USANDO EL CÁLCULO DE VOLUMENES DE RECIPIENTES PARA CONSTRUIR SIGNIFICADOS EN LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES CÚBICAS

Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora. (México)
javilas9@gmail.com

RESUMEN: Decidimos investigar el problema de la factorización de polinomios debido a nuestra propia experiencia, así como los reportados por otros investigadores. Observamos que el número de estudiantes que sabe cómo factorizar un polinomio notable, demuestra que la factorización de expresiones algebraicas es difícil de dominar para un alto porcentaje de estudiantes que entran en carreras de ingeniería. Creemos que uno de los principales factores de este fenómeno es el enfoque mecánico, simplista y memorista con el que fueron presentados después del sexto grado. Con esta investigación queremos demostrar que la construcción de significados por parte de los estudiantes, para la factorización en un contexto dado, les permite aprender a identificar la importancia de la estructura del factor y reconocer elementos relacionados con el problema estudiado. Por esta razón, la propuesta de secuencia didáctica fue diseñada para que los estudiantes generen sus propias representaciones funcionales y significativas de los objetos matemáticos involucrados.

Palabras clave: factorización, significados contextuales, resolución de problemas

ABSTRACT: We decided to investigate the problem of factorization of polynomials due to our own experience, as well as those reported by other researchers. We observe that the number of students, who knows how to factorize a remarkable polynomial, shows that the factorization of algebraic expressions is difficult to master for a high percentage of students entering engineering degree courses. We believe that one of the main factors of this phenomenon is the mechanical, simplistic and memoirist approach with which they were taught after the sixth grade. With this research we want to demonstrate that the construction of meanings by students, for factorization in a given context, allows them to learn to identify the importance of factor structure and to recognize elements related to the problem studied. That’s why, the didactic sequence we proposed was designed so that the students generate their own functional and significant representations of the mathematical objects involved.

Key words: factorization, contextual meanings, problem solving

Introducción

La factorización de expresiones algebraicas es difícil de dominar para un alto porcentaje de estudiantes, esto a pesar o quizás por el enfoque memorista con que se enseñan los productos y factores notables. La enseñanza del tema se convierte en un dolor de cabeza en el nivel superior, pues los estudiantes en los buenos casos sólo saben factorizar las expresiones más sencillas y en la mayoría de los casos, los estudiantes recuerdan muy poco a nada de eso que se les dio en la escuela secundaria y de nuevo en el bachillerato. Creemos que esto se debe a las pobres significaciones que la factorización les dejó. Pensamos que, en muchos casos, sólo llegaron a memorizar los métodos por poco tiempo, sin entender realmente y sin tener alguna razón para hacer y aprender cómo factorizar. Es por esto que decimos que la construcción de significados para la factorización en un contexto dado, permite que los estudiantes identifiquen la estructura del factor y reconozcan elementos relacionados con el problema estudiado.

Tras algunos años de impartir las materias de matemáticas a estudiantes de las diversas ingenierías, se que la mayoría de quienes ingresan a estas carreras, tienen un significado muy pobre de la factorización; a pesar de haber estudiado el tema desde el nivel básico (secundaria) y haberlo abordado varias ocasiones más en el nivel medio superior, los significados que los alumnos adquieren de los factores son demasiado reducidos y casi nunca van éstos asociados a algún contexto que les permita relacionar dichos factores con éste, bien puede decirse que su manejo depende fundamentalmente de su memorización, esto es, de recordar o no los métodos de factorización.

A pesar de ser un problema bien identificado y latente en todo el continente, por no decir que en el mundo, parece ser que la atención que se le presta a la factorización por parte de la comunidad de matemática educativa es poca. Como muestra de esto, basta decir que en las ediciones del ALME del año 2004 al 2014, sólo 49 artículos mencionan términos asociados con la factorización y la mitad de ellos sólo los listan junto con otras palabras asociadas a las matemáticas. La palabra factorización aparece en promedio una vez cada 86 páginas de texto publicado y con los dedos de una mano se pueden contar los artículos que tratan el proceso de factorización y su enseñanza en el aula.

