EL SIGNIFICADO DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ACUMULACIÓN

Ramiro Ávila Godoy, Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora(México)
ravilag@mat.uson.mx, javilas9@gmail.com

RESUMEN: El propósito de la presente comunicación es mostrar un proyecto de investigación que empieza a desarrollarse, en el que se pretende poner a prueba un modelo de enseñanza de la integral de una función, basado en la resolución de problemas de acumulación que permitan generar un *significado semántico* del objeto matemático *Función Integral* apoyados en las premisas teóricas de los modelos teóricos locales de E. Filloy y colaboradores.

Palabras clave: significado semántico, función integral

ABSTRACT: The purpose of this paper is to show a research project that in its initial stage. It is intended to test a teaching model of the integral of a function, based on accumulation-problem-solving that allow to generate a semantic meaning of the mathematical object Integral Function supported by the theoretical premises of the local theoretical models of E. Filloy et al.

Key words: Semantic Meaning, Integral Function

Introducción

El propósito de la presente comunicación es mostrar un proyecto de enseñanza que hemos diseñado (y empezado a desarrollar) para investigar los procesos cognitivos que se desarrollan al construir el significado de un objeto (y/o proceso) matemático.

Específicamente hablaremos sobre la manera en que estamos investigando los procesos de construcción del significado del objeto matemático *integral de una función* desarrollados por un grupo de estudiantes de ingeniería al tratar de resolver una serie *de* problemas de acumulación.

Consideraciones teóricas en las que se basa el proyecto.

En el diseño y desarrollo de este proyecto se asume la validez de las premisas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS) de Juan D. Godino, en especial las relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos que parten de concebirlos de naturaleza pragmática antropológica y, en consecuencia, de carácter contextual, es decir, partimos de que dichos significados son esencialmente, los sistemas de prácticas que se utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problemáticas; que estos sistemas de prácticas son discursivas y operativas y que los elementos que los constituyen son los medios utilizados en dichas prácticas, tales como *el lenguaje*, constituido a su vez, por las diversas formas de representación de los objetos matemáticos (como son la tabular, la gráfica, la analítica, la verbal y otras), *los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos* (utilizados para justificar las propiedades y los procesos que se desarrollan) y *los medios tecnológicos*.

También asumimos que la modelación matemática de situaciones problémicas concretas en un Sistema Matemático de Signos (SMS) origina, por una parte, el surgimiento de problemas matemáticos y por otra, la construcción de significados semánticos asociados a la situación que les dio origen.

Por otra parte, asumimos que el proceso de modelación tiene dos etapas fundamentales, en la primera denominada de traducción, a los nuevos objetos y operaciones que se introducen se les dota de sentido y significado semántico y concreto, por ser de naturaleza contextual.

En la segunda etapa del modelaje, los nuevos objetos y operaciones, esto es, los que surgieron de los significados '*concretos*' que permitieron que fueran creados; en otro momento el proceso de modelaje, pretenden desprenderse de la semántica del modelo '*concreto*', como resultado de que lo que se quiere lograr, no es resolver una situación que ya se sabe que se puede resolver, sino encontrar las maneras de resolver situaciones más abstractas, vía operaciones más abstractas. Esta segunda componente es un principio motor que orienta la función del modelaje hacia la construcción de una sintaxis extra modelo. Los procesos de abstracción y generalización forman parte muy importante de esta etapa del proceso en la que los objetos matemáticos generan el significado sintáctico de los objetos matemáticos.

El diseño de las actividades didácticas

El diseño de las actividades que forman las secuencias, se llevó a cabo utilizando una metodología que tiene las siguientes etapas:

a) Elección de la situación problémica que será objeto de estudio a través de la secuencia.
b) Determinación de los propósitos del estudio (generales y específicos)
c) Formulación y organización de las interrogantes y tareas (problémicas) que servirán para provocar y conducir el proceso de estudio que permita crear, utilizando un SMS, nuevos objetos y procesos matemáticos que tengan, en su origen, un significado semántico para luego, ya creados los objetos con significado semántico, generar un significado sintáctico del objeto creado.

Para ilustrar este proceso, a continuación, se comentan algunas de las actividades diseñadas que forman parte de las secuencias y se explica la razón de su diseño y uso. Las actividades que conforman una secuencia didáctica son de tres tipos: de Inicio, de Desarrollo y de Cierre y se plantean para que cada estudiante las resuelva de manera personal, luego comenten sus respuestas en equipo y, finalmente, comenten lo aprendido y las dudas que les hayan quedado a nivel de todo el grupo. Las secuencias que vemos a comentar se diseñaron para estudiar el proceso de resolución de problemas sobre movimiento; proceso que constituye una parte fundamental de lo que se está investigando en este proyecto:

La situación problémica elegida para el diseño de la primera secuencia:

El cálculo de la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta durante un cierto intervalo de tiempo.

