EL PERIODO DE UNA FUNCIÓN: UNA PROPUESTA PARA RESIGNIFICAR SU APRENDIZAJE A PARTIR DE LO INTUITIVO, LA MODELACIÓN Y PREDICCIÓN

Laura Tun Uc
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán (México).
laura.tun@hotmail.com

RESUMEN: Este trabajo presenta una propuesta de aprendizaje dirigida a estudiantes de Pre-cálculo del nivel Medio Superior, producto de un proyecto escolar cuya finalidad consistió en crear estrategias innovadoras en el proceso de enseñanza aprendizaje que permitieran la construcción de conocimientos y el aprendizaje significativo de las matemáticas favoreciendo el empleo de los recursos didácticos.

Esta propuesta tiene dos intencionalidades, primeramente pretende favorecer la construcción y resignificación de *la noción periodo* como introducción a la función periódica*,* lo anterior se desarrolla a partir de la modelación de situaciones periódicas con ayuda de sensores de movimiento y de luz. La segunda intencionalidad es contribuir en el *rediseño del discurso escolar* respecto a las funciones periódicas.

Palabras clave: resignificar, periodo, conocimiento intuitivo, predicción

ABSTRACT: This paper presents a proposal of learning addressed to students of Pre-calculus at upper high school, as a result of a school project whose purpose was to create innovative strategies in the teaching-learning process that allowed the construction of knowledge and significant learning of mathematics favoring the use of didactic resources. This proposal has two purposes. First, it aims to favor the construction and reinterpretation of the notion period as an introduction to the periodic function. It is developed from the modeling of periodic situations with the help of motion and light sensors. The second purpose is to contribute to redesign the school discourse with respect to the periodic functions.

Key words: reinterpretation, period, intuitive knowledge, prediction

Introducción

El cálculo es la herramienta matemática más útil para la descripción de fenómenos, desde sus inicios hasta la actualidad es considerada como la matemática del cambio y la variación (Reséndiz, 2004). En el proceso de enseñanza del cálculo en el nivel medio superior, en especial de la función periódica, la mayoría de los profesores optan por instruir a sus estudiantes de forma procedimental la cual no permite la comprensión de lo variacional y periódico que implica este objeto de estudio.

La importancia del estudio de la función periódica radica en el análisis de su comportamiento repetitivo para la predicción de estados futuros, por lo que en su proceso de enseñanza aprendizaje las tareas relativas a las prácticas de modelación y predicción son fundamentales para la construcción de estos conocimientos (Buendía, 2004). Relativo a lo anterior, es importante enfatizar, que para realizar predicciones en diferentes instantes es preciso definir tanto el estado inicial de una función (caracterización local) como su comportamiento (periodo) (Cordero y Martínez, 2002).

En la imagen 1 se presenta la organización del sistema de predicción global, donde todo el proceso se centra y reduce en la importancia de reconocer el *periodo*, para finalmente poder predecir. Por lo que el aprendizaje del periodo debe ser fundamental para la construcción de nuevos conocimientos que involucren la práctica de predecir.

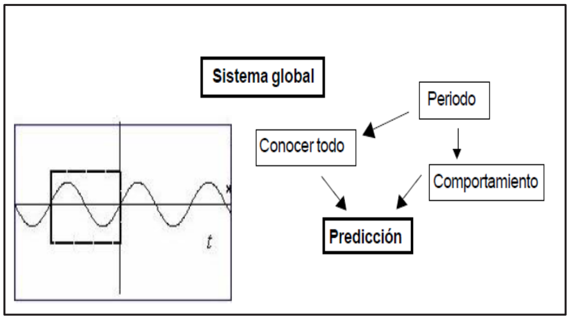

Imagen 1. Sistema de predicción global según Buendía (2006)

Por otro lado, comúnmente la enseñanza del cálculo escolar se reduce a un discurso en el que se promueve la memorización de definiciones y propiedades, el concepto *periodo* de una función es tratado de manera algorítmica y centrado únicamente en el tema de *funciones periódicas* en asignaturas como Pre-cálculo o Cálculo, donde la mayoría de los libros de texto incluidos Swokowski (1982) y Leithold (1999), presentan definiciones similares a la siguiente:

Una función f es periódica, en periodo P si existe un número real positivo P, tal que para cualquier punto x del dominio se verifica $f(x+P)=f(x)$.

