CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
fwromero@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

RESUMEN: Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (*TSME*) se busca construir un esquema de *prácticas anidadas* preliminar para la Serie Trigonométrica de Fourier (*STF*), con el fin de diseñar situaciones de aprendizaje basada en la *construcción social* del conocimiento matemático (*CSCM*). Para esto se realiza una *problematización del saber matemático* que dé cuenta de su construcción social, mediante el estudio integrado de cuatro componentes: epistemológica, didáctica, cognitiva y socio-cultural, para determinar las *prácticas* que permiten la apropiación del saber matemático involucrado.

Palabras clave: series de fourier, prácticas sociales, socioepistemología

ABSTRACT: From the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics (STEM), this research work is intended to elaborate a schedule of *nested practices* preliminary to the Trigonometric Series of Fourier (TSF), in order to design learning situations based on the social building of mathematical knowledge (SBMK). A *problem-solving based- mathematical knowledge,* that show its social building, is carried out through the integrated study of epistemological, didactic, cognitive and socio-cultural components to determine the practices that allow the acquisition of the involved mathematical knowledge.

Key words: fourier's series, social practices, socio- epistemology

Introducción

Dentro del Cálculo, la Serie Trigonométrica de Fourier (*STF*) es uno de los temas primordiales, pues epistemológicamente fue un punto de quiebre en el desarrollo del análisis matemático, así como parte importante en la evolución del concepto de función tal como lo conocemos hoy en día. Por esta razón, ha sido motivo de múltiples investigaciones en Matemática Educativa, las cuales se han preocupado por diferentes aspectos relacionados con la serie. Por mencionar algunos: el problema de la cuerda vibrante como antecedente de la *STF*, la determinación del estado estacionario como fenomenología intrínseca a la serie, la visualización en el trabajo de Fourier y algunas nociones físicas y matemáticas relacionadas con la misma como lo son las nociones de calor y periodicidad.

De acuerdo con Montiel (2005) la *STF* es el estadio más avanzado de las funciones trigonométricas, pero el *discurso matemático escolar* predominante produce la exclusión de su construcción social, ya que impone argumentaciones y significados alrededor de la serie, sin considerar la *práctica de referencia* de quien aprende, es por esto que esta investigación se preocupa por contribuir al rediseño del discurso en el que se promueva la construcción social de este conocimiento.

Se pretende, a partir de la *problematización* de la *STF*, determinar las prácticas sociales que acompañan la construcción social de este saber matemático en su contexto histórico-social de surgimiento, con el fin de dar un esquema de *prácticas anidadas* preliminar que funcione como fundamento para proponer situaciones de aprendizaje que contribuyan al rediseño del *discurso matemático escolar* predominante alrededor de la serie.

El escrito está estructurado de la siguiente manera: en primer lugar, algunas consideraciones teóricas, seguido de la metodología utilizada para realizar la problematización del saber alrededor de la *STF*, luego la construcción social de la *STF*, para cerrar con algunas reflexiones finales.

Marco Teórico

Al final de la década de los 80's en la escuela mexicana de Matemática Educativa surgió una perspectiva teórica que se preocupaba por la construcción social del conocimiento y su difusión institucional; hoy en día, esta perspectiva teórica es llamada Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (*TSME*) y sostiene que el conocimiento matemático no fue creado para la escuela, mucho menos para ser enseñado, por lo que su introducción en los sistemas de enseñanza provoca que el conocimiento cambie su estructura y su funcionalidad (Cantoral, 2013).

Cuando el conocimiento llega a la escuela se producen diferentes discursos, la *TSME* los ha llamado con el término *discurso Matemático Escolar* (*dME*). De manera que es importante hacer un estudio sistémico del *dME* para conocer el rol que juega en el sistema de enseñanza, así se podrá proponer su rediseño, a través de una construcción social del conocimiento matemático (*CSCM*) (Soto y Cantoral, 2014).

