¿CÓMO INTRODUCIR LA NOCIÓN DE FRACTAL? UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Daysi Julissa García Cuéllar, Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP (Perú).
garcia.daysi@pucp.pe, jvflores@pucp.pe.

RESUMEN: Fractales, es un concepto con cierto grado de complejidad. Sin embargo, se pueden introducir esta noción de una manera sencilla en el aula de matemática en el nivel de secundaria. El presente artículo es un reporte de un taller realizado en la RELME 30. Su propósito fue desarrollar actividades sobre los fractales para el aprendizaje de esta noción. Algunas actividades presentadas fueron deducir progresiones que resultan a partir de su construcción, construir fractales con la técnica del kirigami, así como actividades en entornos de geometría dinámica como es el Geogebra. Se presentaron fractales como el conjunto de Cantor, la construcción del triángulo de Sierpinski y la curva de Koch.

Palabras clave: geometría, fractales, progresiones

ABSTRACT: Fractals, is a concept with a certain degree of complexity. However, this notion can be introduced in a simple way in the math classroom at the secondary school. This article is a report of a workshop held at the 30th RELME. Its purpose was to develop activities on fractals to learn this notion. Some of the activities were to deduce progressions that result from their construction; to construct fractals with the kirigami technique, as well as activities in of dynamic geometry environments such as GeoGebra. Fractals such as the Cantor set, the construction of the Sierpinski triangle and the Koch curve were presented.

Key words: Geometry, fractals, progressions

Introducción

Los investigadores Oviedo, Kanashiro y Colombini (2004) explican que, “El término Fractal está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero. Este término es atribuible a Benoit Mandelbrot quien lo empleó para definir ciertos conjuntos de números que describen objetos con dimensión fraccionaria” (p. 11).

Así mismo, los investigadores mencionan que los fractales son formaciones gráficas que muestran procesos iterativos que tienen una característica en común: repiten procesos infinitos. Por tanto, podemos concebir una construcción fractal como una figura auto- semejante, es decir, todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas. Los fractales tienen propiedades específicas de alto valor matemático:

Los fractales son construcciones que se generan a través de iteraciones sucesivas, la construcción de un fractal implica la ejecución de un algoritmo que se repite indefinidamente. Son objetos que se identifican gráficamente y brindan un acercamiento analítico que posibilita explicar sus comportamientos y tienen dimensión fraccionaria.

Acerca de los Fractales

Consideramos que al trabajar con modelos fractales que son finitos nos dará idea del fractal genuino que es infinito. Los fractales son importantes porque tienen diversas y destacables aplicaciones, como por ejemplo en la medicina, en la meteorología, la economía e incluso en la misma naturaleza, como mostramos en la Figura 1.

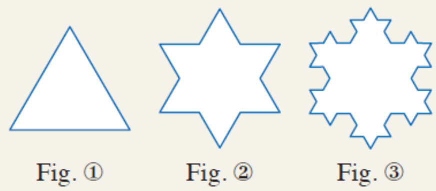
Figura 1. Aplicación de los fractales en diversas áreas. Fuente: recuperado de: goo.gl/MUI7Wp

La noción de fractal se ha ido introduciendo en el currículo de matemática de diferentes países de Latinoamérica y específicamente en el Perú. Tal es así que en el texto del área de matemática del VII ciclo de Educación Básica Regular del Ministerio de Educación del Perú-MINEDU, texto para estudiantes de 13 a 14 años de edad, muestra actividades relacionadas a la noción de Fractal, como se muestra la Figura 2.

La matemática en el fractal de Koch

El fractal de Koch es un famoso fractal cuya forma es similar a un copo de nieve. Sus tres primeros desarrollos se muestran en las figuras de la derecha.

Observamos que la figura ① es un triángulo equilátero. Para construir la figura ②, se dividió cada lado del triángulo en tres segmentos y, tomando como base el segmento del medio, se construyó otro triángulo equilátero borrando luego dicha base. Este proceso se repitió para construir la figura ③.



