

DE LA RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO A LA RAZÓN DE
CAMBIO INSTANTÁNEA

SANDRA YAMILE BAUTISTA ALBORNOZ

CÓDIGO: 2012182005

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA: DIDÁCTICA DEL CÁLCULO

2013

DE LA RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO A LA RAZÓN DE
CAMBIO INSTANTÁNEA

SANDRA YAMILE BAUTISTA ALBORNOZ

CÓDIGO: 2012182005

ASESOR DE TRABAJO DE GRADO

ORLANDO AYA CORREDOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA: DIDÁCTICA DEL CÁLCULO

2013

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
Código: FOR020GIB		Versión: 01
Fecha de Aprobación: 04-11-2012		Página 1 de 7

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	DE LA RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO A LA INSTANTÁNEA
Autor(es)	BAUTISTA Albornoz Sandra Yamile.
Director	Orlando Aya Corredor
Publicación	Bogotá, 2013, 66 págs.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.
Palabras Claves	Conceptualización, visualización, razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea.

2. Descripción
<p>El trabajo desarrollado se basó en una indagación del desarrollo histórico del concepto razón de cambio, desde sus orígenes en el siglo VI A.C. y como fue avanzando hasta la visión contemporánea, con lo cual se diseña una secuencia didáctica virtual para introducir, visualizar y conceptualizar la</p>

razón de cambio dando el paso desde la promedio a la instantánea.

3. Fuentes

Para el sustento de este trabajo, se consultaron 21 referencias, que incluyen trabajos del desarrollo histórico de la razón de cambio, sobre aspectos didácticos que apoyan la conceptualización como lo son la visualización, el uso de representaciones, y el papel que tiene el uso de software en los mismos, adicionalmente se enfatizó en aquellos referentes que sustentan a la razón de cambio como un objeto de enseñanza en educación básica y media. Entre las fuentes sobresalen:

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del análisis matemático. *Boletín de la asociación Matemática Venezolana*, 12(2), 135-149.

Font, V. (s.f.). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas*. Recuperado el 26 de Marzo de 2012, de www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/422

MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rendón, P. (2009). Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión. Recuperado el 10 de Marzo de 2012, de Universidad de Antioquia: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co/jspui/bitstream/10495/525/1/Conceptualizac>

ionRazonCambio01.pdf

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *Plenary lecture, Proceedings of PME (19)*.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics (12)*, 151-169.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). 'Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts', *Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley*, 177-184.

Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa*, 36-45.

4. Contenidos

El documento se estructura en cuatro capítulos. En el primero se presenta la justificación del trabajo, el cual está enmarcada en dar respuesta a la pregunta problema ¿Cómo hacer el paso, en un proceso de enseñanza, de la razón de cambio promedio a la instantánea sin introducir la noción de límite? para estudiantes de décimo grado de la educación media en Colombia, al igual que los objetivos los cuales muestran la ruta a seguir para llegar al diseño de la secuencia de actividades, la cual se caracteriza por ir desarrollando el concepto de la razón de cambio de la forma como fue apareciendo históricamente y así, se introduce la idea de infinitamente pequeño, sin pasar por los obstáculos didácticos que se generan en la formalidad del límite.

En el capítulo dos se presenta una revisión histórica del origen de la razón de cambio, empezando desde los griegos, siglo VI a.C. con Tales de Mileto quien formula su teoría sobre los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes. Eudoxio y Euclides con la teoría de proporciones, Arquímedes y la razón geométrica para determinar las fórmulas de áreas y volúmenes, para pasar a los trabajos en la edad media de Óreseme y las relación entre magnitudes variantes, y durante el renacimiento y la modernidad con el uso de cocientes de incrementos de Descartes y Fermat, las tangentes de Roberval, y finalmente el paso al límite de los cocientes incrementales de Newton y Leibniz que se corresponde con la razón de cambio instantánea tal y como se maneja actualmente en los contenidos curriculares.

En el capítulo tres se presenta la pertinencia de esta propuesta, basados en los lineamientos y estándares curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, se puntualizan los objetivos de este trabajo en el contexto del pensamiento variacional.

Adicionalmente se presenta el marco didáctico y dentro de él se analiza el “pensamiento dinámico” propuesto por Vasco (2006) y los procesos cognitivos presentes en éste. Se enmarca la propuesta dentro de los fundamentados en la teoría de Tall & Vinner, y en general bajo la corriente del Pensamiento Matemático Avanzado.

Se examina la importancia que tiene la incorporación de los recursos tecnológicos y en particular los applets creados en el software libre Geogebra para apoyar los procesos de visualización y conceptualización de objetos matemáticos, en particular la razón de cambio promedio e instantánea.

Como base para el desarrollo de este trabajo y el diseño de las actividades, se hace relevante el estudio de antecedentes investigativos cuyos fines se relacionan con la intención de este trabajo. Por esto, se retoman algunos trabajos de autores como Ascárate, Duval y Vrancken presentan el diseño y resultado de la implementación de secuencias de actividades con el fin de introducir la razón de cambio promedio e instantánea en el proceso de enseñanza.

Finalmente, en el cuarto capítulo, se presentan la propuesta didáctica como una serie de actividades cuya estrategia metodológica será guía de trabajo en clase, las cuales serán orientadas por el docente, y desglosan la razón de cambio paso a paso, bajo un análisis histórico, buscando la comprensión de la razón, el cambio, su relación y desarrollo en matemáticas para finalmente llegar a la razón de cambio promedio e instantánea, sin pasar por el límite como objeto matemático.

5. Metodología

La estructura metodológica para llegar a la propuesta de la secuencia de actividades incluyó una primera fase que se ocupó de la recopilación de información utilizada tanto desde los referentes histórico, teórico disciplinar y teórico didáctico el cual está centrado en la corriente del Pensamiento Matemático Avanzado; paralelamente se realizó un análisis de antecedentes investigativos que soportan la idea de la propuesta y finalmente la construcción de una propuesta didáctica. Finalmente, se construye la secuencia de actividades, en las cuales se aclaran conceptos básicos de razón y de cambio y permite ir paso a paso en la construcción de los conceptos de razón de cambio promedio e instantánea manejando diferentes registros como tabular, gráfico y algebraico sin llegar a usar la definición de límite. De esta forma, se logra introducir la idea intuitiva de algunos objetos matemáticos, sin necesidad de mencionarlos formalmente, evitando que se conviertan en obstáculos didácticos y presentándolos en un contexto que sea más asequible para los estudiantes.

6. Conclusiones

Con el desarrollo de este trabajo, se identifica la importancia del análisis histórico de los objetos matemáticos a enseñar, puesto que este recorrido evidencia cómo la necesidad humana crea nociones intuitivas de los conceptos y permite al docente tomar ventaja de este conocimiento para llevar al aula las temáticas y presentar herramientas didácticas a los estudiantes que fortalezcan sus capacidades de acuerdo a los niveles establecidos por los estándares y evitando en algunos casos, donde se es posible, el uso de los nombres propios de los objetos matemáticos y utilizarlos más como herramientas que faciliten otros procesos; con lo que se podría evadir algunos obstáculos didácticos que se presentan por el lenguaje “jerga” propia de la matemática.

Por otro lado, se puede analizar, la importancia de conocer los objetos matemáticos y su aparición histórica, pues permite jugar con el desarrollo del pensamiento natural del ser humano con el objetivo general de este trabajo. Finalmente, se sugiere la implementación de la propuesta en una población de grado décimo y una retroalimentación a la autora de esta misma.

Elaborado por:	BAUTISTA Albornoz Sandra Yamile.
Revisado por:	Orlando Aya Corredor

Fecha de elaboración del Resumen:	25	02	2013
--	-----------	-----------	-------------

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. MARCO CONCEPTUAL	3
1.1. Justificación del Estudio.	3
1.2. Problema de Investigación	5
1.3. Objetivo General.	5
1.4. Objetivos Específicos.	5
2. MARCO HISTÓRICO-MATEMÁTICO	6
3 MARCO DIDÁCTICO	11
3.1 Procesos cognitivos	12
3.2 Uso de tecnología	15
3.3 Estándares	17
3.4 Antecedentes	20
4 PROPUESTA	25
4.1 Guía 1 - Razón	27
4.2 Guía 2 - Cambio	32
4.3 Guía 3 – Razón de cambio	37
4.4 Guía 4 – Razón de cambio promedio	39
4.5 Guía 5 – Razón de cambio instantánea	41

5. CONCLUSIONES	53
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55
TABLAS DE FIGURAS	58
TABLA DE ANEXOS	58
ANEXOS	59

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se propone plantear una secuencia de actividades didácticas dirigidas a la conceptualización de la razón de cambio instantánea desde la razón de cambio promedio, esto requirió inicialmente realizar una indagación de la evolución histórica de la razón de cambio, desde griegos, siglo VI a.C. con el trabajo de Tales de Mileto sobre lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes, Eudoxio y Euclides con la teoría de proporciones, Arquímedes y la razón geométrica para determinar las fórmulas de áreas y volúmenes; luego en la edad media y el renacimiento con los trabajos de Óreseme sobre la relación entre magnitudes variantes, en el renacimiento con el uso de cocientes de incrementos de Descartes y Fermat, las tangentes de Roberval, y finalmente, en la edad moderna con el paso al límite de los cocientes incrementales de Newton y Leibniz que se corresponde con es la razón de cambio como es manejada actualmente en el contexto de la matemática escolar.

Se presenta el marco didáctico y dentro de él se analiza el “pensamiento dinámico” propuesto por Vasco (2006) y los procesos cognitivos presentes en este. Se enmarca la propuesta dentro de los fundamentados en la teoría de Tall & Vinner (1981), y en general bajo la corriente del Pensamiento Matemático Avanzado.

Posteriormente se examina la importancia que tiene la incorporación de los recursos tecnológicos y en particular los applets creados en el software libre Geogebra para apoyar los procesos de visualización y conceptualización de objetos matemáticos, en particular la razón de cambio promedio e instantánea.

Se realiza una revisión documental de antecedentes investigativos cuyos fines se relacionan con la intención de este trabajo. Por esto, se retoman algunos trabajos

de autores como Azcárate (1997), Duval (1998) y Vrancken (1998) presentan el diseño y resultado de la implementación de secuencias de actividades con el fin de introducir la razón de cambio promedio e instantánea en el proceso de enseñanza.

Finalmente, en el cuarto capítulo, se presentan las actividades como guías de trabajo en clase, las cuales serán orientadas por el docente, y desglosan el concepto de la razón de cambio paso a paso, bajo un análisis histórico, buscando la comprensión de la razón, el cambio, su relación y desarrollo en matemáticas para finalmente llegar a la razón de cambio promedio e instantánea, sin pasar por el límite como objeto matemático.