Es importante resaltar que, en la *TSME*, a diferencia de otras teorías, se considera que el conocimiento matemático se genera socialmente a través de *prácticas* situadas (Soto y Cantoral, 2014), ya que, al ser las Matemáticas una producción del ser humano, está situada cultural, histórica e institucionalmente (Cantoral, 2013). La *TSME* utiliza la noción de *práctica social* como reguladora de toda actividad humana, esto es, la práctica social no es lo que las personas hacen, es lo que las hace hacer lo que hacen, aun cuando no sean conscientes de sus propias acciones (Cantoral y Farfán, 2004). La *CSCM* inicia con la *acción* directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) en algún medio, el cual es organizado como una *actividad* humana (situada socioculturalmente), esto para guiar una *práctica* (interacción deliberada de sujeto y regulada por el contexto), esta práctica es regulada por una *práctica de referencia* que es la expresión ideológica de un paradigma, el cual a su vez es regulado por una *práctica social* (Cantoral, 2013).

■ La Aproximación Sistémica de la TSME como Metodología de la Investigación

La investigación en *TSME* tiene naturaleza sistémica, estudia las relaciones entre epistemología, procesos cognitivos, procesos de institucionalización vía la enseñanza y la dimensión sociocultural. Para esto se hace una problematización del saber matemático a través del estudio integrado de cuatro dimensiones:

La dimensión epistemológica: esta dimensión estudia “las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático” (Cantoral, 2013, p. 147). Para este análisis se estudian diferentes momentos históricos: la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante, el problema de la propagación de calor; además del surgimiento de la Ingeniería como ciencia, que regula el trabajo matemático del tiempo de Fourier; un análisis epistemológico a profundidad se encuentra en el trabajo de Farfán (2012).

La dimensión didáctica: en esta dimensión se estudia cómo vive el saber en el sistema didáctico, es decir, su intencionalidad a la hora de enseñarlo, para determinar cómo ha evolucionado ese saber en los entornos escolares y no escolares. Con este propósito se estudian libros de texto, planes y programas de estudio.

La dimensión cognitiva: aquí se analizan las formas de apropiación y significación progresiva del conocimiento que vivencian los partícipes en una situación de aprendizaje con fines de construir conocimiento matemático; un ejemplo de esto es la investigación de Farfán (2012) sobre la noción de estado estacionario.

La *TSME* agrega la dimensión social y cultural, pero esta no se observa separada de las demás, está inmersa en cada análisis, con el fin de identificar aquellas prácticas humanas que propician la apropiación del objeto.

El análisis realizado da cuenta de los resultados obtenidos por toda una línea de investigaciones acerca de las nociones alrededor de la *STF*, su contexto histórico-cultural de origen, los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza y los procesos cognitivos asociados a tareas en las que se pone en funcionamiento este conocimiento, un análisis detallado lo puede encontrar en Romero (2016), a partir de este análisis se logró dilucidar un modelo preliminar de construcción social para la *STF*, lo que se conoce en la teoría como esquema de anidación de prácticas.

Construcción Social de la STF

Según Montiel (2005), al analizar la evolución del conocimiento e ideas en la historia que permitan encontrar las circunstancias, los escenarios y los medios, que posibilitaron la emergencia del conocimiento matemático, es posible plantear su *construcción social*, en este caso dicho conocimiento se corresponde con la *STF*. Para ello se analizó su contexto de origen, lo que permitió reconocer los escenarios, los contextos, las problemáticas y las prácticas de referencia asociadas a la *STF* y que se consideran fundamentales para significar al concepto en escenario escolar. Además, a partir de la dimensión didáctica, se considera el estado del *dME* predominante y como este influye en la didáctica; con la componente cognitiva se analizaron las construcciones mentales de estudiantes y profesores y cómo este afecta la manera en que conciben la *STF* y los conceptos relacionados con la misma.