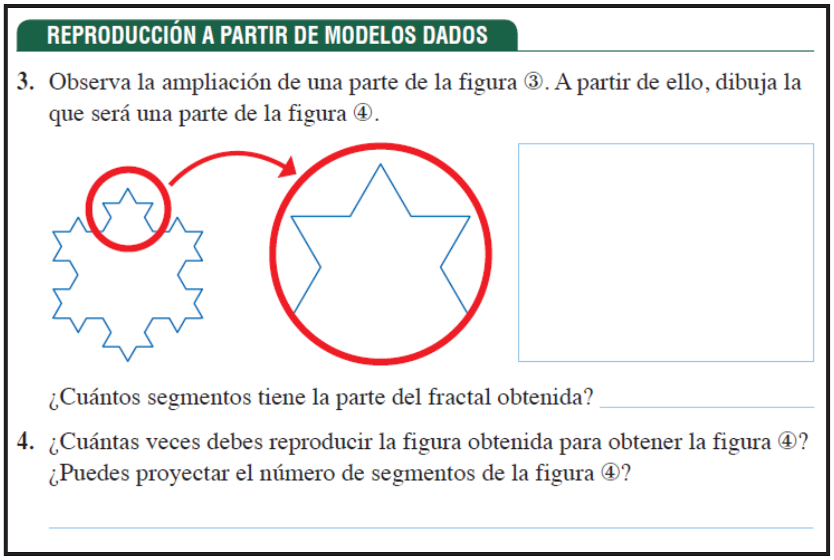
Considerando el patrón de la construcción, dibuja la figura ④ y cuenta el número de segmentos que tiene. Verifica tu solución utilizando una expresión matemática que permita calcular el número de segmentos de una figura *n*.

Manos a la obra

¿Cómo podrás describir la formación de cada fractal? ¿Qué características del fractal debes tener en cuenta para dibujar el fractal de la figura ④? ¿Cómo podrás verificar la precisión de tu dibujo?

Figura 2. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU. Fuente: Perú (2016, p.140)

Como se evidencia, en la figura anterior, se presenta el fractal de Koch donde los estudiantes deben describir la formación de cada fractal, identificar sus características, así como la reproducción de un modelo dado. Sin embargo, no se menciona qué es un fractal. Ello se puede observar también en la siguiente actividad que muestra la Figura 3.


REPRODUCCIÓN A PARTIR DE MODELOS DADOS

3. Observa la ampliación de una parte de la figura ③. A partir de ello, dibuja la que será una parte de la figura ④.

¿Cuántos segmentos tiene la parte del fractal obtenida? ______

4. ¿Cuántas veces debes reproducir la figura obtenida para obtener la figura ④? ¿Puedes proyectar el número de segmentos de la figura ④?

Figura 3. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU. Fuente: Perú (2016, p.140)

Por lo anterior, el taller tuvo tres objetivos fundamentales: Realizar actividades que permitan introducir la noción intuitiva de recursividad e infinito que son características de los fractales, reflexionar sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria y mostrar cómo otros contenidos se pueden abordar a partir de las características de los fractales como progresiones geométricas, área, perímetro y operaciones con fracciones, como se muestran en las figuras 5; 7 y 10.

Desarrollo del taller

El taller tuvo tres tipos de actividades:

a) *Actividades introductorias***,** en las cuales se presentaron la manera introducir intuitivamente la noción de fractal, cómo se presenta en los libros de texto de secundaria y cómo este tópico es evaluado en los exámenes de ingreso de algunas universidades. Cabe resaltar que estas actividades toman como base las actividades del trabajo de Estrada (2004).
b) *Actividades con la técnica de Kirigami* (doblado y corte de papel), en las cuales se construyeron el triángulo de Sierpinski y el conjunto de cantor, entre otros.
c) *Actividades con Geogebra:* Se propusieron actividades para inducir la noción de intuitiva de la recursividad y el infinito.

Las actividades se desarrollaron en dos sesiones de 90 minutos cada una. En la primera sesión se desarrollaron actividades de introducción a la noción de fractales y las primeras construcciones de fractales con la técnica de Kirigami. En la segunda sesión, continuamos con la actividad de construcción de fractales con las técnicas del Kirigami y con el uso de Geogebra.

