

EVOLUCIÓN DEL SIGNIFICADO DE ÁNGULO DE ESTUDIANTES DE 4° DE PRIMARIA

Sandra Milena Jiménez Ardila, Viviana Paola Salazar Fino, Leonor Camargo Uribe

Universidad Pedagógica Nacional. (Colombia)

mdma_smjimenez903@pedagogica.edu.co, mdma_vpsalazarf298@pedagogica.edu.co, lcamargo@pedagogica.edu.co

RESUMEN: Proponemos un análisis de la evolución del significado de atributo medible de un ángulo, a la luz de una teoría de mediación semiótica del profesor que recurre a elementos de la teoría del Signo trídico de Peirce. La propuesta de análisis se ejemplifica con nueve aproximaciones obtenidas de fragmentos de una clase de geometría con 40 estudiantes colombianos de 4° grado de Educación Básica Primaria.

Palabras clave: semiótica, evolución de significado, ángulo

ABSTRACT: We propose an analysis about evolution of the meaning of an angle measurable attribute, in the light of a theory of semiotic mediation of the teacher that resorts to elements of the theory of the triad Sign of Peirce. The proposed analysis is exemplified by nine approximations obtained from fragments of a geometry class with 40 Colombian students of 4th -grade Primary Basic Education.

Key words: semiotics, evolution of meaning, angle.

■ Introducción

En el sistema educativo colombiano el objeto ángulo se introduce desde los primeros años de Educación Básica Primaria (1° a 3°), haciendo una aproximación al mismo mediante situaciones de giro; luego, en grados siguientes (4° y 5°) se estudia haciendo referencia a aberturas, inclinaciones, puntas, esquinas, entre otros; en algunos casos, se hace referencia a su atributo medible. El acercamiento se lleva a cabo a través de situaciones estáticas y/o dinámicas, no siempre manteniendo una coherencia en el significado y la situación particular en la que se enmarca, y en ocasiones confundiendo el ángulo con su medida. El ángulo es uno de los objetos de la geometría cuyo significado causa mayor número de dificultades en la construcción de su significado, como lo referencian diferentes autores (Saa, Carrillo, Alarcón, Pelegrín, Sánchez y Carrillo, 1990; Mitchelmore & White, 1998, 2000; Rotaeche, 2008; D'Amore, Fandiño e Iori, 2014). Esto es debido a la multiplicidad de definiciones de dicho objeto y a que cada representación que hay del mismo, evidencia unos determinados aspectos del objeto, pero no todos.

Como parte de una investigación en curso, que se centra en la caracterización de la evolución de significados del objeto ángulo que desarrollan estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria de un colegio en Bogotá, Colombia, nos enfocamos en el análisis de los cambios de significado del atributo medible de un ángulo que se hacen evidentes en la interacción comunicativa en clase de geometría. En este artículo queremos destacar la importancia de hacer esfuerzos para que estudiantes de Básica Primaria construyan el significado del atributo medible de un ángulo, a través de diferentes interacciones comunicativas, que impulsan la discusión sobre diferentes aspectos de la definición de ángulo y diferencian el ángulo de su medida.

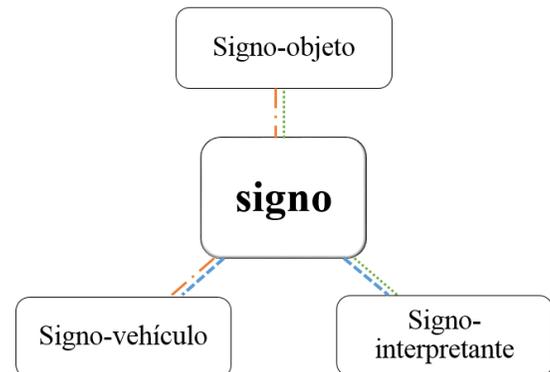
■ Marco de referencia

En el marco de la investigación de la cual se realiza el presente análisis, concebimos la clase de matemáticas desde una perspectiva sociocultural como un espacio de interacción social, en el cual, como menciona Camargo (2010), el aprendizaje se da de forma colectiva cuando los individuos participan en actividades comunicativas. En tales actividades se dan interacciones comunicativas que suceden a través de signos. Concordamos con Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) al pensar la clase como un complejo sistema semiótico mediado por notaciones, simbologías, representaciones gráficas y verbales. El interés por la variedad de signos producidos en la clase de matemáticas vuelca nuestra mirada hacia la semiótica.

