

PROBLEMATIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LA GÉNESIS HISTÓRICA DE LA TRIGONOMETRÍA

Olivia Alexandra Scholz Marbán, Gisela Montiel Espinosa

CINVESTAV-IPN. (México)

olivia.scholz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: Presentamos el avance de una investigación que busca estudiar la transición de la trigonometría en un contexto estático-geométrico (cuerdas y razones trigonométricas) a la trigonometría en un contexto dinámico-variacional (función trigonométrica), en el nivel medio superior. El avance se centra en un análisis documental de fuentes históricas relativas a la Geometría y a la Trigonometría, con la finalidad de establecer una base de conocimientos necesarios y problemáticas que contextualicen su construcción y resignificación. La finalidad de esta problematización es devolver los procesos de construcción geométrica que le dan sentido y razón de ser al aprendizaje de la Trigonometría.

Palabras clave: geometría, trigonometría, génesis histórica, análisis documental

ABSTRACT: We present the advance of a research that seeks to study the transition from trigonometry in a static-geometric context (trigonometric strings and ratios) to trigonometry in a dynamic-variation context (trigonometric function), in the upper middle level. The advance focuses on a documentary analysis of historical sources related to Geometry and Trigonometry, in order to establish necessary and problematic knowledge bases that contextualize its construction and reinterpretation. The purpose of this problematization is to return the processes of geometric construction that give meaning and reason for being, to the learning of Trigonometry.

Key words: geometry, trigonometry, historical genesis, documentary analysis

■ Introducción

Desde la mirada de la construcción social del conocimiento trigonométrico (Montiel 2011, 2005), el objeto de estudio se configura a partir de problematizar qué es lo que se aprende y qué es lo que se enseña, por lo que no basta con dar cuenta de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes respecto al tema, sino plantear situaciones que permitan al estudiante construir conocimientos y poder estudiar el desarrollo de ese conocimiento a partir de lo que el estudiante hace. En ese sentido, nuestro planteamiento de investigación contempla la problematización de lo geométrico para abordar el estudio de lo trigonométrico en el nivel medio superior, atendiendo principalmente la transición de lo estático geométrico hacia lo dinámico-variacional.

Una breve revisión histórica acerca del desarrollo de la Trigonometría la realiza Bressoud (2010) y en ella destaca que la Trigonometría tuvo su origen con la observación del cielo, en la Grecia antigua, y nace a partir de construcciones geométricas. Se destaca también que fue en el siglo II a. C. que Hiparco construyó la tabla de cuerdas considerada la primera tabla trigonométrica y que 300 años después, el astrónomo Ptolomeo utilizó el valor del radio igual a 60, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal de los babilonios, para la elaboración de sus tablas trigonométricas.

En el libro del Almagesto capítulo XI libro I, Ptolomeo incluye una tabla de cuerdas y la explicación de su método para elaborarla. Bressoud (2010), desde este análisis histórico, propone el comienzo del estudio de la Trigonometría en el contexto del círculo trigonométrico, tomando en cuenta que históricamente nace del estudio geométrico de las relaciones de las cuerdas y las longitudes de arco.

En una investigación antecedente (Scholz, 2014; Scholz y Montiel, 2015) se estudió la resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de nivel medio superior, en una experiencia cuyo diseño didáctico provocó la modelación geométrica de una situación de cálculo de distancias. Los resultados de la investigación y la evidencia empírica recabada nos dan un punto de partida para reconocer la viabilidad de integrar los procesos de construcción geométrica en el aprendizaje de la razón trigonométrica, a través del cálculo de cuerdas. Sin embargo, dado el contexto histórico que plantean Bressoud (2010) y Montiel (2011), resulta fundamental problematizar estos saberes, es decir, se deben *historizar* y *dialectizar* (en el sentido de Cantoral, 2013).

■ Consideraciones teóricas

La investigación se enmarca en los estudios sobre la construcción social de conocimiento matemático, en particular del conocimiento trigonométrico (Montiel, 2011; Scholz, 2014; Torres, 2014; Montiel y Jácome, 2014). Estos estudios se caracterizan por la amplia problematización que se hace del conocimiento matemático en juego y dada la génesis histórica de la Trigonometría en la Geometría, problematizarla implica reconocer que estudiar su origen trata del estudio del hombre haciendo Geometría.

Cantoral (2013) propone que, para problematizar un saber, éste se debe historizar y dialectizar. Por historizar, el autor se refiere a “una historia que va más allá de lo cronológico factual, nos interesa una historia crítica del desarrollo conceptual, una *epistemología situada*.” (p. 53); mientras que dialectizar, la considera desde la Dialéctica como parte de la Filosofía para “mostrar que [el algo] que se dialectiza reconoce la contradicción, no como mera errata o falla, sino que en su “sistema” la contradicción tiene un rol interno fundamental de confrontación.” (p. 53).