Las actividades

A continuación se presentará una actividad por cada tipo, mencionado anteriormente, que se desarrollaron en el taller.

Actividad introductoria

Tuvo como objetivo introducir la noción de fractales. Dado que Fractal está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero.

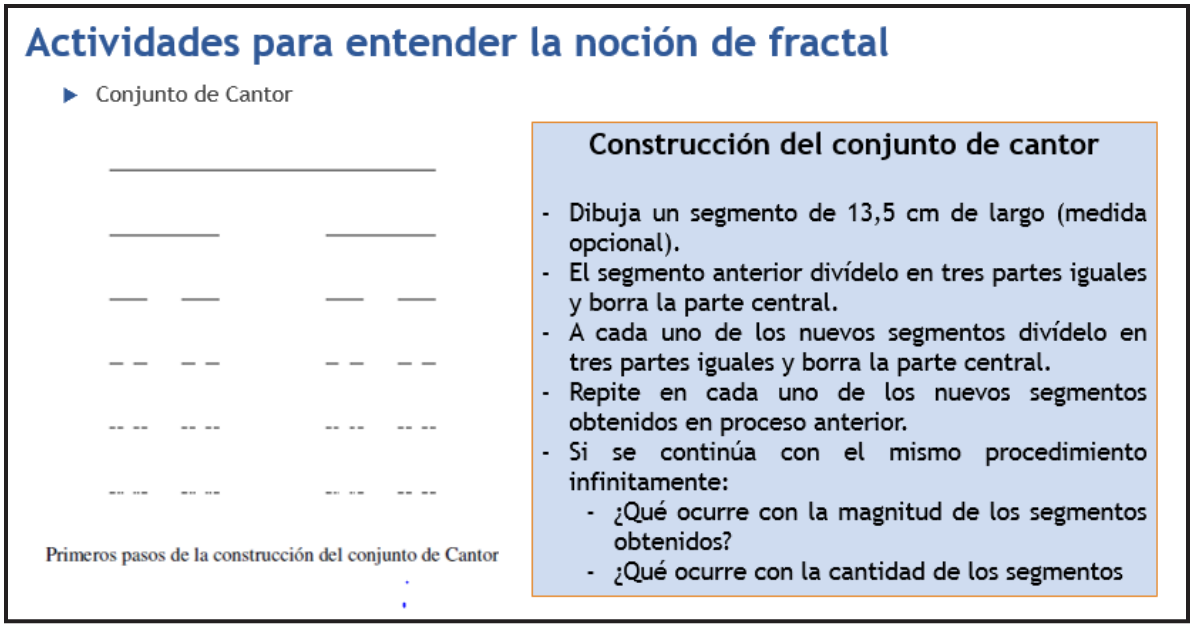


Figura 4. Actividad introductoria presentada a los participantes.

Se deseaba que los docentes participantes reconocieran cada parte de los segmentos que se dividió el segmento inicial reconociéndolo como la unidad, como se muestra en la siguiente figura:

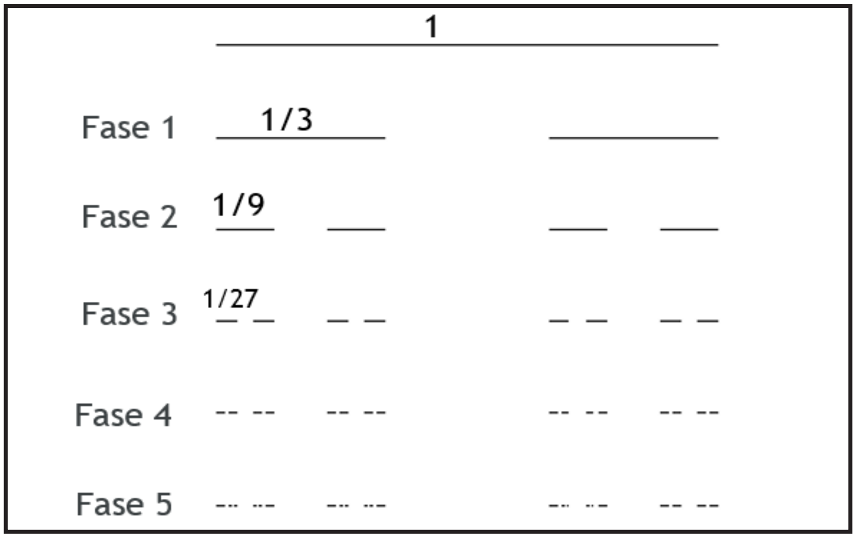


Figura 5. Reconociendo la medida de cada segmento dividido

Los docentes realizaron la división del segmento dado inicialmente, con el uso de compás, reglas y una docente hizo las divisiones utilizando el teorema de Thales, ya que el segmento no era de medida exacta para cada partición que se solicitaba del segmento. Esto último se muestra en la siguiente figura:

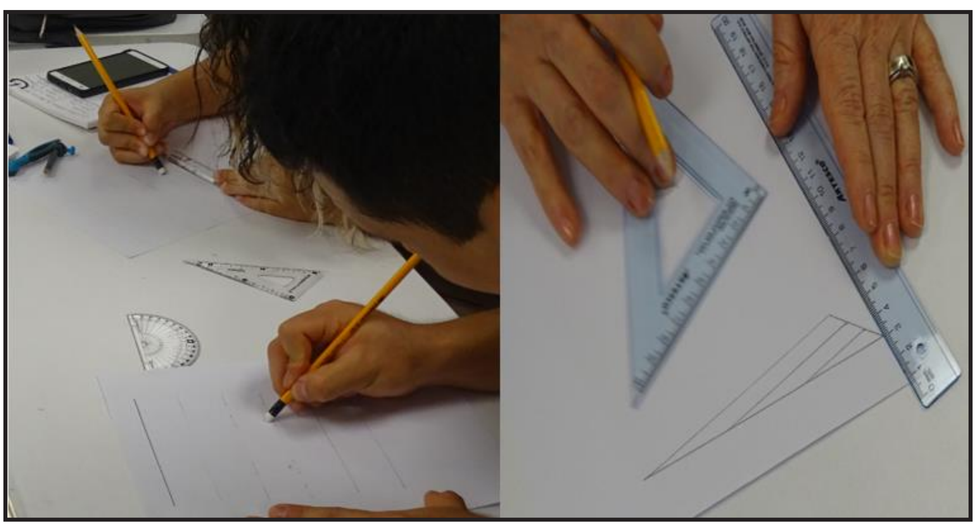


Figura 6. Docentes participantes realizando la primera actividad.

Para finalizar esta actividad los docentes participantes, completaron un cuadro a partir de sus observaciones y dedujeron patrones, como se muestra a continuación:

Actividades para entender la noción de fractal

- Conjunto de Cantor

Completar la siguiente tabla

Fase	1	2	3	4	...	k	Conjunto de Cantor $k \to \infty$
Números de segmentos	2	4	8	16	...	2^k	
Longitud de cada segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	...	$\frac{1}{3^k}$	
Longitud total	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	...	$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$	0

Figura 7. Los docentes participantes buscan progresiones.

Actividad con material manipulativo

En este tipo de actividad, se realizaron las construcciones de los fractales conocidos como escalera de cantor, pirámide se Sierpinski, el libro fractal, entre otros.

Figura 8. Fractales elaborados por los docentes participantes.

El libro fractal fue la construcción más elaborada, pues cuenta con mayor número de pasos, pero para los docentes fue un reto que al final lograron realizar. En un primer momento hicieron las construcciones con una plantilla, después de reconocer la secuencia de la construcción pudieron realizar un libro fractal de la pirámide de Sierpinski.