Entendemos significado como la compatibilidad entre significados personales –integración de significados personales parciales y provisionales constituidos de forma colectiva en la clase– y matemáticos –la integración de consensos de significados que han sido construidos históricamente por la comunidad matemática–. El ‘signo’ lo entendemos como el componente primario de los sistemas semióticos –que tienen lugar en la interacción comunicativa– que permiten desarrollar procesos de pensamiento y expresarlos. El ‘signo’ es una relación triádica resultado de la integración de tres

relaciones diádicas entre los siguientes componentes que particularizamos para la comunicación matemática:

- Signo-objeto: objeto matemático al que se alude en la comunicación.
- Signo-vehículo: expresiones verbales o escritas con las que se refiere alguien acerca del objeto matemático. Pueden ser gráficos, gestos, frases, exclamaciones, íconos, entre otros.
- Signo-interpretante: lo producido por el signo vehículo en la mente de quien lo percibe y lo interpreta.



Debido a la multiplicidad de interpretaciones que pueden surgir de un mismo signo-objeto en el aula, Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) establecen una clasificación para los signo-objeto:

- El signo-Objeto Matemático Real (OMR) es el constructo histórico y cultural; un acuerdo establecido por la comunidad matemática y que sirve de referencia a la comunidad de profesores de matemáticas (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).
- El signo-objeto inmediato (oi) es un aspecto específico del OMR al que se refiere el estudiante o profesor de manera explícita en la comunicación y que intenta representar con un signo vehículo.
- El signo-objeto dinámico (od) es el aspecto que el receptor infiere del objeto inmediato. El adjetivo dinámico sugiere su naturaleza susceptible a diferentes interpretaciones y experiencias que lo modifican.

En el esfuerzo que hace el profesor en la comunicación para que suceda la evolución de significado, este toma los objetos inmediatos de los estudiantes que considera pertinentes y reajusta, con fines didácticos, los propios. Dada la naturaleza dinámica y adaptable del objeto dinámico del profesor, éste ha sido denominado objeto dinámico didáctico del profesor (odd) (Perry et al., 2014).

■ Metodología

La información se obtuvo de videograbaciones de 5 sesiones de clase de geometría, con 40 estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria (edades entre 9 y 11 años), en las que se puso en juego una trayectoria hipotética de aprendizaje del objeto ángulo. En la investigación participaron: la profesora-investigadora y otras dos profesoras que rediseñaban las sesiones de clase en reuniones de discusión que tenían lugar después de observar los videos de la clase transcurrida. El equipo se reunía para discutir el

efecto de las sesiones planeadas y determinar si se necesitaban cambios en la secuencia formulada para ser aplicados antes de la siguiente sesión.

El tipo de estudio corresponde a un experimento de enseñanza (Cobb, 2000), que se llevó a cabo a través de sesiones de práctica, análisis y re diseño de situaciones de enseñanza y aprendizaje, dirigidas a promover la evolución de significados que exhibían los estudiantes. El experimento tuvo como base una trayectoria hipotética de aprendizaje del objeto ángulo que cuenta con cuatro aspectos fundamentales: elementos constitutivos, representación, atributo medible y definición. Consideramos que el aprendizaje del objeto ángulo implica, primero, identificar los elementos que lo determinan (punto, rayo); posteriormente hacer uso de diferentes representaciones simbólicas y gráficas para referirse al ángulo, y establecer la diferencia entre ellas; luego, determinar el factor que diferencia un ángulo de otro (su atributo medible) para construir la unidad de medida y para usar herramientas de medición. La imagen conceptual (no reducida a la definición) se trabajó de forma continua durante las 5 sesiones de clase, de manera que cada vez los estudiantes añadían características más precisas a la imagen conceptual.

El conjunto de datos se construyó identificando, en los videos, momentos en los cuales los estudiantes exhibían significados acerca de alguno de los aspectos mencionados del ángulo, y se transcribieron para su posterior análisis. Para el propósito de este artículo, escogimos algunos fragmentos de la sesión 3, donde se genera una amplia y rica discusión sobre aquello que diferencia a dos ángulos.

■ Análisis

En la Tabla 1 presentamos la herramienta analítica con la cual se hizo el análisis de los datos. Posteriormente, la organización de los datos relacionados con el atributo medible. El análisis del atributo medible se dividió en dos secciones que ilustran: a) lo que se mide a un ángulo es su amplitud, b) unidad de medida.

