

## EL PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN COMO ESCENARIO PARA RESIGNIFICAR LA OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

**Carlos Eduardo Leon Salinas, David Maldonado Rico**

Universidad La Gran Colombia. (Colombia)

carlos.leon@ugc.edu.co, davidc75814@hotmail.com

**RESUMEN:** Esta propuesta de investigación presenta el diseño de un escenario configurado a partir del principio de mínima acción, para mostrar, a través de diferentes etapas, la interpretación física del concepto de optimización. El diseño responde a la ausencia de marcos de referencia, que posibiliten un nuevo significado del conocimiento matemático. Se plantea un problema de investigación alrededor de las formas en que el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática. El marco teórico al que se acoge esta propuesta es la teoría socioepistemológica, la cual permite abordar el problema desde una práctica de referencia, en este caso, la experimentación física. La metodología de la propuesta se basa en un diseño de aprendizaje basado en cuatro estaciones que especifican el uso del principio de mínima acción para resignificar la optimización matemática. Los resultados se enfocan principalmente en el análisis de conceptos matemáticos como los de área y perímetro, lo cuales surgen en proceso de resignificación.

**Palabras clave:** principio de mínima acción, optimización, medición, teoría Socioepistemológica

**ABSTRACT:** This research work deals with the design of a teaching setting made up from the minimum action principle, to show the physical understanding of optimization concept, through different stages. The design corresponds to the lack of reference frameworks that make possible a new meaning of mathematical knowledge. The research problem is related to the ways in which the minimum action principle could be able to provide a new meaning to mathematical optimization. The socio-epistemological theory constitutes the theoretical framework to this proposal, which allows focusing the problem from a reference practice, in this case, the physical experimentation. The research methodology is in correspondence with a learning design base on four stages which specify the use of minimum action principle to provide a new meaning to mathematical optimization. The results are focused mainly on mathematical concepts such as area and perimeter, both of which arise in the process of providing a new meaning.

**Key words:** minimum action principle, optimization, measurement, socio-epistemological theory

## ■ Introducción

En la actualidad, no es un secreto para la comunidad educativa el desinterés y la falta de motivación presente en los estudiantes para aprender Matemáticas. Esto debido, a la falta de metodologías que permitan generar espacios en los que se pueda evidenciar un significado de los conceptos matemáticos en un plano distinto del analítico. Si bien, el carácter abstracto de las Matemáticas es lo que ha permitido diferenciarla de otras ciencias, también es cierto que una saturación de la abstracción en la enseñanza de la matemática, puede ocasionar una falta de significado del conocimiento matemático por ser carente de un determinado contexto. Esta falta de significación, es reportada por Cordero y Martínez (2001) a raíz de privilegiar argumentos de corte analítico que toman a los conceptos matemáticos como objetos elaborados, alejados totalmente de argumentos situacionales. Según Jiménez (1992), nuestros actuales programas llevan a impartir una matemática carente de significado, ahistórica y acultural. El estudiante está obligado a trabajar de forma rutinaria y memorística y sobre todo, de forma aislada.

Atendiendo a esta dificultad la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, analiza las prácticas sociales que permitan generar la construcción y reconstrucción social del conocimiento matemático, a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, en un sentido teórico y filosófico, la práctica social es un constructo teórico que pretende establecer la intención transformadora, a la vez que ubica a la actividad humana como un acto social, (Cantoral, 2013). De esta manera, se modifica la idea que se tiene del conocimiento matemático y su aprendizaje, los cuales han estado enmarcados desde hace bastante tiempo como elementos fijos y preestablecidos.

