interpretaciones de fracción (contextos que hacen significativa la noción) y sus interrelaciones, así como el hecho de que este proceso es a largo plazo (Kieren, 1976; Llinares y Sánchez, 1988; Maza y Arce, 1991), pues reconocen que desde las primeras experiencias de los niños con «mitades» y «tercios», relacionadas con la habilidad de reparto y el manejo de inclusión de clases, hasta el trabajo con razones y proporciones , que vincula no sólo la habilidad de comparar sino también el manejar dos conjuntos de datos al mismo tiempo, y del desarrollo del esquema de proporcionalidad, existe un largo camino por recorrer (Maza y Arce, p. 53).

Una limitante para la divulgación del conocimiento sobre el aprendizaje de las fracciones puede ubicarse en que este conocimiento no ha sido involucrado en las propuestas de enseñanza divulgadas en los textos, tanto del MEN, como de las editoriales que publican textos de matemática escolares para la educación básica, ni ha sido abordado en el trabajo que desde las facultades de educación de las universidades se hace en la formación de profesores de matemáticas.

4.4 INTERPRETACIONES DE LA FRACCIÓN

En un curso de décimo grado, se le pide a los estudiantes que representen en la recta numérica la expresión 3/2. Uno de ellos pasa al tablero y realiza la siguiente representación:



Como se mencionó en la sección anterior, la fracción suele trabajarse como operador, con algunas referencias a la relación parte-todo, pero pocas veces se trabaja con sus diferentes interpretaciones, a pesar de que se reconoce las dificultades que encuentran los estudiantes al abordarlas.

Cada vez es mayor el número de investigaciones que dan cuenta sobre las dificultades que tienen los estudiantes con las fracciones. En el libro "Fracciones: la relación parte- todo" (Llinares y Sánchez, 1988) se analiza detalladamente este tema, planteando la necesidad que los profesores conozcan las diversas interpretaciones del concepto y desarrollen en las clases secuencias de enseñanza tendientes a proporcionar a los niños la experiencia suficiente con cada uno de los muchos contextos que hacen significativa la noción de fracción, pues presentar solamente una única interpretación conduciría a los niños a un conocimiento atrofiado, sin una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción. Plantean, teniendo en cuenta los trabajos de varios investigadores, que estas diferentes interpretaciones (p.55), se refieren a:

a) La relación parte-todo y la medida
   - a.1 Representaciones en contextos continuos y discretos
   - a.2 Decimales
   - a.3 Recta numérica

b) Las fracciones como cociente
   - b.1 División indicada
   - b.2 Como elemento de un cuerpo cociente

c) La fracción como razón
   - c.1 Probabilidades
   - c.2 Porcentajes

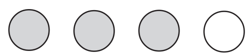
d) La fracción como operador

Las diversas interpretaciones presentadas, se apoyan en los trabajos de Novillis (1.976), quien en una tentativa para especificar estados en la comprensión de las fracciones, construyó una jerarquía de algunos conceptos de fracción, fundamentada en trabajos de investigación y, en particular, apoyado en las respuestas dadas por los niños, planteando dos niveles fundamentales. El primero, la fracción como relación parte-todo, trabajada en el modelo de área (denominado por él parte-todo, asociando la fracción con el área de una parte de la figura) y en el modelo discreto (denominado por él parte-grupo, que relaciona los elementos de un subconjunto con los del conjunto); el segundo, la fracción como razón, que expresa la comparación entre dos superficies (modelo de área) o conjuntos (modelo discreto). Además de los modelos de área y discreto, presenta el modelo de la recta numérica. Una de las conclusiones que establece es que estos dos modelos son requisitos previos para el trabajo con la recta numérica.

Niveles propuestos por Novillis (1976):

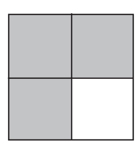
Nivel 1:

- ***Estructura a.*** Parte-grupo, partes congruentes. El estudiante asocia la fracción a/b con un conjunto de b objetos congruentes, de los cuales se toman a elementos, o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

  Ejemplo: 

  Lo que representa que ¾ de los objetos están sombreados.

- ***Estructura b.*** Parte-todo, partes congruentes. El estudiante asocia la fracción a/b con una región geométrica que está dividida en b partes congruentes, de las cuales se toman o sombrean a partes, o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

  Ejemplo: 

  Representa que ¾ de dibujo está sombreado.

