

EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO EN LAS FACETAS EPISTÉMICA E INTERACCIONAL DE PROFESORES PERUANOS SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: EJEMPLIFICANDO CON UN ESTUDIO DE CASO

Teresa Sofía Oviedo Millones, Luis R. Pino-Fan

Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú), Universidad de Los Lagos. (Chile)

sofia.oviedo@pucc.edu.pe, luis.pino@ulagos.cl

RESUMEN: En este reporte de investigación presentamos el análisis de una clase sobre funciones realizada por un profesor peruano en los primeros cursos de la universidad, con el fin de caracterizar los conocimientos didácticos y matemáticos en las facetas epistémica e interaccional, que le permiten al profesor gestionar los aprendizajes sobre funciones de sus estudiantes. Para ello, utilizamos el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), que ha sido planteado considerando supuestos teóricos y metodológicos del Enfoque Onto-Semiótico (EOS). Los resultados muestran que el profesor posee un buen dominio matemático, pero en el aspecto interaccional, tiene baja idoneidad didáctica.

Palabras clave: funciones, conocimiento didáctico-matemático, dimensión epistémica, enfoque ontosemiótico

ABSTRACT: In this research report we show the analysis of a class on functions that a Peruvian teacher gave in the first courses of the university. It is aimed at characterizing the didactic and mathematical knowledge in the epistemic and interactional stages which allow the teacher to manage the learning about their students' functions. That's why; we use the Didactic-Mathematical Knowledge Model, which has been proposed considering the theoretical and methodological assumptions of the Onto-Semiotic Approach (OSA). The results show that the teacher has a good mathematical mastery, but in the interactional aspect, he has a low didactic suitability.

Key words: functions, didactic-mathematical knowledge, epistemic dimension, onto-semiotic approach

■ Introducción

La investigación respecto al Conocimiento Didáctico-Matemático de los docentes requiere de una amplia investigación debido a que la formación de los alumnos depende esencialmente del buen desenvolvimiento en este conocimiento por parte de los docentes (Cova, 2013). Investigaciones indican que muchas veces los docentes reciben una formación que no es suficiente para contemplar toda la complejidad de una situación real de enseñanza y de aprendizaje (Brito y Alves, 2008). El conocimiento de un profesor de matemáticas incluye muchos componentes adicionales a las matemáticas y por ello se hace necesario caracterizar el conocimiento del profesor, con el que se proporcionará pautas para saber cómo los formadores de profesores o formadores de matemáticos que irán a ejercer la docencia, deben intervenir con la finalidad de que los profesores adquieran competencias idóneas para la gestión de los aprendizajes.

En el Perú, al igual que en otros países, tal como menciona Olave (2013) “(...) es común que primero se enseñe la expresión formal de un conocimiento matemático y luego se presenten ejemplos y ejercicios de aplicación” (p. 26). Lo que se pretende en toda clase de Matemática es que los estudiantes logren un aprendizaje óptimo que le permita utilizar los conocimientos que va adquiriendo a diversas situaciones problemáticas, que sepan utilizar los algoritmos, las definiciones en diversas situaciones y no sólo en un tipo de problemas que son mostrados y enseñados en una clase por el profesor. Para llegar a ese aprendizaje, los estudiantes tienen que desarrollar la capacidad de aprender y pensar (Cammaroto, Martins y Palella, 2003). Es un reto docente manejar los conocimientos de tal forma que se cumplan los objetivos de aprendizaje con sus alumnos.

La enseñanza en el nivel superior conlleva a que los estudiantes de Ciencias e ingeniería, en su formación como profesionales, tienen que contar con conocimientos sólidos que le permitan afianzarse en el desarrollo de situaciones problemáticas matemáticas propias de su profesión.

En la institución en la que se hace efecto esta investigación, se observa que los estudiantes de los primeros semestres en el área de Matemática, tienen mucha dificultad para comprender nociones básicas de matemáticas, particularmente en el tema de funciones. Estas dificultades se contemplan desde la Educación Básica Regular en el Perú (Quintanilla, 2009). Las evaluaciones que hacen los profesores a sus estudiantes mediante exámenes y prácticas calificadas muestran las dificultades de los estudiantes. Aunque éstas no deberían ser la única forma de acreditar el conocimiento aprendido por los estudiantes, sólo se cuenta con este recurso para conocer aproximadamente lo que han aprendido (porque no hay otra metodología institucional, de acuerdo a su programación del curso).

