

## EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL Y LAS ACCIONES EN LAS PRÁCTICAS PREDICTIVAS

Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral Uriza

CINVESTAV. (México)

jesus.hernandez@cinvetav.mx, rcantor@cinvestav.mx

**RESUMEN:** Este escrito es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta del estatus del carácter estable del cambio ligado a sistemas con dinámicas erráticas o caóticas, donde las interacciones de científicos ante la predicción darán indicios de una forma de construir conocimiento matemático. El problema de los tres cuerpos estudiado por Poincaré, las formas de predicción climática de Lorenz y el crecimiento poblacional de May son ejemplos de este tipo de dinámicas. Las singularidades en las actuaciones de estos investigadores ante este tipo de sistemas serán caracterizadas por estrategias variacionales globales.

**Palabras clave:** estrategias-variacionales, predicción, dinámicas-caóticas, socioepistemología

**ABSTRACT:** This paper is part of a current research which attempts to show the status of the stable nature of change linked to systems with mistaken or chaotic dynamics where scientists' interactions for prediction will provide notions about a way to construct mathematical knowledge. The problem of the three bodies studied by Poincaré, the ways of climatic prediction by Lorenz, and the population growing by May, are all examples of this kind of dynamics. The peculiarities in the behavior of these researchers concerning such types of systems will be characterized by global variation strategies.

**Key words:** variation strategies, prediction, chaotic dynamics, socio-epistemology

### ■ Objetivo de la investigación

En diversas investigaciones bajo el marco teórico de la teoría Socioepistemológica se ha encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de *situaciones variacionales*, en el cálculo particularmente, plantean una problemática no trivial, así que enfocarse en los actos de entendimiento ante situaciones que precisan del pensamiento y lenguaje variacional se ha tornado fundamental para el desarrollo teórico y en general para la mejora educativa (Cantoral & Ferrari, 2004); (Chimal, 2005); (Montiel, 2005); (Caballero, 2012); (Farfán, 2012); (Cantoral, 2013b); (Cordero & Morales, 2014). La presente investigación se enfoca en la búsqueda de regularidades en las acciones que emanan de situaciones variacionales particularmente no lineales que buscan la periodicidad y la estabilidad del cambio, en otras palabras, *se dispone identificar el carácter estable del cambio ante situaciones de variación no lineal*. El término *situación variacional* se refiere a la puesta en escena, en el aula, de una forma para estudiar fenómenos en los que el cambio y la variación se encuentran inmersos (Cabrera, 2009), sin embargo, esta investigación considera una visión ampliada que incluye escenarios diversos, que van desde las prácticas humanas ligadas a la variación en el “día a día”, hasta las prácticas de científicos interesados en el estudio del cambio y su variación para el entendimiento, explicación y predicción de fenómenos naturales un tanto más complejos.

Se sostiene la existencia de principios que guían el desarrollo del pensamiento variacional y las interacciones que lo transforman. Desde un punto de vista complejo las interacciones de estos principios, propios de la construcción social del conocimiento, generan estructuras cada vez más intrincadas de saberes matemáticos. El caso que ocupa, esta investigación, es la búsqueda y caracterización de uno de esos principios, el principio estrella ( $p^*$ ). Asumiendo se encuentra presente en la articulación entre la predicción y las adaptaciones de los individuos ante la búsqueda de la predicción en sistemas con dinámicas no lineales, particularmente caóticas, comúnmente vinculadas a otras disciplinas. Así, la pregunta que guía esta investigación es: *¿Cuáles son los argumentos, códigos y estrategias variacionales que se encuentran presentes al intervenir sistemas no lineales caracterizados como caóticos?*

Los *argumentos variacionales* son utilizados por las personas cuando recurren a maniobras, técnicas o explicaciones que muestran, en algún sentido, el reconocimiento del cambio en sentido cualitativo y cuantitativo del objeto de su estudio (Cantoral, 2001). Los *códigos variacionales* se encuentran presentes en las producciones escritas u orales relacionadas con el cambio y su variación. Las *estrategias variacionales* serán consideradas como procesos reguladores de la toma de decisiones óptimas ante situaciones variacionales, es decir, son acciones que posibilitan el enfrentamiento ante una situación variacional.

### ■ Rumbo a la configuración de un nuevo currículo

Tratando de configurar la constitución de un nuevo currículo que oriente el proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas, el enfoque socioepistemológico propone su organización mediante

prácticas, éstas aparecen a partir de las interacciones sociales y culturales de una forma desorganizada, así que es crucial el desarrollo de investigaciones que construyan propuestas adecuadas para su inserción en el ámbito escolar.