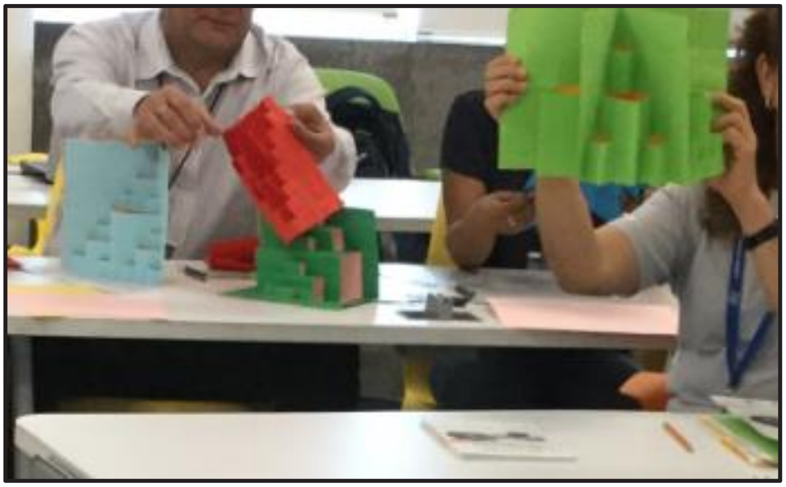


Figura 9. Docente presentando su libro fractal de la pirámide de Sierpinski.

Actividad con Geogebra

Esta actividad se basó en la presentación del triángulo de Sierpinski elaborado con Geogebra donde los docentes tenían que movilizar un deslizador, según ello se cambiaba de fase (cantidad de triángulos). Luego, tenían que responder a las preguntas que se muestran en la Figura 10. Tomando en cuenta que a partir de la segunda pregunta, se debía responder en relación a la medida del triángulo con mayor longitud de lado.

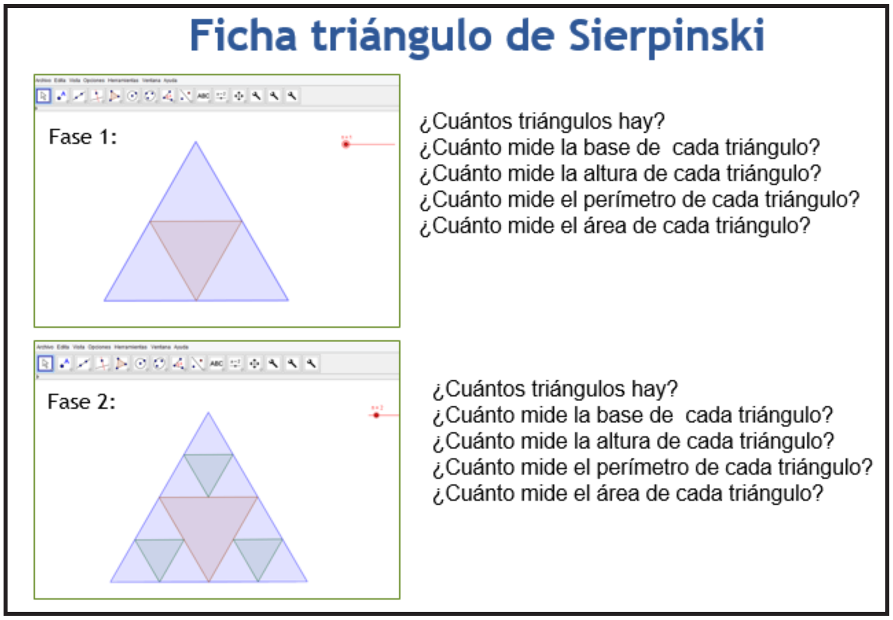


Figura 10. Actividad de triángulo de Sierpinski con Geogebra.

Consideraciones Finales

Consideramos que al concluir el taller los docentes participantes cuentan con herramientas para introducir, de manera sencilla, la noción intuitiva de recursividad e infinito que son características de los fractales, para llevarlos al aula con estudiantes de educación secundaria. Han podido vivenciar que las características de los fractales, permiten trabajar otras nociones matemáticas como progresión geométrica, área, perímetro y operaciones con fracciones.

Referencias bibliográficas

Estrada, F. (2004). *Geometria fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales*. Bogota: Editorial Magisterio.

Perú (2016). Ministerio de Educación del Perú. *Matemática 3*. Lima: Santillana.

Ovideo, L.; Kanashiro, A. y Colombini, M. (2004). *Fractales: un universo poco frecuentado*. Santa fe: Ediciones UNL.

Sabogal, S y Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal.* Bucaramanga: Ediciones UIS.