

## LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDEA DE ÁREA A TRAVÉS DE TRATAMIENTOS CUALITATIVOS Y CUANTITATIVOS: EL CASO DE ALUMNOS DE BACHILLERATO

**Jorge Alonso Santos Mellado, Claudia Margarita Acuña Soto**

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN. (México)

lonchoboy@yahoo.com.mx, claudiamargarita\_as@hotmail.com

**RESUMEN:** El presente trabajo de investigación, parte de la necesidad de considerar la naturaleza cualitativa y cuantitativa del área para su adecuado aprendizaje. Comúnmente se aborda el tema sin considerar sus aspectos cualitativos y cuantitativos simultáneamente. Es necesario que los alumnos integren aspectos de conservación de área, de medición de áreas y de fórmulas en un solo proceso más elaborado y esencial tanto para estudiantes de grados iniciales como para los de grados más avanzados. En educación básica, los estudiantes trabajan inmediatamente con operaciones y fórmulas para calcular áreas. Esto ocasiona que sus principales dificultades, con respecto a la noción de área, estén relacionadas con la incapacidad para cerrar la brecha entre la aproximación tradicional (expresada en el uso de fórmulas) y la aproximación cualitativa que manipula áreas sin el uso de números.

**Palabras clave:** visualización, área, conservación, manipulables.

**ABSTRACT:** The present research work, starts from the need to consider the area qualitative and quantitative nature for its adequate learning. The topic is usually focused without considering its qualitative and quantitative aspects simultaneously. Students need to integrate aspects of area conservation, area measurement, and formulas of a more elaborate and essential single process for both initial and advanced grade students. In basic education, students work immediately with operations and formulas to calculate areas. It causes that its main difficulties, with respect to the notion of area, are related to the inability to close the gap between the traditional approach (expressed in the use of formulas) and the qualitative approach that manage areas without using numbers.

**Key words:** visualization, area, conservation, manageable.

## ■ Introducción

Para llevar acabo nuestra investigación, partimos de una revisión de las investigaciones que se han hecho en torno al concepto de área. Hacemos un breve recorrido cronológico, así como una clasificación de los tipos de investigaciones realizadas. Dado que trabajamos con estudiantes del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF), hacemos una descripción de la institución y revisamos sus libros de texto en lo referente al tema que nos interesa. A partir de los elementos teóricos anteriores establecemos como objetivo para nuestra investigación el cerrar la brecha entre el enfoque cualitativo y el cuantitativo del concepto de área. Partimos de la hipótesis de investigación de que los estudiantes requieren desarrollar habilidades específicas para tratar figuralmente las representaciones gráficas de los objetos geométricos.

Además, proponemos como hipótesis de trabajo que una propuesta, para un adecuado aprendizaje del concepto de área, debe tomar en cuenta tanto elementos cualitativos como cuantitativos y debe integrar aspectos de transformación-conservación de área (comparación); de cálculo y medición de áreas y de deducción-utilización de fórmulas de áreas.

Diseñamos un instrumento de investigación que, inicialmente, ofrece diversas estrategias (cuantitativas y cualitativas) para cuantificar y comparar el área de figuras a partir de tres estrategias básicas. Posteriormente propone el problema de comparar el área de dos figuras. Dicho problema de comparación gradualmente se transforma en un problema de medición de áreas. La actividad muestra cómo el medir es un refinamiento del comparar y que puntos cruciales para poder transitar de la una a la otra son: el establecer una unidad de área y el desarrollar estrategias que permitan comparar la unidad de área con el área de una figura dada.

Planteamos como preguntas de investigación: (1) ¿Cuál es la idea de área que tienen nuestros estudiantes al iniciar el proceso de trabajo?; (2) ¿Cómo conciben los estudiantes la relación área-unidad de área? y (3) ¿Qué tipo de generalizaciones realizan los estudiantes al trabajar con las estrategias básicas de comparación de áreas? Como consecuencia de la puesta en marcha de las actividades diseñadas y de los datos recolectados, hacemos algunas consideraciones, establecemos nuestras conclusiones y respondemos las preguntas de investigación: (1) La mayoría de los estudiantes tienen una idea cuantitativa, asociada a fórmulas, mediciones, perímetro. (2) Los alumnos tienen una concepción del área de una figura como el número de unidades completas de área que caben en ella y no sólo eso, sino que persisten en tal concepción. (3) Los alumnos hacen generalizaciones incorrectas, basadas en casos particulares, al aplicar las estrategias básicas de comparación de áreas.

