EMERGENCIA DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL ALMAGESTO

Gerardo Cruz-Márquez, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav, IPN. (México)
gerardo.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: Como primera etapa de un proyecto de investigación cuya intención final es el rediseño del discurso Trigonométrico Escolar en el contexto de la formación inicial docente en Honduras, nos planteamos una problematización de lo trigonométrico en un escenario histórico. Dicha problematización consta de un análisis sociohistórico y documental del Almagesto de Ptolomeo, obra en la que la Trigonometría emerge como geometrización de los fenómenos celestes. Si bien este análisis no ha concluido, nos ha permitido ser conscientes de la influencia de las circunstancias sociales, culturales e institucionales en la estructura, racionalidad y lenguaje utilizado por Ptolomeo en el Almagesto, y en la emergencia y evolución de nociones trigonométricas en la dicha obra.

Palabras clave: trigonometry, socio-epistemology, socio-historical analysis, almagest

ABSTRACT: As the first stage of a research project whose final intention is the redesign of the trigonometric school discourse in the context of initial teaching training, in Honduras, we propose a problematization of the trigonometric notions in a historical setting. This problematization consists of a socio-historical and documentary evidence analysis of the Almagest of Ptolemy, a work in which Trigonometry emerges as a geometric form of celestial phenomena. Although this analysis has not concluded, it has allowed us to be aware of the influence of social, cultural and institutional circumstances on the structure, rationality and language used by Ptolemy in the Almagest, and on the emergence and evolution of trigonometric notions in this work.

Key words: trigonometry, socioepistemology, socio-historical analysis, almagest

Introducción

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) sostiene que el conocimiento matemático, en tanto producción social, no fue diseñado para ser enseñado (Cantoral, 2013). Por tal motivo, en su introducción en el sistema educativo se producen discursos, denominados genéricamente discurso Matemático Escolar (dME), que al centrarse únicamente en el dominio de conceptos matemáticos han generado la concepción de la Matemática como un conocimiento acabado, no susceptible de construirse, sino solo de adquirirse (Soto, 2010).

Una de las características del dME asociado a la trigonometría, denominado *discurso Trigonométrico Escolar* (Montiel, 2005), que se cristaliza en los planes y programas de estudio, los libros de texto y el discurso escolar es la disociación entre las relaciones trigonométricas y las construcciones geométricas que históricamente les dieron origen y que además las preceden de manera general en los programas y planes de estudio. Como consecuencia de este fenómeno, nombrado *aritmetización de la trigonometría* (Montiel, 2011), las relaciones trigonométricas "dejan de tener utilidad para expresar relaciones de proporcionalidad y se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo" (Montiel, 2011, p. 66).

Atendiendo esta problemática, y desde la perspectiva que ofrece la TSME, hemos comenzado un proyecto de investigación cuya intención final es el rediseño del discurso Trigonométrico Escolar, en particular en el contexto de la formación inicial docente en Honduras. La primera etapa de este proyecto consiste en ampliar la problematización de lo trigonométrico realizada por Montiel (2005) en dos escenarios: uno histórico y uno didáctico. El histórico consta de un análisis documental de los preliminares matemáticos del *Almagesto* de Ptolomeo, donde la Trigonometría emerge como geometrización de los fenómenos celestes, y el didáctico corresponde a un análisis curricular del Profesorado en Matemáticas que oferta la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, relativo a los contenidos de Trigonometría y Geometría.

Ambos análisis proveerán elementos para, en una segunda etapa de la investigación: plantear una epistemología de prácticas que fundamente una investigación de diseño orientada a la intervención didáctica para el desarrollo del pensamiento trigonométrico en la formación inicial docente.

Este escrito da cuenta del avance de la problematización en el escenario histórico, así como de los elementos teóricos que la sostienen, el método de análisis utilizado y algunos resultados preliminares de la misma.

Análisis sociohistóricos

Desde la TSME, realizar un análisis documental con el fin de estudiar la naturaleza epistemológica del saber matemático conlleva "no sólo la relatoría de hechos históricos, sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático" (Montiel y Buendía, 2012, p. 68). En nuestro caso, pretendemos conocer y analizar las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron la emergencia y evolución de nociones trigonométricas en el *Almagesto* de Ptolomeo, especialmente en el Capítulo IX del Libro I (Saiz, 2003) de dicha obra.

