

## CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

**Cristhian López Leyton, Eliécer Aldana Bermúdez, Ángela María Ossa Nieto**

Universidad del Quindío. (Colombia)

leyton3991@gmail.com, eliecerab@uniquindio.edu.co, angelanieto05@gmail.com

**RESUMEN:** Este reporte de investigación tiene como propósito analizar las concepciones de Profesores universitarios de matemáticas, sobre la resolución de problemas en torno a los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral. En este sentido, se utiliza como teoría las creencias y concepciones de los profesores en relación a los ejercicios, problemas y situaciones problema que se presentan para el desarrollo de los contenidos de estos cursos; todo esto enmarcado desde un enfoque etnográfico. Los resultados se obtienen a partir de registros de clase, preparadores, apuntes de estudiantes, entrevistas, observación y episodios en audio y video. Esto permite concluir en primer lugar que los profesores ven la resolución de problemas de acuerdo a la aplicación de conceptos, es decir como contenido; y en segundo lugar como metodología; siendo esta la transición del lenguaje verbal al simbólico, adaptándose como vehículo para generar el aprendizaje.

**Palabras clave:** creencias, concepciones, resolución de problemas, cálculo

**ABSTRACT:** This research paper is aimed at analyzing the math university professors' conceptions about problem solving related to Integral and Differential Calculus concepts. With this respect, the theory is based on professors' beliefs and conceptions of exercises, problems and problem situations that appear in the development of these courses contents, all of which is classified in an ethnographic approach. The outcomes are obtained from the class registers, trainers, students' notes, interviews, observations, and audio and video episodes. It allows us to get to the conclusion, that teachers first see the solution of problems in accordance with the way concepts are applied, i.e. as content; and in the second place as methodology; being it the transition of verbal language to symbolic language as a vehicle to generate learning.

**Key words:** beliefs, conceptions, problem solution, calculus

## ■ Introducción

Las matemáticas son parte vital del sistema educativo obligatorio en todos los países del mundo, esto nos permite deducir que constituyen un aspecto fundamental de la tradición cultural y social, porque forman al ser humano ante la sociedad y le posibilitan desarrollar su pensamiento, a partir de procesos mentales como abstraer, generalizar, representar, sintetizar, visualizar, definir, entre otras, y ofrece herramientas fundamentales para su futura actividad profesional y ocupacional que escoja como sustento para su vida.

Desde una mirada global en la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la educación matemática, nos encontramos con un ámbito de actuación que involucra el aspecto social y cultural centrado en este caso al conocimiento didáctico del contenido matemático como lo plantea Shulman, (1986) para poder liderar y gestionar procesos académicos y didácticos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas universitarias. Es decir, que el objetivo de este campo es velar y garantizar que las instituciones formadoras desde niveles básicos a superiores generen procesos de enseñanza y por ende de aprendizaje, que cumplan con el encargo social, cultural y cotidiano, para lo cual fueron creadas en el contexto nacional e internacional.

Es así como, en una visión de Valle, Juárez, y Guzmán (2007, p.3), ponen de manifiesto que los lineamientos curriculares desde la educación básica hasta el nivel superior, demuestran el requerimiento de comprender como los estudiantes destinan el saber obtenido, aplicándolo a distintos ámbitos y contextos mediante la resolución de problemas. Esto nos da una clara visión del por qué se hace importante un estudio que dé cuenta sobre las creencias y concepciones que puedan tener los profesores de matemáticas de contexto Universitario, al momento de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) sobre los elementos matemáticos que configuran el Cálculo diferencial e Integral en marco de una Licenciatura en matemáticas.

## ■ Marco teórico

De acuerdo con lo anterior, se hace necesario conocer referentes teóricos en torno a conceptos como creencias, concepciones, la relación entre estos dos aspectos; la resolución de problemas como vehículo de aprendizaje de las matemáticas y las concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.