Nivel 2:

- ***Estructura a.*** Parte- grupo, partes no congruentes: El estudiante asocia la fracción a/b con un conjunto de b objetos no congruentes, de los cuales se han sombreado a, o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

Ejemplo: 

¾ de los objetos están sombreados.

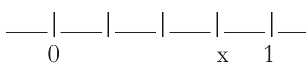
- ***Estructura b.*** Comparación parte - grupo: El estudiante asocia la fracción a/b con la comparación relativa de dos conjuntos A y B, donde n(A)= a y n(B)=b, y todos los objetos son congruentes.

Ejemplo:

Conjunto A Conjunto B

El conjunto A es como ¾ del conjunto B.

- ***Estructura c.*** Recta numérica: El estudiante asocia la fracción a/b con un punto en la recta numérica, donde cada segmento de unidad está dividido en b segmentos de recta equivalentes, de los cuales a representa el punto marcado a la derecha de cero; o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar esta relación.

Ejemplo: 

El punto sobre la recta numérica marcado con x puede ser llamado ¾.

- Estructura d. Comparación parte- todo: El estudiante asocia la fracción a/b con la comparación relativa de dos regiones geométricas A y B, donde el número de partes congruentes en A es a y el número de partes congruentes en B es b y las partes de las figuras A y B son congruentes.

Ejemplo:

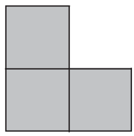


Figura A

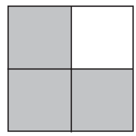
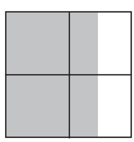


Figura B

La figura A es como ¾ de la figura B.

- ***Estructura e.*** Parte- todo. El estudiante asocia la fracción a/b con una región geométrica, la cual está dividida en b partes, que son congruentes en área pero no en forma, a de los cuales son consideradas; o asocia al mismo tiempo dos o más modelos para representar la relación.

Ejemplo:



¾ de la figura está sombreada

Es bastante usual que en un texto hable de la relación parte-todo, sin dar una definición conceptual, o una delimitación de ella. En este escrito, dicha idea está relacionada con las habilidades que se tengan con los atributos de dicha relación, que se explicitarán en lo que sigue.

La relación parte-todo

Cuando se piensa en un pedazo de torta o una parte de la hoja, no necesariamente se le asocia la idea de "igualdad" en cuanto tamaño, hecho que sí es fundamental en el contexto aritmético.

El niño tiene un contacto relativamente cercano con la relación parte-todo, en tanto expresiones que la involucran hacen parte del lenguaje infantil desde muy temprana edad. Dado que las primeras aproximaciones que el niño realiza a esta noción son cualitativas, se debería introducir la estimación en el proceso de enseñanza de las nociones iniciales sobre fracciones, con el propósito de favorecer la formación de "estructuras operativas" necesarias para que aborde la resolución de situaciones problema en las cuales esté implícita la noción de fracción.

A continuación presentamos los atributos relevantes en los cuales se apoyan las aproximaciones cuantitativas del niño al manejo de la relación parte-todo en contextos continuos-área (Llinares y Sánchez, p.80-81), los cuales pueden constituirse en un referente importante para orientar el trabajo en el aula:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.

2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El «todo» se puede dividir en el número de partes pedido.

3. Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pide dividir un pastel entre tres muñecos, cortan tres trozos e ignoraban el resto.

4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Los trozos -partes- son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño -congruentes-

6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).

7. El «todo» se conserva.
8. Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones.

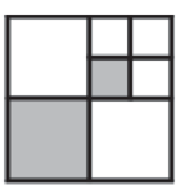
9. Las relaciones parte-todo en contextos contínuos y discretos.

10. Las fracciones mayores que la unidad.

11. Subdivisiones equivalentes.

Sin embargo el manejo adecuado de los símbolos relacionados con las fracciones requiere de un avance progresivo para evitar tropiezos a los niños y jóvenes. Por ejemplo, las respuestas dadas a la siguiente pregunta son manifestaciones de esta dificultad:

¿Qué fracción representa la parte sombreada en la siguiente figura?:

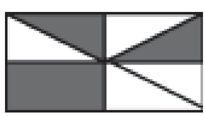


Algunas respuestas son:
* **2/5** [... porque hay dos negras y cinco blancas]
* **2/7** [... porque tomo dos de las siete que hay]

La primera respuesta refleja que la expresión 2/5 no se está reconociendo propiamente como una fracción, sino como relación entre dos cantidades (2 cuadros negros y 5 blancos). En la segunda se refleja un desconocimiento sobre la necesidad de que las partes sean «congruentes», no necesariamente de la misma forma pero sí con igual superficie. Esto podría ser "inducido" por el tratamiento metodológico dado en los libros de texto y en el aula de clase, en tanto no se tematiza sobre este particular (se asume implícitamente la congruencia), y sólo se hace énfasis en tomar un determinado número de "pedazos" de un todo, el cual pocas veces se explicita.