Metodología de diseño y marco teórico

La metodología y el marco teórico que utilizamos para el diseño de la secuencia didáctica que aquí presentamos, están fundamentados en ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico, y auto reflexión), propuesta por Hitt (2009), con la cual se busca que con el uso de manipulables se promueva la producción de representaciones funcionales por los estudiantes, lo cual creemos es fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas. De acuerdo con Hitt y Cortés (2009), entre los diversos marcos teóricos que soportan ACODESA, están el de campos conceptuales de Vergnaud, el de representaciones semióticas de Duval, y el de situaciones didácticas de Brousseau, los cuales vienen a fortalecer la propuesta de diseño de situaciones didácticas de acuerdo con la metodología aquí usada.

ACODESA está acorde con el uso de las diversas tecnologías digitales que proponemos (software de geometría dinámica, hoja electrónica, y calculadora simbólica), ya que sirve al estudiante para manipular lo que se programa en ella. Por otra parte, también buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas durante los procesos de modelación, implementación y resolución del problema, además de la auto-reflexión sobre los problemas tratados y los temas estudiados. Queremos que los estudiantes reflexionen sobre las diferentes representaciones tratadas, así como sobre las diversas herramientas utilizadas en la resolución de los diversos problemas.

Nosotros diseñamos una secuencia didáctica acorde con ACODESA, donde buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas y la auto-reflexión de los temas estudiados, siempre con el uso de manipulables que permitan al estudiante formar su propio vínculo con el contexto de la construcción y diseño de recipientes, cuyo cálculo de sus volúmenes está dado por expresiones cúbicas. Queremos que los estudiantes reflexionen sobre las diferentes formas de factorización que se usan en este contexto y el significado que éstas tienen con relación a las diversas representaciones tratadas.

Antecedentes para la definición de la secuencia didáctica

Piloteamos dos veces la secuencia didáctica, en ambas ocasiones con grupos de 6 estudiantes. El primer pilotaje nos permitió afinar los elementos que debían permanecer como parte de las tareas a desarrollar o preguntas a contestar. Esta primera aplicación también nos permitió definir con mayor precisión la duración específica de la secuencia y apegarnos a ella.

Para evitar perder detalles al recabar la información, utilizamos medios visuales, auditivos, impresos y digitales, lo cual nos permitió tener una visión más nítida de lo que estábamos interpretando y con la posibilidad de contrastar varias fuentes antes de concluir algo o eliminar algún elemento de la secuencia. Para proteger la información recabada, una vez recogida y para que no fuera modificada por los estudiantes de forma que alterara lo antes contestado, el trabajo hecho por ellos era recogido diariamente y la autoevaluación se hizo por medios digitales en la nube, con restricción de acceso una vez terminada.

Después del análisis del primer pilotaje, decidimos que la secuencia se desarrollara en 10 sesiones de trabajo de 50 minutos cada una y el contenido constara de 8 bloques conformados de varias tareas, donde cada tarea contiene una o varias instrucciones o preguntas que deberían ser contestadas por los estudiantes trabajando de forma colaborativa e individual. Acorde con Hitt (2009), las etapas necesarias para cumplir con la metodología ACODESA, cada estudiante interviene en un proceso que incluye: a) el debate de las ideas en equipo con sus pares, b) el debate interaccional entre el equipo y el instructor, c) el debate grupal con toda la clase y finalmente d) la auto-reflexión (individual) después de cada sesión, respecto al contenido abordado en ella.

Secuencia didáctica

En la secuencia didáctica, al estudiante se le presentan varias formas de representar el recipiente, buscando que esta diversidad de representaciones lo haga enriquecer su significación de los objetos matemáticos utilizados en este contexto y especialmente de la factorización.

Primero se le enfrenta con una representación escrita que tiene que interpretar, donde se describe cómo construir el recipiente con una hoja de papel tamaño carta en forma de prisma rectangular y sin especificar las dimensiones de éste. Como segunda y tercera representaciones, se le pide al estudiante que dibuje las representaciones en 2D y 3D del prototipo de recipiente construido, según lo observa y de acuerdo a las instrucciones que siguió para construir ese prototipo del recipiente sin tapa.

