

DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Caballero-Pérez, Gloria Moreno-Durazo

Cinvestav-IPN. (México)

macaballero@cinvestav.mx, gamoreno@cinvestav.mx

RESUMEN: En este escrito se presentan las consideraciones teóricas que sustentan el diseño de una situación de aprendizaje con miras al desarrollo del pensamiento matemático asociado al estudio de comportamientos lineales. Para ello, se retoma el esquema de anidación de prácticas de la teoría socioepistemológica y el uso de *estrategias variacionales* del Pensamiento y Lenguaje Variacional. La situación está diseñada considerando cuatro momentos, el primero consiste en el reconocimiento de la función lineal como aquella de variación constante, el segundo confronta diferentes comportamientos lineales para significar los parámetros de la expresión $f(x) = mx + b$, en tanto que el tercero recurre al uso del parámetro m para realizar predicciones sobre comportamientos lineales y el último una confrontación entre lo lineal y lo no lineal.

Palabras clave: variación, predicción, prácticas, socioepistemología

ABSTRACT: This paper shows the theoretical assumptions that support the design of a learning situation in order to develop mathematical thinking associated with the study of linear behaviors. Then, the nesting scheme of socio-epistemological theory practices and the use of variation strategies of thought and variation language are retaken, as well. The situation is designed considering four moments: the first, consists of the recognition of the linear function as that of constant variation, the second confronts different linear behaviors to signify the parameters of the expression $f(x) = mx + b$, while the third, uses the parameter m to make predictions about linear behaviors and the last one makes a confrontation between linear and nonlinear behavior.

Key words: variation, prediction, practices, socio-epistemology

■ Introducción

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ha sido tema de interés en diversas investigaciones, algunas interesadas en cómo diseñar situaciones para construir significados a los conceptos del Cálculo (Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein y Henzenn, 2008; Johnson, 2015), y otras que, a partir del diseño de un conjunto de actividades, determinan cuáles son las concepciones y las dificultades que tienen profesores y estudiantes sobre tópicos de esta asignatura (Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac y Ivanjek, 2012; Caballero y Cantoral, 2013).

En el caso de la función lineal, encontramos dificultades relacionadas al significado de la pendiente en contextos disciplinares, por ejemplo, en (Planinic, et. al. 2012) se reporta que los estudiantes tienen dificultades en la transición del contexto matemático al físico ya que, aunque pueden resolver correctamente el planteamiento del primero, no ocurre lo mismo con el segundo. Desde nuestra perspectiva, esto puede deberse a que la enseñanza de la pendiente se ve desprovista de los escenarios de significación que le dan origen, lo que repercute en que la Matemática sea vista como algo independiente de los aspectos físicos, aun cuando los conceptos e ideas comparten un origen similar, el estudio del cambio y la variación.

Por otra parte, Johnson (2015) reporta que en el análisis de gráficas, los estudiantes conciben a éstas como imágenes estáticas y no como la expresión de un fenómeno dinámico de variación. Consideramos que en parte se debe al tipo de tratamiento que se da a las gráficas, que no propicia la argumentación desde la gráfica, sino una algebrización de la expresión analítica y posteriormente una tabulación de puntos particulares.

Dificultades como las anteriores son abordados por la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar), la cual se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático propios de la Matemática del Cambio (Cantoral, 2000), enfatizando en el carácter variacional de la Matemática y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. En un sentido amplio consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio.

Las investigaciones enmarcadas en el PyLVar han mostrados que conceptos como *función*, *límite*, *continuidad*, *derivada* e *integral* no pueden reducirse a su definición, ni limitarse a su aplicación (Cantoral, 2013). Se precisa de un cambio de paradigma del tratamiento algebraico al que son sometidas, para dar lugar a las ideas de cambio y variación que permitieron el surgimiento y desarrollo de estos conceptos. Dado lo anterior, en este escrito presentamos las consideraciones teóricas que sustentan el diseño de una situación de aprendizaje con miras al desarrollo del pensamiento matemático asociado al cambio y la variación.

La situación que proponemos consiste en un problema de llenado de recipientes con flujo constante, contexto que frecuentemente es utilizado en investigaciones que se interesan por analizar los procesos mentales que siguen los estudiantes en su resolución, en particular la forma en cómo emergen conceptos matemáticos como pendiente (Johnson, 2015). Nuestra propuesta por otro lado se enmarca

en la teoría Socioepistemológica, de modo que nuestro punto de interés no es observar el uso de los conceptos matemáticos en la situación, sino propiciar el desarrollo de prácticas para favorecer el estudio y la predicción de procesos de cambio. Es así, que nuestro objetivo es el diseño de una situación de aprendizaje fundamentada en el PyLVar, para lo cual tomamos como fundamento el modelo de anidación de prácticas de la Socioepistemología y una problematización de la noción de variación.