La enseñanza de la matemática debe contemplar que el alumno adquiera flexibilidad para lidiar con el concepto de función en situaciones diversas, y esto debe contemplar al docente con un conocimiento didáctico-matemático idóneo. (Godino, 2011)

Con todo ello, se eligió analizar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los docentes sobre el tema de funciones, pues además de ser este tema básico y fundamental para aplicaciones propias de las

carreras universitarias, es un tema base en cursos del nivel universitario como cálculo, especialmente en alumnos que van a carreras de Ciencias e Ingeniería.

Se adoptó el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) planteado por Pino-Fan y Godino (2015), para poder caracterizar aspectos del 'conocimiento especializado del contenido' (faceta epistémica del CDM), que tiene un profesor universitario sobre la noción de función.

■ Marco teórico

Para el desarrollo de nuestra investigación se utilizó el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), el cual proporcionan un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos que deberían tener los docentes para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes. El CDM comprende tres dimensiones (Pino-Fan y Godino, 2015): dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemático. La dimensión matemática incluye las categorías del conocimiento común del contenido y del conocimiento ampliado del contenido; la dimensión didáctica incluye las facetas del conocimiento: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. La dimensión metadidáctico-matemática refiere a los conocimientos necesarios para reflexionar sobre la propia práctica y valorar la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En esta investigación mostramos el análisis de la faceta epistémica incluida en la dimensión didáctica del CDM. En el análisis se utilizaron las herramientas teórico-metodológicas del EOS, que consiste de cinco niveles de análisis didáctico propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), cuya aplicación permitió el estudio de aspectos descriptivos y explicativos de la clase, que fundamenta la valoración de la idoneidad epistémica. Estos niveles son: la identificación de prácticas matemáticas, identificación de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, la identificación del sistema de normas y metanormas y la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto se centra en la valoración de la idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Para esta investigación sólo se hizo la valoración de la idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas buenas matemáticas. Para ello se requirió de componentes y descriptores (que veremos en la sección de análisis de esta investigación).

■ Metodología

La metodología que se utilizó fue la metodología cualitativa descriptiva-interpretativa de diseño no experimental de tipo transaccional (Hernández, Fernández y Baptista, 1998), porque las variables se consideran tal como están temporo-espacialmente sin manipulación y en un tiempo determinado. Pertenece a un estudio de caso.

En este reporte de investigación, que es parte de una investigación más amplia (en la que se consideran a tres docentes para el estudio), se presenta el análisis de la primera clase de funciones matemáticas de un curso de Matemática que dio un docente de una institución universitaria en el tiempo de una hora, con 48 alumnos presentes, de un total de 60 alumnos matriculados (entre 17 a 19 años) en un curso de Matemática de primer semestre académico.

Se hizo la grabación de la clase de una hora (29 de mayo de 2015), se transcribió esta clase y luego se procedió a analizarla de acuerdo a las herramientas teórico-metodológicas del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). Se analizó la faceta epistémica del CDM sobre funciones del docente, utilizando las nociones teórico-metodológicas antes descritas.

El docente, muestra de estudio, fue elegido con muestreo no probabilístico por conveniencia (fue uno de los docentes que aceptó ser filmado en sus clases).

■ Análisis de los datos

Se procedió a analizar la clase del docente, previa transcripción de la clase filmada (por razones de espacio no mostramos el anexo de la transcripción de clase y sólo daremos una síntesis de los análisis de la clase), con las herramientas de los cinco niveles de análisis propuestos en el EOS. Haciendo esto se pudo dar la idoneidad epistémica del docente de acuerdo a los componentes y descriptores de la idoneidad epistémica que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica (matemática). Godino (2011)

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos. Nivel adecuado del lenguaje para el nivel a que se dirige. Se promueve la expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo a que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema. Se promueve la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen.

		Se promueven momentos de validación.
Relaciones significados	(conexiones,	Se relacionan y articulan de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Identificación de prácticas matemáticas

El tema dado en clase por el profesor es la primera clase de funciones para estudiantes del primer semestre académico universitario en un curso de Matemáticas. Antes de este tema el profesor hizo el tema de Geometría Analítica.