Tabla 1. Categorías de análisis

Categorías	Codificación	Descripción
Signos vehículo (estudiante)	sv-e	Expresiones verbales, gesticulaciones, diferentes representaciones escritas, acerca del atributo medible.
Objeto inmediato (estudiante)	oi-e	Aspecto al que se refieren los estudiantes explícitamente en sus sv con relación al atributo medible
Objeto dinámico (estudiante)	od-e	Aspecto del atributo medible de un ángulo que los estudiantes incluyen en sus interpretaciones y que no necesariamente corresponde al oi.
Signos vehículo	sv-p	Expresiones verbales, gesticulaciones, dibujos o escritos acerca del

(profesor)		atributo medible.
Objeto dinámico didáctico (profesor)	<i>odd-p</i>	Aspecto del atributo medible de un ángulo que el profesor incluye en su interpretación acerca de lo que interpretaron los estudiantes.
Objeto inmediato (profesor)	<i>oi-p</i>	Aspecto al que se refiere explícitamente el profesor en sus sv con relación al atributo medible.

Debido a las observaciones generales realizadas sobre los datos, se crearon dos tablas que organizan el análisis:

a) Lo que se mide a un ángulo es su amplitud

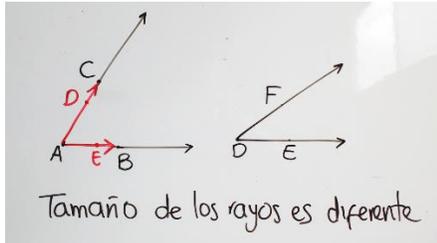
Sesión 3	Observaciones
	Discusión sobre factor diferenciador de ángulos: tamaño .
	Discusión alrededor de cuándo un ángulo es más grande a otro: longitud de rayos.
	Diferencias entre ángulos. Aparición del término abierto .
	Aparición del término abertura . La abertura es lo que diferencia a dos ángulos y es lo que se mide.

b) Unidad de medida

Sesión 3	Observaciones
	El grado es 1/360 parte de la circunferencia
	Discusión acerca del grado para medir magnitudes
	Introducción de la herramienta transportador para medir grados
	Se pueden formar un ángulo nuevo a partir de otros dos

Para ilustrar el uso de la herramienta analítica, a continuación se presenta el análisis de un fragmento de la sesión 3 que corresponde a un momento donde se discute alrededor de cuándo un ángulo es más grande a otro.

- 22 Profesora: Mi pregunta es: yo tengo este ángulo ABC (refiriéndose a $\angle CAB$) que es el de color negro, y coloreé... e hice otro ángulo DAE (en color rojo). Esos dos ángulos, ¿son iguales?



- 23 Varios: Sí
- 24 Profesora: ¿Por qué? Pero miren... ustedes me dicen “son iguales”; pero (...) ustedes acá (señala la frase “Tamaño de los rayos es diferente”) me dijeron: estos dos (señalando los dos ángulos negros) son diferentes porque (vuelve a señalar la frase anterior) el tamaño de los rayos es diferente. Acá el tamaño de los rayos es diferente (señala los ángulos negro y rojo superpuestos). Entonces si dejo esta (refiriéndose a la frase en cuestión) tengo que decir entonces que los ángulos son diferentes.
- 25 Mateo: Es que acá no estamos hablando de (no se entiende). (...) acá [el rayo] tiene comienzo pero no tiene fin, entonces no se puede decir que el tamaño del rayo...
- 26 Profesora: Esperen. Alguien que me diga si dejamos esta [frase] o la quitamos.
- 27 (...)
- 28 Mateo: Yo digo que se quita. Porque no puede confundir el tamaño de un rayo. Porque puede tener comienzo pero no tiene fin.
- 29 Profesora: Alguien que explique mejor la idea de Mateo.
- 30 Mabel: O sea, tú puedes tener así: esa flecha significa que puedes seguir (no se entiende) y no puedes decir exactamente cuál es el tamaño de los rayos.
- 31 Profesora: (Se dirige a Mabel) Entonces, ¿esos dos ángulos son diferentes?
- 32 Varios: No.
- 33 Profesora: ¿Son iguales?
- 34 Varios: Sí.

- 35 Profesora: Entonces dejo o quito esta... (Refiriéndose a la frase: “Tamaño de los rayos es diferente”).
- 36 Varios: Quitas.

En el interpretante de la profesora está la idea mencionada por Mateo, Stephanie y Manuela, relacionada con comparar el tamaño de los ángulos por la longitud de las líneas que representan los rayos. Retoma lo discutido sobre rayo para promover una discusión al respecto. Interviene con la pregunta [22P] y una representación gráfica en la que dos ángulos coinciden pero la representación de los rayos difiere en su longitud. Esto constituye el primer signo vehículo de la profesora (sv-p1). Con este, la profesora introduce como objeto inmediato la comparación de dos ángulos superpuestos cuya representación de los rayos difiere (oi-p1). Como objeto dinámico didáctico (odd-1) inferimos el cuestionamiento a que el atributo medible de un ángulo sea la longitud de la representación de los rayos. Posiblemente la profesora considera que dos ángulos superpuestos con representaciones de rayos de diferente longitud, permiten identificar que el atributo medible de un ángulo no es la longitud de dichas representaciones de los rayos.