## ■ Marco teórico

Debido al enfoque cuantitativo y cualitativo de la investigación, un punto fundamental fue indagar sobre los elementos que podrían posibilitar a los estudiantes un adecuado aprendizaje del área. Dentro de

los elementos teóricos, que dan sustento a nuestra investigación, está la visualización. Ella es la base de un adecuado entendimiento de la noción de área. Un aspecto con especial interés con relación al área, es el de la visualización debido a las dificultades perceptuales que entraña (Kospentaris et al, 2011).

Damos un panorama general de la visualización de figuras geométricas en el sentido establecido por Duval (2003). Esta postura nos permite explicarla a partir de diferentes tipos de aprehensión.

#### Aprehensión perceptiva

Es la más elemental, la primera en ser usada en el transcurso de la etapa educativa y la primera que se desarrolla en la evolución cognitiva. Se refiere a la capacidad de reconocer formas ya sea en dos o en tres dimensiones. Este tipo de aprehensión, implica la capacidad de nombrar las figuras y de reconocer en una figura algunas de sus subfiguras (Deliyianni, Gagatsis, Monoyiou, Michael, Kalogirou y Kuzniak, 2009). También es llamada aprehensión icónica

#### Aprehensión discursiva

Es el proceso de relacionar las figuras geométricas con sus discursos y propiedades matemáticas e inversamente. Está relacionada con el hecho de que las propiedades matemáticas representadas en una figura no pueden ser determinadas a través de la aprehensión perceptiva, por ejemplo, al aprehender discursivamente el dibujo de un triángulo no sólo se le reconoce por su forma y se es capaz de nombrarlo, sino que también se perciben todas sus propiedades y se puede establecer un discurso con ellas. Este tipo de aprehensión implica conocer las propiedades de las figuras y saber que el aspecto perceptible de una figura depende de sus propiedades matemáticas (Deliyianni et al, 2009).

#### Aprehensión operatoria

Se produce cuando el sujeto es capaz de llevar a cabo alguna modificación, a la configuración inicial, para resolver un problema geométrico. Se añaden o quitan elementos, se manipulan la figura y sus componentes. Elia et al (2009) mencionan diversas modificaciones posibles. Por ejemplo, cuando a la figura inicial se le añaden trazos, cuando la figura se divide en partes y éstas se reconfiguran (modificación mereológica), cuando se hace una figura de mayor o menor tamaño (modificación óptica), cuando la figura se rota o se cambia de orientación (modificación de lugar). Todo esto, conservando las propiedades de la figura. Todas estas modificaciones pueden ser llevadas a cabo mental o físicamente a través de varias operaciones.

### Aprehensión secuencial

Se produce cuando el sujeto es capaz de elaborar una secuencia de instrucciones relativas al uso de instrumentos que permitan construir (o explicar cómo se construyó) una figura desde su inicio y no sólo secuenciar instrucciones para modificar una figura ya existente. En otras palabras, se produce cuando se tiene la capacidad de crear y no sólo de modificar.

El siguiente elemento teórico que discutimos es el de los conceptos figurales, dibujo y figura. Definimos conceptos figurales a partir de los componentes figurales y conceptuales que poseen las figuras geométricas y establecemos la diferencia entre dibujo y figura en el sentido establecido por Laborde y Capponi (1994), esta manera nos permite enfocarnos en los procedimientos que podrían construir aproximaciones cualitativas y cuantitativas del área. Posteriormente, hacemos ver que el saber reconocer los elementos o propiedades relevantes de las figuras es un proceso que se aprende y se enriquece con la mediación de artefactos y manipulables (Clements et al, 1999). Esto a su vez nos permite hablar de los manipulables como instrumentos de mediación semiótica que permiten formular y resolver problemas, es decir, no como meros medios de expresión, sino que son instrumentos para el trabajo matemático.

### ■ Método

El taller se llevó cabo en cuatro sesiones durante la semana del 12 al 16 de diciembre de 2011. Cada sesión tuvo una duración de 90 minutos. En el taller se hizo uso del geoplano. Los alumnos lo manipularon al realizar las actividades de tipo cuantitativo. Además, tuvieron el apoyo de un programa computacional que simula un geoplano. Al realizar las actividades con enfoque cualitativo, se trabajó con el recortado de papel, como una forma de recomposición y conservación del área, con el apoyo del *software* geométrico GeoGebra.