En primer lugar, (Pajares, 1992) citado en Gil Cuadra (2003), considera que las **creencias** son “verdades personales indiscutibles, sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tiene un fuerte componente evaluativo y afectivo. Las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones (justificándolas)”. En este sentido Thompson (1992), plantea que los profesores difieren ampliamente en sus creencias sobre la naturaleza y el sentido de las matemáticas, lo que impacta en gran medida su cronograma de actividades, su percepción frente al papel que se juega cada día en su práctica profesional, cómo se desenvuelve en ella, y el lugar que

ocupan sus estudiantes en relación al entorno matemático. En investigaciones como Erazo y Aldana (2015) se resalta la importancia de las creencias como factor que influye de forma directa el proceso de aprendizaje de las matemáticas, lo que puesto en un contexto universitario permea al profesor y el futuro licenciado en formación.

Para el caso de las *Concepciones* (Moreno & Azcárate, 2003, p. 267) las describen como “organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que *incluyen creencias*, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, entre otras, que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan”

A partir de esto se concluye que las concepciones incluyen las creencias y en este caso se podría hablar de concepciones de tipo subjetivo, que obedecen a procesos mentales construidos y establecidos que son además epistemológicos ya que obedecen a un conocimiento sobre la formación disciplinar o la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas.

En el caso de *la relación entre concepciones y creencias* de acuerdo con Ponte (1994) configuran parte del conocimiento, y en este sentido, las creencias son certezas descendientes de vivencias o inventiva propia, muy a diferencia de las concepciones, siendo estas la moldura organizacional de los conceptos involucrados en procesos de cognición que intervienen al momento de realizar una actividad de cualquier naturaleza.

Por otro lado, la *resolución de problemas* ha tenido como fin primordial que los estudiantes aprendan las matemáticas a partir de esta competencia, las reformas educativas a través de los estándares por competencias ponen como telón de fondo la resolución de problemas para que un estudiante logre ser matemáticamente competente. Y es debido a esto que, gran parte de las investigaciones en Educación Matemática llevadas a cabo en diferentes lugares del mundo, optan la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, según Stanic y Kilpatrick (1989) afirman que el término “resolución de problemas (RP)” se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes **concepciones** sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática, por qué debemos enseñar matemáticas en general, y la **resolución de problemas** en particular. De acuerdo con esto la RP ha adoptado diferentes significados de acuerdo con el uso que se les ha dado:

- *Resolver problemas como contexto*: vehículo para enseñar matemáticas, generar motivación, y práctica.
- *Resolver problemas como habilidad*: rutinarios, no rutinarios, y técnicas de resolución como contenido.
- *Resolver problemas es “hacer matemática”*: optar que el objetivo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones (Polya, 1954).

En estudios como Santos-Trigo (2008) se reconoce la presencia de múltiples formas para analizar y legitimar el impacto de ligar la resolución de problemas con la construcción del conocimiento

matemático. Es así como, *Las concepciones que tienen los profesores sobre la RP*, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pueden estar ligadas a los mismos significados. Por ello, estas concepciones pueden jugar un papel fundamental a la hora de cómo se tiene interiorizados los conceptos de ejercicio, problema en matemáticas, y situaciones problema.

### ■ Metodología

En el caso de esta investigación, es un estudio centrado en el ámbito de investigación denominado enseñanza, específicamente en la línea formación de profesores de contexto universitario, de corte cualitativo interpretativo (Bisquerra, 2009), y que a partir de una *investigación etnográfica* tiene como propósito conocer una realidad educativa (Murillo y Martínez, 2010) de los elementos matemáticos que configuran el Cálculo en el marco del Programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío - Colombia.

Para (Woods, 1987), etimológicamente el vocablo etnografía deriva del griego “ethnos” (tribu, pueblo) y de “grapho” (yo escribo) y se emplea para exponer la “detallar el modo de vida de un grupo de individuos”, y de esta manera ratificar el nivel de conciencia que las personas asignan a sus conductas, sus pensamientos, y el entorno en el cual se desenvuelven.