Dicha secuencia de actividades con el apoyo de applets diseñados en Geogebra tiene como fin ofrecer una propuesta de enseñanza del concepto de razón de cambio promedio e instantánea.

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

1. MARCO CONCEPTUAL

1.1. JUSTIFICACIÓN

En los últimos años en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional, ha definido y renovado constantemente sus políticas, en particular, los lineamientos curriculares y los Estándares Básicos de Matemáticas, que propenden por el fin de fortalecer el desarrollo del pensamiento lógico-matemático a partir de situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural de otras o de la misma ciencia. Dicho pensamiento se va desarrollando durante las diferentes edades de desarrollo del individuo y en diferentes niveles de escolaridad de los mismos. Salazar, Díaz & Bautista (2009) proponen en una descripción de los niveles de comprensión para el caso específico del concepto de derivada, en el marco de la descomposición genética del concepto, a partir de las trayectorias hipotéticas del aprendizaje de un concepto y sugiere que este concepto tiene dos trayectorias: la gráfica y la algebraica; en las cuales hay varios niveles de comprensión y donde se manifiesta en la trayectoria gráfica y algebraica el desarrollo de la ideas del objeto derivada, de lo particular a lo general e introduciendo la idea de variación en intervalos como razón de cambio promedio para subsecuentemente abordar la razón de cambio instantánea que ha ser denominada derivada junto con todas sus representaciones.

Es en este contexto, Salazar et al (2009), realizan la descripción de las dificultades encontradas en un grupo de estudiantes en la coordinación de los diversos niveles de comprensión del pensamiento variacional, dentro de una misma trayectoria y de las dificultades entre el cambio de trayectorias en un mismo nivel. Se observa que en un nivel de comprensión deben diferenciar entre la variación media y la variación instantánea en varios contextos, y que igualmente

deben distinguir en la trayectoria gráfica y algebraica la variación instantánea como el paso al límite de la variación promedio. Es así como en otro nivel de comprensión, esto es, desde la trayectoria gráfica, deben interpretar la representación de la recta tangente como el límite de las rectas secantes y a la vez como la recta más próxima a la gráfica de la función en el entorno que contiene a un punto dado sobre la función.

En el esquema algebraico, una dificultad es establecer la relación entre la razón de cambio, la pendiente de la recta y el límite de las tasas medias de variación, entendidas tanto como números o como el valor funcional asociado a la función a través del valor de la función derivada en un punto. Al respecto se observó que hay dificultades en la comprensión del paso de la interpretación de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, en cualquiera de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, tanto con el esquema gráfico como el algebraico, desde la perspectiva de la descomposición genética del concepto de derivada.

Por otro lado Badillo (2003), interesada en “describir la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano, así como las formas como los profesores interpretan y justifican las situaciones concretas de enseñanza en las que deben actuar, como un punto de partida” (Badillo, 2003, pág. 1) muestra, en su tesis doctoral, las dificultades, de los estudiantes y de las formas didácticas que el docente utiliza, para lograr la visualización adecuada del concepto de derivada.

De estos estudios, se desprende que la comprensión de la razón de cambio mediante el uso de los procesos de visualización es esencial para la conceptualización del objeto derivada; así, el presente trabajo se propone realizar el diseño de una propuesta de enseñanza de la razón de cambio, que facilite, la transición del nivel de comprensión de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, como el cociente infinitesimal por medio de la construcción de

actividades, que fomenten acciones de conceptualización y análisis, apoyados por el uso del software de geometría dinámica Geogebra, un software libre, el cual apoyara y potencializará el proceso de visualización para llegar a la conceptualización. De esta forma, se construyen unos applets en los cuales se presentan actividades que apoyarán el trabajo de las guías que hacen parte de la propuesta didáctica.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo hacer el paso, en un proceso de enseñanza, de la razón de cambio promedio a la instantánea sin introducir la noción de límite?

1.2. OBJETIVO GENERAL

Diseñar una estrategia didáctica para el estudio de la razón de cambio instantánea de una función en un punto como el cociente infinitesimal en la razón de cambio promedio para estudiantes de décimo grado.

1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Realizar un análisis del contexto histórico y matemático, en el cual emerge el estudio de la razón de cambio promedio e instantánea.
2. Estudiar los estándares nacionales e internacionales que justifican la razón de cambio como objeto de estudio en la matemática escolar.
3. Diseñar algunas actividades que incluyan el uso de applets diseñados en Geogebra, que faciliten los procesos de visualización y conceptualización de la razón de cambio.

4. Elaborar un documento, que sirva como apoyo didáctico, donde se plantee una posible estrategia para quienes estén interesados en estudiar una forma de abordar la enseñanza de la razón de cambio.

2. MARCO HISTÓRICO-MATEMÁTICO

En este capítulo, se pretende hacer un recorrido histórico de lo que representó la razón de cambio para la comunidad científica desde los babilónicos y egipcios en la antigüedad, hasta Newton y Leibniz, y que lleve a comprender la razón de cambio como actualmente se trabaja en el contexto educativo, pero que a la vez sirva como eje orientador del diseño y secuencia de las actividades que se propondrán como fin de este trabajo.

Como lo expresa Stewart: “Todo fenómeno natural , desde las vibraciones cuánticas de las partículas subatómicas hasta el propio universo, es una manifestación del cambio...Es de la mayor importancia la necesidad de entender y controlar el mundo cambiante en que vivimos” (Stewart, 1999, pág. 1); por lo tanto comprender los patrones de cambio y cuantificarlos mediante expresiones matemáticas, permite la reducción de la incertidumbre y el control del desarrollo de situaciones de tipo natural, económico y social en las cuales identificamos la dependencia y variación de una cantidad con respecto a otra. Situaciones en las que se hace necesario la utilización e interpretación de construcciones cognitivas de descripción del cambio como son la razón de cambio promedio e instantánea.

RAZÓN DE CAMBIO

Durante la historia, “el hombre ha tenido la necesidad de entender los cambios percibidos en su entorno para utilizarlos en su favor y transformar el medio ambiente”. (Rendón, 2009, pág. 1) Por ejemplo, para los babilónicos y los egipcios en el proceso para la construcción de las pirámides, el problema principal consistía en mantener “una pendiente uniforme en cada cara y la misma en cada una de las

cuatro caras de la pirámide. Se solía utilizar la relación avance vs subida, denominándola por la palabra *sqet*, que significaba la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura” (Boyer, 1986, pág. 11).

Más adelante, los griegos comenzaron sus trabajos en matemáticas más por una tarea a nivel intelectual que por resolver problemas de la vida práctica. Durante esta época (siglo VI a.C.), Tales de Mileto formula que los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes, son proporcionales; proposición que permite generalizar la regularidad encontrada al modificar el tamaño de los lados de triángulos semejantes y que se expresa en términos de razones constantes como se muestra en la figura 1

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'}$$

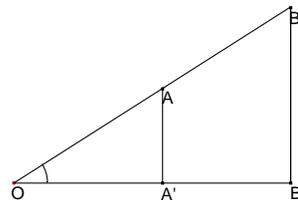


Fig. 1 Semejanza de triángulos

A través del análisis de patrones de cambio de distancias o longitudes de los lados de triángulos semejantes, “Thales buscaba un método indirecto para acceder a aquellos que en la práctica no era posible” (Recalde, 1999, págs. 79-94). De esta manera, las proporciones estaban centradas en mostrar la armonía de dichos

cambios, mediante razones numéricas entre cantidades discretas y su comparación.

Eudoxio, reformuló la teoría de las proporciones y su definición es la que utiliza Euclides en el libro V y fue presentada de la siguiente forma:

“Las proporciones están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente” (Rendón, 2009, pág. 3).

Es decir, que esta definición se encuentra ligada a lo que, escrito en notación actual expresaría que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solamente si $ad = bc$, sin embargo, Euclides hace dos tratamientos diferentes a las proporciones, una para los números y la otra para magnitudes. En los libros VII y VIII, dedicados a la aritmética, se refiere a las razones numéricas en sentido pitagórico, mientras que en los libros III y V se refiere a las razones entre magnitudes geométricas como “una razón es cierta con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo” (Boyer, 1986). (Rendón, 2009, pág. 3)

Por su parte Arquímedes realiza variantes al método del exahución empleado por Eudoxio, en ellas hace uso de la razón geométrica para derivar fórmulas para el área y el volumen de figuras planas y sólidos regulares a partir de la comparación con figuras regulares como triángulos, rectángulos, etc. Y en el caso de volúmenes con el de un cubo; es así como fruto de sus observaciones, plantea los teoremas I y III de la medida del círculo, el teorema de la bisectriz y el teorema de los segmentos de una parábola, todos soportados por un lado en la determinación

de razones y por otro en su método de exhaución, denominado compresión-diferencia. Se puede interpretar que hay un acercamiento a una representación de la idea de límite cuando al calcular el área del círculo, las diferencias entre los polígonos inscritos se hacen tan pequeñas como se quiera y permite a su vez determinar un valor aproximado de la razón entre el diámetro y la longitud de la circunferencia es decir π .

En la edad medio siglo XIV, la medición, análisis y predicción del cambio de magnitudes físicas relacionadas cobra mayor auge; por ejemplo, los matemáticos del colegio de Merton tenían como objetivo, predecir el valor de una magnitud física utilizando herramientas matemáticas después de algún evento. Igualmente, Óresme interesado por cuantificar dichos fenómenos logro introducir lo que actualmente se conoce como representación geométrica, para poder explicar el comportamiento de las relaciones entre magnitudes que varían.

En el renacimiento, en los trabajos de Descartes y Fermat se encuentra, por primera vez, el uso de ecuaciones para evidenciar la dependencia entre dos magnitudes, la razón entre la diferencia de los valores de la magnitud dependiente y la diferencia de los valores correspondientes de la magnitud independiente, es decir, la razón de cambio del incremento de la magnitud dependiente respecto del incremento de la magnitud independiente. “La relación entre ambas diferencias da lugar a la razón de cambio entre los incrementos de las magnitudes, expresada algebraicamente”. (Rendón, 2009, pág. 7) lo cual poco a poco nos va acercando a la definición actual de razón de cambio.

Unos años después, Roberval “consiguió determinar tangentes de todas las curvas típicas de la época” (Rendón, 2009, pág. 9), dichas curvas son aquellas que representan la dependencia entre dos magnitudes físicas permiten el

surgimiento de la caracterización de las variables como dependientes o independientes.