Para este trabajo en particular, el principio de mínima acción permitirá contextualizar desde una perspectiva histórica y experimental la optimización matemática. A su vez, al ser un principio físico ayuda a generar prácticas para la constitución de un espacio, en donde se puede difundir, las situaciones y nociones básicas de este principio. De esta manera, se constituirá lo que se ha denominado un laboratorio de Matemáticas fundamentado en el principio físico de mínima acción. El laboratorio de Matemáticas es descrito como un espacio que permite la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde un punto de vista experimental y al respecto Jiménez(1992) aclara que el laboratorio es, antes que nada, una estructura para la enseñanza y el aprendizaje en la que se concreta la enseñanza experimental. A partir de lo anterior se plantea el siguiente problema de investigación:

**¿De qué forma el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática?**

Para dar respuesta a este interrogante se diseñó un laboratorio aplicado a 6 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad La Gran Colombia. Se programaron dos sesiones de dos horas cada una para el desarrollo de las actividades propuestas. El laboratorio de Matemáticas fundamentado en el principio de mínima acción como escenario para resignificar la

optimización matemática, está constituido por cuatro actividades que se han denominado estaciones debido a que conforman un recorrido:

#### **Primera estación: historia de la reina Dido**

Debido a su importancia histórica y didáctica, el problema de la reina Dido se ha convertido en un punto referente para la mayoría de trabajos que tiene como objetivo abordar el cálculo de variaciones y las implicaciones que éste tiene en la formulación del principio de mínima acción. En esta estación los estudiantes deben responder al interrogante: ¿cuál es la figura que encierra la mayor área a partir de un perímetro dado? La recreación del problema de la reina de Dido se realiza utilizando un material diseñado para esta parte del laboratorio, que consiste en una tabla similar a un geoplano y en cuya superficie contiene arena para simular la situación en el desierto y en donde se presta mejor realizar los diseños de las figuras y con los cuadrados, hacer una aproximación de las áreas calculadas en cada intento.

#### **Segunda estación: la esfera**

Las burbujas que se obtienen al soplar por un contorno cualquiera es simplemente aire atrapado en una solución jabonosa. Mientras no se sople el contorno, se formará una pompa de jabón, que tiene la propiedad de adherirse al contorno independientemente del que sea, ocupando en la superficie. Esta propiedad elástica que permite a la pompa de jabón adoptar la superficie limitada por el contorno es denominada tensión superficial, que obliga a su vez a la pompa de jabón a tomar la menor superficie posible, cuando no existe contorno alguno la pompa de jabón se adhiere a sí misma y en este caso la forma o superficie más pequeña para que suceda es la esfera.

#### **Tercera estación: aplicaciones del principio de mínima acción a partir de experimentos con pompas de jabón**

En esta estación, se plantea una actividad en la cual se dispondrá de un dispositivo conformado por dos vidrios colocados de forma paralela entre los que se podrán ubicar fragmentos de madera que simularán los puntos a ser unidos. Una vez dispuestos estos pedazos de madera, se sumergirá en la solución jabonosa y los estudiantes podrán evidenciar el camino que minimiza la longitud total.

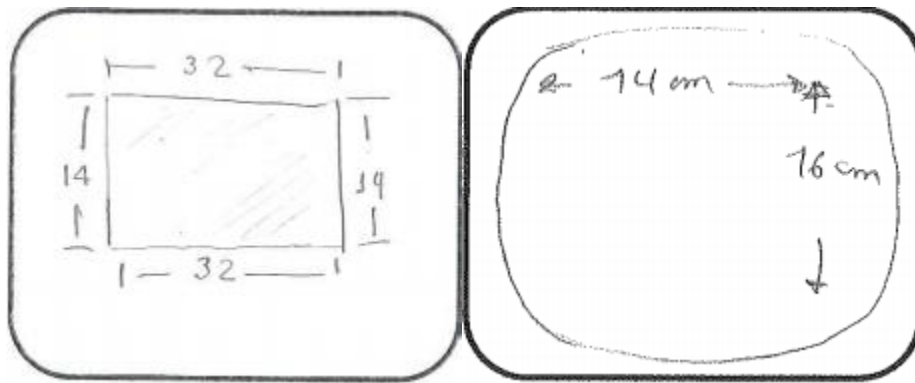
#### **Cuarta estación: superficies minimales en bastidores poliédricos**