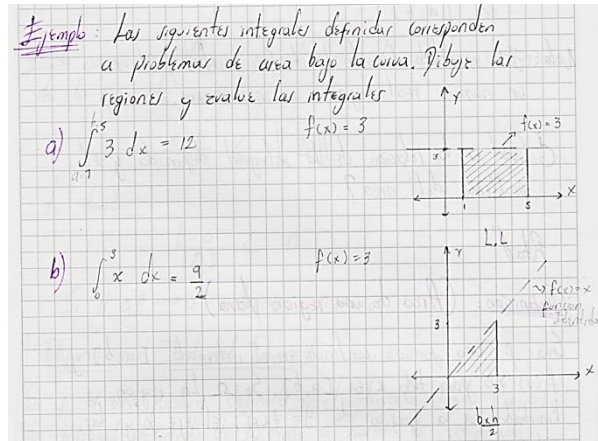
En este sentido, se plantea una investigación de tipo cualitativa, debido a que está orientada a la comprensión, pues su objetivo es describir e interpretar la realidad educativa desde su interior; y tiene que ver con la forma cómo los estudiantes comprenden/construyen los conceptos de: límite, derivada, e integral definida, mediante el planteamiento y resolución de problemas y el papel que la RP juega en la enseñanza y aprendizaje en estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío. Para ello se llevaron a cabo registros del que hacer de dos profesores en un periodo de 4 meses por medio de la observación en el aula, revisión de materiales (preparadores, talleres), y apuntes de los estudiantes; esto permite dar explicaciones de la práctica escolar estudiada a la luz de fundamentos teóricos realizados con anterioridad que nos posibilita concluir.

### ■ Resultados

Esta sección se divide en dos momentos; en primer lugar, una secuencia de apuntes de clase elaborados por un estudiante de Cálculo Integral donde se emplea la RP *como contenido*. En segundo lugar, se muestra un problema de área bajo la curva planteado como preámbulo para encaminar el aprendizaje de la integral definida, es decir, se emplea la RP *como contexto*.

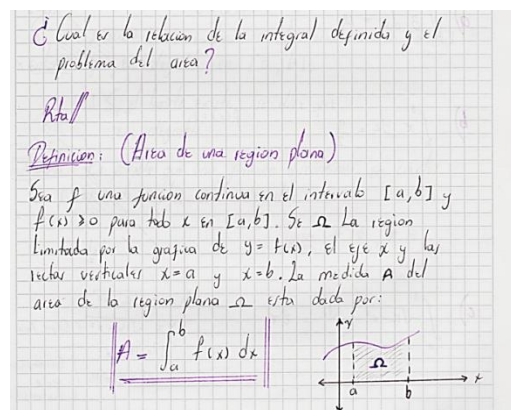
**RP como contenido:**

**Figura 1:** El profesor ha expuesto la definición de integral definida y plantea la siguiente pregunta: ¿Cuál es la relación de la integral definida y el problema del área? A la cual responde con la definición de “Área de una región plana”



**Figura 1.** Apuntes de clase estudiantes

**Figura 2:** Se plantean ejemplos para hallar el “área bajo la curva”, los cuales el profesor llama “problemas”. Para este caso las regiones forman un rectángulo y un triángulo rectángulo respectivamente, relacionando el área de estas superficies conocidas con la solución de la integral.



**Figura 2.** Apuntes de los estudiantes

Después de exponer el teorema fundamental del cálculo y resolver algunos ejercicios en clase, el profesor realiza una “aplicación” que llama “problemas de áreas”, esta aplicación es seguida por una definición de “área entre dos curvas”.

**Figura 3:** El profesor al finalizar la clase entrega un taller congruente con lo evidenciado en los apuntes. En la figura 3 se encuentra resaltado con rojo un problema (el área de un techo relacionada con una curva catenaria), este se encuentra al final de una serie de ejercicios de integración.

UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO  
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
CÁLCULO II

Docente: \_\_\_\_\_

1. Demuestre las siguientes identidades

a.  $\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = e^{2x}$       b.  $\tanh(\ln x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

2. Calcule la derivada de las siguientes funciones

a.  $f(x) = \coth(\ln y)$       b.  $g(x) = e^x \cosh x$       c.  $h(x) = \tan^{-1}(\sinh 2x)$

d.  $y = (\cosh x)^2$       e.  $f(x) = \sin^{-1}(\tanh x^2)$       f.  $h(x) = x^{\sinh x}, x > 0$