Nuestra investigación la realizamos en el plantel Iztapalapa III del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF), ubicado en la Colonia Miravalle de la delegación Iztapalapa del Distrito Federal. Trabajamos con un grupo de primer semestre de preparatoria. Dicho grupo cursaba en ese momento la asignatura de Matemáticas I. Tuvimos a disposición el horario destinado a la asignatura mencionada para implementar nuestro instrumento de investigación. Trabajamos con un grupo de entre diez y quince estudiantes por sesión, con edades entre los 15 y los 17 años.

Nuestro instrumento de investigación consistió de un taller expresamente diseñado, el cual se llevó a cabo en cuatro sesiones durante una semana. Cada sesión tuvo una duración de 90 minutos. Durante la implementación del taller participaron el profesor asignado al curso, un asistente y el investigador encargado.

El instrumento de investigación incluyó actividades, previamente diseñadas, que involucran tanto aspectos cualitativos como cuantitativos del concepto de área. Esto con el fin de cerrar la brecha entre el enfoque cualitativo y el cuantitativo con los que comúnmente se aborda el tema. Según hemos reportado en nuestro marco teórico y a través de nuestra hipótesis de investigación, una propuesta que tome en cuenta tanto elementos cualitativos como cuantitativos debe integrar aspectos de transformación-conservación de área (comparación); de cálculo y medición de áreas y de deducción-utilización de fórmulas de áreas.

Ahora bien, según una de nuestras hipótesis de trabajo, si los alumnos tienen las herramientas necesarias, es decir, si previamente han desarrollado la visualización (en su modalidad de aprehensión operatoria) de la figuras, a través de actividades expresamente diseñadas que involucran fuertemente el uso de artefactos como mediadores semióticos (software geométrico, geoplano, cortado de papel) y son capaces de reconocer los elementos o propiedades relevantes y significativos de las figuras, entonces están en condiciones de incorporar en un solo concepto de área tanto sus aspectos cualitativos como los cuantitativos.

El hecho de que nuestra hipótesis de trabajo requiera de actividades previas está respaldado por el marco teórico, pues con respecto a la visualización, tenemos que visualizar figuras en geometría es algo que se aprende a través de desarrollar habilidades específicas que permiten aprehender las figuras de diversas maneras (Duval, 1999). Por otra parte, es necesario que las personas construyan de manera consciente los componentes y propiedades relevantes de las figuras geométricas como objetos cognitivos. Este proceso requiere la mediación de artefactos y manipulables en las tareas de construcción física. Es importante aprender a hacer clasificaciones de figuras de acuerdo con sus atributos relevantes y, por lo tanto, un punto esencial de la educación es crear actividades que resalten los atributos relevantes de las figuras, lo cual será el inicio de una adecuada visualización matemática de dichas figuras (Clements et al, 1999). Este tipo de aprendizaje debió haberse construido en la infancia, aun así, debe ser reactivado para dar paso a un tratamiento figural.

Dado lo anterior, dividimos nuestro taller en dos etapas. En la primera, se involucra a los estudiantes en actividades geométricas en donde desarrollen la aprehensión operatoria y aprendan a reconocer los elementos relevantes de las figuras con respecto a su área. En tales actividades están presentes, en todo momento, los manipulables como elementos de mediación semiótica. La segunda etapa, basada en las habilidades y estrategias desarrolladas en la primera, integra tanto elementos cualitativos como cuantitativos en un solo concepto de área. La primera etapa consiste en actividades en las cuales los alumnos aprenden a calcular el área de figuras a través de familiarizarse con dos métodos distintos, los cuales están basados en las estrategias básicas de comparación y medición de áreas.

En el primer método o estrategia para calcular áreas los alumnos cuantifican el área de un triángulo, en términos de la unidad cuadrada, a partir de inscribirlo en un rectángulo y aplicar las estrategias básicas de comparación de áreas. Se inicia con triángulos rectángulos en los cuales es posible calcular directamente su área con sólo aplicar las estrategias básicas y posteriormente se cuantifica el

área de un triángulo cualquiera de forma indirecta, al inscribirlo en un rectángulo y aplicar varias veces la estrategia básica.

En el segundo método, los alumnos calculan el área de un triángulo. Primero obtienen a partir del triángulo, un paralelogramo con el doble de área. Luego el paralelogramo se transforma las veces que sea necesario en otro que conserva la base y la altura, y por lo tanto el área, del original. Posteriormente, el paralelogramo se transforma en un rectángulo de igual área, en el cual es posible cuantificar directamente su área en términos de la unidad de área. Finalmente, para obtener el área del triángulo original, se divide por dos el área obtenida del rectángulo.