■ Marco Teórico

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica, la cual que explora formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela, a la vez de modelar las dinámicas de la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de *prácticas* que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), normadas a su vez por *prácticas sociales*, las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera).

La Socioepistemología centra la atención en las *prácticas* que acompañan y dan origen a los objetos matemáticos, particularmente en Cálculo, éstas prácticas se denominan *estrategias variacionales* (Caballero, 2012), las cuales son normadas por la práctica social del Prædicere, la cual consiste no en la acción de predecir sino lo que orienta el querer predecir.

Ahora bien, estas prácticas no se efectúan arbitrariamente sino que cuenta con una estructura, una organización, que se denomina *modelo de anidación de prácticas*, el cual permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social de conocimiento matemático mediante el desarrollo intencional de prácticas.



Figura 2.1. Esquema de la anidación progresiva de prácticas (Cantoral, 2013)

El interés por estudiar el cambio y la variación se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir, ya que ante la incapacidad de adelantar el tiempo para observar los resultados venideros, se han desarrollado diversas herramientas basadas en el estudio del cambio y orientadas por la práctica social del *Prædicere* para anticipar el comportamiento de sistemas complejos (Cantoral, 2013). Ahora bien, la predicción de fenómenos precisa determinar algún patrón o regularidad en el comportamiento de la variación, esto es, entender la dinámica que las variables y sus variaciones siguen. A esto se le denomina el *carácter estable del cambio* (Cantoral, 2013) aquella regularidad asociada a la variación que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno.

Para determinar el carácter estable del cambio, nuestra hipótesis sostiene se precisa atender cuatro cuestionamientos asociados a la percepción del cambio: ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? En un fenómeno de variación pueden existir una multitud de elementos que están cambiando simultáneamente (¿qué cambia?), no obstante, de acuerdo con Cantoral (2013), no se centra la atención en todos ellos sino que se eligen aquellas variables relevantes para una situación específica. Ello requiere de algún referente para comparar los estados del fenómeno a fin de dar cuenta que ocurrió un cambio, es decir atender al cuestionamiento ¿respecto de qué cambia?

Los primeros dos cuestionamientos se refieren a la identificación y establecimiento de relaciones de dependencia entre variables; los otros consisten en describir la forma en cómo se relacionan las variables y caracterizar la naturaleza del cambio. La pregunta ¿cuánto cambia? está orientada a asignar un valor a la modificación de estado percibida, mientras que la pregunta ¿cómo cambia? a describir el comportamiento global. Ambos pueden realizarse en términos de valores numéricos o a través de descripciones cualitativas, por ejemplo, más grande que, menor que, más frío, menos frío, cada vez más rápido, cada vez más lento, etc.

Para atender a estos cuatro cuestionamientos se cuenta con un modelo teórico desarrollado por M. Caballero en (Caballero y Cantoral, 2013) que explica la forma en cómo se estudia la variación en una situación específica. El uso de las *estrategias variacionales* comienza por la *comparación* de estados para cuantificar el cambio entre ellos, y después la *seriación*, vista como sucesión de comparaciones, permite caracterizar cualitativa y cuantitativamente el patrón de regularidad de la variación en un conjunto de estados. La *estimación* y *predicción* organizan la información obtenida de las estrategias anteriores para anticipar comportamientos globales o estados puntuales respectivamente. Lo anterior deja ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación asociado a una jerarquía en las *estrategias variacionales* que se presenta en la siguiente anidación de prácticas.

Tabla 1. Anidación de prácticas del pensamiento y lenguaje variacional

Práctica social	Prædicere
Práctica de referencia	Toxicología Física etc.
Práctica	Predicción Estimación
Actividad	Comparación <i>Seriación</i>
Acción	Ordenar Medir Girar etc.