3. Evalúe las siguientes integrales indefinidas

a)  $\int x \cosh x^2 \sinh x^2 dx$       R/  $\frac{1}{4} \cosh^2 x^2 + C$

b)  $\int \tanh x \ln(\cosh x) dx$       R/  $\frac{1}{2} \ln^2(\cosh x) + C$

c)  $\int \sec h^2 x \tanh^2 x dx$       R/  $\frac{1}{3} \tanh^3 x + C$

d)  $\int \csc hu du$       R/  $\ln |\tanh \frac{1}{2} u| + C$

e)  $\int \sec hu du$       R/  $2 \tan^{-1} e^u + C$

4. Evalúe las siguientes integrales definidas

a.  $\int_0^{\ln 2} \tanh x dx$       b.  $\int_1^2 x \sec h^2 x^2 dx$       c.  $\int_2^3 \sec h^2 x \tanh^5 x dx$

R/  $\ln \frac{4}{3}$       R/  $\approx 0,1189$       R/  $\approx 0,028$

5. Encuentre el área de la región limitada por  $y = \cosh 2x, y = 0, x = 0$  y  $x = \ln 3, R/ \frac{20}{9}$

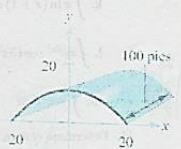
**6. Área de un techo.**

El techo de la figura tiene 100 pies de largo, 40 de ancho y sus secciones son catenarias invertidas de ecuación

$$y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20}).$$

Hallar el área en pies cuadrados de ese techo

R/  $2000 \left( \frac{e^2 - 1}{e} \right) U^2$



**Figura 3.** Taller preparador

**RP como contexto (Vehículo para el aprendizaje):**

El profesor inicia su clase planteando la siguiente situación problema:

*Consumo de energía eléctrica:* La Figura 4 muestra el consumo de energía continuo de una vivienda promedio entre la 1 de la mañana y las 12 de la tarde.

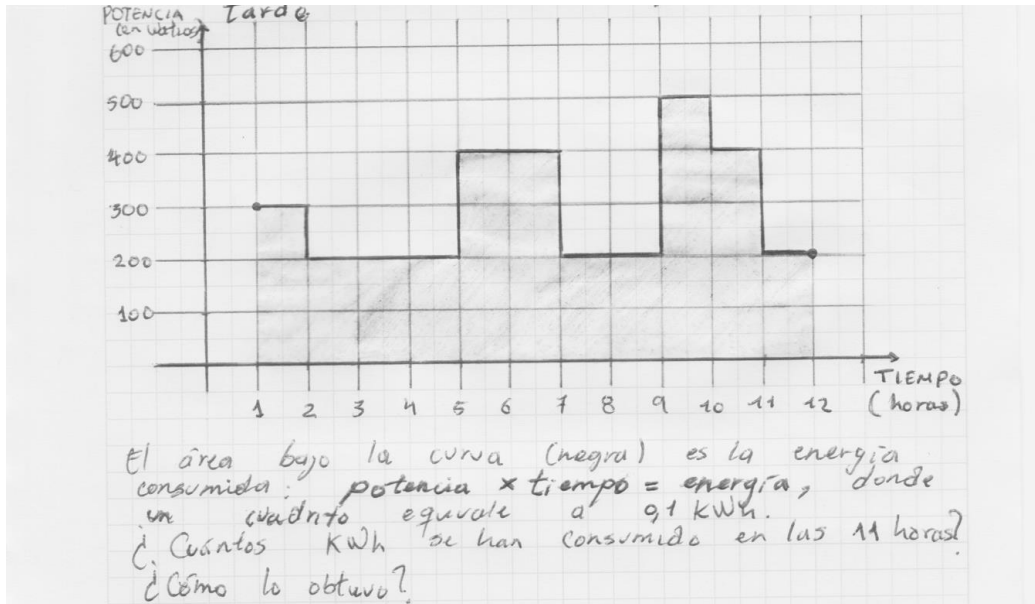


Figura 4. Preparador del profesor

Figura 5: Uno de los estudiantes da solución al problema de dos maneras; A) sumando el área de cada uno de los rectángulos formados verticalmente y B) sumando una a una el área de los cuadros bajo la “curva” dada.