Avances en el uso de la sintaxis usual. En cuanto a la construcción de la escritura para la relación parte-todo, en varios trabajos orientados por el profesor Mora[2] (1997-1999) se ha encontrado evidencia sobre una secuencia que permite describir el avance de los niños para lograr la sintaxis usual en el contexto de la interpretación parte-todo. En tal secuencia se encuentran las siguientes etapas, como se ejemplifica a continuación a partir de la siguiente actividad propuesta a los niños :

> "Escriba en palabras y en número a qué parte de área corresponde la región sombreada"



1. Ausencia de conteo con los números naturales. Se manifiesta en respuestas como:

[2] Estos trabajos han sido realizados por estudiantes del Proyecto Curricular de Posgrado en Educación Matemática de la Universidad Distrital, con niños de Santa Fe de Bogotá, bajo la dirección del profesor LUIS ORIOL MORA.

2º, 4º y 5º
(haciendo referencia a la posición en que se ubican los cuadros sombreados, en relación con un orden dados por él a las partes o trozos de la figura).

2. Conteo con números naturales. Se evidencia en respuestas como:
   3 (correspondiente al número de cuadros sombreados, a la parte sombreada en relación al todo que se plantea).

3. Conteo contrastando partes sombreadas con partes no sombreadas (relaciona parte con parte). Se refleja en respuestas como:
   3 4 ; 3, 4 ; 3 y **4 ; 3 N** (negras)**- 4 B** (blancas) ; **3/4 .**

4. Reconocimiento de la escritura que relaciona la parte con el todo. Por ejemplo, con respuestas como:
   $\frac{3}{7}$ ó $\frac{7}{3}$ (a veces coexisten estas dos formas de escritura).

5. Reconocimiento en la forma de escritura usual. Representa la región sombreada como $\frac{3}{7}$.

Las anteriores respuestas corresponden a niños que no tienen en cuenta el área, sino los trozos (las partes, sin tener en cuenta la congruencia en área). Para quienes reconocen área, curiosamente la primera etapa, de las descritas anteriormente, no se presenta. En la segunda hay respuestas como 4; en la tercera etapa plantean respuestas como: 4, 4 ; 4N, 4B ó 4/4; en la cuarta responden 4/8 ; 8/4 ; 1/2 ó 2/1. En la última etapa, 4/8 ó 1/2.

En los mencionados trabajos de grado, se ha observado que los niños de primaria se desenvuelven en las tres primeras etapas, mientras que los niños de sexto lo hacen desde la segunda hasta la cuarta etapa, y en el grado octavo algunos jóvenes tienen la escritura que relaciona parte con parte y otros, la mayoría, la que relaciona parte con todo (escriben p/t ó t/p). La existencia de estas etapas secuenciales hace que la introducción de la escritura usual de las fracciones, como relación de la parte con el todo, en la primaria sea inadecuada, pues como lo muestran los resultados de estas investigaciones, el significado que tiene para los niños el símbolo de la fracción, es relación partes contra partes. Por tanto el estudio de las fracciones en la primaria no debe centrarse en el trabajo con algoritmos numéricos (para esto se requiere de la escritura usual, precisa), sino más bien propiciar procesos encaminados a la adquisición de la sintaxis, para lo cual se propone el trabajo alrededor de la resolución de problemas que impliquen reparto y medida, haciendo uso del lenguaje corriente, mediatizado por representaciones, que desde la teoría y experiencia han cobrado una reconocida necesidad e importancia.