Para este fin, consideramos la propuesta metodológica para estudios sociohistóricos planteada por Espinoza-Ramírez y Cantoral (2010), la cual sostiene que para construir una explicación del significado sociocultural de una obra esta debe verse al menos desde tres perspectivas:

Como una producción con historia. La obra debe ser entendida como perteneciente a una época, a un ser humano con sus propias ideas germinales y sus medios de significación. En este sentido nos planteamos interrogantes como: ¿quién fue Claudio Ptolomeo?, ¿cuándo y dónde nació?, ¿quién fue su familia?, ¿cuál fue su formación?, ¿qué antecedentes astronómicos y matemáticos sustentan su obra?

Como un objeto de difusión. Toda obra Matemática que se publica tiene una intencionalidad de difusión intrínseca, pues busca difundir algo a alguien. En nuestro caso nos interesa saber: ¿es el *Almagesto* una obra con fines didácticos o de divulgación científica?, ¿quiénes son sus destinatarios iniciales?, ¿qué eventos sociales, políticos y económicos son determinantes en su publicación?, ¿en qué condiciones se difunde originalmente?

Como parte de una expresión intelectual global. Una obra antigua es una expresión intelectual que pertenece a una secuencia de ideas y evoluciona en la totalidad de las obras del autor e incluso de su comunidad científica, académica o social. Entonces, resulta oportuno preguntarnos: ¿qué relación guarda el *Almagesto* con otras obras de Ptolomeo? y ¿qué relación mantiene con otras obras matemáticas o didácticas relevantes en la época?

A estas cuestiones intentaremos, siguiendo un orden cronológico, dar respuesta en los apartados siguientes.

Hechos que propiciaron el *Almagesto*

A pesar del extraordinario dominio de la medición del tiempo y la gran cantidad de observaciones astronómicas realizadas por la civilización egipcia y babilónica, las explicaciones que estas daban a los fenómenos celestes estaban íntimamente relacionadas con sus creencias religiosas y míticas. Es hasta el siglo VI a. C., con el asentamiento de las primeras colonias griegas a lo largo de toda la costa del mar Negro y del mar Mediterráneo, que dio comienzo el movimiento de *racionalización del universo*, esto es, se inicia la búsqueda de explicaciones a los desplazamientos, formas, tamaños y posición de los astros, por sobre las observaciones de los mismos.

El primer indicio de este movimiento lo constituye la escuela del filósofo Tales de Mileto (ca. 624-548 a. C.), a la cual se le concede el proponer las primeras dimensiones para el Sol y la Luna, plantear que las estrellas se hallan clavadas en una esfera transparente de materia cristalina y postular la *geocentricidad* del universo (Mateu y Orts, 2006).

Al norte de Mileto, en la isla de Samos, nace Pitágoras (ca. 580-500 a. C.), presunto alumno de Tales, quien erige la segunda escuela de este movimiento, una sociedad de carácter comunal y secreto a la cual se atribuye el proponer la *esfericidad* de los cuerpos celestes, así como la *circularidad* de sus trayectorias (Boyer, 1986).

La doctrina pitagórica consideraba que *los números (enteros positivos) rigen la vida y el cosmos*, por tal motivo, el descubrir la incapacidad de estos para dar cuenta de algunas relaciones fundamentales, por ejemplo, la razón del lado de un cuadrado y su diagonal, representó la demolición de las bases de la fe pitagórica. En este sentido, la *inconmensurabilidad* "hizo que la geometría se privilegiara sobre la aritmética y con ello en Grecia la geometría adquirió el estatus de ciencia por excelencia" (Sánchez, 2012, p. 76), hecho evidente en la posterior producción Matemática y Astronómica de la época.

En Atenas, Platón (ca. 428-348 a. C.), quien a pesar de no sobresalir como astrónomo, influyó de manera determinante en la visión del cosmos de la época al secundar la *esfericidad* de los cuerpos celestes propuesta por los pitagóricos (Timeo, citado por Saiz, 2003). Con base en esto, uno de sus más reconocidos discípulos, Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.), propuso el modelo de las esferas homocéntricas, en el cual cada uno de los planetas está adherido al ecuador de una de varias esferas transparentes concéntricas que, con diferentes ejes de rotación, giran alrededor de la Tierra estática.

Posteriormente, Aristóteles (384-322 a. C.), que al igual que su maestro Platón destacó como filósofos antes que como astrónomo, secundó la *circularidad* de las trayectorias de los cuerpos celestes propuesta por los pitagóricos y la *geoestaticidad* del modelo de Eudoxo (Saiz, 2003).