En ambos métodos, en todo momento se discuten las dificultades que los alumnos enfrentan. En la figura 1, se presenta una descripción general de ambos métodos. La parte final de esta primera etapa consiste en aplicar un cuestionario con preguntas relacionadas con las estrategias desarrolladas y problemas donde requieren visualizar figuras geométricas para lograr responder adecuadamente.

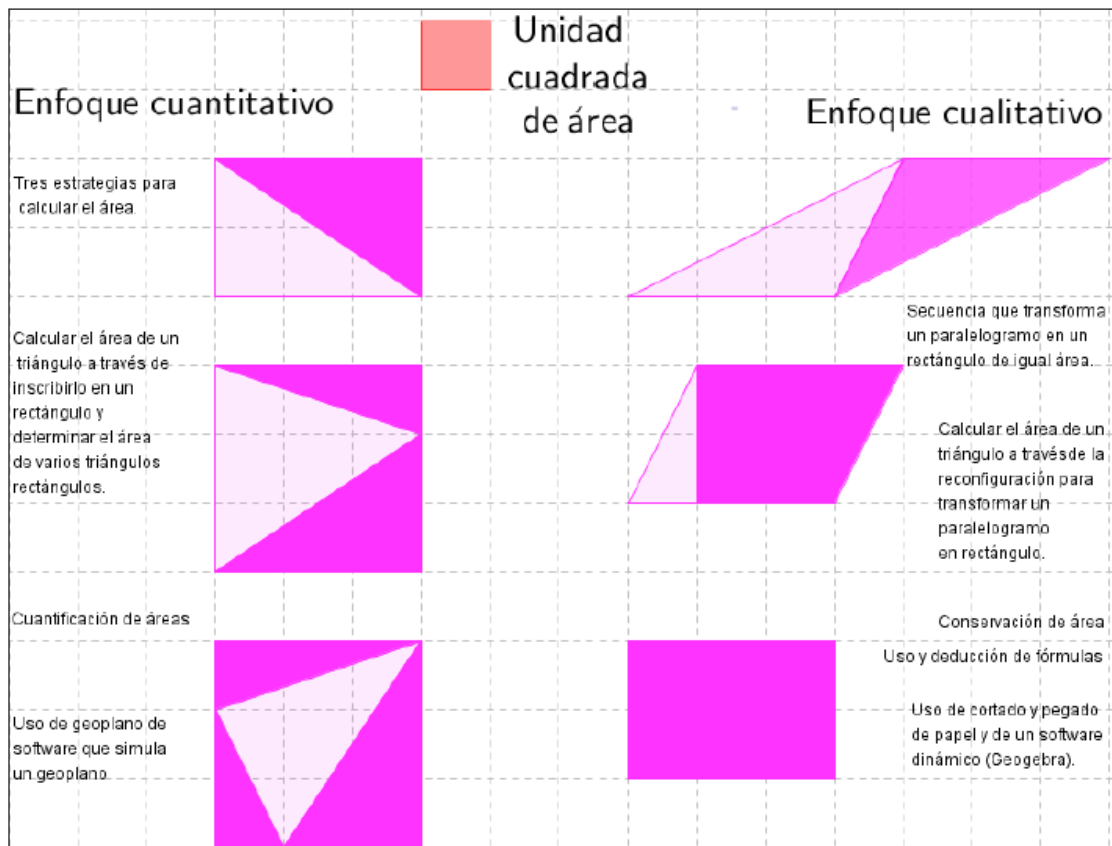


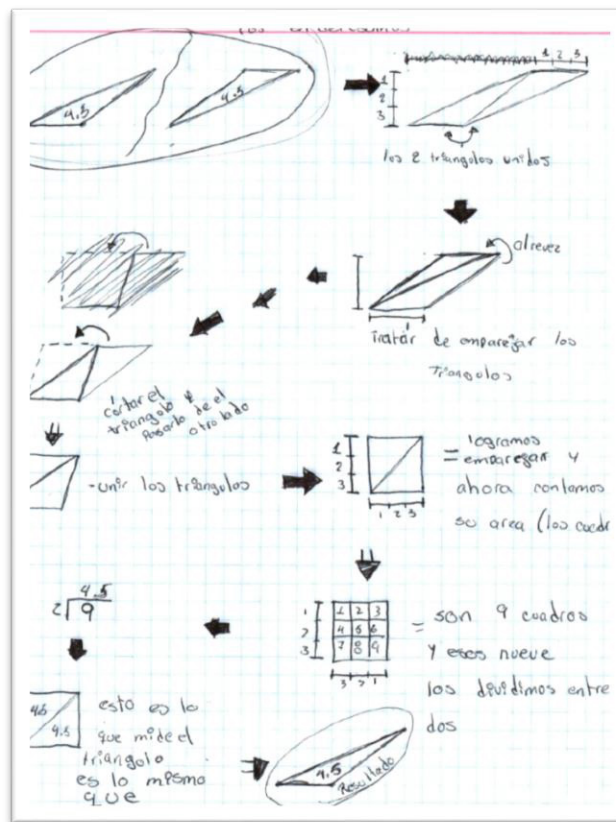
Figura 1. Descripción general de las dos estrategias empleadas. Fuente: Elaboración propia.

