LA PREDICCIÓN COMO ARTICULADORA DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Luis López-Acosta, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
lalopeza@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: En el escrito se discute una articulación del Pensamiento Algebraico con el Pensamiento y Lenguaje Variacional, a partir del estudio de la variación para la predicción como una práctica que norma el proceso de generalización de comportamientos. Con base en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se propone un modelo de anidación de prácticas para la generalización de patrones como un fundamento para la construcción de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en prácticas.

Palabras clave: socioepistemología, pensamiento y lenguaje variacional, pensamiento algebraico

ABSTRACT: The paper discusses a linking of algebraic thinking with variation thinking and language, from the study of variation for prediction as a practice that regulates the behavior generalization process. Based on the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics, a nesting model of practices for the generalization of patterns is proposed as a basis for the construction of a practice-based learning hypothetical path.

Key words: socio epistemology, variation thinking language, algebraic thinking

Introducción

En el campo del Pensamiento Algebraico, algunos investigadores reconocen que su desarrollo está relacionado con el tratamiento de las relaciones funcionales y de la variable (Beigie, 2011; Knuth, 2000, en Smith, et. al. 2007; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Blanton y Kaput, 2011; Blanton y Kaput, 2005; Grupo Azarquiel, 1993, en Serres, 2007). Por otro lado, otros coinciden con que el núcleo del Pensamiento Algebraico es la *generalización* (Kinach, 2014; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1985; Bell, 2011), sobre la cual, la mayoría de los trabajos se han enfocado en el trabajo con patrones.

Enmarcados en el Pensamiento y Lenguaje Variacional, se evidenció que ambas posturas se articulan bajo la noción de *variación*, toda vez que el tipo de actividades que promueven implican el análisis de situaciones de cambio, cuya finalidad es identificar regularidades de comportamiento para descubrir reglas generales que describan tales comportamientos (Figura 1). De manera particular, en el trabajo de López-Acosta (2016), se señala que este tipo de situaciones pueden caracterizarse como *situaciones variacionales*, en el sentido que propone Caballero (2012). Desde un análisis teórico, basado en la literatura especializada, a esta articulación se propone una ampliación a través de un modelo para la *generalización de patrones basada en prácticas*.

Blanton y Kaput (2011) Rivera (2013)

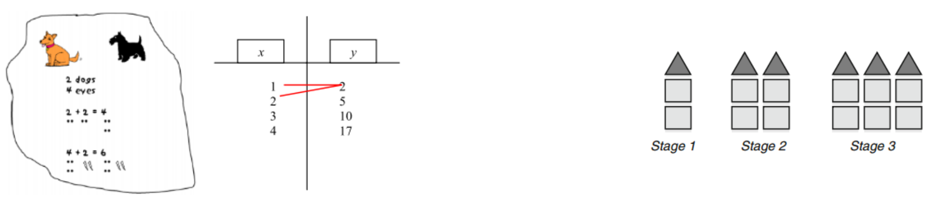


Figura 1. Ejemplos de actividades sobre pensamiento funcional y generalización como introducción al Pensamiento Algebraico

La variación como un articulador de los contenidos para el tránsito del pensamiento aritmético al algebraico

En el caso del bachillerato mexicano, puede observarse también la importancia de la noción de *variación* en el tránsito del Pensamiento Aritmético al Algebraico, pues se identifica también en los contenidos centrales que ésta articula más de uno de estos, como, por ejemplo: variación proporcional, tratamiento de lo lineal y lo no lineal y el uso de la variable (Figura 2).

PROPUESTA DE APRENDIZAJES FUNDAMENTALES | **MATEMÁTICAS**

Ejes	Componentes	Contenidos centrales
DEL PENSAMIENTO ARITMÉTICO AL LENGUAJE ALGEBRAICO	Elementos del Álgebra elemental	• Conceptos básicos del lenguaje algebraico • Usos de la variable • Números y sus propiedades • Variación proporcional • Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (cuadrático) • Representación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Figura 2. Propuesta curricular del modelo educativo 2016 para el bachillerato mexicano (SEP, 2016)

De esta manera, tomando en cuenta la relevancia del tipo de actividades antes descritas, así como la demanda del modelo educativo en México para el bachillerato, consideramos pertinente iniciar el tratamiento del Pensamiento Algebraico centrado en el análisis de comportamientos de distinta índole.