Los propósitos de la primera secuencia:

Crear el objeto matemático *integral de una función* con significado semántico a partir de la situación problémica elegida.

La actividad de inicio de esta secuencia:

En esta primera secuencia sólo se diseñó una actividad de inicio cuyo propósito general es crear un ambiente propicio para el estudio de la situación problémica elegida. Este objetivo general se podrá alcanzar si se logran los siguientes tres objetivos específicos: a) Que los estudiantes tengan claro los propósitos del estudio de la situación problémica general de la secuencia, b) Que se interesen en realizarlo y c) Que estén en condiciones adecuadas para llevarlo a cabo.

La Actividad diseñada consiste en el análisis y resolución de dos problemas, el primero de ellos fue el determinar cómo se puede calcular la distancia que recorre un móvil en un cierto intervalo de tiempo cuando se mueve con velocidad constante que, como puede verse es un problema sumamente elemental que se decidió incluir sólo para iniciar el proceso de ambientación que favorezca el desarrollo de las actividades de la secuencia.

El segundo problema que se planteó en esta actividad de inicio, fue el determinar cómo se puede calcular la distancia recorrida por un móvil en un cierto intervalo de tiempo cuando se mueve por una trayectoria recta con velocidad variable y la aceleración constante. Este problema se espera que también resulte familiar para los estudiantes y que la mayoría o todos puedan resolverlo sin grandes dificultades. Su inclusión en la actividad de inicio fue por razones similares a las ya expuestas.

Las actividades de desarrollo:

El problema general de estas actividades es el determinar una o más maneras de calcular la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta, cuando la velocidad con que se mueve y también la aceleración, son variables.

El problema específico que se plantea a los estudiantes es el siguiente:

Determinar al menos un procedimiento que permita calcular la distancia que recorrerá una partícula que se está moviendo por una trayectoria recta durante el tiempo transcurrido entre los instantes t_0 *y* t_1 *sabiendo que* la velocidad con que se está moviendo puede calcularse con la expresión $v(t) = t^2$, en la que t representa el tiempo (medido en segundos) y $v(t)$ representa la velocidad *(medida en* $\frac{m}{seg}$ *)*

Como apoyo a los estudiantes en el intento de resolver el problema se diseñaron varias actividades cuya realización ayudará a analizar el problema e ir entendiéndolo cada vez más. En la primera de estas actividades se pide a los alumnos que calculen los valores de la velocidad de la partícula para los siguientes valores de t: 1, 2, 3, 4 y 5 segundos y que los anoten en una tabla. Luego se pide que observen y analicen lo que sucede con la velocidad a medida que transcurre el tiempo y para conducir el proceso de análisis se les formulan otras preguntas tales como, ¿Cuántas velocidades diferentes tiene la partícula en los primeros cinco segundos de su recorrido? Y en el primer segundo del recorrido ¿Cuántas velocidades diferentes tuvo la partícula?

Se espera que al realizar el análisis lógico de la situación descrita los estudiantes hagan las siguientes deducciones:

a) Dado que la velocidad es continuamente variable, la partícula tendrá un número infinito de velocidades en cualquier intervalo de tiempo y de ahí se infiere que la distancia recorrida no puede calcularse multiplicando la velocidad por el tiempo que dura el movimiento, salvo que pudiera determinarse la velocidad promedio, la cual no puede determinarse sumando todas las velocidades y dividiendo entre el número de velocidades por tratarse de un número infinito de velocidades.

De las respuestas a las preguntas que se formulan en las actividades de desarrollo 2, 3 y 4 se espera que los estudiantes hagan las siguientes deducciones:

b) La distancia recorrida es menor que el producto de la mayor de las velocidades del intervalo por el tamaño del intervalo, y mayor que el producto de la menor de las velocidades por el tamaño del intervalo.

c) Si el intervalo de tiempo se divide en un cierto número de subintervalos y en cada caso se toma la mayor y la menor de las velocidades y se multiplica, cada una de ellas, por el tamaño del subintervalo, se obtendrá en cada uno de los subintervalos una distancia mayor que la que realmente se recorre cuando se haya tomado la velocidad mayor del subintervalo y cuando la velocidad que se tome sea la menor del subintervalo, se obtendrá una distancia menor que la que realmente se recorre; si luego se suman todas las distancias mayores calculadas el resultado obtenido será mayor que la distancia realmente recorrida en todo el intervalo; si por otra parte se suman las distancias recorridas en cada subintervalo al multiplicar la menor de las velocidades del subintervalo por el tamaño del subintervalo el resultado que se obtenga será menor que la distancia realmente recorrida.