En esta definición, P es considerado como una característica o norma para la construcción de curvas, en especial de las funciones trigonométricas (Buendía, 2011), siendo P el menor valor real que se encuentra en la representación gráfica de una función periódica, además la importancia de su estudio se centra en determinar, si las representaciones gráficas tienen o no un comportamiento periódico empleando la definición y el valor que define dicho comportamiento, en este caso P, al cual solo se le asigna un valor entero, no tiene un significado propio. Lo anterior origina una falta de sentido hacia esta definición, ya que la periodicidad solo es concebida como un proceso y no puede ser transformada en un objeto, lo que puede llevar al estudiante a identificar un periodo de un fenómeno periódico que no es necesariamente correcto (Cordero y Martínez, 2002), mismo que en la enseñanza tradicional se consideraría como un aprendizaje no adquirido.

Consideraciones teóricas

Para que el aprendizaje de las matemáticas sea significativo y funcional debe considerarse el rediseño del discurso matemático escolar, el cual evite presentar los conceptos como objetos ya acabados, pues "un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza" (Vergnaud, 1990, p. 133). Debido a ello es importante promover en el estudiante la necesidad de significar conceptos y construir pensamientos matemáticos para así permitir la movilidad de los conocimientos adquiridos en la escuela hacia otros contextos.

Considerando la importancia por la construcción del pensamiento y conocimiento matemático referente a lo periódico Buendía (2004), propone una epistemología cuyos elementos estén extraídos de las prácticas que realiza el individuo al tratar con aspectos del comportamiento repetitivo de gráficas de funciones que describen movimientos; a esta epistemología de prácticas le llamó Socioepistemología de lo periódico que habla de una relación entre lo periódico y la práctica de predecir Buendía (2006).

Por otro lado, se sabe que la enseñanza de las matemáticas se limita al empleo de libros de texto como material de apoyo los cuales generalmente se centran en la presentación de definiciones y propiedades; para evitar este modo de enseñanza y para promover la construcción de pensamientos matemáticos se propone el empleo de la Tecnología de los Sensores dado que, ofrece al estudiante posibilidades nuevas no solo para explorar y entender el mundo sino también para verlo representado simbólicamente de manera que aumentan considerablemente la comprensión (Thinker, 2004). Al respecto Codina y Lupiañez, (2004) mencionan que al trabajar conjuntamente con un sensor y una calculadora, los estudiantes pueden capturar, ver y analizar datos de movimiento extraídos de una práctica real, es decir, pueden modelizar experiencias físicas lo que supone una enorme ventaja con respecto a las tradicionales actividades con papel y lápiz. De igual modo resulta importante mencionar que existen Investigaciones realizadas en el marco de la Evaluación Nacional de Progreso Educativo (NAEP, por su sigla en inglés) auspiciado por el Departamento de Educación de los Estados Unidos, que demuestran que los estudiantes que utilizan sensores, sondas y computadores para recolectar y analizar información obtienen puntajes más altos en Ciencias que quienes no lo hacen (Godier, 2015).

Organización de los libros de texto

Como se ha mencionado el material que emplean los profesores para la enseñanza de la función periódica son los libros de texto, y de este depende el discurso que emplea para su enseñanza. Por ello se realizó una revisión de los libros de texto empleados en el nivel medio superior para la enseñanza de las funciones periódicas, de donde se concluyó lo siguiente (**Tabla 1**):

Tabla 1. Desarrollo de la función periódica presentada en libros de texto

Libro empleados en el nivel medio superior	Desarrollo del tema
Leithold, L. (1999)	I. Definición de función periódica: $f(x+p)=f(x)$ II. Define al periodo como el valor de p III. Ejemplifica con funciones seno y coseno. Puntualiza mediante ejemplos, la aplicación analítica de la propiedad $f(x+p)=f(x)$
Barnett, R., Ziegler M. y Byleen, K. (1999)	I. Construcción de periodicidad con base en el círculo unitario. II. Definición de función periódica: $f(x+p)=f(x)$ III. Ejemplifica y analiza el comportamiento periódico de las funciones seno y coseno.
Stewart, J. (2009)	I. Presenta las funciones seno y coseno. II. Posteriormente las características de las funciones seno y coseno como periodicidad de $2k\pi\ \forall k \in \mathbb{Z}$ III. Definición de función periódica y periodo, como una norma para el trazado de curvas. $f(x+p)=f(x)\ \forall x \in D_f$
Larsson,R., Hostetler, R. y Edwarsd, B. (1995).	I. Una característica de función trigonométrica es el *periodo.* II. Definición de función periódica: $f(x+p)=f(x)\forall x \in D_f$ III. Se trabaja con el término *amplitud* y se relaciona con el *periodo.* IV. Ejemplificación gráfica de diversas funciones periódicas (las más comunes)

Al analizar el tratamiento didáctico que se brinda al concepto o noción de periodo de una función periódica en la enseñanza de las matemáticas, se infiere que éste se reduce a una definición formal, seguida de ejemplificación y la posterior aplicación de una fórmula, como se puede observar los libros de textos más empleados para la enseñanza de este tema en el nivel medio superior emplean procedimientos similares, ninguno pretende la construcción de conocimientos.