Finalmente, Newton y Leibniz, con acercamientos diferentes, trataron la razón de diferencias que más adelante se convirtieron en la razón de diferencias entre valores infinitamente pequeños, o sea, la diferencial. “Con las razones de diferencias entre magnitudes se dio lugar al estudio de las razones de cambio infinitamente pequeñas y al cálculo diferencial, y con el estudio de las razones de cambio invariantes en el tiempo se dio lugar al surgimiento de la geometría analítica con la caracterización de curvas a través de expresiones algebraicas” (Rendón, 2009, pág. 9).

De esta manera, el concepto de razón de cambio fue desarrollándose y formalizándose y actualmente lo entendemos como la matematización del cambio mediante el cálculo, el cual realiza diversas operaciones para proveer un resultado o permitir conocer las consecuencias que se pueden obtener de unos datos previamente conocidos. Desde este punto de vista, se puede ver la razón de cambio como el cociente de incrementos o el cociente de las diferencias de los cambios de cada variable involucrada.

Después de este recorrido histórico, surge la idea de la estructura a seguir en el diseño de las actividades, en este sentido se pretende utilizar primero la conceptualización y aclaración de razón geométrica y aritmética; luego cambio constante y variable; finalmente la razón de cambio promedio e instantánea.

3. MARCO DIDÁCTICO

Las dificultades conceptuales que los estudiantes experimentan en su proceso de acercamiento a un concepto específico se generan cuando se producen rupturas en el desarrollo de los aspectos con los cuales el concepto se relaciona; por ejemplo, a la hora de interpretar la letra como variable o al intentar diferenciar variable y variación. En particular, la noción de variación se ha convertido en los últimos años en objeto de estudio de los investigadores en Educación Matemática ya que no sólo influye en algunos conceptos matemáticos sino que también constituye un estilo de razonamiento y pensamiento.

En Colombia, el estudio de la variación en el aula y su importancia para la formación de la cultura matemática es planteado por los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN, Matemáticas. Lineamientos curriculares, 1998) y apoyados institucionalmente con la publicación del documento de los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), en los cuales se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

“...este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.” (pág. 66).

Uno de los objetivos que se buscan al desarrollar este tipo de pensamiento, es poder llevar por diversos caminos y de manera significativa a la comprensión de conceptos y procesos de funciones y los sistemas analíticos que de este se

desprenden; además, son base en el aprendizaje del cálculo numérico, algebraico, diferencial e integral. De otra parte, este pensamiento tiene un papel importante en la solución de problemas y modelación de experiencias de la vida cotidiana, tanto en las ciencias como en las matemáticas mismas.

Con el propósito de aproximarse a ese tipo de pensamiento, Vasco (2006) lo describe y sugiere algunos elementos para su desarrollo, estableciendo relaciones de éste con la modelación y la tecnología; en ese sentido señala que:

“El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que cavarían en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad” (p. 138).

Dada la complejidad del proceso que se debe realizar en el pensamiento del estudiante y en general de las personas para conceptualizar el cambio y las diferentes razones de cambio, se hace relevante el estudio de alguno de esos procesos cognitivos que se pueden poner en juego en el momento cuando se induce al estudiante en la comprensión de estos conceptos y que serán mostrados en el siguiente apartado.

3.1. PROCESOS COGNITIVOS

Para comprender el pensamiento variacional, resulta pertinente dar una serie de aproximaciones a las definiciones de algunos conceptos que serán tratados a lo largo del presente trabajo con el fin de clarificar en qué sentido deben ser entendidos los mismos y que son presentados a continuación, como todo intento

de dar sentido estas pueden resultar cuestionables pero deben ser comprendidos en un marco general que puede ser puntualizados si se recurre a los autores citados, los conceptos y procesos mencionados constituyen elementos esenciales de los procesos cognitivos ya que basados en la descripción de Vasco (2006), la percepción, comprensión, representación y caracterización de la variación hacen parte fundamental del “pensamiento dinámico”.

Percepción: Según Tall (1995), esta es la secuencia de desarrollo por la cual comienza la actividad matemática y se hace de una forma viso-espacial. Hace referencia especialmente a la capacidad de analizar y comprender a partir de la observación.

Comprensión: Es un proceso en el cual se pretende entender un concepto, en el contexto del Pensamiento Matemático Avanzado, se pueden observar dos niveles para el concepto los cuales no necesariamente coinciden: por un lado el concepto definición, que muestra las palabras con las cuales se describe un concepto en el contexto disciplinar, y el concepto imagen, que se corresponde con la estructura cognitiva en la mente de los estudiantes y que está ligado al concepto desde las experiencias del individuo con el concepto (Vinner & Hershkowitz 1980, Tall & Vinner 1981). Este proceso de procurar una coincidencia entre el concepto definición y el concepto imagen (o imagen conceptual) se hace relevante, pues como lo señala los estándares “la comprensión conceptual es un componente fundamental de la competencia matemática” (NCTM, 2003, pág. 21).

Representación: Los conceptos matemáticos se representan por sistemas matemáticos de signos. Estos signos con soporte material forman parte del mundo real; por tanto, la representación mental de estos signos matemáticos se puede considerar como un caso particular de la representación mental de los objetos del

mundo real. La representación no puede estudiarse separadamente de la significación que ellos sustentan. (Font (s.f), pág. 2)

Modelación: En matemáticas, es un proceso que requiere la articulación de los registros semióticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje; para lo cual, se puede incorporar la calculadora graficadora y la computadora. También es un aspecto integrador de las distintas representaciones que se tienen de los procesos que se quieren modelar.

Visualización: Es un aspecto que tiene que ver con la imagen conceptual que un individuo tiene de un objeto o concepto y la “imagen conceptual se describe como la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales, las propiedades y procesos asociados”. (Tall & Vinner, 1981, pág. 151)

Generalización: En un proceso cognitivo que abarca tareas como el reconocimiento de patrones, descubrimiento de regularidades, descubrimiento de relaciones invariantes, formulación de proposiciones, de procedimientos, de resultados, y de definiciones, entre otras. (Díaz, (s.f.) pág. 7)

Abstracción: En términos de (Azcárate & Camacho, 2003, pág. 136) la abstracción “consiste en la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores”.

Como se mencionó al comienzo de este apartado, la descripción de Vasco (2006) sobre el “pensamiento dinámico”, hace que este sea el escenario propicio donde surge el contexto de modelación, producción y reproducción de las relaciones variacionales entre objetos matemáticos, además de aquellos relacionados con la representación y que por lo tanto el uso de la tecnología encuentre un camino expedito para el uso de representaciones en un entorno dinámico.

3.2. USO DE TECNOLOGÍA.

Investigadores como Tall (1981) resaltan la importancia que para de los aspectos propios de la matemática y de los efectos visuales que contribuyen a su comprensión tiene el uso de un software; es aquí donde el uso de la tecnología se puede constituir en un medio didáctico que permite reproducir experiencias de exploración difíciles de recrear en formas tradicionales como el lápiz y el papel. El uso de programas como Geogebra permite la construcción rápida y sistemática de objetos matemáticos y ayuda a establecer relaciones entre estos determinando en forma dinámica sus propiedades a pesar del cambio de parámetros en su representación, así mismo facilita el determinar los invariantes propios de un objeto o concepto matemático.

El uso del software también propicia un cambio de rol en el papel del estudiante generando un entorno que busca que él pase de ser un simple espectador de la clase y de las representaciones que el profesor emplea y se reincorpore como agente dinamizador de su propio conocimiento al gestionar procesos de representación en forma individual; al mismo tiempo que posibilita la interacción con compañeros que comparten la misma actividad.

El papel del docente puede eventualmente redefinirse al requerir que diseñe situaciones de aprendizaje que permitan el acercamiento a nociones y conceptos donde los problemas de representación, reproductibilidad, complejidad y visualización puedan ser subsanados con el uso adecuado del software.

Además se deberá generar situaciones en las cuales se consideren las necesidades y obstáculos a superar para la enseñanza y el aprendizaje de un concepto o proceso de las matemáticas, por esta razón, el docente debe diseñar e implementar herramientas para la enseñanza de conceptos y en particular para este trabajo, la enseñanza de la razón de cambio promedio e instantánea, en la cual se hace esencial poder visualizar de la mejor manera su representación geométrica, la cual permitirá ir acercando al estudiante a la comprensión de la definición desde punto de vista geométrico y algebraico al estar en capacidad de reproducir gráficamente distintas funciones, la posición de cualquier punto sobre su curva e ir diseñando construcciones de secantes próximas a un punto y la tangente en un punto así como observar el comportamiento de las variables y su relación en una tabla construida en una hoja de cálculo.

Una de las herramientas para la enseñanza que permiten la visualización de los objetos matemáticos es el uso de software, en este caso, será el software libre Geogebra, aunque se hace relevante mencionar que el uso de un programa no garantiza la comprensión de los conceptos que se pretende explorar con su uso; por esta razón, se debe realizar una planeación de actividades que acompañen a las actividades diseñadas con el software con el fin de procurar la aproximación del estudiante a los conceptos para extraer el potencial del programa, y conseguir un trabajo integrado con las habilidades de pensamiento matemático que posibiliten y potencien los niveles de comprensión de los estudiantes.

Por otro lado, el desarrollo de acciones con representaciones de objetos físicos o de objetos mentales facilita definir relaciones entre los objetos, encontrar propiedades y operar entre estos de modo que establezcan procesos que a su vez pueden convertirse en objetos matemáticos. En este sentido, el uso del software de cálculo simbólico y geometría dinámica permitirá visualizar la relación entre la razón de cambio promedio e instantánea así como las relaciones entre pendiente de una recta secante a la función en un intervalo dado y la recta tangente a la curva en un punto como el cociente de valores cada vez más pequeños. Así mediante un proceso inductivo, los estudiantes podrán acercarse a la imagen conceptual de razón de cambio promedio e instantánea y por lo tanto al de derivada en un punto.

Debido a los niveles de desarrollo en el pensamiento matemático que se supone deben tener los estudiantes en cada grado de educación, se hace necesario revisar en que niveles de enseñanza aparecen los procesos de pensamiento variacional con el fin de determinar para que grado de educación se diseñara la propuesta de actividades de este trabajo.

3.3. ESTÁNDARES

Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, con el objetivo de potenciar el pensamiento matemático, plantean una estructura basada en la interacción de tres aspectos: los procesos generales, los conceptos y procedimientos matemáticos, y los contextos o situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo.