Las acciones se consideran la intervención directa del sujeto sobre el objeto de estudio, en este caso la variación, de modo que los elementos y variables del fenómeno se ordenan, agrupan, miden, etc. Dichas acciones son organizadas mediante la *comparación* y *seriación*, vistas como actividades efectuadas de manera consiente e intencional. Esto significa que no toda *comparación* o *seriación* es una *estrategia variacional* sino aquellas que tengan la intención de estudiar la variación. Estas actividades se organizan deliberadamente para componer una práctica, en este caso las estrategias de *predicción* y *estimación*. Estas prácticas son orientadas y reguladas bajo el paradigma de una *práctica de referencia* y estas a su vez normadas por la búsqueda de la predicción de la *práctica social* del Prædicere.

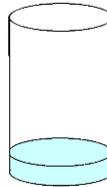
■ **Una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional**

Con base en la anidación de prácticas (tabla 1) se han estructurado cuatro momentos en la situación de aprendizaje. El primero se refiere al llenado de un recipiente cilíndrico a flujo constante, donde la atención se centra en identificar la cantidad de altura que aumenta cada segundo y la asociación con la gráfica correspondiente. En el segundo se trabaja el llenado de dos recipientes cilíndricos, comparando la velocidad de llenado al variar la forma del recipiente (más ancho menor pendiente, más angosto mayor pendiente). En el tercer momento, se compara el llenado de dos recipientes desde un enfoque numérico, con el fin de predecir cuál se llena primero. En el último momento se contrastan las gráficas del crecimiento de la altura de recipientes cilíndricos (a razón constante) con el llenado de

recipientes de forma cónica, a modo de contrastar lo lineal con lo no lineal (Arrieta, 2003). Por cuestiones de espacio, nos limitamos a mostrar el análisis de los dos primeros momentos.

Primer Momento

Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo.



1. Marca sobre la imagen la altura que alcanzará el agua a los 3 segundos.
2. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta
3. Realiza el bosquejo de la gráfica que muestra altura del líquido al paso del tiempo. Considera que el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la altura. Explica cómo es el crecimiento de la altura en este recipiente.

La primera pregunta tiene el objetivo de establecer la altura del líquido y el tiempo como las *variables* del fenómeno, para lo cual se señala en el dibujo la parte en azul con el fin que se utilice como medida cuantitativa. Al nivel de acción se efectúan dibujos en la botella que indican el nivel de agua cada segundo a partir de la medición del segmento azul. Estos trazos deben ser de tal forma que la longitud de las alturas sea la misma, lo que lleva a la actividad de *comparar* las nuevas alturas respecto a la original.

En la segunda pregunta, el nivel de acción corresponde nuevamente al dibujo de los segmentos, pero ahora articulado por la estrategia de seriación en el nivel de actividad, de tal forma que los segmentos lleguen hasta la parte superior de la botella. Con esto, en el nivel de práctica dichos segmentos son contados para predecir el tiempo de llenado. Para la tercera pregunta, el nivel acción corresponde a considerar la construcción de los segmentos anteriores, de manera que en el nivel de actividad se usa la *seriación* para determinar que los incrementos son siempre iguales.

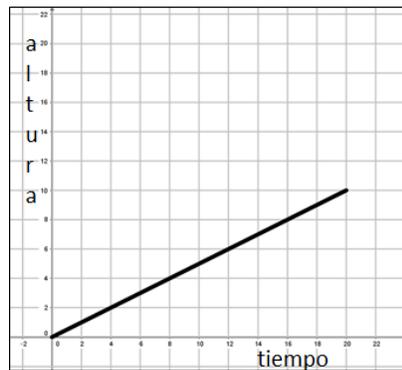
De esta forma, en el primer momento se caracteriza los comportamientos lineales como aquellos cuyo crecimiento es constante. Esto se logra al enfocar la atención en la actividad a la comparación de las longitudes de los segmentos que se dibujan respecto al que tiene en un principio. De modo que al reconocer que las longitudes son siempre iguales, se puede determinar el tiempo de llenado del recipiente.

Momento 2

1. Considera los recipientes cilíndricos A y B que tienen diferentes **dimensiones** pero misma **capacidad**, los cuales son llenados con agua con el mismo flujo constante. Bosqueja la gráfica de la altura del agua al paso del tiempo para cada recipiente. ¿Qué diferencia hay en la forma en cómo crece la altura en cada uno?



2. El siguiente plano cartesiano muestra la gráfica del llenado de un recipiente C. Construya, sobre el mismo plano cartesiano, la gráfica del llenado del recipiente D sabiendo que ambos recipientes son llenados a flujo constante y, además, la altura del líquido en el recipiente D aumenta el doble respecto al recipiente C.