Esta segunda etapa consiste en una actividad que inicia con un problema concreto de comparar el área de dos figuras geométricas (dos triángulos). Gradualmente este problema motiva la necesidad de medir el área de una figura en términos de una unidad. Este problema, a su vez, conduce a la aplicación de las estrategias desarrolladas en la primera etapa, lo cual simplifica la medición del área de una figura en términos de la unidad. Finalmente se hace ver que el medir áreas es consecuencia del comparar áreas a través de una unidad y que la fórmula para calcular el área de determinado tipo de figuras, es consecuencia de que todas las figuras de ese tipo tienen propiedades o elementos en común. Se hace explícito que el comparar y medir áreas son procesos que están íntimamente relacionados y que dos elementos que están fuertemente involucrados en esa relación son la unidad y la conservación de área. Con esto se integran tanto aspectos cualitativos como cuantitativos del área en esta actividad. Es importante mencionar que esta actividad supone que los alumnos están familiarizados con diversos elementos que fueron presentados y desarrollados en la primera etapa.

### ■ Resultados

- Dotar a los estudiantes de diversas técnicas de comparación y de cálculo de áreas, permite una mejor comprensión de la noción del área de las figuras geométricas tanto en sus aspectos cuantitativos como en los cualitativos.
- Establecer de manera clara cuál es la función, utilidad y finalidad de una unidad de área es un elemento clave que favorece cierre la brecha entre el enfoque cuantitativo y el cualitativo de la noción de área.
- Un elemento que permite articular aspectos cualitativos con aspectos cuantitativos del concepto de área, es el utilizar estrategia de conservación de área no sólo para hacer ver que dos figuras de distinta forma pueden tener igual área, sino como una estrategia que permite transformar una figura en otra en la cual se simplifica el cálculo de su área. Es decir, la conservación de área también es una estrategia de cálculo de áreas.
- Las estrategias cuantitativas desarrolladas promueven la aprehensión operatoria de las figuras y son un buen instrumento que permite que los alumnos desarrollen y ejerciten la visualización de figuras geométricas. Es por esto que pensamos que actividades que involucran estrategias de este tipo son necesarias pues activan y estimulan mecanismos cognitivos que posteriormente permiten un mejor desempeño en tareas de visualización de figuras geométricas. Cabe aclarar que si bien en términos de estricto cálculo de áreas, este tipo de estrategia es menos eficiente que las cualitativas, su valor radica, como ya dijimos, en la visualización de figuras geométricas que propicia y estimula.
- Las estrategias cualitativas desarrolladas permiten no sólo calcular el área de figuras de forma eficiente, sino que permiten justificar el uso de fórmulas para calcular áreas pues muestran, por ejemplo, en caso de los triángulos, que las variables que aparecen en determinada fórmula son precisamente los elementos relevantes y que permanecen constantes al transformar la figura.

- Los alumnos descubren que, en cuanto a comparar o medir áreas, una cualidad o propiedad relevante de las figuras es el ángulo recto. Ellos descubren que conviene transformar la figura en otra que conserva el área pero que tiene propiedades en común con la unidad de área (un ángulo recto), pues esto permite medirlo muy fácilmente en términos de ella. Asimismo, se percatan que es fácil medir el área de una figura cuando comparte una propiedad o elemento (el ángulo recto) con la unidad de área. Los alumnos incorporan la conservación de área como una estrategia de comparación y medición de áreas. De esta manera, para determinar un elemento cuantitativo de una figura (su área, expresada en unidades cuadradas), recurren a propiedades cualitativas de la figura (la transforman en otra con igual área y con un ángulo recto). Esto se muestra en la figura 2.