Un segundo tipo de recipiente se presenta al estudiante en una representación en 2D con un dibujo y se le pide interpretarlo para construir ahora un prototipo de recipiente con tapa, el cual también deberá dibujar en su representación 3D.

Posteriormente, ambos tipos de recipientes son representados a partir de sus expresiones algebraicas para el cálculo del volumen en su forma factorizada. Al desarrollar cada factorización, se obtiene un polinomio cúbico cuya representación es equivalente al tipo de recipiente correspondiente. Estas representaciones algebraicas de tercer grado pueden ser caracterizadas como recipientes que no tienen grosor en sus paredes y más adelante en la secuencia también para recipientes con grosor. La siguiente representación se da en forma de gráfica, donde los estudiantes pueden visualizar los factores y las dimensiones del material de construcción, entre otras características.

En la Figura 1 se muestran representaciones gráficas como las utilizadas en la secuencia didáctica, donde los estudiantes pueden observar que todas las gráficas cortan tres veces el eje x y que por lo tanto, es una condición necesaria para todos los recipientes de estos tipos el tener tres raíces reales. Otra de las cosas observables y distintivas en estas gráficas es su forma, pues deben tener orientación positiva, tener un máximo y un mínimo y que al menos dos de sus raíces sean positivas.

En la primera parte de la secuencia didáctica, se estudian las gráficas que se presentan en la parte izquierda de la Figura 1, donde los estudiantes observan que dichas gráficas pasan por el origen de coordenadas, lo cual significa que las paredes del recipiente no tienen grosor. Además, las otras dos raíces son positivas siempre y el doble de cada una de estas raíces representa las dimensiones del material utilizado para construir el recipiente.

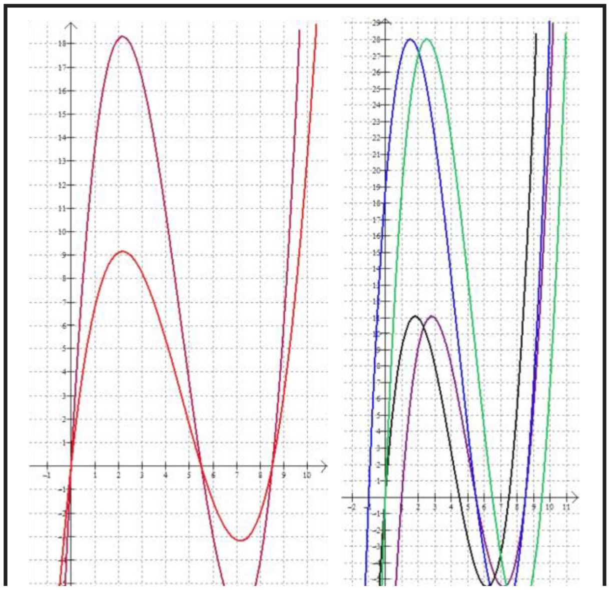

Figura 1. A la izquierda se muestra la representación gráfica de recipientes donde el grosor del material no es tomado en cuenta, mientras que a la derecha se muestra la representación gráfica de recipientes con grosor.

La gráfica también permite observar que la parte positiva de ésta, la cual va del origen a la siguiente raíz, representa los únicos volúmenes válidos, lo que significa que la función está acotada entre el origen y esta raíz, o para decirlo de otra manera, matemáticamente cualquier recipiente que pueda ser construido tendrá una altura no mayor al valor de esa raíz. Esto significa que esa raíz es la que restringe la máxima altura que puede tener un recipiente construido con un material de ese tamaño. Adicionalmente, los estudiantes pueden observar que, para recipientes de la misma altura, uno con tapa y el otro sin esta, el volumen del primero siempre será la mitad del volumen del segundo.

Con el uso de la geometría dinámica queremos que los estudiantes observen las diferentes formas y representaciones en un mismo momento, para así enriquecer sus significados matemáticos en este contexto. La Figura 2 presenta uno de los escenarios de la Aplicación con Geogebra para el propósito antes mencionado, donde los estudiantes pueden manipular las opciones y los deslizadores para observar todas las representaciones de los recipientes sin grosor a un mismo tiempo o por tipo de recipiente.