Los estándares están organizados considerando cada uno de los ciclos propedéuticos y por cinco tipos de pensamiento donde en conjunto se busca

fortalecer su desarrollo desde una relación entre la práctica y el conocimiento formal; es decir la conjunción entre los componentes matemáticos procedimentales y conceptuales. Los estándares cumplen con un principio de coherencia horizontal y vertical entre las competencias básicas entre ciclos y pensamientos, es así como hay un desarrollo gradual de las competencias de lo simple a lo complejo, superando progresivamente niveles de complejidad y de abstracción.

Analizando lo anterior, el desarrollo de las competencias, para llegar a la comprensión de las nociones de razón de cambio promedio e instantánea, que anteceden el ciclo cinco, están determinadas y especificadas desde que se empieza, en el ciclo uno, a estudiar, describir y representar fenómenos asociados al cambio y las relaciones de dependencia entre variables ; y se requiere ir aumentando gradualmente la complejidad en el requerimiento del nivel de observación, descripción, razonamiento, abstracción y manejo de sistemas numéricos, geométricos, métricos, sistema de datos y algebraicos.

La comprensión en ciclo dos de las fracciones como razón y su uso en proporciones van generando acercamientos a la modelación de situaciones de dependencia para resolver problemas de diversos contextos, con soluciones producto de la observación de patrones de cambio y acotación de las alternativas de solución a rangos de variación que adicionalmente son descritas mediante representaciones gráficas.

En ciclo tres, se propone dirigir los esfuerzos hacia el desarrollo de las nociones de razón, al trabajar desde la practica con actividades de manejo de factores escalares en diseño de maquetas, mapas, etc. (uso de escalas). A su vez se propende por el manejo de la descripción de conjuntos de valores de cada una de

las cantidades variables asociadas a un fenómeno que están relacionadas entre sí en situaciones de variación usando representaciones como tablas y gráficas.

El proceso de aproximación al concepto de razón de cambio promedio e instantánea, en el ciclo cuatro es más explícito, al proponer el poner en contacto al estudiante con el contexto del sistema geométrico; en particular con las propiedades de congruencia y semejanza, así como con los argumentos que justifican las demostraciones de los teoremas básicos de Pitágoras y Thales; situaciones en las cuales, si bien no se presenta formalmente la noción de razón de cambio, permiten la visualización de las relaciones entre razones y sus variaciones al analizar cambios en los parámetros que las constituyen.

En este mismo ciclo, desde la dimensión del pensamiento variacional, se propone que el estudiante adquiera la competencia de identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva en el plano cartesiano en situaciones de variación. Es aquí donde el estudiante expresa una pendiente utilizando implícitamente la noción de razón de cambio promedio, y simultáneamente, al expresar y calcular esta razón de cambio promedio usando un coeficiente en una expresión general de una recta, identificando que esta razón determina el comportamiento de las variables en esta clase de relación; este conocimiento será útil en el ciclo cinco para interpretar la razón de cambio instantánea como valor de la pendiente de la tangente a una curva en un punto dado.

Finalmente, en ciclo cinco, en conjunto con la asignatura de física mecánica, el estudiante estará en contacto con situaciones donde debe abordar la noción de razón de cambio promedio; introducida, ya sea como tasa media de variación, o como velocidad media, aceleración media o densidad media. A continuación se

abordarán situaciones, matemáticas o no matemáticas, relacionadas con la noción de límite sin importar la organización matemática establecida en su contexto; proceso que puede ser realizado ya sea de manera gradual, a través de situaciones problemáticas propias del contexto de la física como puede ser el cálculo de la velocidad instantánea o aceleración instantánea de un móvil, o en su defecto, desde otras aplicaciones propias del contexto social, económico o de las ciencias naturales.

Los Estándares Básicos de competencias matemáticas en este sentido tienen como objetivo que el estudiante adquiera la habilidad resolver y formular problemas que se resuelvan mediante el uso de la razón de cambio promedio y el uso de procesos sucesivos de aproximación para el cálculo de la razón de cambio instantánea.

3.4. ANTECEDENTES

A continuación se presentan algunos resultados obtenidos por autores como Vrancken (1997), Azcárate (1997) y Duval (1998) quienes han diseñado e implementado de secuencias de actividades con el fin de introducir la razón de cambio promedio e instantánea en el proceso de enseñanza.

El trabajo desarrollado por Vrancken, Engler & Müller (1997) presenta la tendencia generalizada por dedicarle gran parte del currículo de las ingenierías a la enseñanza del cálculo; de otra parte, Azcárate et. Al (1997) resaltan la importancia que el uso de diversas representaciones, como pueden ser la gráfica, la numérica y la algebraica, tiene para la formación de representaciones mentales ricas que reflejen muchos aspectos relacionados con el concepto, el cual se verá apoyado

por la forma en que estas logren relacionarse y la posibilidad de hacer traducciones entre ellas.

En parte del trabajo de Vrancken se muestra que la tendencia usual durante los procesos de enseñanza, es la de dedicar muy poco tiempo a realizar la conversión entre los diferentes sistemas de representación de un objeto, lo que repercute en que se presenten bastantes limitaciones en la comprensión de los mismos; o, que a los procesos cognitivos prioricen y restrinjan la utilización de un concepto a su trabajo dentro de un sistema específico como puede ser, usualmente, el algebraico.

Duval (1998) expresa que el uso de distintas representaciones es esencial en el desarrollo del pensamiento y en la producción de conocimiento. Distintos autores apoyan esta idea y manifiestan que llegar a comprender un concepto matemático implica realizar procesos de conversión entre diferentes registros de representación, manifestados por la posibilidad de movilización y de articulación entre los mismos (Rico, 2000, Dañare, 2002. citados por Vrancken, Engler, & Müller, 2008, pág. 37)

En Vrancken et. al (2008), se plantea que para poder entender el proceso de construcción de los conceptos y de los procesos matemáticos, es necesario primero analizar cómo los estudiantes desarrollan algunas tareas propuestas y porqué los estudiantes llegan a ciertas conclusiones que no corresponden con el conocimiento que los estudiantes tienen. Para analizar las acciones realizadas por los estudiantes, diseñaron, implementaron y evaluaron algunas secuencias didácticas de actividades que permitían tratar los errores y superar las dificultades de los estudiantes, esto con el propósito de facilitar la construcción del concepto de derivada; y asumieron que desarrollando ideas variacionales como la noción de

razón de cambio y las conversiones entre los diferentes registros de representación (numérico, geométrico, algebraico) contribuirían significativamente a alcanzar los objetivos.

Los autores tomaron como instrumento inicial una prueba diagnóstica para explorar las concepciones de los estudiantes en relación con el concepto de razón de cambio vista como la velocidad, y trabajada desde las conversiones entre los diferentes registros de representación. Basados en los trabajos de Carabús (2002 reportado por los autores), consideran que las tablas contemplan los aspectos numéricos y cuantitativos, las representaciones gráficas potencian las posibilidades de la visualización, las expresiones algebraicas se relacionan con la capacidad simbólica, el lenguaje coloquial se vincula con la capacidad lingüística y es importante para interpretar y relacionar todas las representaciones.

Posteriormente emplearon una secuencia de actividades, basada en las ideas de Dolores (1999, 2007 reportado por los autores) y Azcárate et al. (1997), que le permitía una introducción intuitiva e informal al cálculo diferencial. Así, con la resolución de los problemas, buscaban desarrollar ideas de variación que llevarían a comprender algunos conceptos como variable, dependencia, y razón de cambio.

Como principales conclusiones encontraron que:

- La formación de nociones de conceptos, en particular de variable dependen bastante de la comprensión de los procesos de cambio; y que
- Los estudiantes presentan dificultades al realizar la transposición o traducción de un registro de representación a otro o dentro de un mismo tipo de registro.

Azcárate et al. (1997) citan una investigación realizada por Orton & Coll donde se describen algunos errores y dificultades que los estudiantes presentan en el manejo de la derivada. Se identificaron tres tipos de errores que los estudiantes cometían en las actividades que desarrollaban, tenían problemas estructurales relacionados con los conceptos formales, algunos no tenían en cuenta datos de los problemas y otros usaban a conveniencia los conceptos. Orton aplicó dos entrevistas, una en la cual se preguntaba sobre límites, áreas e integrales, y otra donde se indagaba sobre los cocientes incrementales y la derivada; en ellas se evidenció que los estudiantes comprendieron más las aplicaciones que los conceptos y las gráficas y que comprendían bien las situaciones donde la relación era lineal o afín pero presentaban dificultades con las que no lo eran.

Adicionalmente, Sánchez et. al (2008), muestra resultados similares de un trabajo de Orton:

“Como consecuencia de tales resultados, Orton indicó que las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función lineal o cuadrática podían tener su origen en una comprensión débil sobre el concepto de función. La información de estas investigaciones destaca la importancia de la relación entre la razón de cambio y el cociente incremental en la comprensión de la derivada, entendida como una cuantificación del cambio. Dicho aspecto ha sido el foco de algunos trabajos; sus resultados aparecen en la próxima sección” (Sánchez, García, & Linares, 2008).

De esta manera, se evidencia las dificultades subyacentes en la comprensión de conceptos formales, en particular lleva a pensar en introducir la razón de cambio de una forma usando un lenguaje un poco menos formal, de tal forma que se eviten obstáculos didácticos subyacentes de este lenguaje, adicionalmente se pretende introducir algunos nombres de objetos como formas de simplificar o

resumir un proceso como el de incremento, con el fin de que los estudiantes lo asimilen como una “ayuda” y no como algo difícil de comprender.

Por esta razón, este trabajo pretende mostrar una secuencia de actividades que permita conceptualizar la razón de cambio, tomando el concepto imagen que los estudiantes tienen y mediante la aplicación de guías que contienen actividades construidas, de manera afín al desarrollo cronológico del concepto tal y como se mostró en el marco histórico, y así poder brindar herramientas para que ellos, puedan construir un concepto imagen que este más próximo a la definición del concepto del objeto razón de cambio.

4. PROPUESTA

El objetivo de la propuesta es diseñar un procedimiento que posibilite el desarrollo del pensamiento variacional, que permita la transición entre los procesos de la comprensión de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea sin hacer referencia explícita al paso al límite, tomando como punto de partida los preconceptos de los estudiantes y promoviendo situaciones que aclaren las ideas y que permitan una interpretación y uso adecuado tanto de la razón de cambio promedio como de la instantánea.