**Figura 2.** Cálculo del área haciendo uso de estrategias cualitativas y cuantitativas. Fuente: Elaboración de un estudiante.

- Manipulables poco dinámicos les permiten a los alumnos comprender adecuadamente aspectos cuantitativos del concepto de área. Con el uso de este tipo de manipulables, como el



geoplano y un *software* que simula un geoplano, es posible calcular el área de figuras geométricas con estrategias cuantitativas. Estas estrategias se llevaron a cabo en la primera sesión de trabajo con los alumnos. Consisten en obtener el área de una figura a partir de obtener el área de algunos triángulos rectángulos y de un rectángulo y operar con ellas.

- Los manipulables dinámicos permiten comprender adecuadamente aspectos cualitativos del concepto de área. Con manipulables dinámicos, como el cortado y pegado de papel y un *software* dinámico como Geogebra, es posible calcular el área de figuras geométricas con estrategias cualitativas. Este tipo de estrategias se desarrollaron en la segunda sesión. Consisten en obtener el área de una figura a partir de transformarla en otra al reconfigurarla y trasladar sus subfiguras.
- Los alumnos fueron capaces de reconfigurar la unidad de área a través de manipular con el geoplano. No lo habían logrado hacer cuando sólo veían y escuchaban en el *software* geométrico. Esto pone de manifiesto lo reportado en el marco teórico: los manipulables tangibles, junto con el lenguaje ordinario y los símbolos matemáticos, permiten formular y resolver problemas. Por lo tanto, podemos decir que, efectivamente, los manipulables no son meros medios de expresión, sino que son instrumentos para el trabajo matemático y que utilizados en la situación adecuada, permiten percibir elementos que a su vez, posibilitan resolver determinados problemas.

## ■ Conclusiones

- La unión de materiales manipulables y tareas problemáticas pueden proveer ricas estructuras de validación a los estudiantes. El geoplano aunado a la tarea de calcular el área de un triángulo permiten crear argumentos para validar que no siempre que un triángulo esté inscrito en un rectángulo, tendrá la mitad de su área. El cortado de papel aunado a la tarea de calcular el área de un paralelogramo permiten validar la idea de que un paralelogramo tiene exactamente la misma área que un rectángulo de igual base e igual altura.
- Las estrategias básicas de comparación de áreas proveen, a los estudiantes, herramientas que les permiten abordar satisfactoriamente las tareas propuestas en el taller. Como ya se reportó en la sección anterior, los alumnos fueron capaces de determinar el área de las figuras (cuantitativa y cualitativamente) a través de aplicar las estrategias básicas. Si bien, en algunos casos, inicialmente se presentaron dificultades relacionadas con su adecuado uso (punto a tratar en la siguiente conclusión), se lograron superar. Es así que las estrategias básicas de comparación de áreas, pueden ser una herramienta útil para abordar el concepto del área, tanto en sus aspectos cuantitativos como en los cualitativos.
- El proceso de idealización de las estrategias básicas de comparación de áreas puede derivar en consideraciones equivocadas, como la realizada por algunos de nuestros estudiantes: “El área de un triángulo inscrito en un rectángulo es la mitad de la de éste.”

- Es posible cerrar la brecha entre el enfoque cuantitativo y el cualitativo e incorporarlos en un solo concepto de área. Esto, a través, de fomentar diversos procedimientos (unos enfatizan los aspectos cuantitativos y otros los cualitativos) que permiten calcular el área de figuras en términos de la unidad de área. Evidencia de esto son algunas de las respuestas (mostradas en las imágenes de la sección anterior) que los alumnos dieron cuando se les pidió que explicaran cómo calcularían el área de un triángulo. En ellas se puede apreciar que los alumnos integran tanto elementos cuantitativos como cualitativos.

### ■ Referencias bibliográficas

- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). New York: Macmillan.
- Clements, D. H.; Swaminathan, S.; Zeitler, M. A. y Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2), 192–212
- Deliyianni, E.; Elia, I.; Gagatsis, A.; Monoyiou, A. y Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students geometrical figure understanding. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Ed.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705). Lyon, France.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy. (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. (pp. 41-76.) Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.
- Elia, I.; Gagatsis, A.; Deliyianni, E.; Monoyiou, A. y Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. En M. Tzekaki, M.; Kaldrimidou, y C. Sakonidis (Ed.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 1-8). Thessaloniki, Greece: PME.
- Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 177–209
- Kospentaris, G.; Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 105–127
- Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (1), 165-210.