En esta estación del laboratorio, los estudiantes construirán los tetraedros utilizando hilo y pitillos y teniendo como medidas de sus lados de uno a veinte centímetros. Antes de sumergir el tetraedro se les preguntará a los estudiantes que hagan una aproximación de la forma de la pompa de jabón que se formará dentro del sólido. Una vez sumergido el tetraedro, se les pedirá que comparen la pompa que se formó con la que creían que se podía formar. La pompa de jabón que se configura dentro del tetraedro está conformada por seis triángulos isósceles. Si se quiere calcular el área de esta pompa de jabón, solo tendríamos que calcular el área de uno de ellos y multiplicarla por seis. Ahora se les preguntará a los estudiantes qué relación hay entre el área de la pompa de jabón con respecto al área del tetraedro.

### ■ Análisis de los resultados

A la luz de la Teoría Socioepistemológica, se plantea un análisis cualitativo de los resultados obtenidos en cada una de las estaciones:

En el desarrollo de la actividad de la reina Dido, se realizó la medición del área que se configuraba a partir del segmento de cuerda de longitud de 60 cm. En primer lugar, los estudiantes lograron concluir que era necesario modificar la forma del contorno para generar un área mayor. A continuación, se muestran las gráficas realizadas por los estudiantes cuando el perímetro permaneció fijo:



**Figura 1.** Soluciones gráficas de los estudiantes al problema de la reina de Dido.

Las dos figuras mostradas anteriormente presentan características distintas. La figura de la izquierda formada por segmentos rectilíneos facilita en grado sumo la relación matemática que permite encontrar el área de la figura, mientras que la figura de la derecha está bosquejada por medio de una línea curva, lo que dificulta, en cierta medida, calcular su área. Aunque las dos soluciones dadas por los estudiantes son viables e igualmente válidas, una de ellas reviste mayor grado de importancia: la figura constituida por la línea curva, esto debido a la dificultad que presenta en el geoplano el cálculo de áreas de sectores circulares. Los estudiantes trabajaron a partir de aproximaciones que evidenciaban una práctica de medición que buscaba maximizar el área. En este caso se interpreta la medición como una práctica social la cual determina las acciones del sujeto y que plantea un uso del conocimiento atendiendo al contexto, por lo que la optimización del área se interpreta como saber que resulta de un proceso de resignificación desde lo experimental.

### La esfera

En la segunda estación, la esfera, se intentaba evidenciar la propiedad óptima de estas superficies. La primera actividad consistía en dibujar las burbujas que ellos creían se formaban antes de soplar por los diferentes contornos construidos con alambre (contornos triangular, cuadrado, circular y pentagonal). A partir de los contornos circular, pentagonal y cuadrado, el estudiante comprende que el resultado es

siempre una burbuja esférica. La intención de la pregunta era establecer qué elementos del contorno debían considerarse para establecer una relación entre la superficie o área del contorno, es decir, la *posible área de la burbuja*, con su volumen. Si bien la medición no se establece directamente con instrumentos de medida, inferir qué elementos del contorno se deben considerar para su hipotética medición es una fase abstracta de esta práctica. Esta estación confronta un comportamiento físico conocido por todos (la formación de una burbuja de jabón) con la manera en que se puede conseguir otra forma para la burbuja. A pesar de que los estudiantes creían que la forma de la burbuja cambiaba con el cambio del contorno, su percepción física les decía que no era posible hacer una burbuja no esférica, lo que presenta una racionalidad que depende del contexto (Principio de la racionalidad contextualizada), y supera a la lógica que maneja el estudiante a partir de los requerimientos del laboratorio.

### **Conexiones mínimas**

En la tercera estación: conexiones mínimas, se proponía mostrar una de las aplicaciones del principio de mínima acción por medio de las pompas de jabón para dar solución al problema propuesto por Jakob Steiner. Al igual que en el problema de la reina Dido, para obtener la solución óptima al problema de Jakob Steiner, era necesario que los estudiantes que participaron de la actividad, se aproximaran a esta respuesta por medio de la medición realizada por ellos, antes de evidenciar la solución dada por la pompa de jabón y formalizar la respectiva comparación.