En un principio se intenta establecer una distinción más evidente entre cambio constante y cambio variable que facilitará la comprensión de la necesidad de trabajar con razones de cambio promedio e instantáneas; simultáneamente se usarán las ideas de pendiente de una recta y pendiente de la recta tangente a una curva como expresiones que permiten cuantificar y evaluar los cambios en las variables para distintos fenómenos, que a su vez se pueden representar con líneas rectas, curvas suaves o completamente irregulares en términos de lo que denominamos diferenciabilidad.

Esta secuencia se encuentra compuesta por 5 guías de trabajo en medio virtual, donde al inicio de cada una de ellas se ofrece una parte teórica, la cual estará orientada por el docente, luego se presentan preguntas que permitirán analizar la temática, buscando el objetivo propuesto en la guía; finalmente se muestra una reflexión que servirá como apoyo para la aclaración de algunas ideas. En las guías, aparecen unas series de actividades que permitirán explorar, reconocer, ejercitar y explicar determinadas situaciones cada una consta de una parte teórica

que apoya el trabajo del docente y una serie de actividades, pues depende del objetivo de cada una, donde se desarrolla un trabajo de la siguiente manera:

GUÍA	OBJETIVO
1	Conocer y definir el concepto de razón y los tipos de razones: geométrica y aritmética
2	Analizar, determinar y comprobar el concepto de cambio y los tipos de cambios: constante y variable.
3	Identificar y establecer mediante el desarrollo de actividades, la razón de cambio como la razón geométrica de razones aritméticas.
4	Evaluar la razón de cambio promedio e interpretar su valor en diferentes situaciones como la pendiente de la recta, la tangente de la curva, etc.
5	Argumentar la razón de cambio instantánea como la razón de cambio promedio de valores infinitesimales.

Esta propuesta va dirigida a estudiantes de décimo o undécimo grado, de acuerdo al criterio del docente que la vaya a implementar, al igual que el tiempo estimado para el desarrollo de cada una de ellas. Es necesario seguir el orden establecido en las guías, y verificar que tanto la introducción como el cierre de cada guía genere en los estudiantes, más preguntas, pero al mismo tiempo aclare los nuevos conceptos. Adicionalmente, algunas de las guías estarán apoyadas con applets diseñadas en Geogebra los cuales fortalecerán el proceso de comprensión mediante la visualización de los objetos matemáticos a estudiar.

A continuación, se presentan las diferentes guías de trabajo que forman la secuencia de actividades para la enseñanza de la razón de cambio promedio y su paso a la razón de cambio instantánea.

En la Guía 1 se pretende aclarar el concepto de razón, razón aritmética y razón geométrica con operaciones simples y su aplicación en contextos reales. Igualmente, con las actividades se pretende que se generen dudas sobre: Si es posible determinar la razón aritmética y geométrica entre magnitudes de diferente naturaleza; y cómo interpretan los resultados obtenidos.

GUÍA 1

OBJETIVO

Conocer y definir el concepto de razón y los tipos de razones: geométrica y aritmética

.

RAZÓN

La razón es una relación que existe entre dos magnitudes como metros, cucharadas, tazas, grados, etc.

Se pueden encontrar dos tipos de razones:

- Razón Aritmética
- Razón geométrica

RAZÓN ARITMÉTICA

La razón aritmética entre dos magnitudes es la diferencia (resta) entre ellas. La razón aritmética entre a y b se escribe $a - b$.

Por ejemplo, *La razón entre 5 y 2, se escribe $5 - 2 = 3$*

La razón entre -4 y 3, se escribe $-4 - 3 = -7$

ACTIVIDAD 1

1. Halle la razón aritmética.

VALOR 1	VALOR 2	VALOR 1 - VALOR 2	VALOR 2 - VALOR 1
4 metros	-25 metros		
35 cucharadas	47 cucharadas		
-76 metros	23 metros		
92 grados	-67 grados		
34 tazas	38 tazas		
-67 grados	-93 grados		
42 pasos	47 pasos		
-82 centímetros	72 centímetros		
57 pies	-54 pies		

2. ¿Qué diferencias y similitudes encuentra entre los valores de las dos columnas?

NOTA: Se debe recordar que el orden de las operaciones realizadas es importante, pues puede llevar a resultados diferentes. de estos valores.

RAZÓN GEOMÉTRICA

Es la relación que se hace entre dos cantidades mediante su cociente (división). La razón geométrica entre **a** y **b**, se escribe **a: b**, se lee “**a** es a **b**” y se determina por $\frac{a}{b}$

Por ejemplo, $4:2 = \frac{4}{2} = 2$

$$10:2 = \frac{10}{2} = 5$$

$$9:2 = \frac{9}{2} = 4,5$$

Los fraccionarios obtenidos cuya división no es entera, se hace necesario simplificarlos.

Por ejemplo, $5:25 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$$3:29 = \frac{3}{29}$$

ACTIVIDAD 2

1. Determinar las razones geométricas.

VALOR 1	VALOR 2	VALOR 1 : VALOR 2	VALOR 2 : VALOR 1
4 metros	-25 metros		
35 cucharadas	47 segundo		
-76 metros	23 metros		
92 grados	-67 grados		
34 tazas	38 tazas		
-67 grados	-93 minutos		
42 pasos	47 pasos		
-82 centímetros	72 hora		
57 pies	-4 segundo		

2. ¿Qué diferencias y similitudes encuentra entre los valores de las dos columnas?

NOTA: Se debe recordar que el orden de las operaciones realizadas es importante, pues puede llevar a resultados diferentes. de estos valores.

En la Guía 2 se pretende aclarar el concepto de cambio, permitir que el estudiante por su propio interés, profundice en el tema e introducir los diferentes tipos de cambio que hay: constante y variable. Se presentan actividades en contextos reales como los son la compra de dulces en una tienda, para el cambio constante y el crecimiento poblacional de conejos a partir de una pareja, para el cambio variable.

Luego se introduce el uso de un applet diseñado en Geogebra, con el que se pretende reforzar las razones aritmética y geométrica, introduciendo el *incremento* como una forma de simplificar la definición de un concepto y no como el nombre formal de un objeto matemático, con lo que se busca evitar ese obstáculo causado por los formalismos.

GUÍA 2

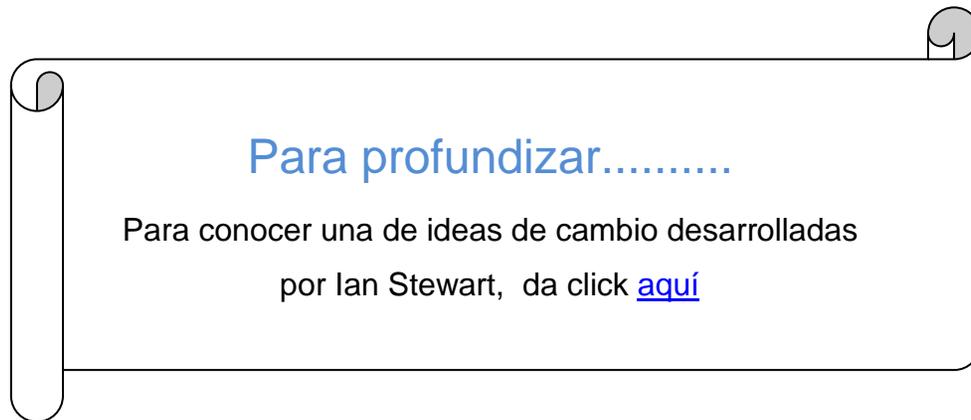
OBJETIVO

Analizar, determinar y comprobar el concepto de cambio y los tipos de cambios: constante y variable.

CAMBIO

Es el concepto que se utiliza para denotar la transición de un momento a otro, por ejemplo la velocidad en un tiempo cero segundos a la velocidad en un tiempo 10 segundos de un vehículo en movimiento; cuando una sustancia pasa de sólido a líquido; cuando un cuerpo pasa de frío a calor, etc.

En matemáticas, se encarga de mostrar la transición de dos cantidades, es decir, qué sucede de una cantidad a la otra, con qué regularidad varia, cómo se pasa de una a la otra.



TIPOS DE CAMBIO

Se tienen dos tipos de cambio:

- Cambio constante
- Cambio variable

CAMBIO CONSTANTE

Es aquel cambio para el cual existe una regularidad constante, es decir, se tiene un valor fijo que define como cambia cierta cantidad de un momento a otro.

Supongamos por ejemplo, que Juan va a la tienda con sus amigos y compra dulces como se muestra en la siguiente tabla:

Cantidad	1	2	3	4	5
Valor	100	200	300	400	500

Al analizar la variación que tiene el valor a pagar al aumentar el número de dulces en la tabla, se nota que siempre cambia de 100 en 100 por lo que recibe el nombre de cambio constante.

CAMBIO VARIABLE

Es aquel cambio para el cual existe una regularidad pero no es constante, es decir, se tiene una relación permite obtener cuanto varia una cantidad de un momento a otro, pero ese valor siempre es diferente.

Por ejemplo,

Se pretende analizar el crecimiento de una población de conejos, partiendo de una pareja de conejos y teniendo en cuenta que cada pareja tarda dos meses para empezar su etapa reproductiva, tal como se muestra en la siguiente imagen:

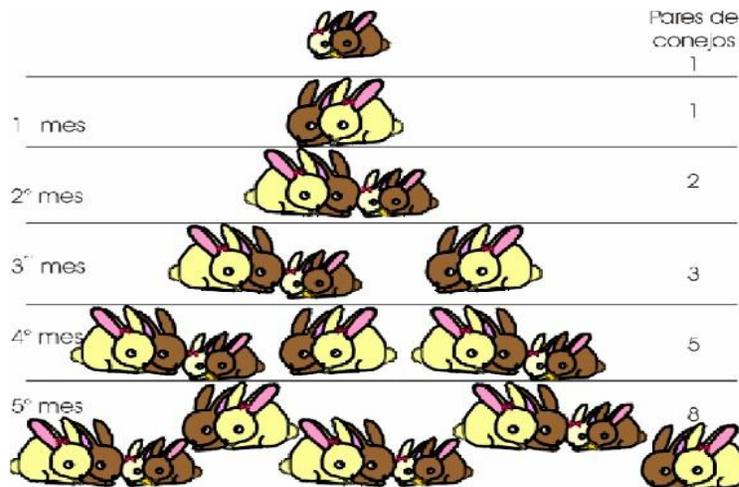


Imagen tomada de: <http://blog.educastur.es/matescolombrinas/2010/03/20/sucesion-de-fibonacci/>

Analizando el gráfico podemos ver que, a partir de una pareja de conejos, el número de conejos se va incrementando mes a mes de la siguiente manera:

Mes	1	2	3	4	5
Cant. conejos	2	4	6	10	16

Así, sabemos que de mes a mes cambia la cantidad de conejos con la cantidad del mes anterior, es decir, del mes 3 al mes 4 cambia en 4 (mes 2), del mes 4 al mes 5 cambia 6 (mes 3). así sucesivamente como se observa en la tabla anterior. De esta forma, se puede concluir que la cantidad de cambio de mes a mes es diferente siempre, por lo que se dice que el cambio del crecimiento de una población de conejos mes a mes es un cambio variable.