En el año 323 a. C., con la muerte del Alejandro Magno, alumno de Aristóteles y emperador de Macedonia, se desencadena una lucha despiadada por tomar el poder del imperio, que abarcaba entonces la mayor parte del mundo conocido. Este conflicto concluye con la división Macedonia en tres reinos: el Imperio Seléucida, Macedonia antigónida y Egipto. De este último, en el año 306 a. C., asume el poder Ptolomeo I Soter (Boyer, 1986), el cual toma como sede de su gobierno a la ciudad de Alejandría, urbe fundada por Magno en una zona costera muy fértil, al oeste del río Nilo.

Entre las primeras decisiones de Ptolomeo I estuvo el establecimiento de la Biblioteca y la Escuela en Alejandría. Se estima que para el año 300 a. C. la Biblioteca contaba con alrededor de 200,000 volúmenes y la Escuela, denominada Museo, despuntaba como el centro de la actividad científica de la época (Melogno, Rodríguez y Fernández, 2011). El Museo jugó un papel medular en la composicion del *Almagesto*, dado que, además de considerarse la casa de estudio de Ptolomeo, como profesores de esta desfilaron los autores de las bases matemáticas y astronómicas inmediatas de dicha obra: Euclides, Apolonio e Hiparco (Boyer, 1986).

El primero, Euclides de Alejandría (325-265 a. C.), fue autor de no menos de doce obras referentes a una variedad materias, pero es, sin lugar a dudas, sobre los *Elementos* que descansa su fama. Esta obra compuesta por 13 libros recopila la Matemática elemental de la época en diversos campos temáticos. La importancia de esta obra radica no solo en la completitud de la síntesis que contiene, pues ya existian al menos tres epítomes similares (Boyer, 1986), sino en su presentación como un sistema formal axiomático deductivo (Melogno et al., 2011).

Por su parte, el astrónomo Apolonio de Perga (262-190 a. C.) propone dos modelos geométricos equivalentes para explicar los movimientos de los cuerpos celestes, el de los *epiciclos* y el de los *excéntricos* (Boyer, 1986).

Si bien los astrónomos y matemáticos griegos desde Aristarco, 200 años antes, habían estudiado y utilizado relaciones entre rectas y circunferencias, hasta este momento no existía nada que podamos llamar trigonométrica medianamente sistemática. Hiparco de Nicea (ca. 180-125 a. C.), a mediados del siglo II a. C., es el primero que se da a la tarea de tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos, componiendo así la *tabla trigonométrica* (ahora perdida) que le hace acreedor al título de “padre de la trigonometría” (Boyer, 1986). Otras contribuciones importantes de este astrónomo, geógrafo y matemático fueron el organizar y ordenar las observaciones realizadas por sus antecesores, redactar un catálogo de 850 estrellas, mejorar algunas constantes como la duración del mes y el año, y utilizar los prototipos plateados por Apolonio para modelar el movimiento del Sol y la Luna.

A pesar de que el nombre de Claudio Ptolomeo dominó el pensamiento astronómico hasta la época de Copérnico, más de 1400 años, poco se sabe de la vida de este matemático, astrónomo, geógrafo y físico. Existe cierta unanimidad a considerar a Egipto como su país de origen y los años 100 y 170 d. C como fechas de su nacimiento y muerte, respectivamente. Menos certeza tenemos acerca de su familia, pues varios escritores asocian a Ptolomeo a la familia real del mismo nombre, algunos incluso le conceden el título de rey, otros, en cambio, argumentan que Ptolomeo no pudo tener dicha ascendencia (Saiz, 2003). La ciudad egipcia de la cual fue oriundo también es un enigma, Alejandría, Pelusio y Ptolemaida son algunas de las ciudades involucradas en dicho debate.

Lo que es un hecho es que, como mencionan Dorce (2006) y Saiz (2003), gracias a las observaciones propias que reporta Ptolomeo en sus estudios, sabemos que trabajó en la ciudad de Alejandría entre los años 125 y 141 d. C., y tras esta última fecha se dedicó a redactar la obra que le ha hecho inmortal: el *Almagesto*.

No obstante Ptolomeo “fue muy escrupuloso en citar a sus predecesores cuando la idea no era suya, lo que permite distinguir claramente cuáles son y cuáles no sus propias contribuciones” (Melogno et al., 2011, p. 84), no pequeño es el debate acerca de la originalidad de esta síntesis compuesta por 13 libros, en los cuales Ptolomeo expone su teoría del Sol, la Luna y las estrellas, primero la de las fijas y posteriormente la de los cinco planetas conocidos.