Al realizar la comparación de sus soluciones, con las obtenidas después de sumergir las estructuras de vidrio en la solución jabonosa, indican las diferencias en cuanto a forma, más no en cuanto a su medición. Evidencian físicamente la solución a un problema de optimización, por medio de las pompas de jabón. El uso que se da al concepto matemático evidenciado en una solución física, proporcionada por la pompa, discrepa completamente con su intuición y quizás por esto se da mayor importancia a la forma. Se usa el concepto, se explica físicamente, y genera en los estudiantes interés debido a que los métodos para encontrar la solución no habían sido comprobados con anterioridad, o simplemente solo conocían una manera de aproximarse al problema, el obtenido desde su intuición y su forma particular de medir y no probados en una actividad experimental. Esta estación del laboratorio busca confrontar las formas que tiene el estudiante para encontrar las distancias mínimas en un caso particular. El concepto en juego es de nuevo la optimización, esta vez, haciendo uso de la distancia y mediados por la práctica de la medición. A medida que el estudiante intenta encontrar grafos con la distancia mínima, se va resignificando el concepto de distancia mínima en un plano, atendiendo a la condición impuesta por la actividad. Cada posible solución se argumenta y se cuestiona al presentarla como la distancia mínima, con lo cual se logra establecer un uso del concepto de distancia, a través de una complejización que se va dando (resignificación progresiva)

### **Superficies minimales en bastidores poliédricos**

Con respecto a la última estación se realizó, en primer lugar, una discusión con respecto a los conceptos matemáticos de variable dependiente y variable independiente de una función, la cual se

presentó debido a uno de los objetivos de la actividad el cual era: determinar una función que relacione el área del tetraedro y el área minimal como también el volumen del tetraedro y el área minimal. En segundo lugar se realizó el análisis del comportamiento de las funciones obtenidas por medio del programa de geometría dinámica GeoGebra. Más allá de determinar con precisión la naturaleza de la función obtenida, se enfatiza el análisis en el comportamiento de los puntos graficados y las posibles interpolaciones que se pueden realizar a partir de la curva obtenida.

En las respuestas se infiere que todos los estudiantes determinaron que la variable dependiente era el área minimal, aunque también se aprecia que algunos estudiantes, como segunda opción eligieron el área del tetraedro. La decisión correcta dependía del proceso que se quería analizar, en este caso la magnitud a considerar en la toma de datos era el área minimal que a su vez dependía del perímetro, área o volumen del tetraedro. Una vez realizada la discusión se continuó con el ajuste de los datos en GeoGebra. Una vez dispuestos los datos en una hoja de cálculo y su posterior análisis en regresión de dos variables, se realiza el análisis del comportamiento de la disposición de los datos y la curva obtenida

### ■ Reflexiones finales

Como se indicó inicialmente, en este planteamiento de investigación se aborda por medio de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y, uno de sus objetivos, según Cantoral (2013), es la posibilidad de rediseñar el discurso matemático escolar con el fin de facilitar el aprendizaje de la Matemática por medio de prácticas en las cuales el ser humano y su cotidianidad permiten dar funcionalidad a los constructos teóricos propios de cada individuo. Con la intención de construir escenarios que permitan a los estudiantes comprender conceptos matemáticos en planos distintos al abstracto, esta investigación centra su interés en el diseño de un laboratorio matemático fundamentado en el principio físico de mínima acción, para evidenciar físicamente la optimización matemática.

Con la implementación del laboratorio de Matemáticas basado en el principio físico de mínima acción, se logró evidenciar uno de los fundamentos de la Socioepistemología: el relativismo epistemológico; debido a que, si bien el instrumento de recolección de datos estaba diseñado para que los estudiantes participaran de forma individual, como consecuencia de la planificación de la actividad, ellos recrearon un espacio para compartir sus soluciones y de esta forma compararlas con la de sus demás compañeros. Si en un principio habían identificado una solución particular (objetivismo), una vez compartida y comparada, se dan cuenta que sus resultados son subjetivos (relativismo), concepto que sostiene que los puntos de vista no tienen verdad o validez universal, sino que, en todo caso, solo poseen una verdad subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia” (Cantoral, 2013, p. 159).