ACTIVIDAD 1

1. Diligencie la siguiente tabla de acuerdo a la información suministrada:

Cantidad de triángulos en la base (B)	Cantidad total de triángulos (T)	Razón aritmética de las bases (RAB)	Razón aritmética de la cantidad de triángulos (RAT)	Razón geométrica entre RAT y RAB
3	4			
5	9			
7	16			
9	25			
11	36			
9	25			
7	16			
5	9			
3	4			
5	9			
7	16			

2. Abrir el archivo applet "Applet Cambio Variable.ggb".
3. Leer el texto y luego dar click sobre la casilla introducción.

NOTA: Esta razón geométrica entre la razón aritmética de la cantidad de triángulos (RAT) y la razón aritmética de la cantidad de triángulos de la base (RAB) es lo que conocemos como razón de cambio entre la cantidad de triángulos total y la cantidad de triángulos de la base.

En la Guía 3 se pretende reforzar geoméricamente la definici3n de la raz3n de cambio mediante la exploraci3n, en un applet, de su existencia como pendiente de una recta y raz3n tangente

GUÍA 3

OBJETIVOS

Identificar y establecer mediante el desarrollo de actividades, la raz3n de cambio como la raz3n geométrica de razones aritméticas.

RAZ3N DE CAMBIO CONSTANTE

ACTIVIDAD 1

1. Abra el applet “cambio constante.ggb”
2. Active el bot3n enunciado.
3. Desactive el bot3n enunciado y active el bot3n representaciones.
4. Mueva el deslizador. ¿Qu3 conjeturas puede obtener?

En la Guía 4 se pretende retomar la definición de promedio y su cálculo. Luego se retoma el applet utilizado en la Guía 2 para determinar la razón de cambio de la cantidad total de triángulos con respecto a la cantidad de triángulos en la base, promediar e interpretar los resultados. Se busca que por medio de este proceso, el estudiante sea capaz de conjeturar la definición de la razón de cambio promedio y el significado que puede ofrecer en un determinado contexto.

GUÍA 4

OBJETIVOS

Evaluar la razón de cambio promedio e interpretar su valor en diferentes situaciones como la pendiente de la recta, la tangente de la curva, etc.

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

Retomando la razón de cambio como la razón geométrica entre las razones aritméticas, introducimos un nuevo concepto: incremento, el cual es básicamente la razón aritmética, pero más adelante, en el desarrollo del curso de cálculo, tendrá una mayor relevancia. Este incremento, será simbolizado por Δx donde x es la variable que se está utilizando en el contexto.

Así, la razón de cambio podemos definirla nuevamente como el cociente de incrementos.

RECORDEMOS QUE....

El promedio de valores numéricos como cantidades o magnitudes, es un valor que se determina al sumar todos los valores y dividirlo entre la cantidad de valores y se obtiene como resultado el mejor valor que representa a todos los valores numéricos tomados inicialmente.

Ejemplo,

Un estudiante obtuvo las siguientes calificaciones durante el periodo: 4,0 4,2 3,9 3,8. Para saber en cuanto le queda la nota final del periodo, el docente le explica que debe sacar el promedio de las notas para poderlo determinar.

De esta manera, el estudiante realizó la siguiente operación:

$$\frac{4,0 + 4,2 + 3,9 + 3,8}{4} = \frac{15,9}{4} = 3,975$$

Esto significa que la nota final del periodo es de 3,975.

¿Qué puedes decir de la relación que existe entre las notas obtenidas por el estudiante y el valor obtenido 3,975?

ACTIVIDAD 1

Retomando la tabla que se encuentra en la actividad anterior,

Cantidad de triángulos en la base (B)	Cantidad total de triángulos (T)	ΔB (RAB)	ΔT (RAT)	$\frac{\Delta T}{\Delta B}$
3	4			
5	9	2	5	$5/2=2,5$
7	16	2	7	$7/2=3,5$
9	25	2	9	$9/2=4,5$
11	36	2	11	$11/2=5,5$
9	25	2	11	$11/2=5,5$
7	16	2	9	$9/2=4,5$
5	9	2	7	$7/2=3,5$
3	4	2	5	$5/2=2,5$
5	9	2	5	$5/2=2,5$
7	16	2	7	$7/2=3,5$

1. Determine cuál es el promedio de el cociente de incrementos

$$\frac{\Delta T}{\Delta B}$$

2. ¿Qué se puede concluir del valor obtenido?

NOTA: De esta manera, podemos concluir que la razón de cambio promedio entre la cantidad de triángulos total y la cantidad de triángulos de la base, es el valor al cual se acercan los cocientes de los incrementos de las variables involucradas. En este caso, las bases de los

En la Guía 5 se pretende que los estudiantes comprendan en qué tipo de situaciones se hace necesario el uso de la razón de cambio instantánea como la razón de cambio promedio para valores infinitamente pequeños, sin introducir el *infinito* y el *límite*, nuevamente buscando evitar obstáculos que provienen de la formalidad matemática. Para esto se solicita que hallen la razón de cambio promedio para unos valores que ellos mismos deberán poner de acuerdo a su experiencia en el uso del servicio público de Bogotá y determinar que la razón de cambio promedio, no brinda una información correcta y que deben buscar un nuevo método para determinar la información solicitada.

GUÍA 5

OBJETIVOS

Argumentar la razón de cambio instantánea como la razón de cambio promedio de valores infinitesimales.

RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

En los ejemplos de las notas del estudiante y de la relación entre las bases y cantidades de triángulos de la guía 4, pudimos observar que el valor obtenido como razón de cambio promedio, permitía evidenciar que las razones de cambios se acercaban con defecto o exceso a ese valor. Ahora veremos si esto realmente funciona en todos los casos o es necesario algo diferente. Ya en la última parte de la guía, se pretende realizar una evaluación general de todo lo desarrollado por estas actividades anteriores.

ACTIVIDAD 1

VELOCIDAD-TIEMPO

1. Imagínese que va en una buseta de servicio público de Bogotá. De acuerdo a su experiencia, diligencie la siguiente tabla, teniendo en cuenta que la velocidad máxima en la ciudad es de 40 km/h, la mínima es de 0 km/h y durante el recorrido toma diferentes valores de velocidad entre el rango dado.

TIEMPO (h)	VELOCIDAD (km/h)	ΔT	ΔV	$\frac{\Delta T}{\Delta V}$
0,01				
0,05				
0,1				
0,2				
0,5				
0,7				
1				

2. Halle la razón de cambio promedio. Este valor obtenido, muestra que todos los valores de la velocidad a medida que pasa el tiempo estará cerca de él. Observando la realidad, ¿Esto tiene sentido? Justifique su respuesta.

TIEMPO (T) h	VELOCIDAD (V) Km/h	ΔT	ΔV	$\frac{\Delta T}{\Delta V}$
0.00497				
0.00498				
0.00499				
0.00500	18			
0,00501				
0,00502				

6. ¿Cuánto sería la razón de cambio promedio de la velocidad con respecto al tiempo?

7. Teniendo en cuenta la respuesta anterior y analizando los valores dados en la tabla ¿Qué relación hay entre ellos?

8. Si el valor inicial de la tabla en la columna de velocidad, hubiera sido 0. ¿Qué resultados se hubieran obtenido? ¿Qué puede concluir al respecto?

- ¿Es posible que el valor de la variable independiente sea 4? Justifique.

- ¿Qué entiende por razón de cambio?

- ¿Cuál es la razón entre los cambios de las dos variables?

- ¿El cambio en la variable independiente es constante o variable?

- ¿El cambio en la variable dependiente es constante o variable?

- ¿La razón de cambio entre las variables es constante o variable?

- Calcule la razón de cambio promedio para el intervalo de la tabla.

-
-
- Es esta razón de cambio promedio representativa de cada intervalo de cambio. Explique por qué

2. Observe la gráfica presentada en el applet,

- ¿Qué sucede con la gráfica, cuando se mueven los deslizadores?
- ¿Los puntos (B,T) podrían hacer parte de la misma recta? ¿Por qué?

-
-
-
-
-
- ¿La recta en los puntos tienen la misma pendiente? Explique su respuesta

-
-
-
-
-
- ¿La tendencia de los puntos perfilan una gráfica de que tipo?
-
-

NOTA: Teniendo en cuenta los datos tomados en la tabla anterior, se puede observar que los datos están cercanos a 0,00500 por encima y por debajo, es por eso que la razón de cambio promedio se puede determinar en este caso y tiene sentido hablar de ella, aún cuando en la primer tabla de datos de la velocidad de la buseta no era posible. Por esta razón podemos afirmar que la razón de cambio instantánea en un momento, es la razón de cambio promedio cuando se toman valores muy cercanos, con diferencias muy pequeñas al valor que queremos determinar.

5. CONCLUSIONES

1. A partir de la revisión del marco histórico-matemático, surgió la idea de la estructura de la secuencia de actividades, pues desde mi punto de vista fue relevante aclarar primero cada uno de los conceptos inmersos en la razón de cambio promedio e instantánea. Por esta razón las temáticas de las guías se diseñaron con esa estructura. Durante ese recorrido por la historia, surgieron diversas aclaraciones sobre los conceptos, que a pesar de que los docentes logramos realizar actividades que involucran el pensamiento variacional, se dejan de lado, pues generalmente se toca la temática de la razón de cambio cuando se está desarrollando la temática correspondiente a las derivadas y no permite realizar un manejo más profundo de este. Se realizó la revisión de los estándares nacionales y los internacionales, los cuales justifican el estudio de la razón de cambio en la escuela y adicionalmente, permitió observar en los diferentes niveles de la educación colombiana, cómo se introduce la temática. Adicionalmente, fue posible deducir que si en el proceso de la aparición de la razón de cambio no utilizaron el lenguaje que utilizamos ahora, se podría evitar ese tipo de obstáculos para que los estudiantes tengan menor distancia entre su lenguaje y el matemático. Sin embargo, esto es algo que sólo puede ser comprobado en la implementación para determinar que tan funcional es o no.
2. Se diseñó una secuencia de actividades que permiten fragmentar en partes más simples el concepto de razón de cambio, mediante ejemplos, en los cuales se pretendió siempre presentar situaciones diferentes al común denominador, pero es relevante resaltar que es sencillo encontrar situaciones, pero plasmarlas en un papel de tal forma que sea comprensible para los estudiantes no lo es, por esta razón se debe pensar muy bien qué tipo de actividades se desarrollaran porque podría dar origen a nuevos obstáculos en lugar de evitarlos.