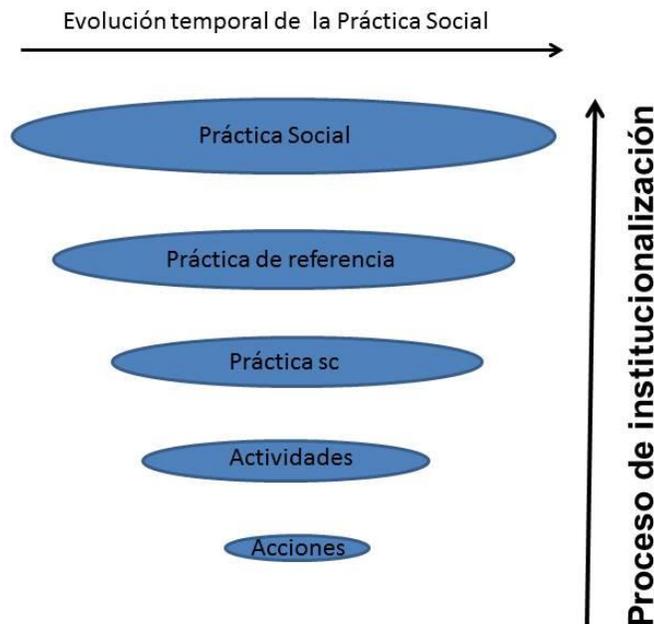
Cantoral (2016) propone un diagrama de anidación de prácticas en el que se muestran diferentes niveles de organización promotores de la emergencia de la Práctica Social (PS), más aún, estos niveles están regidos por dos tipos de relaciones “de subida” y “de bajada”, el primero hace que la construcción social de conocimiento comience en las acciones de los individuos sobre su medio, hasta llegar a la conformación de prácticas de referencia que dan lugar a la práctica social. El segundo hace ver la normatividad de la práctica social en las acciones de los individuos (Cantoral, Montiel, & Reyes-Gasperini, 2015). Ambos mecanismos se encuentran imbricados y no pueden ser separados, el dinamismo intrínseco en los niveles hace que dependiendo del contexto sociocultural en que se inicie un estudio acciones pueden ser vistas como prácticas o viceversa y lo mismo pasa en, cualquiera de los, otros niveles (Ver *Figura 1*).



**Figura 1.** Se muestra el diagrama de anidación de prácticas y su dinamismo intrínseco. Las acciones pueden ser vistas como prácticas o viceversa dependiendo del contexto sociocultural en el que se encuentre situado un estudio.

Las dimensiones que sustentan este diagrama son dos, verticalmente las interacciones de subida y bajada están estructuradas por los procesos de institucionalización de las prácticas, éstos son concebidos y normados por las comunidades que rodean las prácticas; por ejemplo, la familia, el pueblo, la comunidad de carpinteros o la de ingenieros. Una vez que las prácticas se van reconociendo en ámbitos, cada vez más, especializados se reconocen nuevos miembros de su colectivo. La dimensión horizontal está dada por el proceso histórico de evolución de la práctica social; por ejemplo, la práctica social del *Preadicere* que juega un papel fundamental para el estudio de la Matemática de la variación y el cambio, primero se muestra en forma de Esquema en la época de Newton, para posteriormente convertirse en Modelo, en la predicción del comportamiento del flujo continuo, para posteriormente constituirse en Teoría tomando de ejemplo ámbitos matemáticos como la analiticidad

en las funciones (Cantoral, 1990; 2016). Así, en la *Figura 2* se muestran cómo viven estas dimensiones en el diagrama de anidación de prácticas, ahora mostradas en distintos de niveles de organización de abajo (acciones) hacia arriba (práctica social).



**Figura 1.** Se muestran las dos dimensiones del diagrama de anidación de prácticas.

Es en el primer nivel donde se encuentra una red de acciones cuyas aristas se conforman de interacciones, a través de estas emergen actividades que posteriormente conformaran las prácticas, es en este nivel donde el proceso de institucionalización cobra sentido como parte de la dinámica social y cultural, en la que la iteración intencional construye el camino hacia las experiencias compartidas logrando la constitución de Prácticas de Referencia (PR). Finalmente debido a las características intrínsecas de cada una de éstas y sus interacciones emerge la PS, no se debe obviar la interacción biunívoca entre cada nivel de anidación, es decir, la PS norma a las PR, estas a su vez a las prácticas y así sucesivamente.

La organización de las prácticas se propone a partir de principios propios de la construcción social del conocimiento matemático que mediante sus interacciones generan estructuras de saberes cada vez más complejas reflejadas en el diagrama de anidación de prácticas. Por su parte la investigación socioepistemológica ha documentado, con profundidad, las acciones detrás de la práctica de

predicción mostrando una diversidad de actividades en el día a día; por ejemplo, cruzar la calle o llevar una sombrilla en caso de lluvia, dicho de otra forma, se encuentra presente y se institucionaliza de muchas formas. La imposibilidad humana de manipular el tiempo propone a la predicción como una estrategia emergente para la adaptación a al entorno y se considera que proviene de la evolución en las interacciones del colectivo social (Cantoral, 2001).