Llegados a este punto poseemos un panorama general de la visión del universo que tuvo Ptolomeo, esta nos es necesaria para entender la problemática que pretendia abordar al escribir su obra: la *geoestaticidad* y la *geocentricidad* del universo, la *esfericidad* de los cuerpos celestes y la *circularidad-uniformidad* de su movimiento. También somos concientes de las principales herramientas matemáticas y astronómicas con las que contaba: las observaciones realizadas por los egipcios y babilonios, la Matemática axiomática-deductiva de Euclides, las teorías de epiciclos y excéntricos de Apolonio, y toda la producción científica de Hiparco. Además, hemos hecho alusión a algunos de los hechos de índole social, cultural e institucional que jugaron un rol trascendental en la configuración, carácter y estructura del *Almagesto*: la inconmensurabilidad, la expansión y división de Macedonia, la fundación de la Biblioteca y la Escuela de Alejandría y la labor de Ptolomeo como maestro en dicha ciudad.

Análisis documental

El análisis documental es un procedimiento sistemático para revisar y/o evaluar documentos (digitales o impresos), cuya razón fundamental radica en su utilidad como método independiente para formas especializadas de investigación cualitativa, y el rol que juega en la triangulación metodológica y de datos (Bowen, 2009). Estos atributos son especialmente deseables en los estudios como el nuestro, en los cuales los acontecimientos ya no pueden ser observados y donde los documentos constituyen la única fuente viable de datos.

Gracias a lo reportado en la literatura y la revisión inicial de nuestro documento a analizar, el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto* (Saiz, 2003), apartado en el que Ptolomeo construye su tabla trigonométrica, nos percatamos de la pertinencia de analizar previamente los *Elementos* de Euclides con el fin de acercarnos a la racionalidad y al lenguaje con el cual se hacía Matemática en la época. Además, este análisis, llevado a cabo junto con el colega Sergio Rubio Pizzorno durante el Seminario de Investigación en Matemática Educativa II perteneciente al segundo semestre del año lectivo 2015-2016, nos permitió estructurar una estrategia de análisis que, debido a la aludida afinidad entre las obras, fue base en la propuesta de análisis del *Almagesto*.

Dicha propuesta consistente de tres niveles: *nivel micro, meso y macro*. El primero apunta a estudiar en detalle cada proposición de la obra en tanto estructura discursiva y objetivo particular; en el segundo nivel, el meso, se estudia las relaciones existentes entre una proposición y otra; y, finalmente, el análisis macro persigue la articulación de los objetivos particulares de cada proposición y los nexos entre estos, con la intención de acercarnos al objetivo del documento.

El análisis micro se compone a su vez de dos grandes secciones: el análisis de la *estructura discursiva* y la *interpretación* de la misma. La organización utilizada para el estudio de la *estructura discursiva* del *Almagesto* toma como base la empleada en el análisis de los *Elementos*, la cual se fundamenta en las propuestas de Vega (2013) y Navarro (2003), y se detalla como sigue:

- *Enunciado:* fase en la que se declara lo que se quiere demostrar.
- *Exposición:* apartado en el que se exponen los objetos que van a intervenir en el desarrollo de la proposición y se concretan en un dibujo (representación material).
- *Preparación:* planteamiento de las relaciones a establecer a partir de los objetos declarados anteriormente.

- *Demostración:* puede constituir de los siguientes elementos:

a. *Construcción:* parte en la que se añade al dibujo inicial (o representación material) unidades figurales (puntos, líneas o circunferencias) cuyas propiedades contribuyen a demostrar la afirmación del enunciado.

b. *Prueba:* apartado dedicado a plantear y justificar los pasos lógicos necesarios para demostrar la tesis.

- *Conclusión:* este se corresponde de manera general con el enunciado, y en el menor número de casos con la preparación. Su fin es cerrar la proposición puntualizando lo que se demostró.
- *Uso:* en este apartado el autor se vale de la proposición demostrada para añadir mediciones a su tabla trigonométrica y/o establecer corolarios.

En la segunda sección del análisis micro, la interpretación, se atienden las cuestiones: *¿qué hace?* y *¿cómo lo hace?* En la primera de estas se intenta identificar los elementos claves de la demostración llevada a cabo, mientras que la segunda busca describir y explicar el proceso y objetivo de la proposición. Además, cuando es pertinente, se incluye un tercer apartado denominado *otros*, en el que se puntualizan particularidades identificadas en la proposición, las cuales de manera genérica corresponden a aspectos lingüísticos, lógicos y matemáticos.