Se tiene, entonces, al laboratorio como comunidad de aprendizaje, donde es posible la construcción social del conocimiento al valorar las ideas y resultados de los individuos que participan de la actividad, con la correspondiente aclaración que no se está diciendo que existan en todo momento diversidad de opiniones, ante los mismos hechos, esto es un hecho conocido, se dice algo más: que el valor de verdad para el relativismo asume que dichas opiniones son verdaderas para esas personas, no hay una verdad única” (Cantoral, 2013, pág. 159)

Además en cada una de las estaciones se pudo analizar la medición como una práctica social que norma dos acciones fundamentales en las producciones de los estudiantes. En primera instancia los estudiantes argumentan a partir de las mediciones que obtienen, utilizando métodos propios que se relacionan más con su cotidianidad que con un saber escolar. Cada situación del laboratorio presentaba un problema cuya solución estaba normada por las formas de medición y a partir de estas hacían predicciones sobre las formas o sobre los comportamientos de la variación de las áreas. De esta manera es posible determinar que la medición cumple con la noción de practica social, de la forma como es concebida por la Socioepistemología, es decir “*no es lo que hacemos, sino lo que nos hace hacer los que hacemos*” (Cantoral, 2013, p. 109), debido a que es por medio de la medición que es posible idear un resultado.

En esta propuesta de investigación se preguntaba: ¿de qué forma el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática en estudiantes de primer semestre de licenciatura en Matemáticas de la Universidad la Gran Colombia? Se evidencia que mediante la manipulación directa con los instrumentos del laboratorio de Matemáticas, fundamentado en el principio físico de mínima acción, los estudiantes comprenden, a la vez que debaten, conjeturan y proponen soluciones a cada uno de los problemas propuestos en el marco de las actividades a realizar. El uso que se da del concepto matemático, en este caso de la optimización matemática, para interpretar las situaciones propuestas en cada estación, permitió generar en los estudiantes criterios propios, unos derivados de su experiencia, con la manipulación previa de los conceptos evidenciados en las prácticas, como también, otros derivados al momento de la realización de la actividad, lo que permitió que se diera un contraste entre ambos criterios. Los estudiantes tenían un significado de la optimización matemática muy relacionado con sus prácticas escolares, vinculando fórmulas geométricas de áreas que validaban sus métodos. La experimentación resignificó la idea que tenían de optimizar a partir de las características físicas de las pompas de jabón, como ocurrió con el problema de Steiner o con los bastidores.

De esta manera se logra que los estudiantes, a partir del uso que se da de la optimización matemática, evidenciada en el principio mínima acción por medio de cada actividad propuesta, resignifiquen este concepto debido a que como lo plantea la Teoría Socioepistemológica, es mediante este uso del concepto matemático, y no propiamente mediante la manipulación directa del concepto, que se logra resignificar. Asimilar el principio de mínima acción para construir un laboratorio de Matemáticas, fue asimilar un concepto que no está presente en los lineamientos curriculares, pero que sí lo está en fenómenos de naturaleza, físicos e incluso fenómenos presentes en la cotidianidad de los individuos.

De esta forma, el laboratorio fundamentado en este principio, se propone como discurso a partir del cual, el docente de Matemáticas puede aproximar nociones que explican fenómenos que hacen parte de la realidad de los individuos.

#### ■ Referencias bibliográficas

- Abarca, A. (2012). *Técnicas cualitativas de investigación*. San José: Editorial Universidad de Costa Rica.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.
- Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14 (pp. 422–431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Jiménez, A. P. (1992). Matemáticas experimentales. *Suma*, (11-12), 27-41.