El sv-p1 tiene un efecto directo en la interpretación que tienen Mateo y Mabel sobre el atributo medible. En las intervenciones [28M] y [30Mb] (que constituyen el sv-M-Mb1), los estudiantes mencionan una característica de los rayos que componen un ángulo: no es posible determinar su longitud porque son infinitos (oi-M-Mb1). Estas intervenciones permiten suponer que para ellos la longitud de los rayos no es factor diferenciador del tamaño de dos ángulos (od-MMb1), pues aunque los rayos se representan con líneas de longitud diferente, los ángulos superpuestos son de igual tamaño.

■ Resultados y discusión

Debido al ejercicio de análisis pudimos identificar nueve aproximaciones al atributo medible del ángulo, lo cual entendemos como un conjunto de interacciones en las cuales se exhibe un cambio de significado. Las aproximaciones determinadas son las siguientes:

Atributo medible
Dos ángulos se diferencian por su tamaño
Un ángulo es más “grande” que otro por la longitud de la representación de sus rayos
Dos ángulos superpuestos son iguales
Un ángulo se diferencia de otro por su amplitud
Un ángulo es más abierto que otro

Unidad de medida

El grado es una de las 360 partes iguales de un círculo

El grado como una cantidad de magnitud

Grado como unidad que se mide con un transportador

Grado como cantidad de magnitud que cumple la aditividad

Por cuestiones de espacio no colocamos el análisis de las nueve aproximaciones. Sin embargo, el análisis completo reveló que, en el proceso de aprendizaje de ángulo referido a su atributo medible, los estudiantes pasan por estos momentos de interpretación de forma gradual, lo que representa una invitación a los docentes a vigilar en cuál de ellos se encuentra un estudiante, y si efectivamente su significado evoluciona. Así, es posible observar que al comienzo de las interacciones comunicativas los estudiantes consideran que el atributo medible de un ángulo es el espacio ocupado por su representación gráfica –lo cual es una creencia frecuente en estudiantes de diferentes niveles educativos–. Con el fin de lograr una evolución de significados matemáticos, la profesora recurrió a tareas que permiten visualizar no ejemplos, y centrar la atención hacia la abertura de los ángulos. Posteriormente, estableció la unidad de medida grado y la propiedad aditiva de las medidas de ángulos. Consideramos que este último propósito es un elemento destacado de la secuencia, pues, según Saa et al (1990), generalmente, la enseñanza de la composición de medidas de ángulo en primaria, se hace solo llevando a cabo la suma de números y no teniendo en cuenta sus amplitudes. Posteriormente avanzan hasta hacer referencia a la abertura. Este avance es un propósito del docente al implementar la secuencia de forma premeditada y poner en juego la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Tanguay (2016) afirma que la mayoría de estudiantes al finalizar primaria consideran que el ángulo es “algo que se mide en grados”. Para que este significado evolucione hacia un significado matemático, él propone la creación del grado como división de la circunferencia. En nuestra secuencia de enseñanza, retomamos esta idea y se encontró que los estudiantes asociaron el grado con un sector circular, lo que promovió la asociación entre el atributo medible de un ángulo con un sector circular y no con la longitud de los lados de la representación del rayo.

Gracias al diseño de clases participativas que promueven la producción de signos por parte de los estudiantes y tienen en cuenta los significados otorgados a los mismos, el profesor puede conducir la clase a través de discusiones en las que las interpretaciones de los estudiantes convergen hacia aquellas que admite la comunidad matemática de referencia.

■ Referencias bibliográficas

- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Valencia. España.
- Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Saenz-Ludlow, A. y Molina, O. (2015). Mediación semiótica en pro la construcción de significado de rayo al operacionalizar su definición. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 99-116.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En Kelly, A. & Lesh, R. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- D'Amore, B., Fandiño, M. e Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Mitchelmore M.C., White P. (1998). Development of angle concepts: a framework for research. *Mathematics Education Research Journal*. 10(3), 4-27
- Mitchelmore M.C., White P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.) (2014) *Proc. 38th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conf. of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME.
- Rotaeché, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria*. Tesis de doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.
- Saa, M., Carrillo, D., Alarcón, J., Pelegrín, M., Sánchez, E. y Carrillo, E. (1990). *Los ángulos: recursos para su aprendizaje*. Murcia: Ediciones de la Universidad de Murcia.
- Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En Pre-proceedings of the 12th ICME. Recuperado en mayo de 2015 de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip
- Tanguay, D. y Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM Mathematics Education*, 48, 1–12. [dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5](https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5)