La apuesta hacia este tipo de acercamiento es que, si se promueve un tratamiento del Pensamiento Algebraico que atienda el análisis de situaciones de cambio, se podrían tender puentes más robustos hacia el tratamiento de las funciones y del Cálculo, pues, por un lado, el estudio de las funciones debe estar centrado en reconocer sus distintas naturalezas en términos de sus regularidades de comportamiento. Por ejemplo, abordar lo lineal y lo cuadrático implica reconocer que lo lineal está caracterizado por su primer orden de variación constante, en tanto que lo cuadrático por su segundo orden de variación constante. Por el otro, el reconocimiento y análisis de regularidades puede favorecer el desarrollo de nociones como la acumulación, y la variación en sí misma, las cuales son la base para comprender conceptos más avanzados del Cálculo, como la derivada y la integral.

Desde nuestra postura dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, coincidimos con la perspectiva de Hsu, Kysh, Ramag y Resek (2007) respecto al uso de “grandes ideas” para revitalizar el tratamiento del Álgebra, que, desde nuestra postura teórica se relaciona con el Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME).

Según esos autores las grandes ideas “son temas o ideas que:

a) Conectan diferentes partes del currículum,

b) Su entendimiento sirve como base para el entendimiento de otros temas, y

c) Es lo suficientemente específica para ser usada en la toma de decisiones respecto al currículum” (Hsu, Kysh, Ramag & Resek, 2007, p. 328).

De modo que el trabajar sobre la noción de variación y, más aún, sobre el abordaje de prácticas como la predicción y la generalización, aporta en esta dirección, puesto que es notorio que dentro del currículum estas nociones y prácticas están inmersas y se relacionan en gran cantidad de contenidos, no sólo en Álgebra. No obstante, resaltamos el hecho de que esta postura está centrada en un primer momento de desarrollo del Pensamiento Algebraico en el bachillerato, pues reconocemos también que este tipo de pensamiento precisa de otros aspectos más, por ejemplo, los vinculados con la *significación de la incógnita*.

Pensamiento y lenguaje variacional y pensamiento algebraico. Elementos de articulación

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una de las líneas de investigación más consolidadas dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), pues sirvió como base para su conformación (Cantoral, 2013). Hasta hoy, el PyLVar se ha encargado de “estudiar fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social” (Cantoral, 2004, p. 8). Asimismo, como una forma de pensamiento matemático, éste se caracteriza por comprender un conjunto de elementos, estrategias, técnicas y lenguajes variacionales que conforman una forma de razonamiento predictivo que permite enfrentar o conducirse ante problemas o situaciones variacionales (Cabrera, 2014).

Es dentro del PyLVar que se documenta la primera práctica social de la TSME: el *prædiccere,* la cual se relaciona con los mecanismos que permiten realizar predicciones: los *mecanismos de constantificación* y la *herencia del cambio* (carácter estable del cambio). Se considera que su articulación es la base sobre la que opera el razonamiento predictivo, puesto que permiten organizar el pensamiento para sistematizar el análisis de la variación y el cambio ante situaciones variacionales con la finalidad de realizar predicciones tanto globales como locales (López-Acosta, 2016).

Los mecanismos de constantificación son estrategias y razonamientos que dan sustento y permiten elegir las variables que aportan información de manera significativa sobre el comportamiento de los sistemas, así como para determinar hasta qué orden de variación es necesario considerar para la predicción. El uso de estos mecanismos tiene la finalidad de determinar el *carácter estable del cambio*, condición fundamental para poder predecir (López-Acosta, 2016). Esto es, la determinación de aquello que permanecerá invariante ante el fenómeno de variación. Por ejemplo, como se ha mencionado antes, el carácter estable del cambio de un fenómeno lineal consiste en que su primera variación es la misma siempre (estable).

Dentro del PyLVar, el trabajo de López-Acosta (2016), a partir de un análisis de algunos resultados respecto a la generalización de patrones, mostró que los mecanismos de constantificación y el carácter estable del cambio son fundamentales para la abstracción de los patrones subyacentes en secuencias de imágenes y numéricas.