En la pregunta 1 se pide diferenciar el crecimiento de la altura en dos recipientes cilíndricos de diferentes dimensiones, para lo cual es necesario dibujar (o considerar) la altura que alcanzaría el líquido al transcurrir un segundo en alguno de los recipientes, lo que corresponde al nivel de acción. El nivel de actividad se presenta al *comparar* la altura dibujada con la que alcanzaría el otro recipiente en el mismo tiempo, y de ese modo determinar que el incremento en el recipiente angosto es mayor que en el ancho. Dado que ya se reconoce que el crecimiento es constante para cada botella, no se requiere utilizar la *seriación*, sino únicamente comparar las alturas correspondientes a cada recipiente.

La pregunta 2 tiene el objetivo de construir la gráfica del llenado de un recipiente cilíndrico dada la gráfica del llenado de otro recipiente. El nivel acción corresponde a una operación aritmética de multiplicar por 2 el valor de la altura en cada instante de tiempo, y también en localizar dicho valor en

el plano. El nivel de actividad consiste en una *comparación* de alturas, ya que cada altura generada debe cumplir la característica de ser el doble respecto a la anterior.

Momento 3

Las siguientes tablas muestran los datos de la altura de un líquido durante el llenado de dos recipientes cilíndricos con las mismas dimensiones. Si ambos recipientes miden 15 cm de alto, ¿cuál de los dos se llenará primero? Justifique su respuesta

Recipiente A		Recipiente B	
Tiempo (s)	Altura (cm)	Tiempo (s)	Altura (cm)
1	3.3	1	1.8
2	4.6	2	3.6
3	5.9	3	5.4
4	7.2	4	7.2

Momento 4

Considera dos recipientes con forma de “cono”, como los que se muestran a continuación, que son llenados a flujo constante:



- Para cada recipiente, ¿qué diferencia hay en la forma de crecimiento en la altura de la parte inferior de cada botella respecto a la parte superior?
- Para cada recipiente, proporcione la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.

Reflexiones del trabajo

La situación de aprendizaje propicia el reconocimiento de la función lineal como aquella de variación constante, tanto de manera cualitativa y cuantitativa en el análisis gráfico y numérico, lo que permite significar los parámetros de la expresión $f(x) = mx + b$ como la cantidad de flujo (m) y la cantidad

inicial de agua (b). La situación fue diseñada considerando una evolución pragmática de la variación mediante el desarrollo de las *estrategias variacionales* y el esquema de anidación de prácticas, atendiendo a los cuestionamientos ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia?

En el primer momento de la situación las variables de estudio (¿qué cambia?) son explicitados en las preguntas, pero se refuerzan al proporcionar una altura inicial del líquido como referente para analizar el crecimiento de la altura (¿respecto de qué cambia?). Al pedir que se dibuje el segmento que corresponde al segundo 3, se establece una forma de medir los incrementos con base en la longitud del segmento original (¿cuánto cambia?), en tanto que al pedir la gráfica y explicar la forma de crecimiento se atiende al cuestionamiento ¿cómo cambia?. El segundo momento agrega, a las variables tiempo y altura, la forma de la botella ¿qué cambia?, ya que el ancho de estas modifica el incremento de las alturas, de manera que se usa la altura que alcanzaría en uno de los recipientes para analizar el otro (¿respecto de qué cambia?). Ahora bien, aunque los incrementos siguen siendo constantes en cada recipiente (¿cómo cambia?), la cantidad que aumentan es diferente (¿cuánto cambia?).

Un aspecto a considerar en el diseño de esta situación, es que la anidación de prácticas que proponemos no consiste en estructurar una tarea por cada nivel del modelo, sino que cada pregunta o indicación de la situación se construye considerando el tipo de acciones, actividades y prácticas que se pretenden propiciar. En una fase posterior se contempla la implementación de la situación con estudiantes de bachillerato de México que no han cursado la asignatura correspondiente a Pre-Cálculo, con el fin de recopilar y analizar los datos correspondientes para validar y, en su caso, reestructurar la situación y el marco teórico.

■ Referencias Bibliográficas

- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.
- Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R.M. Farfán, F. Cordero, J.A. Alanís, R.A. Rodríguez y A. Garza (Eds.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, DF: Trillas.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa Editorial.
- Johnson, H. (2015): Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, 89 p. 89 – 110.
- Planinic, M., Milin-Sipus, Z. Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of Student Understanding of Line Graph Slope in Physics and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, p. 1393 – 1414.