En los trabajos mencionados también se reportan niveles en la construcción por parte de los estudiantes (niños y jóvenes) de otro de los atributos en los cuales se apoya la noción de fracción en su aspecto parte-todo, la necesidad de considerar la unidad dividida en partes congruentes o trozos iguales bajo la relación de equivalencia en juego (en este caso, igualdad en área), es decir, dos trozos son congruentes si tienen igual área. En tales etapas, respecto del trabajo de los estudiantes, podemos observar:

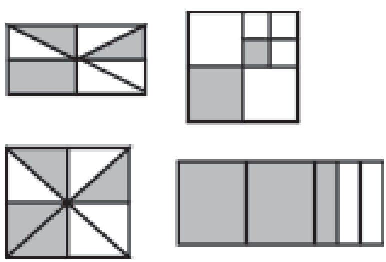
Nivel 0. No hacen divisiones sobre la unidad

Nivel 1. Dada una unidad que no está dividida, hacen divisiones en partes congruentes para obtener una parte fraccionaria de ella.

> Por ejemplo, realizan adecuadamente la siguiente actividad: *Sombree la superficie que se indica: Un cuarto del rectángulo.*

Nivel 2. Dada una unidad dividida en partes no congruentes, reconocen medidas diferentes para las partes.

> Por ejemplo, en la siguiente actividad: *Escriba en palabras y números a qué parte del área corresponde la región sombreada.*



> Con respecto a cada una de las figuras, dan respuestas como:
>
> • 4/4, 4/8 ó 1/2
> • 5/11 ó 5/16
> • 4/4 , 4/8 ó 1/2
> • 7/9 ó 7/2 ó 21/3

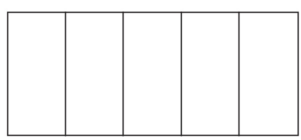
Nivel 3. No confunden la relación de congruencia en área con la de conjuntos discretos.

Por ejemplo, cuando se les proponemos actividades como: Escriba en palabras y números a qué parte del área corresponde la región sombreada:

Pueden reconocer que la figura no sombreada equivale, en área, a la figura sombreada de menor superficie y establecer la relación entre el área de la parte no sombreada con el área de las figuras sombreadas.

Nivel 4. Dada una unidad dividida en trozos congruentes (en área), pueden hacer nuevas subdivisiones de la unidad.

Por ejemplo, pueden resolver adecuadamente la siguiente actividad: *Sombree la superficie que se indica: Un sexto del rectángulo*



Nótese, que en este caso, el estudiante debe realizar una nueva distribución, en seis partes congruentes, pues la figura se le da dividida en cinco partes.

Es preciso destacar que en una de las indagaciones realizadas con estudiantes de grado noveno, reportan que menos de la cuarta parte de los estudiantes ha alcanzado la última etapa en el manejo de las áreas, etapa sin la cual, según lo plantean, no hay comprensión del algoritmo para sumar fracciones heterogéneas.

4.5 PROPUESTAS DE TRABAJO EN EL AULA

Una vez presentados algunos referentes teóricos, tiene sentido describir, aunque sea de manera general, propuestas alternativas para el trabajo con fracciones.

Propuesta de Llinares y Sánchez. En su trabajo (p. 26 y 32) destacan la opinión de Freundenthal (1976), quien considera que debido al éxito que pueden tener los niños pequeños cuando trabajan intuitivamente con fracciones, los maestros hacen una introducción prematura de los algoritmos, dando lugar a dificultades de aprendizaje; por lo que recomienda que dentro de la aritmética elemental sólo debe abordarse aquella parte de las fracciones que sea accesible por métodos intuitivos, dejando otros aspectos para considerar dentro del álgebra. Partiendo del trabajo cotidiano, a partir del material concreto (entre el cual sugieren el uso de materiales didácticos[3] como las Regletas de Cuisenaire, los tangramas, folios y fichas), presentan una secuencia de actividades tendientes a adquirir habilidades en la relación parte-todo, a través de las representaciones sugeridas y categorizadas por Novillis. Su propuesta podría resumirse en el trabajo permanente de interrelación entre cuatro tipos de expresiones de fracciones:

- Expresión de las relaciones de reparto con el trabajo concreto (con folios, regleta, telas, etc.).

3 Quizás sea más adecuado llamarlo material *didactizable*, por cuanto éste no se constituye en didáctico por sí mismo; es el profesor o quien orienta la actividad el que lo hace tal.

- Expresión de las relaciones de reparto a través del lenguaje cotidiano (las dos terceras partes).
- Expresión de las relaciones de reparto a través de representaciones gráficas.
- Expresión de las relaciones de reparto a través del lenguaje matemático (son los 2/3 del área).