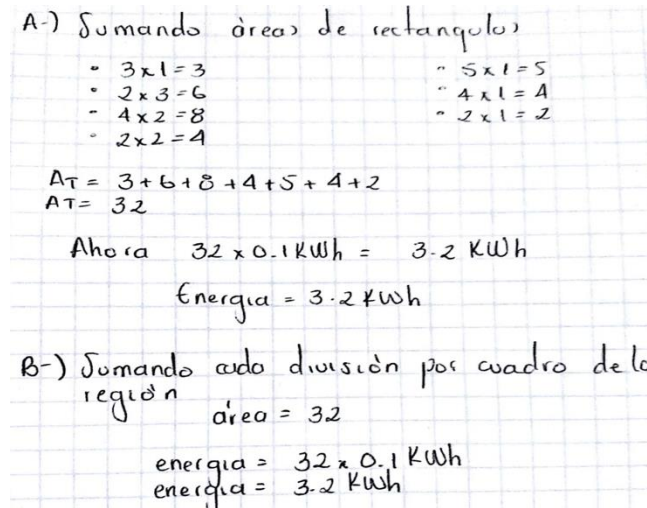


Figura 5. Apuntes de los estudiantes

## ■ Conclusiones

De acuerdo con los resultados podemos concluir que los profesores dan significado a la resolución de problemas como:

**Contenido:** Poseen una concepción en la cual un problema que involucre diferentes conceptos (objetos matemáticos) es incluido al final de una unidad o tema, como paso del lenguaje verbal al simbólico; para este caso, la integral definida y el uso de curvas catenarias. Esto sitúa la RP como habilidad de acuerdo con lo avizorado por Stanic y Kilpatrick (1989), además de ello no se evidencian situaciones problémicas en contexto para el desarrollo de la unidad.

**Metodología:** El planteamiento y resolución de problemas es utilizado como vehículo para el aprendizaje, siendo este una introducción al concepto creando un debate positivo acerca de las herramientas matemáticas disponibles para solucionar situaciones propias del contexto, además de propiciar la reflexión por parte del estudiante sobre la importancia de los elementos matemáticos que configuran el Cálculo en escenarios propios de la cotidianidad humana. A partir de ello podemos evidenciar que los profesores que acuden a estas situaciones tienen una visión de acuerdo con Polya (1954) donde el objetivo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones.

Finalmente es importante reconocer la trascendencia que obtienen los pensamientos del profesor en su praxis pedagógica, puesto que la conducta y comportamiento del profesional proviene de una historia de vida y por lo tanto su formación y aprendizaje también. Por ello es significativo que los programas educativos tengan en cuenta aspectos como las concepciones, las creencias, actitudes, posturas, hábitos y la realidad del docente, como variables que intervienen en el desarrollo de la práctica educativa al igual que la planificación de la misma (Ezpeleta, 2004).

## ■ Referencias bibliográficas

- Bisquerra, R. et al. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Barcelona, España: Editorial La Muralla, 2da edición. ISBN: 978-84-7133-748-1
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Erazo, H. J., y Aldana, B. E. (2015). *Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica*. *Praxis*, 11, 163-169.
- Ezpeleta, J. (2004). Innovaciones educativas. Reflexiones sobre los contextos para su implementación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 9(21), 403-424.
- Flores, P. (1998). *Libro Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Universidad de Granada, departamento de didáctica de la matemática, España. (pp. 30).



- Gil Cuadra, F y Rico Romero L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, 21(1), 27-47.
- Murillo, J y Martínez, C (2010). Investigación etnográfica, métodos de investigación educativa. pp. 09
- Polya, G. (1954). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Ponte J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (ed.), *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the Fifth international conference on systematic cooperation between theory and practice in mathematics education*. Grado, Italia.
- Santos-Trigo, M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Memorias del seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, septiembre 2008.
- Shulman, L. S. (1986). "Paradigms and Research Programs for the Study of Teaching". En M. C. Wittrock (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan, 3ra. ed., p. 3-36.
- Valle Espinosa, M. C., Juárez Ramírez, M. A. y Guzmán Ovando, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 9(2). <http://redie.uabc.mx/vol9no2/contenido-valle.html>
- Woods, P. (1987). *La escuela por dentro*. La etnografía en la investigación educativa. Barcelona: Paidós.