Como estrategia metodológica, iniciamos historiando los momentos señalados por Bressoud (2010), en el marco de un seminario de posgrado donde se analizó el Libro I de los Elementos de Euclides. Este análisis sirvió para concretar lo que Montiel (2011) denomina “contexto estático-proporcional” y “racionalidad helenística-euclidiana” en sus elementos de construcción social de la Trigonometría, relativa al cálculo de cuerdas (como antecesor de la razón trigonométrica).

■ Método

En función de que esta primera etapa es de revisión histórica se utilizó el análisis documental como método para la obtención de datos, para identificar las raíces históricas, en tanto problemas y condiciones que inciden en los saberes que se pretenden problematizar.

Asumimos el análisis de documentos como lo define Bowen (2009): “un procedimiento sistemático para revisar o evaluar documentos” (p. 27), ya sea que los materiales estén en formato impreso o electrónico. Bowen menciona que existen algunas investigaciones de tipo cualitativas que se basan únicamente en el análisis de documentos, aunque es más común que se utilice como complemento de otros métodos de investigación, en nuestro caso para esta parte del estudio solo se utilizó el análisis de documentos, cuando se realiza este análisis se debe proporcionar la información detallada acerca de cómo se diseñó el estudio y se llevó a cabo.

El análisis de documentos consiste en una revisión superficial, una lectura profunda y la interpretación de la información; este proceso es iterativo y se combina con elementos del análisis de contenido y del análisis temático. El análisis de contenido es el proceso de organizar la información en categorías y relacionarlas con las preguntas centrales de la investigación, mientras que el análisis temático es una forma de reconocimiento de patrones dentro de los datos, con temas emergentes convirtiéndose en las categorías de análisis.

En esta primera etapa de la investigación los documentos se analizaron bajo las siguientes preguntas ¿qué hace?, ¿cómo lo hace? y ¿para qué lo hace? refiriéndonos a las construcciones geométricas que dan surgimiento a la Trigonometría, dado que el objetivo de la investigación es estudiar la transición del contexto geométrico al contexto dinámico.

Elegimos este método por las ventajas que proporciona para el propósito de este trabajo, como, por ejemplo, es: un método eficiente, la disponibilidad, costo-efectividad, estabilidad, exactitud y cobertura.

La presencia del investigador no altera lo que se está estudiando (Merriam, 1988), los documentos cubren un largo periodo de tiempo y muchos eventos.

■ Análisis de documentos históricos

El texto central del análisis es el capítulo IX del libro I del Almagesto de Ptolomeo, en el que presentan los preliminares matemáticos de su teoría astronómica. En él desarrolla las construcciones geométricas que le permiten elaborar una tabla de cuerdas subtendidas por ángulos que incrementan de 10 en 10.

Otras fuentes de análisis fueron los extractos de Hiparco y Euclides incluidos como anexos en (Bressoud, 2010), y el Libro I de los Elementos de Euclides, por ser la base del lenguaje y pensamiento matemático con el que Ptolomeo desarrolla la fundamentación matemática en el Almagesto; motivo por el cual describimos primero el proceso de análisis de éste.

■ Sobre la problematización en los Elementos

Se eligió la versión de los Elementos traducido por Zamorano (1576), ya que es la primera traducción al castellano que se conoce y es considerada, por los historiadores, la más fiel y apegada al documento original; sin embargo, se consultó también la versión traducida al español por Simson (1774) porque al ser más reciente nos auxilió para comprender algunos términos que en la versión de Zamorano se consideraron ambiguos.

Nos apoyamos en diversos autores que han realizado un análisis de la obra de Los Elementos como Melogno (2011), quien reconoce que Euclides con su obra permitió la delimitación de la Matemática como disciplina independiente de la Filosofía; Navarro (2005), hace un estudio de la obra y da una interpretación de la composición de los libros, así como de las partes que conforman los teoremas y los problemas de la obra; y Vega (2013), cuya estrategia terminó de conformar nuestra estructura de análisis para cada proposición del Libro I.

El análisis documental del Libro I de los Elementos de Euclides, nos dio luz sobre la naturaleza de algunos objetos y conceptos geométricos. Replicamos y analizamos las proposiciones tomando como punto de partida cuestionamientos de tipo socioepistemológico: ¿qué hace?, ¿cómo lo hace?, ¿para qué lo hace?, identificando el lenguaje y las herramientas puestas en juego, con la intención de entender y detectar la forma de construir, argumentar y presentar la Geometría. En el proceso de análisis observamos que la forma de expresión de la época era verbal y no simbólica como en la actualidad, además se hace referencia a los elementos que conforman a las figuras geométricas tratándolos como partes del objeto lo que facilita hacer comparaciones y establecer relaciones entre ellos, de las cuales se componen las proposiciones.