Finalmente pasamos a la última representación de recipientes de la secuencia didáctica, la representación de recipientes con grosor, donde se usa un dibujo mostrado en la Figura 3 y maderas ya recortadas para permitir al estudiante no sólo ver e imaginar los prototipos de recipientes con grosor, sino permitirle también manipular las maderas, de forma que pueda visualizar de mejor manera los prototipos de recipientes en 3D, con y sin tapa.

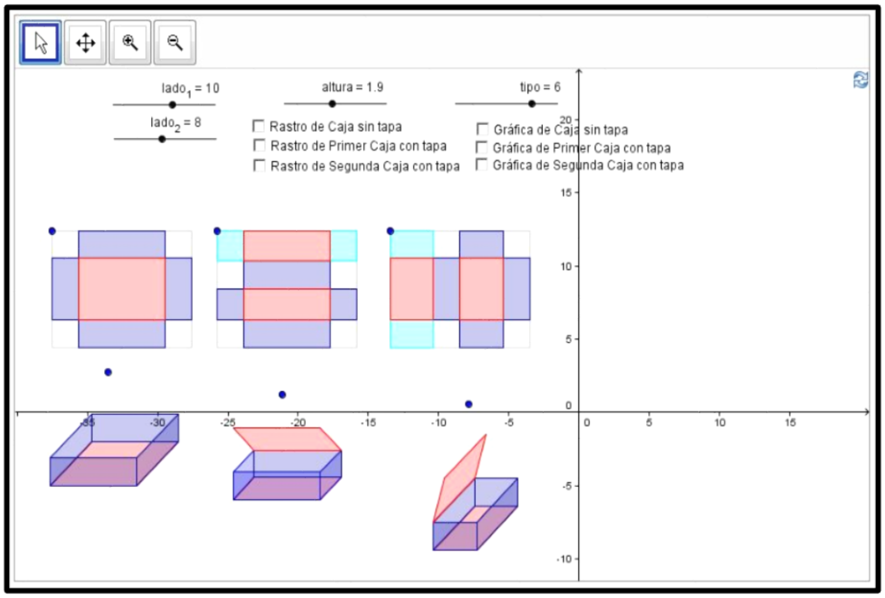

Figura 2. Representación dinámica hecha con Geogebra de los recipientes sin grosor.

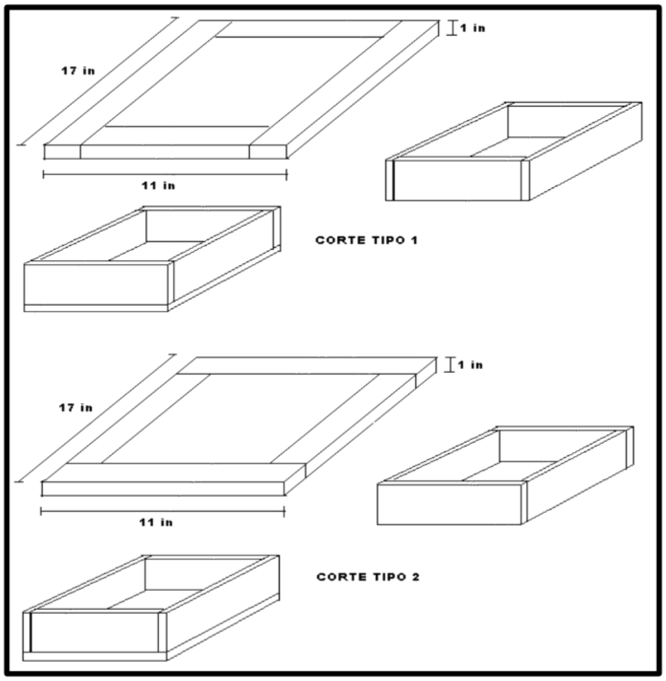

Figura 3. Representación de dos tipos de corte en materiales de dimensiones iguales, donde se muestra que pueden construir sólo dos tipos de recipiente sin tapa y con grosor en sus paredes.