Las actividades y las prácticas de las personas son conducidas en un mundo en esencia no lineal y aunque las estrategias que se utilizan, para lidiar con él, son de índole diversificada en todas se encuentran procesos intrínsecos de constantificación que actúan sobre las variables del entorno. Éstos muchas veces quedan, a suficiencia de los sentidos, en el cálculo instantáneo de dos órdenes de variación, es decir, considerando la posición, la velocidad y la aceleración. Sin embargo, la predicción en dinámicas no lineales requiere de estrategias globales sobre las variables, que permitan obtener más información sobre el entorno, así las prácticas y las formas de vislumbrar los fenómenos requieren del uso de nuevas direcciones para pensar y tratar las variables.

#### ■ El comienzo: del determinismo al caos determinista

Los eventos determinísticos como la salida y puesta del sol, los experimentos de causa efecto (si lo empujas se mueve en la misma proporción); por ejemplo, al lanzar un objeto desde la azotea de un edificio sabemos que caerá hasta tocar el suelo, etcétera, han sido ideales para realizar predicciones apegadas a la mecánica newtoniana, por otro lado, el caso opuesto se distingue por el estudio de los procesos aleatorios para los cuales dada la probabilidad de un suceso sabremos lo que sucederá, con cierto porcentaje, en tiempos posteriores.

Ford (1986) menciona que las nociones de determinismo, existencia y unicidad y soluciones analíticas exactas han dominado el pensamiento científico por décadas y que el significado de una solución exacta, en símbolos, es  $S(t) = F(S_0, t)$ , donde  $S$  es el estado exacto del sistema al tiempo  $t$ , que evoluciona desde una condición inicial  $S_0$  de acuerdo con la regla  $F$  implícitamente determinada por la existencia y unicidad. En otras palabras, el determinismo significa que el pasado y el futuro provienen del estado presente, y eso es la esencia de la existencia y unicidad. Para Pierre Simon de Laplace este pensamiento era llevado al extremo al proponer la existencia de una inteligencia que pudiera conocer todas las fuerzas de la naturaleza en un cierto momento y todas las posiciones de su composición podría poner en una fórmula el movimiento de todo el universo y así predecir todos sus estados futuros.

Básicamente desde el determinismo se proponen dos tipos de sistemas dinámicos: las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales, las primeras en ámbito discreto y las segundas en el continuo. Estas ecuaciones funcionan para la predicción de estados futuros mediante la información obtenida en el presente. Es decir, dada una ecuación diferencial y cualquier condición inicial, podemos decir localmente cómo se comportan las soluciones y decirlo para cualquier condición inicial dada, no importando que el sistema sea un sistema de características no lineales; por ejemplo, mediante

técnicas y análisis cualitativos y cuantitativos en el sistema del péndulo simple se pueden obtener condiciones para las cuales hay periodicidad o trayectorias cerradas, oscilantes, puntos de equilibrio estables e inestables, es decir, podemos describir toda su dinámica.

Es importante mencionar que las variaciones entre las soluciones de ecuaciones diferenciales existen, pero no muestran gran diferencia entre una solución y otra, es decir, soluciones que pertenecen a Condiciones Iniciales (CI) cercanas, permanecerán cercanas para todo tiempo. En años recientes se ha retomado la teoría de la estabilidad propuesta por Lyapunov (1892) para caracterizar las dinámicas caóticas, de acuerdo a la distancia entre soluciones con CI muy parecidas, su distancia crece al poco tiempo de haber comenzado la dinámica de acuerdo al exponente característico del sistema (Parks, 1992). En este sentido las *acciones de búsqueda y selección de CI y de variación de parámetros* son esenciales para la predicción en sistemas que presentan dinámicas de comportamiento errático o caóticas.

### ■ La predicción en sistemas dinámicos no lineales

Los sistemas dinámicos no lineales han dado paso a un cambio de paradigma en el análisis de sistemas deterministas. Su foco no se centra en la búsqueda de soluciones precisas de las ecuaciones que definen el sistema dinámico, así que las preguntas que surgen de su estudio tienen sentido en la búsqueda de los estados estables o periódicos a largo plazo de todo el sistema, las posibles cuencas de atracción o atractores o de la dependencia de las condiciones iniciales y haciendo que el análisis cualitativo tome un papel central. De esta forma las dinámicas no lineales han mostrado dinámicas estables, inestables, periódicas y caóticas.