■ Sobre la problematización en el Almagesto

Se estudiaron y reprodujeron las construcciones geométricas del capítulo IX del libro I del Almagesto con las que Ptolomeo establece su teorema y construye la tabla de cuerdas con incrementos de 10 en 10. Ptolomeo inicia este capítulo IX del libro I con el problema de inscribir polígonos regulares en el círculo y así relaciona la longitud de las cuerdas respecto a un ángulo central, como se muestra en la Figura 1.

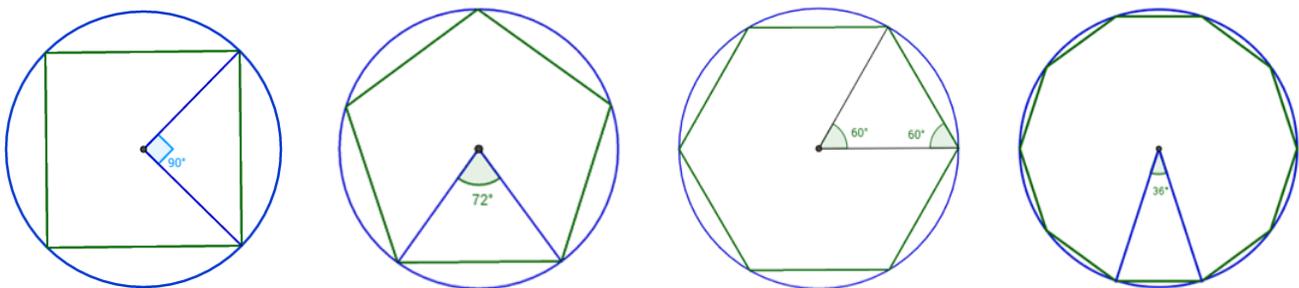


Figura 1. Uso de polígonos inscritos para calcular longitudes de cuerdas.

La imposibilidad de construir algunos polígonos, con las herramientas geométricas euclidianas de la época, lo lleva a construir lo que hoy conocemos como *Teorema de Ptolomeo*. El teorema está basado en sumas y restas de medidas ya conocidas, en un cuadrilátero cíclico, como se observa en la Fig. 2.

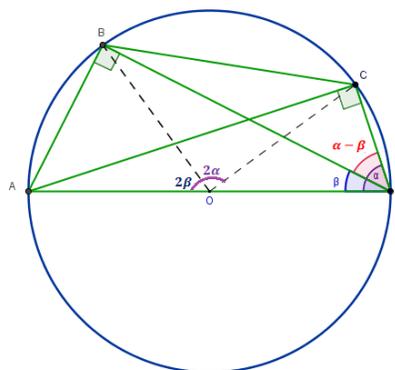
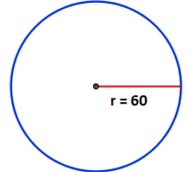
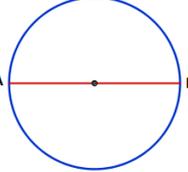
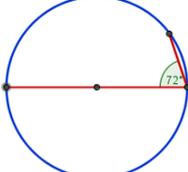
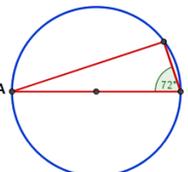
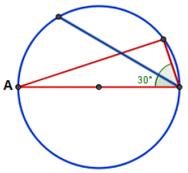
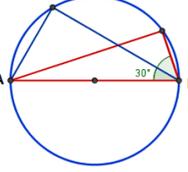
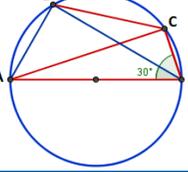


Figura 2. Cuadrilátero cíclico. Teorema de Ptolomeo

Nuestro análisis contempló la identificación de las nociones implicadas en las construcciones geométricas y en el planteamiento del teorema, que sintetizamos en la siguiente tabla:

Figura	Análisis (operaciones entre medidas, relaciones)	Nociones implicadas
	Se traza el círculo con radio de tamaño 60	Circunferencia, círculo, centro, radio, punto medio
	Se traza el diámetro para tener un dato del cuadrilátero AD=120	Diámetro, cuerda, ángulo central
	Se traza la cuerda que forma un ángulo conocido tomando como vértice un extremo del diámetro, en este caso D	Cuerda, ángulo inscrito
	Se traza una cuerda desde el otro extremo del diámetro hacia el extremo de la cuerda que forma el ángulo conocido	Triángulo rectángulo, ángulo recto, cuerdas, trazo de segmentos, ángulo central, ángulo inscrito
	Se traza la cuerda que forma un segundo ángulo conocido tomando como vértice un extremo del diámetro, en este caso D	Cuerda, ángulo inscrito
	Se traza una cuerda desde el otro extremo del diámetro hacia el extremo de la cuerda que forma el ángulo conocido	Triángulo rectángulo, ángulo recto, cuerdas, trazo de segmentos, semejanza de triángulos
	Se completa el cuadrilátero trazando el segmento BC	Segmento, cuadrilátero

A partir de las construcciones geométricas realizadas en el círculo determina las longitudes de las cuerdas faltantes utilizando el Teorema de Pitágoras para sus cálculos, esto debido a que identifica

que el cuadrilátero se compone de dos triángulos rectángulos, por lo tanto, propone calcular la distancia de CD y BD como se muestra:

$$CD = \sqrt{(AD)^2 - (AC)^2}$$
$$BD = \sqrt{(AD)^2 - (AB)^2}$$

Para finalmente enunciar su Teorema $(AC)(BD)=(AD)(BC)+(AB)(CD)$ que es el que le permite conocer las distancias de cuerdas asociadas a ángulos centrales.

■ Discusión

Este análisis nos permitió problematizar los conocimientos trigonométricos de interés, en un contexto donde la Matemática se restringe a la Geometría, vislumbrando algunos caminos para su resignificación. Principalmente se reconoce la importancia y relevancia del trabajo de construcción geométrica en el surgimiento y desarrollo de los conceptos trigonométricos. Consecuencia de reintegrar dichas construcciones se entrevé el desarrollo de un pensamiento y lenguaje geométrico, sobre la base del estudio de relaciones y proporciones. En términos escolares, desarrollar un pensamiento geométrico en los estudiantes demandaría de un enfoque transversal dentro de la propia Matemática.

■ Reflexiones

Este análisis no pretende reconstruir la historia en el aula, sino reconocer lo que le es propio al conocimiento matemático en su génesis histórica; sin embargo, al confrontar (dialectizar) el análisis de los procesos de construcción geométrica con el análisis del discurso Matemático Escolar (dME) (reportado por: Montiel y Jácome, 2014; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015), se pone en evidencia la riqueza en el lenguaje y en el pensamiento que se pierde cuando el dME norma la construcción de significados tanto para el que enseña como para el que aprende.

La integración de los procesos de construcción geométrica en el círculo (evidenciados por: Scholz (2014) y Torres (2014)) para introducir al estudio de la Trigonometría, se fundamenta no sólo en la coherencia histórica que señala Bressoud, sino en la evolución de significados conforme se complejiza el estudio de las relaciones en el círculo. Es decir, estaríamos intencionando un desarrollo de usos del conocimiento trigonométrico; de ahí nuestro objeto de investigación: la transición de lo geométrico a lo variacional.

■ Referencias Bibliográficas

- Bressoud, D. (2010). Historical reflections on Trigonometry. *Mathematics Teacher*, 104(2), 106-112.
- Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative research journal*, 9(2), 27-40.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. (1a ed.). Barcelona: Editorial Gedisa SA.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 5-17.
- Melogno, P. (2011). Los Elementos de Euclides y el desarrollo de la matemática griega. En Melogno, P., Rodríguez, P. y Fernández, S. (Comps.). *Elementos de Historia de la Ciencia*, 500, 61-79. Uruguay: Universidad de la República.
- Merriam, S.B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis doctoral. México: CICATA – IPN.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor. *Bolema-Mathematics Education Bulletin*, 28(50), 1193-1216.
- Navarro, J. (2005). Los Elementos de Euclides en castellano. Exposición virtual en DivulgaMAT.
- Ptolomeo, C., Montes, L. A. S., y Fernández, P. A. (2003). El capítulo IX del Libro I del "Almagesto" de Claudio Ptolomeo: Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo:(construcción de la primera tabla trigonométrica conocida). Ed. MAXTOR.
- Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria. México.
- Scholz, O. y Montiel, G. (2015). Construcción de significados de las razones trigonométricas en el contexto geométrico del círculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 28(3), 906-913.
- Simson, R. (1774) (Eds.). Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides: traducidos de nuevo sobre la versión latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella. Universidad Complutense de Madrid.

- Torres, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Tecnológico de Sonora. México.
- Vega, Y. (2013). *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia.
- Zamorano, R. (1576) (Eds.). Los seis primeros libros primeros de la Geometría de Euclides.