Luego de analizar los prototipos de recipientes con grosor, enfocamos la secuencia a la representación algebraica para los dos tipos de volumen para cada uno de los dos tipos de recipiente con grosor y sin tapa que se presentan en la Figura 3. Sólo posteriormente llevamos al estudiante a estudiar la representación gráfica de éstos, como se muestra en el lado derecho de la Figura 1, donde éste puede advertir que el tipo de gráfico no cambia y que ahora pueden tenerse tres raíces positivas en el caso de querer representar el volumen que mide la capacidad del recipiente de configuración tipo A, esto es, su volumen interior (volumen contenido). También se puede observar que una de las gráficas muestra una raíz negativa para el volumen que calcula el espacio que ocupa el recipiente de configuración tipo B, o sea su volumen exterior (volumen ocupado). Estos dos tipos de volumen son los únicos que son polinomios con cuatro términos.

Otra observación que los estudiantes hacen es que también hay trinomios entre los volúmenes de recipientes con grosor y estos pueden pasar por volúmenes de recipientes sin grosor, sin embargo, en los casos de los volúmenes de recipientes con grosor, las raíces nos dicen cosas diferentes dependiendo del grosor del recipiente. Todos estos elementos y otros más, permiten que se puedan caracterizar los volúmenes según el número de términos del polinomio y según los signos de sus términos y que también se puedan factorizar apropiadamente los polinomios para así determinar las dimensiones del material con el que se pueden construir dichos recipientes.

Después de institucionalizar lo observado en la secuencia didáctica, como la riqueza de las múltiples representaciones, los elementos con significado, presentes en la gráfica del volumen del recipiente y especialmente en la caracterización de los polinomios cúbicos que representan volúmenes de los tipos de recipientes estudiados, así como la estructura de la factorización de estos polinomios y los significados que se leen en ellos.

Finalmente y para terminar el proceso de investigación sobre la adquisición, por parte de los estudiantes, de significados de la factorización en el contexto de los volúmenes de recipientes, aplicamos una evaluación digital final para tratar de medir y entender lo comprendido respecto a la caracterización de recipientes. Al estudiante se le proporciona una aplicación para factorizar polinomios en forma tradicional, donde los factores no tienen un significado para él, con el propósito de observar si pueden transformarla en una factorización equivalente que sí tenga sentido, de manera que le muestre la información que guarda la expresión algebraica con respecto a los tipos de recipientes que representa.

Caracterización analítica de los volumenes estudiados

Las Figuras 4, 5, y 6 muestran algunos ejemplos ilustrativos del tipo de caracterización que se busca sean capaces de implementar los estudiantes. La Figura 4 muestra algunas transformaciones posibles para el ejemplo donde el material de construcción es de 13x9x1. La Figura 5 muestra cinco posibles factorizaciones de un mismo trinomio al cubo que representa el mismo número de recipientes distintos. Por último, la Figura 6 muestra diferentes expresiones algebraicas representando recipientes construidos con la misma cantidad de material, pero con factores diferentes en cada caso y raíces diferentes en algunos de ellos. Debemos decir que sería ingenuo pensar que los estudiantes puedan lograr este grado de interiorización del contexto de los volúmenes de recipientes en tan corto tiempo, sin embargo, éstas son las caracterizaciones que busca institucionalizar la secuencia didáctica y buscamos que los estudiantes logren grados de dominio variables, mas estaremos satisfechos, si éstos pueden lograr algún tipo de transformación de una expresión factorizada de la forma tradicional a una expresión que les de algún tipo de información dentro de las diversas caracterizaciones mostradas en las Figuras 4, 5, o 6.

Conclusiones

Luego de trabajar en la secuencia didáctica, esperamos que los estudiantes sean capaces de transformar cualquier expresión algebraica que cumpla con la caracterización estudiada a su forma correcta, de manera que pueda definir el tipo o los tipos de recipiente(s) y las dimensiones del material usado o necesario para su construcción.

Con base en los resultados obtenidos en los dos pilotajes de la secuencia didáctica y a las observaciones hechas de los materiales recopilados de ambas aplicaciones, creemos que 4 de los 12 estudiantes que participaron en las secuencias lograron efectuar al menos algunas de las transformaciones esperadas de ellos luego de terminar la secuencia didáctica, sin embargo, creemos que el dominio mostrado es el apropiado y está dentro de lo esperado. Por otra parte, la totalidad de los estudiantes lograron obtener las dimensiones del material luego de conocer las raíces con la aplicación. Esto nos parece suficiente para concluir que los estudiantes lograron enriquecer sus significaciones personales sobre la factorización, además de otros objetos matemáticos en juego.