Es importante tener en cuenta que los autores no presentan una secuencia didáctica específica, sino que describen los elementos que debería tener dicha secuencia. No obstante, dicho conocimiento debería hacer parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Propuesta de Adalira Sáenz. Propone el desarrollo de habilidades con modelos (área y discreto), sugiriendo la siguiente secuencia:

- Trabajo desde lo gráfico. Inicialmente se sugiere realizar replicas de dibujos dados (rectángulos, círculos y triángulos) en los cuales se sombrean algunas de sus partes (las cuales son inicialmente congruentes en forma y área, y luego congruentes sólo en área). Además del trabajo de medición que esto implica.

- Divisiones y subdivisiones de figuras (en modelo de área).

- Reconocimiento, en los diferentes gráficos, de las relaciones parte con parte y parte con todo, tanto en forma verbal como escrita (inicialmente sólo en palabras).

- Trabajo de las actividades anteriores con conjuntos discretos.

- Representaciones numéricas, ligadas a representaciones en lengua materna. Se trabaja con figuras divididas en partes congruentes (en área), por ejemplo, en tres partes, de las cuales dos están sombreadas, para asociarles la expresión dos tercios (2/3), como manera de describir la relación entre la parte sombreada y el todo.

En el Proyecto Curricular de Posgrado en Educación Matemática, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, como se mencionó anteriormente, se han desarrollado varios trabajos de grado en los que se reporta no sólo algunas dificultades de los niños, en relación con el trabajo en fracciones, sino que también se proponen instrumentos de indagación y elementos para el diseño de propuestas de aula, los cuales, junto con la bibliografía que aquí se referencia, pueden ser consultadas para ampliar varios de los aspectos tratados en este escrito. En particular, Lascano et al. (1999), en su trabajo de grado titulado "Una secuencia didáctica para la enseñanza de las fracciones como relación parte todo: Reporte de una experiencia", diseñan 10 actividades que constituyen la propuesta didáctica para potenciar habilidades en atributos específicos y reportan el desarrollo de dicha secuencia con estudiantes de séptimo grado, así como los logros y dificultades encontradas. En particular, para el trabajo con las representaciones, se hace un reconocimiento de la necesidad inicial de potenciar la habilidades de dibujo (por ejemplo, para graficar un rectángulo con las medidas pedidas y las divisiones de antemano pensadas), empleando instrumentos de medida. En este trabajo se toman elementos tanto de la propuesta de Llinares y Sánchez, como de la propuesta de Sáenz presentadas anteriormente.

Finalmente, es necesario reconocer que dentro del proceso constructivo de la relación parte-todo, el trabajo con subdivisiones resulta fundamental para el desarrollo de habilidades con fracciones equivalentes (como lo sugieren Kieren y Llinares y Sánchez, entre otros) y con las representaciones asociadas a ellas (decimales, porcentajes,...), pues, por ejemplo, se constituye en elemento básico para trabajar la densidad de los números racionales. Este aspecto, es tratado con cierto detalle por Maza y Arce (1991, p. 81-102).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KIEREN, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instruccional Foundations of Rational Numbers. Citado por LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. (1988).

LASCANO, M, MARTÍNEZ,C y PERILLA, E. (1999). Trabajo de Grado (Especialista en Educación Matemática). Santa Fe de Bogotá. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Posgrado en Educación Matemática.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. (1988). Fracciones: La Relación Parte -Todo. Madrid: Síntesis.

MAZA, C. (1991). El contexto numérico: Las fracciones; p. 81-103. En : MAZA, C. y ARCE, C. Ordenar y Clasificar. Madrid: Síntesis.

NOVILLIS (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies; p. 131-144. En : J. Res. Math. Ed. Vol. 7. Stud. Math. Citado por BELL, A; COSTELLO. J. and KÚCHEMANN, D. (1983). A Review of Research in Matematical Education. Windsor: NFER-Nelson, p. 119-121.

SÁENZ, A. (1998). Proyecto de aritmética: Bingo con fracciones. Material multicopiado. Santa Fe de Bogotá: Duodécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

VASCO, C. (1994). El archipiélago fraccionario; p. 23-45. En : MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Un nuevo enfoque para la Didáctica de las Matemáticas. Vol. 2. Santa Fe de Bogotá: MEN.