d) La suma de las distancias mayores por subintervalo irá decreciendo en la medida que se aumente el número de subintervalos; mientras que la suma de las distancias menores por subintervalo irá creciendo, aunque siempre la suma será mayor que la distancia realmente recorrida en el primer caso y menor en el segundo caso e inferir que si el intervalo de tiempo se divide en subintervalos la distancia que recorre en puede calcularse multiplicando es posible

e) Para una función continua y acotada en un determinado intervalo, si el número de subintervalos de igual longitud es cada vez más grande, la diferencia entre la velocidad máxima y la velocidad mínima en cada subintervalo se irá acercando a cero y, en consecuencia la diferencia entre la suma de las distancias mayores y la suma de las distancias menores también se irá acercando a cero; de donde se sigue que si el intervalo se divide en un número infinito de subintervalos (todos de igual tamaño) las velocidades mayor y menor en cada subintervalo serán también iguales y la suma de las distancias mayores por subintervalo será igual a la suma de las distancias menores por cada subintervalo y, por tanto estas sumas serán iguales a la distancia recorrida en el intervalo.

f) Si llamamos *diferencial* de tiempo a la medida infinitamente pequeña de cada uno del número infinito de subintervalos en que se divide el intervalo y representamos esa medida con ***dt*** entonces, la distancia recorrida en cada uno de esos subintervalos será infinitamente pequeña y ser representará por medio del producto ***v(t)dt*** que llamaremos diferencial de distancia y su suma será igual a la distancia recorrida en todo el intervalo y lo representaremos de la siguiente manera

$$\boldsymbol{d = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt}$$

Donde el símbolo $\int$ indicará que se trata de una suma y los términos $\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}}$ y $\boldsymbol{t}_1$ representan el instante inicial y el instante final del intervalos y escritos donde están indican que se están sumando todas las distancias diferenciales desde el instante inicial $\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}}$ hasta el instante final $\boldsymbol{t}_1$ **y** desde luego que la $\boldsymbol{d}$ representa la distancia total recorrida.

El significado contextual (semántico) de: $\int_{t_{\mathrm{o}}}^{t_1} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$ considerando los significados contextuales (semánticos) de

$$\boldsymbol{v(t)},\ \boldsymbol{dt},\ \int,\ \boldsymbol{t}_{\mathrm{o}},\ \boldsymbol{t}_1,\ \boldsymbol{v(t)dt}$$

La formulación de las deducciones que hemos enlistado constituye la actividad decierre de la secuencia pues constituye una síntesis del avance logrado en la pretensión de resolver el problema más general.

Cuando se ha construido el objeto matemático *integral de una función* con el significado semántico que hemos enunciado y que está íntimamente asociado con los significados semánticos de los elementos intervinientes en la construcción del objeto integral de una función, surge de manera natural un nuevo problema:

La necesidad de un procedimiento para efectuar la suma representada por $\int_{t_{\mathrm{o}}}^{t_1} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt},$ dado que se trata de una suma que tiene un número infinito de sumandos y que dichos sumandos son cantidades diferenciales (infinitamente pequeñas), es decir, que no tienen valor numérico.

La nueva situación problémica formulada dio lugar al diseño de la Secuencia Didáctica 2, que a su vez está conformada por Actividades de inicio, de desarrollo y de cierre.

Actividad de inicio

Esta actividad se diseñó para responder la pregunta ¿Cómo se calcula la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta cuando se conoce la expresión analítica que permite calcular la posición de la partícula en función del tiempo?

Desde luego se trata de un problema resuelto en el curso de Cálculo Diferencial y seguramente en los cursos de Física, al estudiar cinemática y la respuesta es que puede calcularse restándole a la posición en el instante final, la posición en el instante inicial. En términos analíticos la respuesta es

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_1) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}})$$

Expresión en la que dice que la distancia que recorre restándole a la posición final, la posición inicial.

En esta segunda secuencia también, como en la primera, hay una sola actividad de inicio. Vienen enseguida las actividades de desarrollo que en la Actividad 1 pretende que los estudiantes puedan formular la pregunta de ¿Cómo puede, a partir de la expresión analítica de la velocidad, obtenerse la expresión analítica de la posición? Desde luego que esta actividad está diseñada para conducir, a base de cuestionamientos, a los estudiantes a formular la pregunta y a recordar la relación existente entre la expresión analítica de la posición y la de la velocidad, esto es, las preguntas de esta actividad están diseñadas para tratar de que los estudiantes puedan llegar al siguiente cuestionamiento; si yo se que la expresión analítica de la velocidad es la derivada de la expresión analítica de la posición, ¿Cómo puedo obtener esta última?

La actividad 3 de desarrollo se diseñó para ayudar a los estudiantes a que se planteen la pregunta ¿Cuál es la función cuya derivada es t^2? Y para que además de formular la pregunta puedan contestarla y que obtenida la función posición la utilicen para calcular la distancia que recorrió.