El profesor da una introducción al tema mediante una situación contextualizada, tomando en consideración los conocimientos previos de los alumnos: función, dominio, rango, función lineal (menciona que esos temas fueron hechos en el colegio y de acuerdo al Currículo Nacional de Educación Básica del Perú, así es). A partir de la situación contextualizada, el profesor institucionaliza algunos conceptos relacionados al tema de funciones: función, relación, dominio y rango, luego da ejemplos de estos temas, haciendo preguntas frecuentes a los estudiantes y dando paso también a que los estudiantes den ejemplos. Está atento a lo que los estudiantes expresen en clase.

Identificación de objetos y procesos matemáticos

El profesor da algunos argumentos conductistas, es decir, justifica el por qué usó determinados elementos matemáticos sin justificarlos matemáticamente: da la definición de función diciendo que es para aprender el curso de Matemáticas (el que está dando) y menciona también otro curso más avanzado (que llevarán en el siguiente semestre los estudiantes), se habla de números reales en números reales y afirma que no de todos los números reales. Esto no es correcto porque en las funciones no hay restricción que no se puedan usar todos los números reales. Quizá el profesor quiso referirse a algún detalle, pero en su discurso no especifica. Sus argumentos van de lo particular a lo general para luego institucionalizar las definiciones. En la Tabla 2 se muestran los objetos matemáticos primarios del EOS obtenidos del análisis de los datos.

Tabla 2. Configuración epistémica de la sesión de clase

Objetos matemáticos primarios	Utilización de los objetos matemáticos
Situaciones problemas	Se presentan situaciones de contextualización y aplicación del objeto matemático función

Elementos lingüísticos	Descripción verbal: el lenguaje natural (en tres ejemplos con conjuntos) Descripción simbólica: las definiciones son expresadas algebraicamente (definiciones de función, dominio). Descripción gráfica: mediante los diagramas de Venn.
Conceptos/Definiciones	Conceptos previos: conjuntos, diagramas de Venn, números reales, pares ordenados. Conjuntos emergentes: definición de función, de relación, funciones reales de variable real; tipos de funciones: lineal, afín, constante, cuadrática, polinómica; dominio, rango.
Proposiciones/ Propiedades	No se dio propiedades en este tiempo de clase.
Procedimientos	Da ejemplos en la que diferencia tipo de funciones, relaciones de funciones
Argumentos	Argumentos verbales para determinar la diferencia entre relación y función; argumentos para determinar la diferencia entre funciones lineal y afín. En general, para llegar a argumentar, el profesor hace inducción del tema, mediante ejemplos, para no explicar de manera directa los temas tratados respecto a función.

Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas

La configuración didáctica es de tipo magistral - interactivo (Godino, *et al.*, 2006). El docente trata de hacer participar constantemente a los estudiantes, pero es exclusivamente él quien institucionaliza, formula y valida los temas tratados en clase.

En su interacción con los alumnos les pudo ocasionar un conflicto semiótico cuando mencionó que se habla de números reales en números reales (en funciones) y afirma que no de todos los números reales.

Identificación del sistema de normas y metanormas

La metanorma del profesor que se puede apreciar es metaepistémica, al indicar sólo una determinada manera en los procesos matemáticos, pues usa sólo un registro de representación, ya sea sólo el gráfico (al inicio de la clase) y luego el algebraico, sin hacer relación justificativa matemática entre ambos registros y la norma es que el profesor es el que determina la intervención de los estudiantes.

■ Resultados

Se pudo precisar con detalle a través del CDM, y mediante el uso de las herramientas del EOS, características del conocimiento didáctico-matemático del docente del estudio de caso, el cual tuvo una enseñanza expositiva (magistral), contextualizada para los conceptos, y haciendo una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica de dichos procesos (en particular de la idoneidad epistémica). Se dio como resultado una idoneidad epistémica adecuada, comparándolos con los indicadores de idoneidad citados en la tabla 1 de Godino (2011). Analizando de acuerdo a esta tabla se observó que el docente usó un contexto extra-matemático en la presentación de los conceptos que motivó a los alumnos a participar y atreverse a argumentar en algunos casos.