■ Conocimientos intuitivos

Buendía y Vázquez (2007) mencionan que los estudiantes tienen representaciones cognitivas de la periodicidad y del concepto periodo, ya que es una propiedad identificada de manera natural por los individuos. Los estudiantes tienen ciertas vivencias relacionadas con fenómenos de comportamiento repetitivo (aquellos que suceden cada determinado tiempo), los cuales en un principio pueden identificarse a partir de la observación y experimentación (ejemplo de esto son las horas del día y la noche, temporadas de lluvia/sequia/ciclones, lluvia de estrellas, fenómenos lunares, entre otros), de modo que cuando un individuo se introduce al ámbito educativo de manera particular para las matemáticas ya tiene ciertas concepciones, que como tal no son incorrectas, simplemente no cumplen con las definiciones matemáticas asociadas. Por ejemplo el estudiante puede tener ideas intuitivas sobre el periodo producto de alguna vivencia, sin embargo no coinciden con aquello que se considera en una definición matemática como *el menor valor real*.

Considerando la realidad anterior, se retoman los resultados de Buendía (2011) para construir o resignificar el periodo de la función periódica como la unidad de análisis que describe el comportamiento de una función periódica y con ello predecir estados futuros sin embargo, esta propuesta ofrece analizar el periodo desde una *etapa cero* en la cual el estudiante aún no ha tratado con funciones periódicas de modo que, emplea las concepciones intuitivas que posee para significar la *noción de periodo*, es decir, el estudiante le asigna un significado al periodo como aquella unidad de análisis que permite describir el comportamiento repetitivo de una representación gráfica, que de manera contigua le permite asociar un significado natural, al tema *función periódica,* pues se razonaría sobre cierta unidad de análisis que define su comportamiento.

■ Diseño de la propuesta

La propuesta se centra en el estudio de gráficas que modelan situaciones periódicas, con actividades fundamentadas en la Teoría Socioepistemológica, en la cual a través de las prácticas sociales y el empleo de tecnología de sensores se pretende la resignificación del periodo en representaciones gráficas de situaciones modeladas con el uso de sensores de movimiento y de luz y calculadoras graficadoras.

En el diseño se consideraron los aspectos que se representan en la **imagen 3**. La experiencia inicia con actividades donde se emplean los conocimientos intuitivos para describir situaciones periódicas, después se continua con la modelación de fenómenos periódicos con ayuda de los sensores de movimiento y de luz, los cuales permiten obtener una mejor comprensión de los comportamientos periódicos, y con base en ello determinar estados futuros de modo que, al considerar esta proceso lógico en la experiencia de aprendizaje se pretende el logro del objetivo, resignificar el periodo.

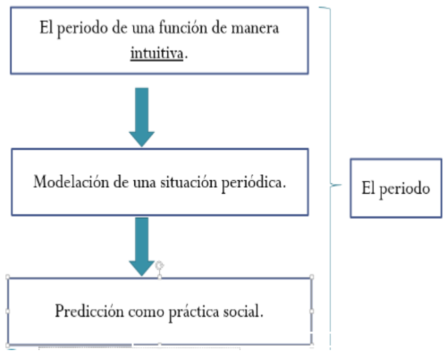

Imagen 3. Etapas de la experiencia.

En la primera actividad, se trabaja con representaciones gráficas con comportamientos periódicos en la cual se espera que los estudiantes puedan describir comportamientos de representaciones gráficas que modelan situaciones cotidianas periódicas.

En este primer momento se inicia con situaciones periódicos de la vida diaria que relacionan cambios de comportamientos con respecto al tiempo, de modo que los estudiantes emplean las concepciones que tienen a cerca de lo periódico para poder describirlos y a partir de la observación y análisis determinar estados próximos del objeto en cuestión. Esto se logra a partir de una necesidad, por ejemplo se trabaja con las mareas altas y bajas en las cuales es necesario conocer estados futuros para prevenir la estancia de personas en playa y así evitar accidentes.