En lo que sigue se hará evidente, en forma general, la presencia de Práctica de Referencia - Práctica Socialmente Compartida - Actividad - Acciones, en su escenario histórico, institucional y cultural, y su relación con el estado actual del sistema de enseñanza y las nociones mentales de profesores y estudiantes acerca de la *STF*. El análisis a profundidad para proponer la construcción social de la *STF* se encuentra en Romero (2016), aquí sólo se resumen los aspectos que se consideran centrales.

El problema de la cuerda vibrante

Al estudiar las circunstancias que posibilitaron la emergencia de la noción de convergencia, ambiente en el cual se dio el surgimiento de la *STF*, la investigación de Farfán (2012) muestra cómo la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante enunciado por B. Taylor en 1715 es antecedente del trabajo de Fourier. La solución física propuesta por D. Bernoulli, a partir de sus conocimientos musicales sobre la superposición de armónicos, asegura que la forma inicial de la cuerda se puede representar en serie de sinusoidales, lo cual fue punto de controversia entre los matemáticos de la época. Por ejemplo, Euler sostenía que de ser cierta la solución planteada por D. Bernoulli, se debía cumplir que la forma inicial de la cuerda fuese una función periódica e impar (por las propiedades de los términos de la serie), lo cual era una restricción innecesaria, sin embargo D. Bernoulli se mantuvo firme en su postura pues argumentaba que había suficientes coeficientes (infinitos) para seleccionarlos de manera que la igualdad se cumpla, por lo que para él esta era la solución general del problema de la cuerda vibrante.

La solución propuesta por D. Bernoulli permite vislumbrar que la comprensión a profundidad de la superposición de ondas (sumas parciales) permite *predecir* ciertas propiedades del comportamiento general de la serie (convergencia). Sin embargo, los matemáticos de la época, aunque no se preguntaron por la convergencia de la serie, generalizaron las propiedades de los términos de la serie a la función que ésta representaba (su valor de convergencia), lo cual está reportado sucede hoy día en las aulas con profesores y estudiantes (Farfán, 2012; Moreno, 1999).

El contexto del trabajo de Fourier

Aunado al trabajo de Fourier y en su contexto local, la Francia del siglo XVIII, se produce el surgimiento de la Ingeniería Matemática, para lo cual la Escuela Politécnica, de la cual Fourier fue profesor, juega un rol protagónico en el proceso, pues poseía las condiciones para la creación de un ambiente de la Ingeniería como ciencia, ya que el propósito de su creación fue el de imponer la uniformización y un nivel avanzado de conocimientos en Matemáticas en toda Francia.

Asimismo, los profesores de esta institución tenían la obligación de escribir materiales para sus cursos, lo que provocó un incremento notable en la producción de textos de Matemáticas, contribuyendo a la matematización del mundo científico, en un periodo en el que las Matemáticas no lograron tantos avances como lo hicieron otras ciencias, pues los libros de texto de Matemática no se preocupaban por la investigación, sino en reforzar la creación de ingenieros, militares e industriales (Farfán, 2012).

Así, el análisis de Fourier sobre la propagación de calor "se da en el marco de la profesionalización de una *práctica de referencia*, la práctica de la Ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, p. 90, el subrayado es nuestro). Por lo que el problema de propagación del calor nace ligado a la práctica de la Ingeniería, en un momento en que se está consolidando la Ingeniería como ciencia.

La ecuación de propagación del calor

Con el trabajo de Biot se establece la primera ecuación diferencial que modela el fenómeno de propagación del calor, lo hace a través de la noción de calórico y de mediciones con un termómetro, lo que provoca que no se estudie el fenómeno en sí, los cálculos están basados en la empírica, además no explica la naturaleza de los coeficientes de la ecuación diferencial, lo que es propio del material y lo que no (conductividad, densidad, entre otros). Es con el trabajo de Fourier, en la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), donde se analiza el problema de la propagación del calor en los sólidos.