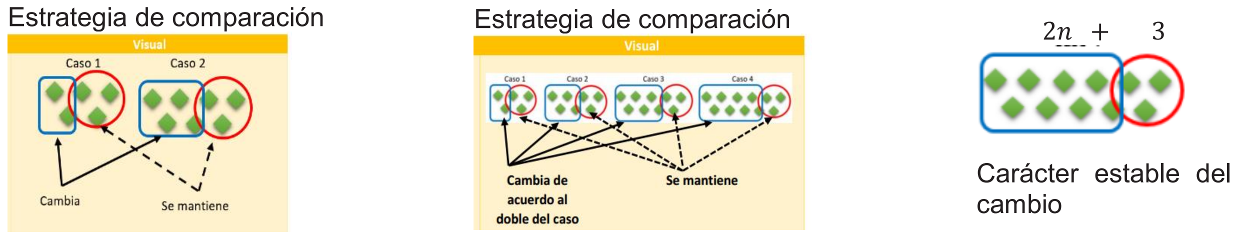


Figura 3. Estrategias variacionales visuales para la generalización de patrones (López-Acosta, 2016)

Modelo de generalización de patrones desde el pylvar

En el trabajo de López-Acosta (2016) se propone un modelo para generalizar patrones numéricos y figurales.

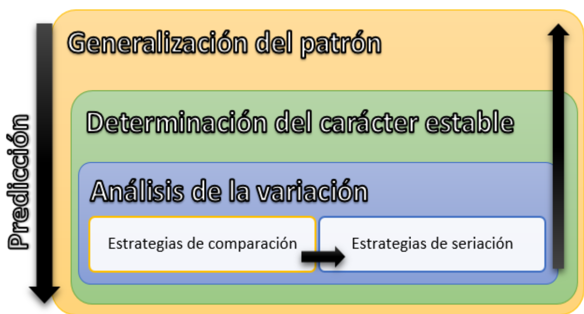


Figura 4. Modelo de generalización de patrones desde el PyLVar (López-Acosta, 2016, p.78)

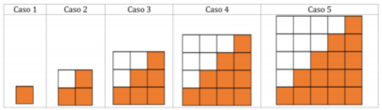
El modelo describe que para poder generalizar el patrón de comportamiento de una secuencia es necesario definir mecanismos de constantificación, en términos de *estrategias variacionales* (Caballero, 2012) que posibiliten el establecimiento de *comparaciones* entre diversos estados, es decir, “la identificación de la transformación que un valor sufre para convertirse en otro” (López-Acosta, 2016, p. 29) las cuales darán pie a *seriaciones*, que corresponden a colecciones de comparaciones analizadas para identificar patrones en el comportamiento de los cambios. Con la información aportada por las estrategias variacionales es posible develar el carácter estable del cambio que permitirá la predicción de valores futuros y, en consecuencia, generalizar el comportamiento que siguen las secuencias, es decir, el patrón (López-Acosta, 2016).

Asimismo, otro de los resultados que se generaron en este trabajo es que existe una relación simbiótica entre la *generalización* y la *predicción*, pues como se reporta en el mismo, la predicción en el reconocimiento de patrones se percibe, en cierto modo, como detonante que norma la actividad de la generalización, a la vez que para la predicción del comportamiento es necesaria de una generalización del mismo (López-Acosta, 2016). De esta manera, de acuerdo a este trabajo, la predicción y la generalización son prácticas que articulan Pensamiento Algebraico y Pensamiento y Lenguaje Variacional.

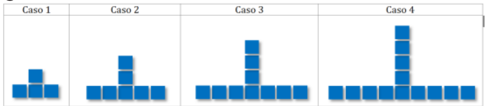
Anidación de prácticas para la generalización de patrones

Consideramos que una propuesta de rediseño del discurso Matemático Escolar (rdME) podría estar basada en el trabajo con "grandes ideas", de las cuales creemos que el análisis de la variación para la predicción es una que, como práctica articula y propicia la emergencia de gran diversidad de nociones matemáticas. Así, en López-Acosta (2016) y sustentado en la TSME, se propuso un modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013) como un proceso hipotético de aprendizaje (Figura 5) para una posible Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995) para la generalización de patrones numéricos y visuales (Figura 6).

Figura 5. Modelo de anidación de prácticas para la generalización de patrones (López-Acosta, 2016)



¿Cuántos cuadros coloreados tendrá el caso 50?



¿Cuántos cuadros tendrá el caso 50?