Por otro lado, fue interesante manipular el infinito muy discretamente, sin profundizar demasiado, con el fin de lograr llegar a los infinitamente pequeños valores para pasar de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea. En este proceso se vinculan las TIC, herramientas que se promueven globalmente como apoyo didáctico para apoyar la

enseñanza de las ciencias y en particular de las matemáticas, pues permite desarrollar habilidades visuales y la conjeturación de los estudiantes al manipular los applets creados en el software libre Geogebra pues de alguna manera se convierte en una matemática “manipulable físicamente”.

3. Con el desarrollo de este trabajo, se identifica la importancia del análisis histórico de los objetos matemáticos a enseñar, puesto que este recorrido evidencia cómo la necesidad humana crea nociones intuitivas de los conceptos y permite al docente tomar ventaja de este conocimiento para llevar al aula las temáticas y presentar herramientas didácticas a los estudiantes que fortalezcan sus capacidades de acuerdo a los niveles establecidos por los estándares y evitando en algunos casos, donde se es posible, el uso de los nombres propios de los objetos matemáticos y utilizarlos más como herramientas de simplificación; con lo que se podría evadir algunos obstáculos didácticos que se presentan por el lenguaje “jerga” propia de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del análisis matemático. *Boletín de la asociación Matemática Venezolana*, 12(2), 135-149.
- Azcárate, C., Bosh, D., Casadevall, M., & Casellas, E. (1997). *Cálculo diferencial e integral*. España: Síntesis.
- Badillo, E. (Mayo de 2003). La derivada como objeto matemático, como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas en Colombia. *www.tesisenred.net*. Recuperado el 3 de Abril de 2012, de <http://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/4702/erbj1de4.pdf?sequence=1>
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. New York: Alianza Editorial.
- Díaz, M. (s.f.). Formación y desarrollo de conceptos de objetos matemáticos. *Revista Alternativa* (15), 1-12.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en matemática educativa II*, 173-201.
- Font, V. (s.f.). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Recuperado el 26 de Marzo de 2012, de www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/422
- MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- MEN. (2006). *Estándares Básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- NCTM. (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Recalde, L. (1999). Las concepciones sobre la matemática y experiencia en Maurice Fréchet. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, VI (1-2), 79-94.
- Rendón, P. (2009). Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión. Recuperado el 10 de Marzo de 2012, de Universidad de Antioquia: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co/jspui/bitstream/10495/525/1/ConceptualizacionRazonCambio01.pdf>
- Salazar, C., Díaz, H., & Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *TEA* (26), 62-82.
- Sánchez, G., García, M., & Llinares, S. (Junio de 2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Recuperado el 3 de Septiembre de 2012, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362008000200005&script=sci_arttext
- Stewart, I. (1999). Cambio. En L. Steen, & L. Steen (de.), *La Enseñanza Agradable de las Matemáticas* (pág. 1). México: Limusa-IPN.
- Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary an Advanced Mathematical Thinking. *Plenary lecture, Proceedings of PME* (19).
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* (12), 151-169.
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*, 134-148.

- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). 'Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts', Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley, 177-184
- Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa*, 36-45.

TABLA DE FIGURAS Y TABLAS

No.	Tabla	Pág.
01	Semejanza de triángulos	7

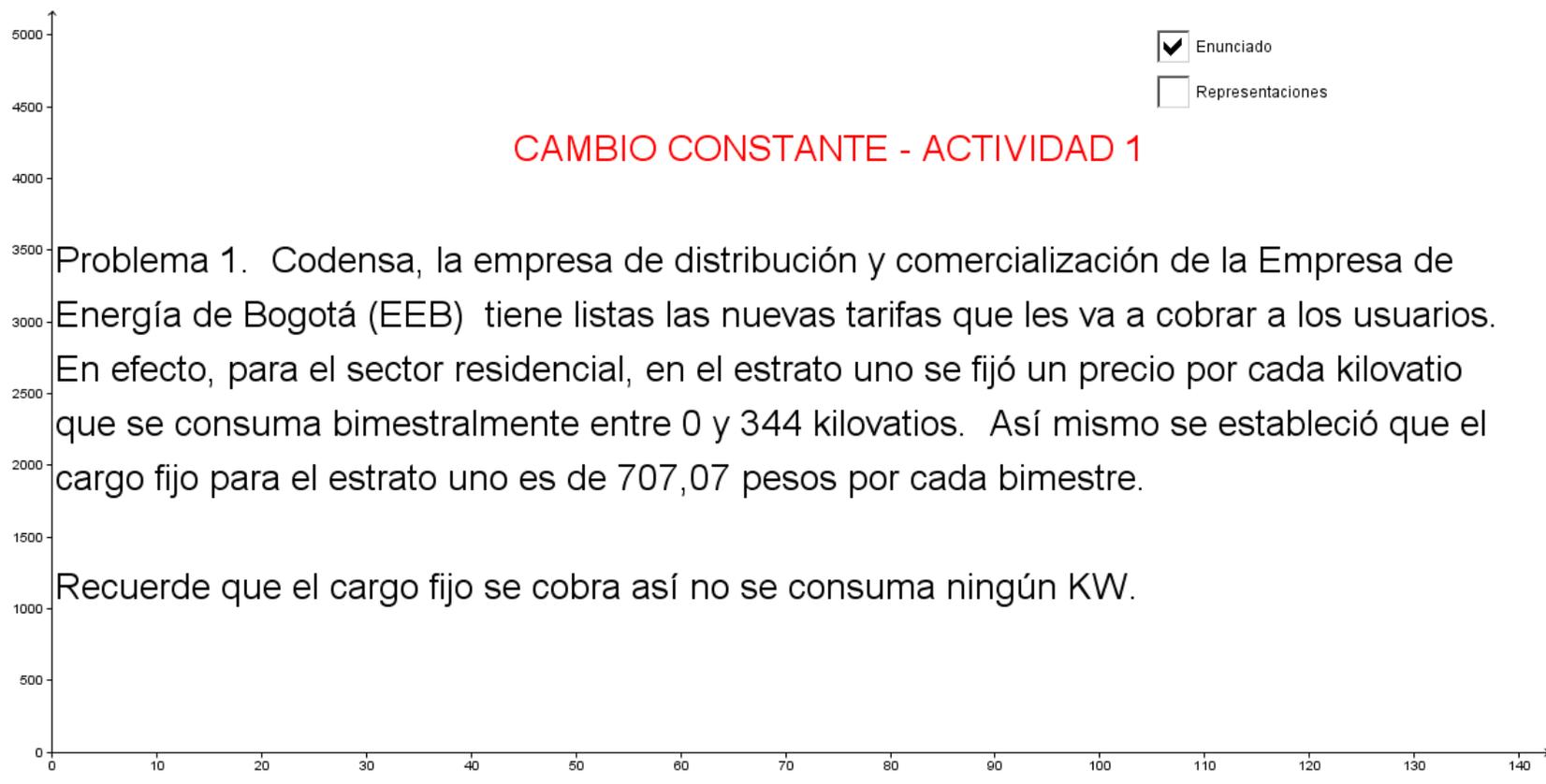
TABLA DE ANEXOS

No.	Tabla
01	Applet de Geogebra "Applet Cambio Constante.ggb"
02	Applet de Geogebra "Applet Cambio Variable.ggb"