Las dinámicas caóticas han sido de gran importancia para la creación de nuevas formas de acercarse a la predicción, ya que, en presencia de éstas, se requiere de un conocimiento exponencial del presente para dar significado al pasado y al futuro. Dicho sea de paso, no solamente aparecen en sistemas complejos, ya que se ha encontrado en sistemas aparentemente triviales, como el mapeo logístico (May, 1976). El cambio del paradigma comienza cuando la primera ley de Newton no se cumple a cabalidad, es decir, a toda acción corresponde una reacción, pero no necesariamente de la misma magnitud, este es el sentido de la metáfora propuesta por Lorenz (1993) “El efecto Mariposa”.

En principio el uso de análisis locales mediante cantidades infinitamente pequeñas es necesario y de esta forma se pueden hacer análisis de variación de diversos órdenes, en funciones analíticas, mediante expansiones en series de Taylor, sin embargo, la predicción ante el caos está relacionada con la búsqueda y selección de condiciones iniciales adecuadas, además de la construcción de sistemas de referencia que consideren la comparación entre todas las soluciones del sistema y su comportamiento respecto a un amplio marco en la variación de los parámetros asociados. Se propone que además de las estrategias variacionales ya estudiadas por la teoría Socioepistemológica, la predicción en sistemas no lineales caóticos requiere de estrategias como “*la variación de parámetros y*

la selección y estudio de condiciones iniciales”, esto brinda un espectro amplio de dinámicas que permite hacer distinciones entre comportamientos deterministas, aleatorios o caóticos.

### ■ Reflexiones finales

El principio estrella se encuentra ligado a la búsqueda de la estabilidad del cambio y a dos momentos o niveles de constantificación, el primero se debe a la selección adecuada de las variables y el segundo a la selección del orden de variación para hacer predicciones, estos a su vez están orientados por estrategias variacionales como la comparación, seriación y estimación y más precisamente por la predicción.

Sin embargo, la complejidad, de la mayoría, de los fenómenos que nos rodean es de orden superior o igual a dos, así que debido a la PS del *Preadicere* se han buscado estrategias para hacer predicciones sobre fenómenos donde intervienen gran cantidad de variables. En presencia de sistemas dinámicos no lineales, caóticos, se actúa sobre la variación de las variables seleccionadas en el primer momento, pero el orden de variación en el segundo puede ser tan grande como se desee, entonces hablaremos de un proceso de constantificación diferenciado en el que es posible considerar estrategias para elegir los parámetros adecuados y seleccionar las condiciones iniciales.

En el transcurso de esta investigación se han generado nuevas preguntas que apuntan a responder la pregunta de investigación, a continuación, se presentan las últimas que se han hecho: ¿Cuáles son las formas de razonamiento que coordinan las acciones necesarias para realizar una predicción en un sistema no lineal? ¿Cómo se da la coordinación entre las acciones y actividades vinculadas con la predicción ante sistemas no lineales?

Como se ha mencionado se considera importante mostrar una forma de organización las prácticas, así el  $p^*$  se propone como promotor de esta organización y se muestra transversal al diagrama de anidación de prácticas en el caso de las situaciones variacionales. Esta afirmación debe ser acompañada de la evidencia empírica que exige el campo de investigación de la Matemática Educativa, así el trabajo futuro apunta a la construcción de una situación que desarrolle los aspectos de las dinámicas caóticas y permita evidenciar el uso de estrategias para la predicción. La interacción entre varias disciplinas y el uso softwares, para simplificar las tareas de cálculo y la visualización, han sido fundamentales para el desarrollo de las ideas de este tipo de dinámicas, por tal motivo es imperante pensar en un diseño experimental que conjunte todos estos aspectos y permita dar cuenta de las actuaciones referentes a la predicción. Se propone utilizar las ideas plasmadas por Cobb, Confrey, diSessa, Leherer, & Schauble (2003) como marco metodológico para el diseño de experimentos.

### ■ Referencias Bibliográficas

- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædicere y lo Analítico"*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra, *Tendencias actuales de las matemáticas, su historia y su enseñanza* (págs. 97-110). Salamanca: Universidad de Salamanca.
- Cantoral, R. (2013b). Socioepistemología de la variación y el cambio. En C. Cuevas, & F. Pluinage, *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (págs. 195-216). México: Pearson.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático* (Segunda ed.). México: Gedisa.
- Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, 33-70.
- Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9-28.
- Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leherer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in *Educational Research. Educational Research*, 9-13.
- Cordero, F., & Morales, A. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 319-345.
- Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.
- Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En M. Barnsley, & S. Demko, *Chaotic Dynamics and Fractals*. Orlando Florida: Academic Press.

- Lorenz, E. (1993). *The Essence of Chaos*. Unites States of America: Washington.
- Lyapunov, A. M. (1892). *The general problem of the stability of motion*. Kharkov: Kharkov Mathematica Society.
- May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature*, 459-467.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Docotorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.
- Parks, P. C. (1992). A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on\*. *IMA Journal of Mathematical Control & Informat*, 275-303.