Coche Azul	
Segundo	Distancia (cm)
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40

Coche amarillo	
Segundo	Distancia (cm)
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Tiempo	Distancia (cm)	Diferencia
1	3	
2	8	5
3	15	7
4	24	9
5	35	
...	...	...
n	$\sum_{i=1}^{n} 2i+1$	$2n+1$

¿Qué coche ganará la carrera? ¿A qué distancia estará a los 50 segundos el coche amarillo?

Figura 6. Ejemplos de tareas de la THA (López-Acosta, 2016)

El modelo de anidación de prácticas es un modelo que describe la construcción social del conocimiento matemático bajo una evolución pragmática. Parte de la idea de que el conocimiento es construido en primera instancia sobre la *acción*, la interacción entre sujeto y objeto de manera deliberada pero no consciente; posteriormente, es a partir de la mediación del contexto que las acciones son interiorizadas y se es consciente del actuar (*actividad*), sin embargo, dicho actuar no es vinculado de manera orgánica con el contexto. El nivel de *práctica socialmente compartida* implica que las acciones son organizadas y asociadas de manera consciente con el contexto, de manera que hay un esquema de comportamiento que está conscientemente asociado a factores situacionales que le dan sentido. El nivel de *práctica de referencia* consiste en aquellas formas ideológicas y herramientas que cierto grupo comparte, en tanto que la *práctica social* es una normativa del comportamiento y de las acciones de los individuos.

Cuando se proponen diseños de intervención desde esta postura, son los dos niveles más altos los que se propician de manera intencional en el diseño. Por ejemplo, en el caso de la generalización de patrones, la predicción y la generalización (matemática) son prácticas que se propiciarán para lograr el objetivo de generalización de patrones. Los niveles inferiores son acciones y actividades que se pretende emerjan a partir de la organización que los niveles superiores implican. Por ejemplo, se necesita de estrategias de estudio del cambio para predecir (acción), del análisis de la información de las estrategias para identificar regularidades (actividad), así como de un esquema consciente del proceso que se requiere para predecir valores futuros en distintos tipos de situaciones dentro de la tarea (práctica socialmente compartida).

Reflexiones finales

Consideramos que la predicción es una práctica que puede aportar al desarrollo del Pensamiento Algebraico pues la necesidad de predecir organiza el proceso de generalización de comportamientos. Asimismo, el trabajar con patrones tanto visuales como numéricos puede favorecer el análisis y la tipificación de los tipos de comportamientos que caracterizan a las funciones, por lo cual, también favorecen el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Actualmente, para nosotros, la noción de “grandes ideas” representa un nexo importante con la TSME, puesto que desde esta última se considera que la práctica es la que permite la construcción del conocimiento matemático. En “la misma actividad humana que demanda del pensamiento matemático provee de aprendizajes que en la práctica no emergen por una intención didáctica sino por una intención funcional o situacional” (López-Acosta, 2016, p. 18). Por lo tanto, el diseño de escenarios de aprendizaje escolar, de alguna manera debe perseguir el trabajo con situaciones que demanden de la puesta en juego del Pensamiento Matemático, los cuales son más complejos que los típicamente escolares que, sin embargo, podrían construirse a partir de ideas transversales basadas en anidaciones de prácticas.

Referencias bibliográficas

Bell, C. (2011). Lining up Arithmetic Sequences. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(1), 34-39.

Beigie, D. (2011). The Leap from Patterns to Formulas. *Mathematics Teaching in the Middle School, 16*(6), 328-335.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education. 36*(5), 412-446.

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-24). Heidelberg, Germany: Springer

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.

Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo. Un estudio de caso.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada Socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, pp. 1-9.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education. 37*(2), 87-115.

Hsu, E., Kysh, J., Ramage, K. & Resek, D. (2007). Seeking big ideas in algebra: the evolution of a task. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 325-332.

Kinach, B. (2014). Generalizing: The Core of Algebraic Thinking. *The Mathematics Teacher. 107*(6), 432-439.

López-Acosta, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra.* The Open University Press, Walton Hall, Milton Keynes.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics*. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

SEP (2016). *Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016*. México: SEP

Serres, Y. (2007). Ejercicios, problemas y modelos en la enseñanza del Álgebra. En R. Cantoral, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoaméricano* (pp. 163-178). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.-Díaz de Santos.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivistic perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114–145.

Smith, M., Hillen, A. & Catania, C. (2007). Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understandings and Set Classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(1), 38-44