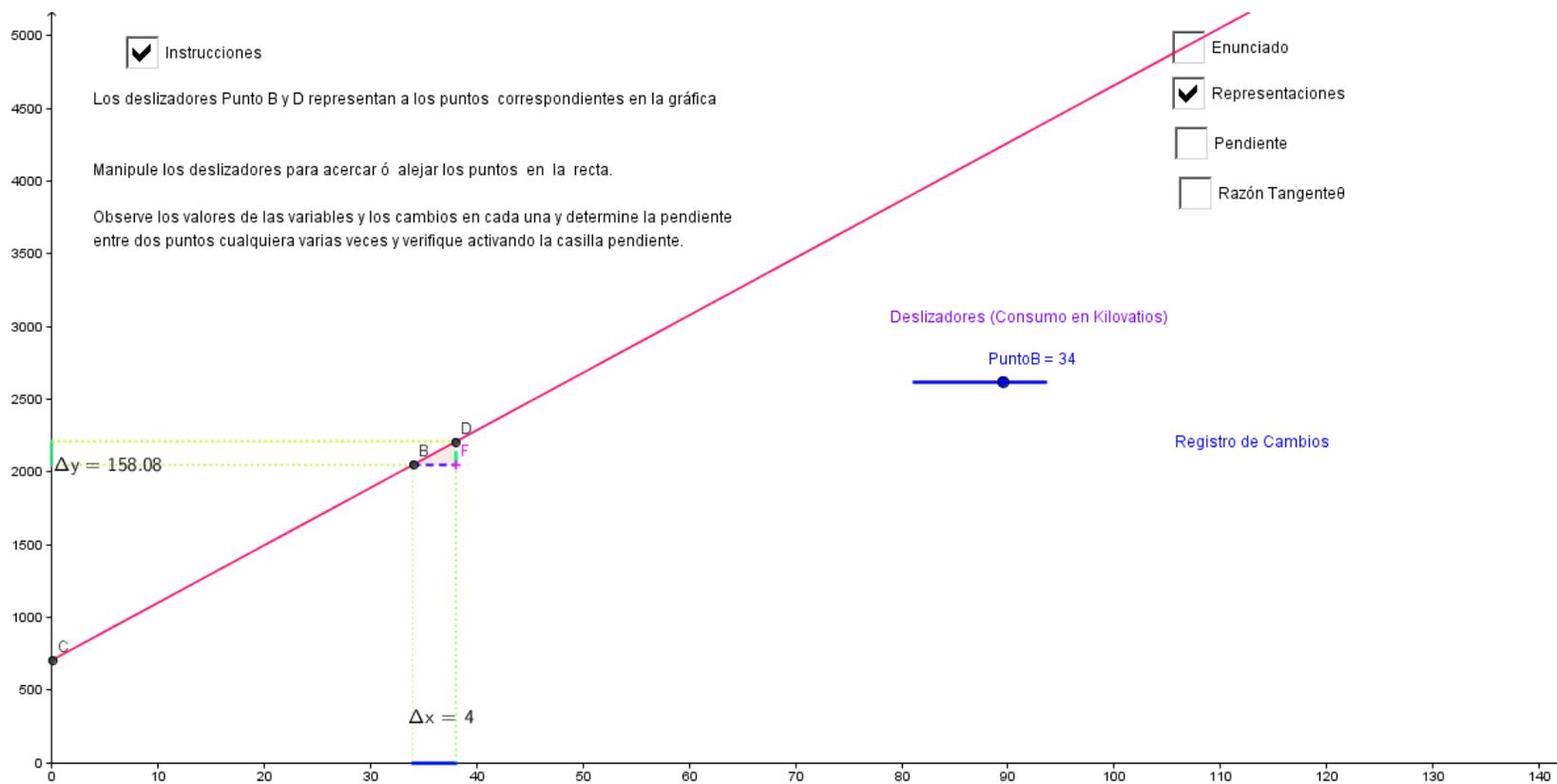
ANEXOS

Applet Cambio Constante.ggb

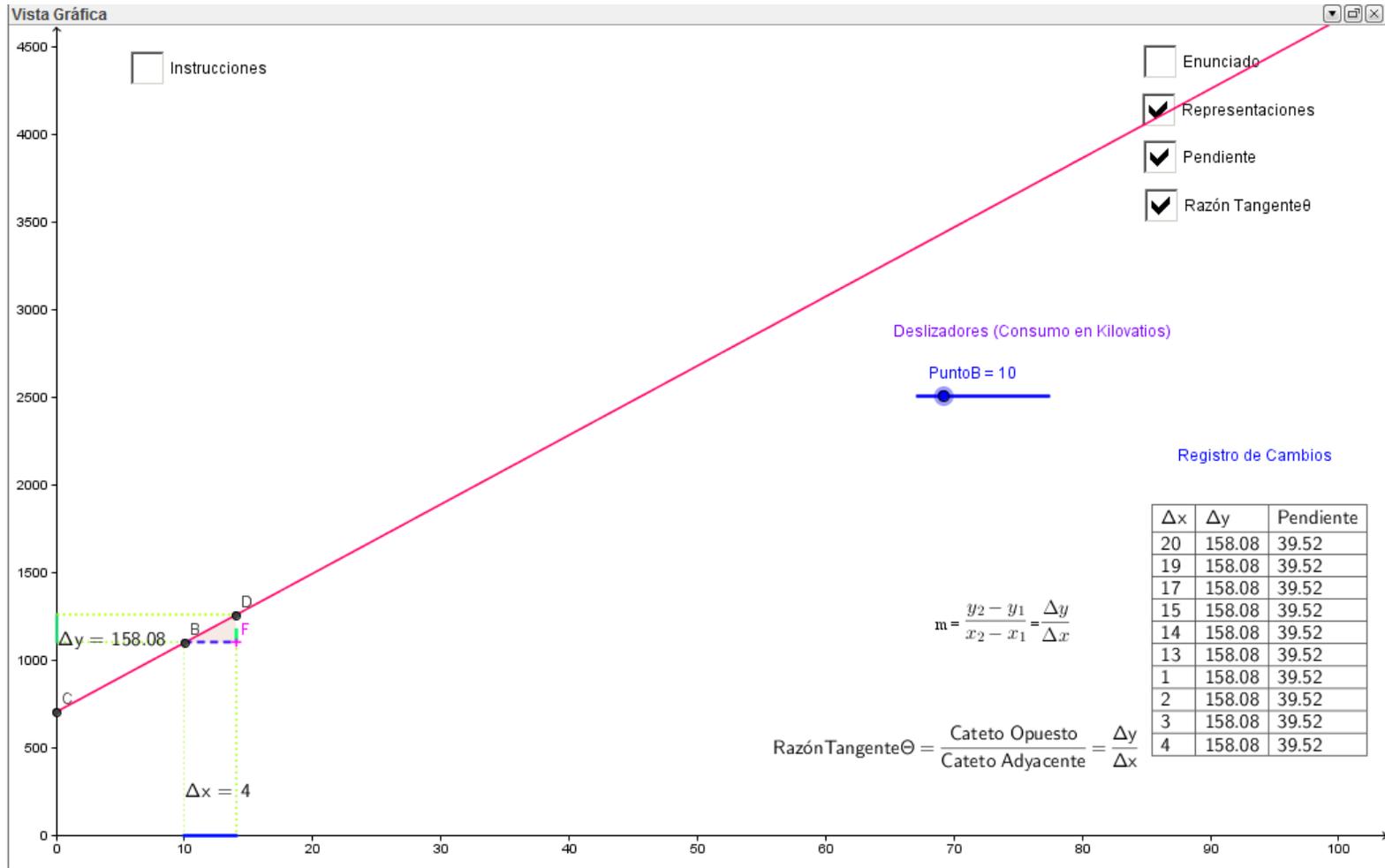
Se presenta la actividad, con el fin de apoyar la idea de razón de cambio promedio.



Se presenta la representación gráfica como línea recta y se especifican las instrucciones a seguir.



Permite observa la relación pendiente-recta, pendiente-tangente, recta-tangente.



Applet Cambio Variable.ggb

Explicación de lo que se encontrará en el applet.

ACTIVIDAD 2. CAMBIO VARIABLE.

Esta actividad consiste en observar la variación de un fenómeno de variable discreta como si fuera variable continua. Situación en la cual analizamos la tendencia del comportamiento de las variables y de la variación en la construcción de una estructura triangular con diferentes cantidades de triángulos en la base.

- Introducción
- Secuencia de Triángulos
- Grafica de Base vs Total Triángulos

Se presentan las instrucciones a seguir y los deslizadores correspondientes a la base y triángulo, llamado BAB y RAT en las actividades y utiliza el símbolo de incremento para hacer la comparación con lo planteado en las actividades.

Actividad 2. Cambio Variable

Instrucciones

1. Active la casilla secuencia y arrastre el deslizador.
2. Observe la relación entre el número de triángulos en la base que ocupa un triángulo pequeño de altura y el total de triángulos no superpuestos.
3. Responda las actividades propuestas.
4. Desactive la casilla secuencia y Active la casilla gráfica y compare los resultados de la actividad anterior con los presentados en el applet.
5. Si es necesario rectifique su cuestionario.

- Introducción
- Secuencia de Triángulos
- Grafica de Base vs Total Triángulos

BaseTrianguloG = 1



BaseTriánguloI = 3



Base	Triángulos	Cambio Base	Cambio Total T	Razón entre Cambios
3	4	Δx	Δy	Razón
5	9	2	5	2.5
7	16	2	7	3.5
9	25	2	9	4.5
11	36	2	11	5.5
9	25	-2	-11	5.5
7	16	-2	-9	4.5
5	9	-2	-7	3.5
3	4	-2	-5	2.5
5	9	2	5	2.5

Se muestra la imagen de los triángulos que estamos trabajando, con el fin de visualizar geoméricamente el planteamiento del problema dado en las actividades.

Actividad 2. Cambio Variable

Instrucciones

1. Active la casilla secuencia y arrastre el deslizador.
2. Observe la relación entre el número de triángulos en la base que ocupa un triángulo pequeño de altura y el total de triángulos no superpuestos.
3. Responda las actividades propuestas.
4. Desactive la casilla secuencia y Active la casilla gráfica y compare los resultados de la actividad anterior con los presentados en el applet.
5. Si es necesario rectifique su cuestionario.

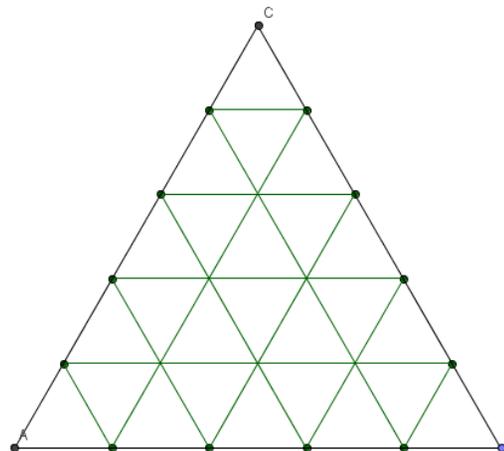
BaseTriánguloG = 5



BaseTriánguloI = 7



Base	Triángulos	Cambio Base	Cambio Total T	Razón entre Cambios
3	4	Δx	Δy	Razón
5	9	2	5	2.5
7	16	2	7	3.5
9	25	2	9	4.5
11	36	2	11	5.5
9	25	-2	-11	5.5
7	16	-2	-9	4.5
5	9	-2	-7	3.5
3	4	-2	-5	2.5
5	9	2	5	2.5



Introducción

Secuencia de Triángulos

Muestra de Base del Triángulo

Permite relacionar la información dada antes con la gráfica correspondiente de al evento planeado por el applet, permitirá también generar una discusión entre las gráficas línea recta y cuadrática, con el fin de que los estudiantes puedan no solo por medio de la representación tabular analizar los datos, sino también por la representación gráfica.

Actividad 2. Cambio Variable

Instrucciones

1. Active la casilla secuencia y arrastre el deslizador.
2. Observe la relación entre el número de triángulos en la base que ocupa un triángulo pequeño de altura y el total de triángulos no superpuestos.
3. Responda las actividades propuestas.
4. Desactive la casilla secuencia y Active la casilla gráfica y compare los resultados de la actividad anterior con los presentados en el applet.
5. Si es necesario rectifique su cuestionario.

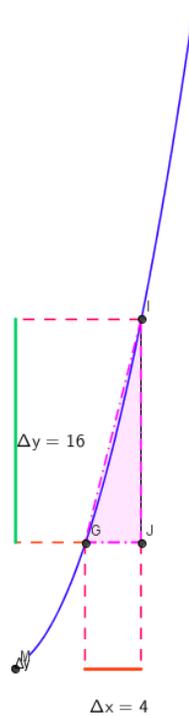
BaseTrianguloG = 5



BaseTrianguloI = 7



Base	Triángulos	Cambio Base	Cambio Total T	Razón entre Cambios
3	4	Δx	Δy	Razón
5	9	2	5	2.5
7	16	2	7	3.5
9	25	2	9	4.5
11	36	2	11	5.5
9	25	-2	-11	5.5
7	16	-2	-9	4.5
5	9	-2	-7	3.5
3	4	-2	-5	2.5
5	9	2	5	2.5



- Introducción
- Secuencia de Triángulos
- Gráfica de Base vs Total Triángulos