La variación está presente y se significa en la ecuación general que modela el fenómeno, donde $v(x, y, z, t)$ es la temperatura del sólido en el punto (x, y, z) en el tiempo t y K, C y D son constantes que dependen del sólido:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Se puede decir que esta es la ecuación que modela completamente el fenómeno, pues se corresponde con la que Biot había obtenido de forma empírica. La discusión siguiente gira en torno de la solución de la ecuación diferencial, para lo cual Fourier da ejemplos de su aplicación.

Es así como el estudio del ambiente fenomenológico de la transferencia del calor propicia la construcción de la ecuación diferencial que modela el problema, pero la solución de esta ecuación en los casos particulares está inserta en la Matemática misma, sin hacer alusión a la situación física, y es aquí en donde surge la serie trigonométrica.

La serie trigonométrica y su convergencia

J. Fourier al estudiar la propagación del calor, en su libro *Théorie analytique de la chaleur* (1822), establece la ecuación general que modela el fenómeno en cuerpos sólidos. Luego presenta una serie de problemas de uso de la misma, entre ellos el problema de la propagación de calor en una lámina infinita, el cual es un **modelo** de la transferencia de calor en la Tierra (Romero, 2016). Al obtener la solución de dicho problema y considerar sus condiciones iniciales llega a la ecuación:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots$$

Esta solución, al igual que la dada por D. Bernoulli en el problema de la cuerda vibrante, es una representación en serie trigonométrica de una constante. Lo que logró hacer Fourier, que no hizo D. Bernoulli, fue proporcionar el cálculo de los coeficientes. Pero antes de esto vio necesario justificar dicha solución físicamente, lo que permite ver que tanto Fourier, como la comunidad de la Escuela Politécnica, están interesados en "*anticipar* el comportamiento de la naturaleza, en *modelarla*" (Cantoral et al., 2006, p. 94).

Para Fourier, a diferencia de D. Bernoulli que presenta argumentos físicos como demostración, es importante comprobar que la solución matemática es coherente con la situación física (*modelar* e *interpretar*), pero la demostración se inserta en la matemática misma, sin hacer alusión a los argumentos físicos, se da así en inicio de la separación entre física y matemática que siempre iban de la mano (Farfán, 2012). De esta manera, en palabras de Fourier, la característica principal del problema de la propagación del calor es presentar un estado inicial y uno final fijo, es decir, es un problema que inicia en un estado transitorio y con el paso del tiempo llega a su estado estable o estacionario, para el cual la serie representa el estado estable del fenómeno, donde el paso del tiempo ya no provoca cambios en la temperatura. Surge la cuestión, al no afectar el flujo de tiempo el estado estable ¿cómo se observa dicha estabilidad en la solución? Esta estabilidad se vislumbra en *la convergencia de la serie.*

Luego de estas consideraciones físicas y matemáticas acerca de la convergencia, Fourier procede al cálculo de los coeficientes de la serie y generaliza sus procedimientos para resolver lo que generó la controversia en el problema de la cuerda vibrante, representar una función arbitraria por serie trigonométrica.

Es importante resaltar cómo Fourier utiliza razonamientos geométricos como argumento para demostrar sus ideas Matemáticas, visualiza en la gráfica todos los pasos necesarios al lado de la operatoria aritmética que le permite calcular los coeficientes para la *STF*, esto hoy día no es un recurso metodológico para demostrar un teorema, pues en el actual *dME* alrededor de la *STF* predomina el contexto algebraico. Se puede asegurar entonces que, en la forma de trabajo de Fourier, la manera de construir el conocimiento matemático relativo al cálculo de los coeficientes está ligada a la coordinación y articulación de diferentes miradas del objeto, una geométrica-gráfica y la otra algebraica-analítica, para validar la segunda en la primera.