Expresión Cúbica
$$V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 73x \quad + 117$$
Factorización de la Expresión Cúbica
$$V(x) = 4(x+1)(x-6.5)(x-4.5)$$
Factorización para el primer recipiente con tapa
$$V(x) = 2(x+1)(6.5-x)(9-2x)$$
Factorización para el segundo recipiente con tapa
$$V(x) = 2(x+1)(13-2x)(4.5-x)$$
Factorización para el recipiente sin tapa
$$V(x) = (x+1)(13-2x)(9-2x)$$

Figura 4. Transformación de la factorización de una expresión cúbica para representar un recipiente.

Expresión Cúbica
$$V(x) = 2x^3 - 20x^2 + 48x$$
Recipiente sin tapa y media altura, material de 12x8
Interior de recipiente sin tapa y media altura, material de 14x10x1
Exterior de recipiente sin tapa y media altura, material de 10x6x1
$$V(x) = \frac{1}{2}x(12-2x)(8-2x)$$
Primer recipiente con tapa, material de 12x8
$$V(x) = x(6-x)(8-2x)$$
Segundo recipiente con tapa, material de 12x8
$$V(x) = x(12-2x)(4-x)$$

Figura 5. Múltiples factorizaciones de un mismo polinomio cúbico que representan diferentes tipos de recipientes y materiales con los que se construyen estos.

Recipientes sin grosor hecho de un material de dimensiones 17x11

Recipiente sin tapa
$$V(x) = 4x^3 - 56x^2 + 187x \quad = x(17-2x)(11-2x)$$
Recipientes con tapa
$$V(x) = 2x^3 - 28x^2 + 93.5x \quad = x(8.5-x)(11-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 28x^2 + 93.5x \quad = x(17-2x)(5.5-x)$$

Recipientes con grosor hecho de un material de dimensiones 17x11x1

Volumen interior del Recipiente sin tapa de configuración A
$$V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 243x \quad - 187 = (x-1)(17-2x)(11-2x)$$
Volumen interior de los Recipientes con tapa de configuración A
$$V(x) = 2x^3 - 30x^2 + 121.5x \quad - 93.5 = (x-1)(8.5-x)(11-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 30x^2 + 121.5x \quad - 93.5 = (x-1)(17-2x)(5.5-x)$$
Volumen interior del Recipiente sin tapa de configuración B
$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 135x \quad = x(15-2x)(9-2x)$$
Volumen interior de los Recipientes con tapa de configuración B
$$V(x) = 2x^3 - 24x^2 + 67.5x \quad = x(7.5-x)(9-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 24x^2 + 67.5x \quad = x(15-2x)(4.5-x)$$
Volumen interior del Recipiente sin tapa de configuración A
$$V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 247x \quad = x(19-2x)(13-2x)$$
Volumen interior de los Recipientes con tapa de configuración A
$$V(x) = 2x^3 - 32x^2 + 123.5x \quad = x(9.5-x)(13-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 32x^2 + 123.5x \quad = x(19-2x)(6.5-x)$$
Volumen exterior del Recipiente sin tapa de configuración B
$$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 131x \quad + 187 = (x+1)(17-2x)(11-2x)$$
Volumen exterior de los Recipientes con tapa de configuración B
$$V(x) = 2x^3 - 26x^2 + 65.5x \quad + 93.5 = (x+1)(8.5-x)(11-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 26x^2 + 65.5x \quad + 93.5 = (x+1)(17-2x)(5.5-x)$$

Figura 6. Diferentes tipos de factorizaciones que muestran recipientes hechos del mismo tamaño de material representados por sus expresiones de volumen.

Referencias bibligráficas

Hitt, F. (2009). Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA). *Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional*, 1, pp. 9-21.

Hitt, F. & Cortés, J. (2009). *Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas.* mayo 04, 2017, de Revista Digital Matemática, Educación e Internet, Sitio web: http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977