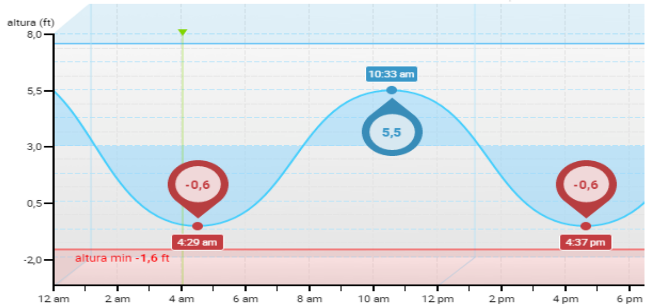

Gráfico 1. Alturas de la marea alta.

Seguidamente se continúa con la actividad 2, en la cual se realiza la modelación gráfica de situaciones que describen comportamientos periódicos, en la cual se pretende modelar gráficamente situaciones periódicas empleando tecnología de sensores.

Para iniciar es necesario presentar actividades en las cuales se permita las primeras experiencias con los sensores y su funcionamiento, donde el alumno interactúe con el sensor, y así en un segundo momento describir los movimientos que debería realizarse frente al sensor para obtener una determinada gráfica.

En esta actividad se promueve la discusión grupal, la modelación gráfica de modo que a partir del análisis y un comportamiento local, se bosqueje la continuidad de la representación y así determinar posiciones futuras en la representación.

El diseño se finaliza con una situación en la cual se describe el comportamiento de la intensidad de luz solar que recibe una planta; el estudiante ya ha identificado comportamientos periódicos y además puede determinar estados futuros de situaciones que describen comportamientos periódicos, en esta actividad el análisis ya no se centra en representaciones gráficas, sino en datos numéricos, por ejemplo se presenta una tabla donde se describen intensidades de luz que recibe la planta:

Días	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Día 7	Día 8
Intensidades	10000	25000	20000	400	10000	25000	20000	400

En estos momentos el estudiante determina las intensidades que se presentan en los próximos días, de igual modo se pretende que pueda establecer diferentes unidades que permiten predecir estados futuros de una mejor manera. Es decir se identifican diferentes unidades que describen el comportamiento de un fenómeno periódico, sin embargo existen diferentes unidades que le permiten establecer un estado futuro, empero existe uno que permite obtener de manera óptima la predicción.

Reflexiones

Con esta propuesta se presenta un tratamiento diferente para iniciar el concepto de función periódica evitando presentar al periodo como un valor P en una definición formal. Aunque las actividades propuestas no han sido llevadas a cabo en un aula formal se realizó un rediseño en algunas actividades después de ser presentadas en el taller de discusión con profesores, con dichas actividades se pretende crear en el estudiante la noción del *periodo*, no como la unidad de medida más pequeña, sino más bien como aquella unidad que facilita determinar la repetición de una representación gráfica según la finalidad para la cual se quiera la repetición.

Referencias bibliográficas

Barnett, R., Ziegler M. y Byleen, K. (1999). *Precálculo: funciones y gráficas*. México: McGraw-Hill.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico en las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2)*, 227-251.

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar*. España: Díaz de Santos, S.A.

Codina, A. y Lupiáñez, J. (2004). Calculadoras y sensores: la matemática en movimiento. En Peñas, M., Moreno, A., Lupiañez, J. (Eds). *Investigación en el aula de matemáticas: Tecnologías de la información y la comunicación,* (pp. 143-149). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godier, J. (2015). *Bionet Science Full Kit, una alternativa viable para la inclusión digital en ciencias.* Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado el 19 de noviembre de 2015, de: http://reposital.cuaed.unam.mx:8080/jspui/handle/123456789/4036

Larsson,R., Hostetler, R. y Edwarsd, B. (1995). *Cálculo y Geometría analítica*. Madrid: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1999). *El cálculo séptima edición*. México: Oxford.

Reséndiz, E. (2004). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(3), 435-458.

Stewart, J. (2009). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas sexta edición.* México: CENGAGE Learning.

Swokowski, E. (1982). *Cálculo con geometría analítica.* EU: Wadsworth Internacional.

Vázquez, I. y Buendía, G. (2007). Estudio de lo periódico en diferentes contextos: identificación y uso de la unidad de análisis. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 432-437. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2), 133-170.