Reflexiones Finales

El análisis Socioepistemológico presentado hasta ahora, basado en una problematización del saber alrededor de la *STF*, evidenció la presencia de la *predicción* como práctica socialmente compartida, la cual está regulada por el *surgimiento de la Ingeniería como ciencia* como un paradigma imperante alrededor del trabajo de Fourier (la práctica de referencia). Es dentro de ésta donde Fourier hace el estudio de la propagación del calor, en la cual la actividad que permite la formación de funciones psicológicas superiores es el *estudio de la convergencia* de series trigonométrica particulares.

El problema inicial de Fourier consiste en conocer el estado ulterior (estable) de un sistema, en particular el fenómeno de propagación del calor cuyas variaciones son periódicas y acotadas, y del cual se conocen sus condiciones iniciales y de frontera. Se requiere, entonces, conocer el valor que tomará la temperatura cuando el flujo de tiempo ya no sea una variable que modifique el comportamiento del sistema (estado estacionario).

La *STF* se presenta entonces como resultado de una situación que precisa de la predicción, cuya fenomenología intrínseca es la *determinación del estado estacionario* (Farfán, 2012). Es así como "la *predicción* en tanto que no es un objeto matemático, tiene que entrar en la problemática teórica no como noción, o representación, sino como expresión de una *práctica social* […]: el *Prædiciere*" (Cantoral, 2013, p. 93).

La *predicción* (práctica socialmente compartida), que es regulada por el *surgimiento de la Ingeniería como ciencia* (práctica de referencia), va a significar la *STF* como un modelo de predicción para fenómenos estables con variación periódica y acotada, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la *convergencia de la serie trigonométrica*; para lo que es necesario la intervención de las acciones de *predecir, modelar e interpretar*.

En resumen, se pueden identificar las prácticas asociadas a la *STF*, donde predecir*, modelar e interpretar* corresponden a las *acciones* directas del sujeto sobre el medio; estas acciones se organizan para el *estudio de la convergencia* de series trigonométricas como *actividad* que provoca el surgimiento de funciones psicológicas superiores, para perfilar a la *predicción* como *práctica socialmente compartida*; dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia*, la cual es el *surgimiento de la Ingeniería como ciencia*; la que a su vez es normada por la *Prædiciere* como *práctica social* (ver Ilustración 1).

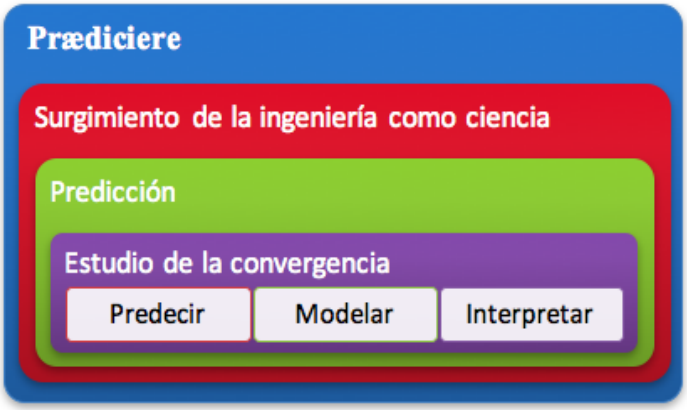

Ilustración 1. Epistemología de prácticas preliminar de la *STF*.

La problematización del saber permite asegurar que un ambiente de significación para la *STF* requiere de *modelar un fenómeno estable con variación periódica y acotada en el paso del tiempo, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie, es decir, en el estudio del límite de la sucesión de sumas parciales*.

Para finalizar, cabe resaltar que la epistemología de prácticas propuesta es un modelo preliminar de construcción social de la *STF* que se vislumbra a partir de un estudio teórico de la misma, tomando en cuenta los resultados de investigación reportados hasta la fecha, se debe ahora comprobar mediante el diseño de situaciones de aprendizaje con fundamento socioepistemológico que permitan comprobar y fortalecer dicho modelo propuesto a la luz de los datos empíricos.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 137-168.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, especial, 83-102.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. París: Chez Firmin Didot, père et fils.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. Pautas para un diseño de intervención en el aula*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28 (50)*, 1525-1544.