Después de esas tres actividades de desarrollo viene la Actividad de Cierre donde se hace una síntesis de lo aprendido en la secuencia que equivale a establecer que ahora se tiene un procedimiento para calcular la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta, cuando la velocidad con que se mueve, y también la aceleración, son variables.

Lo cual significa haber aprendido que cuando conozco la expresión analítica de la velocidad, dado que sé que es la derivada de la posición, el procedimiento para calcular la distancia recorrida consiste en recuperar la función que al derivarla se obtiene la función velocidad y luego utilizar la función posición para calcular la distancia recorrida restándole a la posición al final del intervalo, la posición al inicio del mismo y que lo dicho en este párrafo en el lenguaje matemático se escribe

$$\boldsymbol{d = \int_{t_o}^{t_1} v(t)dt = P(t_1) - P(t_o)}$$

donde ***P(t)*** es la función cuya derivada es la función ***v(t)***.

La Secuencia didáctica 4 está destinada a reflexionar sobre la interpretación geométrica de la distancia recorrida al representar gráficamente la velocidad

1) Cuando la velocidad es constante:
2) Cuando la velocidad es variable, pero la aceleración es constante.
3) Cuando la velocidad y la aceleración son variables

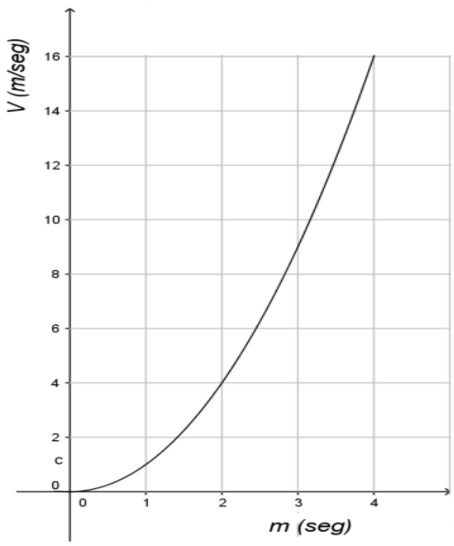

Figura 1

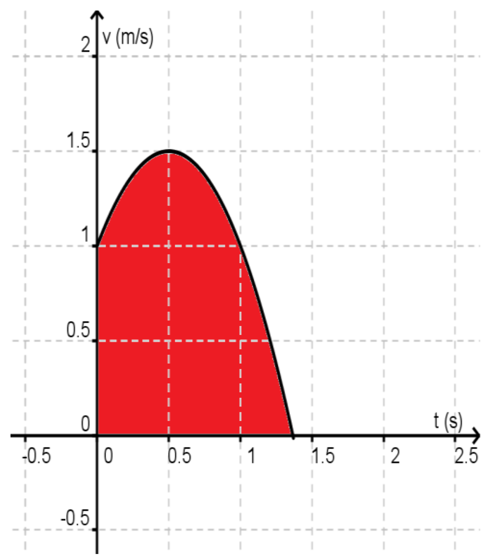

Figura 2

Otras situaciones problémicas

a) El cálculo de áreas de figuras geométricas que tienen al menos un lado curvo

b) El cálculo del volumen de sólidos de revolución

c) El cálculo de la longitud de una curva.

Los significados semánticos de los objetos y procesos matemáticos generados en estos nuevos contextos.

Los procesos de generalización y los significados sintácticos de

$$f(x),\ dx,\ \int,\ a,\ b,\ f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx\ ,\ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ \text{ y }\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Referencias bibliográfcas

Filloy, E., Rojano, T. y Solares A. (2010). Problems Dealing Whit UnKnown Quantities and Two Different Levels of Representing UnKnowns. *Journal for Research in Mathematics Education*. Number 1 vol 41 52-80 NCTM.

Filloy, E. (1990). PME Algebra Research. A Working Perspective. En Booker, G.; Coob, O. y Mendicutti, T. N. (eds.). *Proceedings of the XIV- Conference for the Psychology of Mathematics Education* Oaxtepec, México.

Filloy, E. (1999) *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamericana,

Filloy, E. y Hoyos, V. (1993). A theory of the production of mathematical sign systems the case of algebraic representations of basic geometrical variation notions. En Joanne, R. y Barbara, J. (eds.) *Proceedings of the xv- Conference for the Psychology of Mathematics Education -North American Chapter,* vol. I Pacific Grove, CA, USA.

Font, V. (2007). *Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas.* La gaceta de la RSME, volumen 10.2

Font, V.; Godino, J.; D´Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. (Consultado el 12-02-2015 de http://www.ugr.es/loc)

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* (Consultado el 12-02-2015 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* (Consultado el 12-02-2015 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Ímaz, C.; Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* México: Trillas.