En cuanto a las representaciones sólo se hacen en dos registros de representación, gráfico y algebraico, pero no se relaciona el paso de un registro a otro. De esta manera los estudiantes aprenden a usar las operaciones algebraicas por un método: el paso de registro algebraico al gráfico. Las definiciones estuvieron adecuadas al nivel educativo al que iban dirigidas. Se apoya en situaciones cotidianas para introducir a la formalización de los conceptos. No se promovió la generación y negociación de las reglas, pues el docente asumió una característica de clase magistral en la que es el docente el que da toda la enseñanza. Hubo sólo un discurso que no estuvo claro, como el mencionado en el análisis de los datos (Identificación de objetos y procesos matemáticos). La argumentación, en la mayoría de su tiempo de clase del docente es adecuada en el sentido que va de lo particular a lo general en un contexto extra-matemático, es decir, con situaciones de referencia, que van ayudando a los estudiantes a comprender los conceptos y a su vez los motiva en su aprendizaje. Además, hubo una adecuada relación entre los objetos matemáticos dados en la clase.

Todo esto, nos conduce a decir que la idoneidad epistémica del docente es adecuada, pero no se puede decir que es totalmente adecuada, pues se tiene que ver la relación de la dimensión epistémica con las otras dimensiones (que sería parte de una investigación más amplia). Por ejemplo, se aprecia que la idoneidad interaccional fue baja.

Análogo fueron los resultados obtenidos del análisis de clases de los otros dos docentes en estudio, con particularidades que detallaremos en próximos artículos de investigación.

■ Conclusiones

Como la realización del análisis del conocimiento didáctico-matemático de los docentes (que comprende tres dimensiones y requiere del uso de las herramientas del EOS manifestadas en cinco niveles) es un trabajo muy complejo, sería prudente realizar todo el análisis de las sesiones completas de clase del docente o docentes en un tema determinado en matemática y esto sería necesario para identificar competencias de los docentes, actitudes a mejorar y lograr una idoneidad didáctica para beneficio del mejor aprendizaje de los alumnos.

El uso adecuado del contexto extra-matemático del docente podría conducir a los estudiantes en el transcurso de las demás clases, a que relacionen lo aprendido con otros contenidos matemáticos. Esto

se tendría que constatar, en el análisis de más horas de clase del docente, que es parte de una investigación que está en proceso.

“(…) La investigación en Educación Matemática en el Perú está en pleno desarrollo y en proceso de consolidación” (Flores y Gaita, 2015, p. 272). Esta investigación que presentamos se suma en la contribución a la investigación educativa peruana en el campo de Formación de Profesores, usando un modelo, que todavía no ha sido utilizado en investigaciones peruanas. Son varias investigaciones en Educación Matemática peruanas que han aplicado el marco teórico EOS, pero aún no han aplicado el modelo CDM del EOS, como se constata, a la fecha, en los repositorios de tesis de universidades peruanas de los programas de Maestría y Doctorado en Educación o afines, así como en revistas académicas indexadas peruanas o en actas de congresos o coloquios.

■ Consideraciones finales

Habiendo llegado al análisis de la idoneidad epistémica, queda pendiente el análisis de las demás idoneidades mencionadas del EOS, junto con las interacciones entre las mismas (que es parte de una investigación más amplia que estamos realizando), es decir, se requiere de una idoneidad didáctica para tener una idoneidad global del proceso de enseñanza del docente muestra de estudio.

■ Referencias bibliográficas

- Brito, A., y Alves, F. (2008). Profissionalização e saberes docentes: análise de uma experiência em formação inicial de professores de matemática. *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas*. Belo Horizonte: Autêntica, 27-42.
- Cammaroto, A., Martins, F., y Palella, S. (2003). Análisis de las estrategias instruccionales empleadas por los profesores del área de matemática. Caso: Universidad Simón Bolívar. Sede Litoral. *Investigación y Postgrado*, 18(1), 71-85.
- Cova, C. (2013). *Estrategias de enseñanza y de aprendizaje empleadas por los (as) docentes de matemáticas y su incidencia en el rendimiento académico de los (as) estudiantes de 4to año del Liceo Bolivariano “Creación Cantarrana” período 2011-2012* (tesis Doctoral). Recuperado de <http://ri.bib.udo.edu.ve/handle/123456789/160/simple-search?query=Cova%2C+C.y+Ernesto%2C+C>
- Flores, J. V. F. y Gaita, R. C. (2015). Educación Matemática en el Perú: Avances y perspectivas. En *La Educación Matemática en el siglo XXI* (pp. 257-276). Distrito Federal: Secretaria Académica del Instituto Politécnico Nacional.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*. Recife, Brasil.

- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-004-1
- Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma* 27 (2), 221-252.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1998). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos*. (tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional. Montevideo, Uruguay). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf
- Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109.
- Quintanilla, C. (2009). *Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOS* (tesis de Maestría). Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/755/recent-submissions>