Resultados provisorios

Antes de comenzar a plantear sus modelos planetarios, Ptolomeo se da a la tarea de construir la tabla trigonométrica que será la base de sus cálculos posteriores. Como hemos anotado, se concede a Hiparco la construcción de la primera tabla de este estilo, pero esta se ha perdido; afortunadamente en el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto* nos encontramos no solo con la tablas trigonométrica de Ptolomeo sino con la explicación de los métodos utilizados en su construcción.

Previo a comenzar dicha empresa, Ptolomeo establece dos convenios: la subdivisión de la circunferencia de un círculo y un sistema para subdividir el diametro del mismo. Con relacion al primero, utiliza una circunferencia subdividida en 360 partes, una división usual en la época, posiblemente tomada de la astronomía griega (Boyer, 1986). El dividir el semidiámetro del círculo en 60 partes, cada una dividida subsecuentemente en 60 partes más pequeñas, es sin duda sugerido por el sistema de numeración posicional babilónico, que, como el mismo Ptolomeo menciona (Saiz, 2003), permitía un trabajo con las fracciones considerablemente superior al tratamiento de las fracciones unitarias egipcias y de las fracciones griegas de la época.

Resuelta esta situación, Ptolomeo emprende la construcción de su tabla, el proceso iterativo mediante el cual lo consigue es: demostrar una proposición y emplearla para calcular nuevas medidas y/o postular corolarios que lo lleven a estas. Así, por ejemplo, se propone en primera instancia construir y averiguar la longitud del lado del decágono, hexágono, pentágono, cuadrado y triángulo regulares inscritos en la circunferencia de un círculo. La demostración de esta proposición le permite calcular las cuerdas que se subtienden bajo 36°, 60°, 72°, 90° y 120°, respectivamente.

Las restantes proposiciones que desarrolla son: el cálculo de la cuerda subtendida por el ángulo suplementario, la determinación de las cuerdas de los ángulos diferencia (o suma) y el cálculo de las cuerdas de los ángulos mitad (Boyer, 1986). Estas proposiciones y cálculos anotados, aunados a la aproximación de las cuerdas subtendidas por un ángulo central de 1° y 0.5°, le permiten completar la construcción de una tabla trigonométrica compuesta con los arcos comprendidos entre 0.5° y 180°, con incrementos de medio grado, y su línea recta subtensa correspondiente.

Si bien no se ha completado el análisis de la obra, nos atrevemos a plantear algunas observaciones provisionales del mismo: a pesar de los más de 400 años que separan una obra de la otra, la influencia de los *Elementos* de Euclides en la estructura, racionalidad y herramientas matemáticas puestas en juego por Ptolomeo en el *Almagesto* es evidente.

A manera de ilustración, podemos considerar el hecho de que, tan solo en la demostración de la primera proposición mencionada, hemos identificado el uso de 16 proposiciones de la obra maestra de Euclides, provenientes de los libros I, II, IV, VI y XIII. Además, el uso del lenguaje matemático introducido en los *Elementos* es claro, un ejemplo de esto es la clasificación particional de cuadriláteros de la cual hace uso Ptolomeo, misma que Sánchez (1991) concede como original de Euclides.

Si bien el modelo astronómico propuesto por Ptolomeo se basó en supuestos de partida no válidos actualmente como la *geocentricidad* del universo y la *circularidad* de los movimientos de los astros, los argumentos geométricos que utilizó para construir y fundamentar este modelo constituyen las primeras evidencias concretas de la emergencia de nociones matemáticas de una naturaleza particular: la trigonométrica.

Referencias bibliográficas

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative research journal 9(2)*, 27-40.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad de Textos.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Dorce, C. (2006). *Ptolomeo: el astrónomo de los círculos*. Madrid: Nivola.

Espinoza-Ramírez, L. y Cantoral, R. (2010). Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 889-897. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mateu, E. y Orts, A. (2006). La astronomía griega: de los pitagóricos al almagesto de Ptolomeo. *Huygens (62)*, 19-38.

Melogno, P., Rodríguez, P. y Fernández, S. (Eds.). (2011). *Elementos de Historia de la Ciencia*. Uruguay: Universidad de la República.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones*, 55-82. México: Lectorum.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 61-88.

Navarro, J. (2003). Los elementos de euclides. *Un Paseo por la Geometría 2002/2003*, 55-82. España: Real Sociedad Matemática Española.

Saiz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo*". Madrid: Maxtor.

Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED (32)*, 71-92.

Sánchez, P. (1991). *Elementos de Euclides*. Madrid: Gredos.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Vega, Y. (2013). *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia.