

EL PROFESOR DE BACHILLERATO FRENTE A LOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA: UN ESTUDIO DE CASOS

Arcelia Cecilia Moreno Verdugo, José Luis Soto Munguía, Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez

Universidad de Sonora. (México)

arcelia103@outlook.com, jlsoto@mat.uson.mx, acastillo@mat.uson.mx

RESUMEN: Se reporta aquí una investigación cualitativa sobre las estrategias heurísticas y las habilidades relacionadas con el control, que muestran profesores de matemáticas del bachillerato mexicano (estudiantes de 16-18 años), al resolver un problema de Geometría. El trabajo está basado en las contribuciones teóricas de Alan Schoenfeld sobre la resolución de problemas, y está enmarcado en los retos planteados por los planes y programas de estudio de bachillerato vigentes en México, al profesor de matemáticas de este nivel educativo. El problema fue abordado por dos profesores de Geometría durante una entrevista semi-estructurada basada en tareas. Ambos profesores mostraron recursos heurísticos limitados y ninguno de ellos pudo verificar apropiadamente la solución encontrada.

Palabras clave: resolución de problemas, profesores, geometría

ABSTRACT: This paper deals with a qualitative research on heuristic strategies and control related skills that Math teachers of Mexican high school (16-18 year-old students) show when solving a problem of Geometry. The work is based on Alan Schoenfeld's theoretical contributions on problem solving. It is framed in the challenges posed by Mexican high school plans and programs, to mathematics teachers of this educational level. The problem was addressed by two Geometry teachers during a task-based semi-structured interview. Both teachers showed limited heuristic resources and none of them could properly verify the found solution.

Key words: problem-solving, teachers, geometry

■ Introducción

La resolución de problemas es considerada por muchos como la esencia de las matemáticas, y lo ha sido a lo largo de su desarrollo, pues desde tiempos remotos los problemas han sido el motor para la generación y el refinamiento de los conceptos matemáticos. La formación de estudiantes que puedan resolver problemas de su vida cotidiana, ha sido uno de los objetivos generales de la educación para la vida. Particularmente en los planes y programas de estudio de matemáticas, vigentes para el bachillerato mexicano desde el año 2008, se privilegia la resolución de problemas en el aula. La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) presupone que el profesor transformará sus prácticas docentes, dejando de ser un expositor de conceptos y procedimientos matemáticos para convertirse en un mediador y conductor de los procesos de resolución de problemas.

Sin embargo, la importancia conferida a la resolución de problemas matemáticos en el salón de clases no se corresponde ni con el papel que los problemas matemáticos han jugado en el desarrollo histórico de las matemáticas, ni con el objetivo educativo general antes mencionado. Los profesores han tenido serias dificultades para modificar sus prácticas docentes, en la dirección señalada por la RIEMS; las causas que pueden explicar estas dificultades son muy diversas, pero una pregunta básica que nos ha interesado es: ¿cómo resuelve los problemas matemáticos el profesor mismo?

La investigación reportada aquí, ha tenido el propósito de responder parcialmente la pregunta antes mencionada, por lo menos en lo que se refiere a las estrategias que el profesor utiliza y a las decisiones que toma durante el proceso de resolución de un problema. Por ello nos hemos planteado la pregunta de investigación: ¿qué estrategias heurísticas y qué habilidades de control muestran los profesores al resolver problemas?

■ Marco conceptual

Para llevar a cabo la investigación, se usaron como referencia teórica las contribuciones de Alan H. Schoenfeld sobre resolución de problemas, principalmente las que ha integrado en su libro más conocido (Schoenfeld, 1985), en el que identifica cuatro categorías del conocimiento y del comportamiento, que entran en juego durante el proceso de resolución de un problema. Dichas categorías son:

1. Recursos. Son los conocimientos matemáticos que posee un individuo y que puede utilizar cuando resuelve un problema (hechos matemáticos, conocimientos intuitivos, procedimientos algorítmicos, etc.)
2. Heurísticas. Son las estrategias y técnicas que permiten progresar cuando se intenta resolver un problema (dibujar figuras, adoptar una notación apropiada, aprovechar problemas relacionados, reformular el problema, etc.)
3. Control. Son las decisiones globales con respecto a la selección y aplicación de los recursos y las heurísticas (planeación, monitoreo, evaluación, toma de decisiones, etc.).

4. Sistemas de creencias. Es la visión del mundo matemático que posee el individuo y que determina el uso que hará de las primeras tres categorías (creencias acerca de sí mismo, de la matemática, de los problemas matemáticos, etc.)

Nuestro estudio se ha centrado en la segunda y la tercera de las categorías anteriores. Hemos puesto menos atención a los recursos y a las creencias; porque, en relación con la primera categoría, el problema planteado es de Geometría y los profesores observados son ambos profesores de este curso y porque, en relación con la última categoría, las creencias no son directamente observables durante la resolución de un problema.

■ Método

El estudio es de carácter cualitativo, en el que participaron dos profesores de matemáticas de bachillerato (que llamaremos aquí A y B), ambos con más de 20 años de experiencia docente, egresados de Ingeniería Química y con estudios de posgrado en educación. Al momento de la investigación, ambos impartían el curso de Geometría. A los dos profesores se les planteó el mismo problema para que lo resolvieran a lápiz y papel, y se diseñó una entrevista semi-estructurada, basada en tareas (Maher y Sigley, 2014), para observar el proceso de resolución; las dos entrevistas fueron grabadas en video y tuvieron una duración aproximada de una hora en cada caso.

El problema ha sido seleccionado tomando en cuenta las características siguientes:

- a) Que el problema, siendo no rutinario, pueda resolverse con los recursos a enseñar en un curso de Geometría del bachillerato.
- b) Que sea un problema de los que Polya (1965) llama “por resolver”, que son los que se plantean con mayor frecuencia en los cursos de bachillerato.
- c) Que se preste para ser resuelto con diversas estrategias.

Después de plantear algunos problemas geométricos a estudiantes universitarios, para verificar si cumplían con las características establecidas, se eligió el problema siguiente:

Problema. En la figura siguiente (Figura 1), $ABCD$ es un cuadrado de lado 3, la circunferencia es tangente a dos de los lados de este cuadrado y pasa por el vértice del cuadrado de lado 1. Encuentre la medida del radio del círculo.

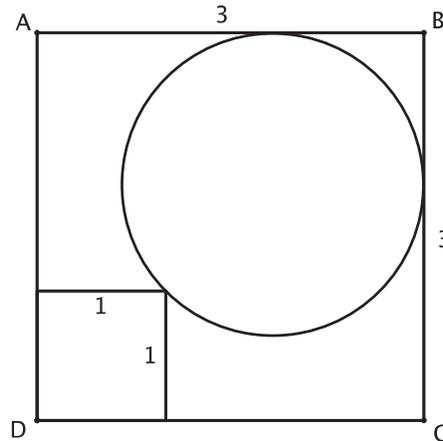


Figura 1.

Antes de plantear el problema a los profesores, lo hemos resuelto de todas las formas posibles, con el propósito de confirmar el criterio c) y de facilitar la intervención de los entrevistadores durante el proceso de resolución del problema. Diez estrategias de resolución han sido identificadas y agrupadas según la heurística inicial: 1) Descomposición de la diagonal BD (seis variantes), 2) descomposición de un lado del cuadrado $ABCD$ (dos variantes) y 3) descomposición en otras figuras del cuadrado $ABCD$ (dos variantes).

■ Discusión de los resultados

El análisis del proceso de resolución de los profesores se hace por fragmentos tomados de la transcripción de la entrevista, los cuales fueron elegidos de acuerdo con la toma de decisiones respecto al cambio de estrategias. Así mismo, hemos construido un esquema de la estrategia general para cada uno de los profesores A y B, comparando este esquema con el propuesto por Schoenfeld para el resolutor ideal (Schoenfeld, 1985). En dicho esquema aparecen cuatro etapas, a saber: el análisis, la planificación, la exploración, la implementación y la verificación de la solución.

Profesor A

El proceso de resolución del profesor A fue dividido en cuatro fragmentos, ya que la toma de decisiones influyó tanto positiva como negativamente, teniendo como consecuencia que empleara cuatro estrategias; algunos intentos fueron fallidos, lo cual lo llevó a implementar nuevas estrategias. Durante gran parte de este proceso él hace exploraciones, entre las que se destaca la heurística de introducir trazos auxiliares. El profesor busca relaciones entre los trazos que tiene en el dibujo y los que hace, lo cual le es útil para plantearse subobjetivos, tales como calcular un radio a partir de las relaciones entre el centro y los trazos auxiliares que hace. Algunas de las estrategias que percibe a partir de las relaciones que hace son: 1) calcular el radio conociendo la medida de una cuerda de la

circunferencia (ver Figura 2); 2) descomponer la diagonal BD en la diagonal del cuadrado de lado 1, el diámetro, y el segmento que hemos encerrado en una elipse en la Figura 3; 3) descomponer la diagonal del cuadrado de lado $2r$ en el diámetro y los dos segmentos que hemos encerrado en una elipse en la Figura 4.

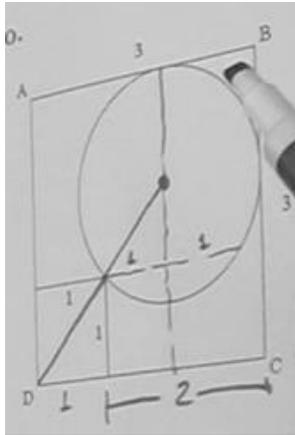


Figura 1.

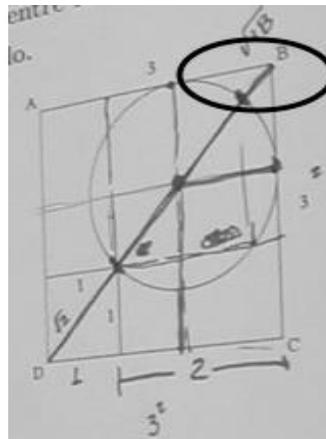


Figura 2.

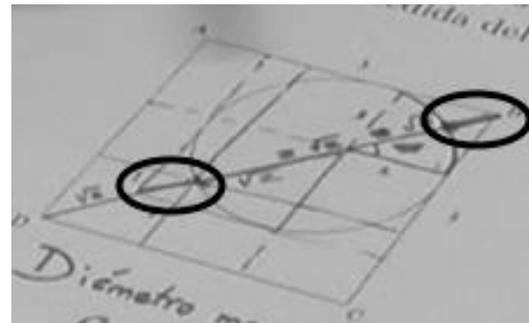


Figura 3.

No obstante, la mayoría de las relaciones que A establece son incorrectas, y no alcanza a generar estrategias exitosas en las que se requiera hacer procedimientos algebraicos; limitándose así, a estrategias y relaciones en las que solamente se ven involucrados datos numéricos. En otros casos, cuando la estrategia es exitosa no alcanza a concretarla adecuadamente, tal como sucede durante el fragmento 2 del proceso. En la Figura 5, se presenta una comparación entre el esquema del proceso de resolución de un resolutor ideal (izquierda) y el esquema del fragmento 2 del proceso de resolución del profesor A (derecha).

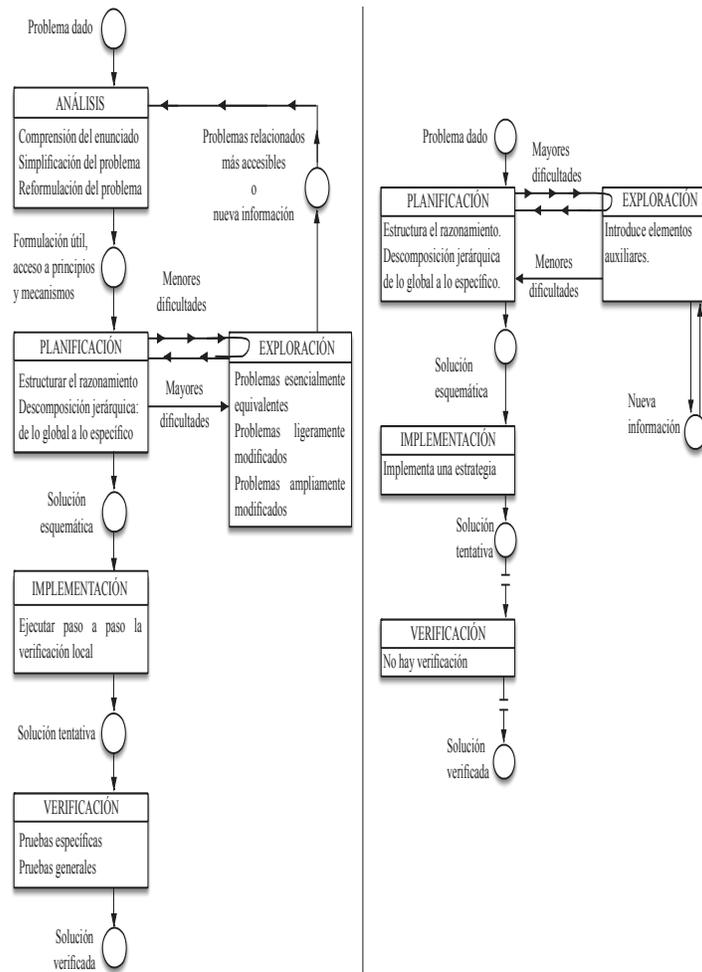


Figura 5.

Una de las principales diferencias que se observa en los esquemas de la Figura 5, es el papel central que juega la planificación en el caso del resolutor ideal; de manera contraria, en el esquema del profesor A y durante todo el proceso, la exploración es el “corazón” de éste, debido a que sus intentos por elaborar un plan son muy débiles, lo cual lo lleva una y otra vez a la exploración, porque no puede generar una estrategia exitosa.

Otra diferencia que se destaca entre ambos procesos tiene que ver con la verificación de la solución, la cual forma parte del proceso del resolutor ideal, probablemente porque tiene claro en qué consiste hacerlo, lo cual le permite tener la seguridad de que cuenta con una solución correcta. De manera contraria, durante el fragmento 2, el profesor A plantea una ecuación en términos de r y pareciera que dicha ecuación le resulta suficiente y no se da cuenta de que el radio es un número que aún no

encuentra (ver Figura 6). Más adelante él intenta verificar dicha solución, pero en su “verificación” no busca la consistencia entre los datos y la solución; se limita a revisar que cada uno de los pasos que siguió para llegar a ésta han sido correctos.

Handwritten formula:
$$\text{Radio}_{\text{Circulo}} = \frac{r\sqrt{8} - 2(r\sqrt{8} - \sqrt{8})}{2}$$

Figura 6.

Con frecuencia a lo largo de todo el proceso de resolución, el profesor A muestra comportamientos de Tipo A y de Tipo B (Schoenfeld, 1985), los cuales tienen que ver respectivamente con realizar búsquedas innecesarias ignorando direcciones útiles hacia la solución, y con detener dichas búsquedas a tiempo pero sin explotar los recursos con los que se cuenta.

Profesor B

Respecto al proceso de resolución del profesor B, éste fue dividido en tres fragmentos; él implementa tres estrategias, dos de ellas exitosas. Durante todo el proceso, pareciera que el profesor B no tiene dificultades para establecer relaciones y generar estrategias; algunas de éstas consistieron en: 1) descomponer el lado AB (ver Figuras 6, 7 y 8), y 2) descomponer la diagonal BD en los segmentos m , r y k (ver Figura 9).

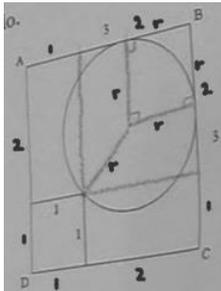


Figura 7.

Handwritten equations:
$$1 + 2 - r + r = 3$$

$$3 = 3$$

Figura 8.

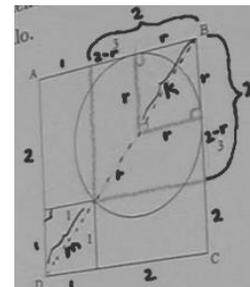


Figura 9.

En la Figura 10, se presenta un contraste entre el esquema del proceso de resolución de un resolutor ideal y el del fragmento 1 del profesor B, correspondiente a su primera estrategia. Como se puede ver en la Figura 10, por una parte, una similitud entre ambos procesos tiene que ver con el éxito que tienen ambos al resolver el problema, lo cual puede deberse a la presencia de los mecanismos de control.

Por otra parte, una diferencia entre ambos procesos es el centro del proceso de resolución. Respecto

al proceso del resolutor ideal, el centro es la planificación y la exploración una etapa de apoyo en la que entran en juego distintas heurísticas. Contrariamente en el proceso del profesor B el centro es la exploración; él tiene menores dificultades para establecer un plan, pero para refinarlo recurre con frecuencia a dicha etapa, ya que le resulta útil para justificar sus decisiones respecto a cómo y cuándo implementar un plan. En la etapa de exploración, por parte del profesor B se destaca la heurística de introducir trazos auxiliares, siendo otra diferencia entre ambos procesos, ya que el resolutor ideal parece tener un amplio inventario de heurísticas.

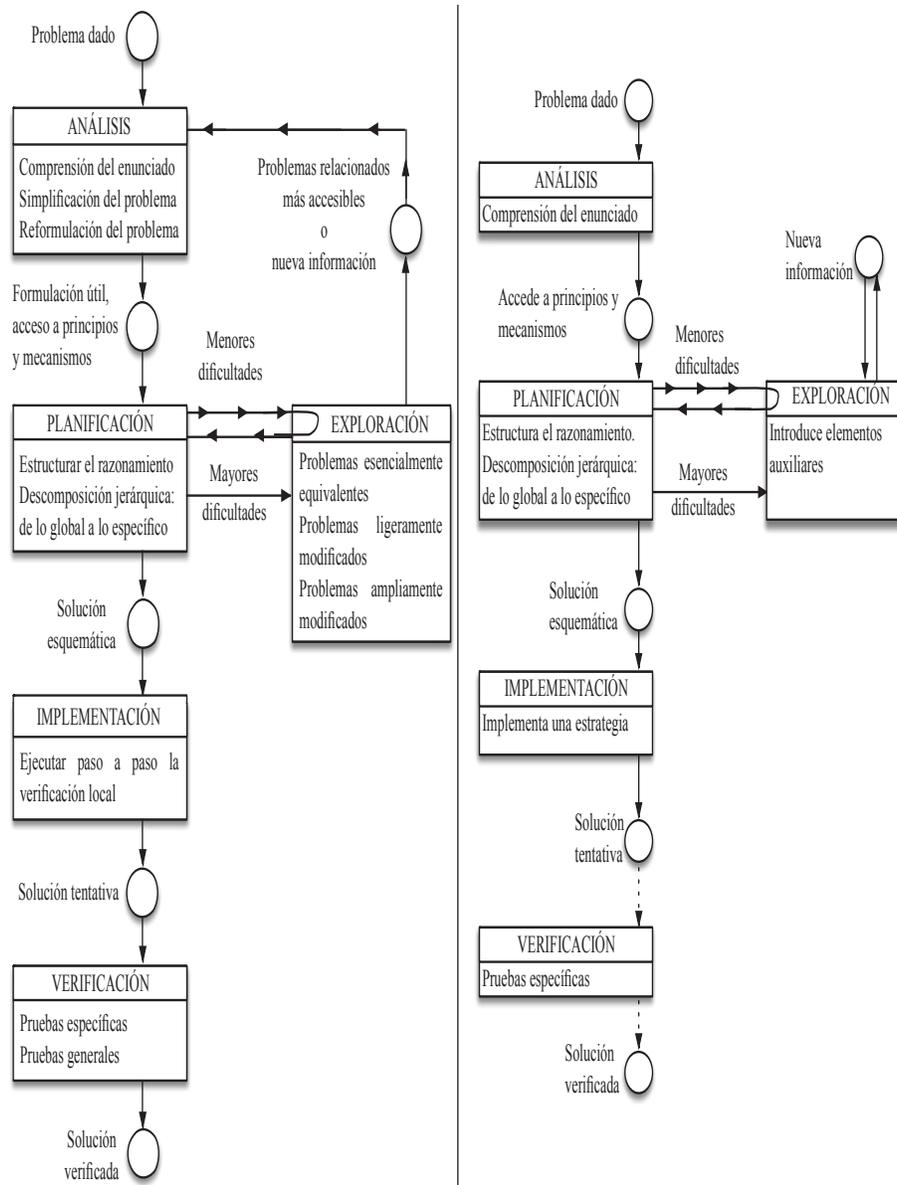


Figura 10.

En las comparaciones que se hicieron entre ambos procesos, el profesor B parece estar muy cerca de ser un resolutor ideal, o bien, experto, ya que con frecuencia, durante todo el proceso muestra un comportamiento de Tipo C (Schoenfeld, 1985). Dicho comportamiento tiene que ver con la influencia positiva de las decisiones, que se percibe en el proceso cuando él hace un cuidadoso monitoreo, para tomar decisiones para elegir o desechar recursos y estrategias, hasta para justificar por qué lo hace. Sin embargo, en algunos momentos este cuidadoso monitoreo está ausente, especialmente en la etapa de verificación de la solución, en la que utiliza una ecuación con una infinidad de soluciones, sin percatarse de tal particularidad; por lo que la verificación de la solución no es válida (ver Figura 11), donde $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ y $r\sqrt{2}$ son la medida del radio y del segmento k de la Figura 9, respectivamente).

Figura 11.

■ Conclusiones

Las conclusiones de este estudio pueden resumirse de la siguiente manera:

- 1) Ninguno de los dos profesores ha tenido dificultad para comprender en qué consiste el problema. Sin embargo, el profesor A pareciera tener más dificultades para comprender algunos de los datos implícitos de éste.
- 2) La exploración es la etapa a la que le dedican más tiempo ambos profesores.
- 3) Los recursos heurísticos de los profesores han resultado en general pobres, limitándose así a heurísticas como la de establecer subobjetivos e introducir elementos auxiliares durante la exploración.
- 4) Ambos profesores utilizaron la descomposición de la diagonal BD como estrategia heurística, pero han tenido algunas dificultades para aplicarla, sobre todo el profesor A, que no pudo resolver el problema sin ayuda del entrevistador. Otras estrategias consisten en la descomposición de una cuerda en dos segmentos, de la diagonal del cuadrado circunscrito, y del cuadrado ABCD en áreas.
- 5) En ambos procesos, con frecuencia se puede deducir a partir de la implementación que existe un plan; salvo en algunos momentos que en el proceso del profesor A se describe explícitamente un plan.

- 6) Ninguno de los dos profesores ha logrado verificar que la solución encontrada era la correcta. Ambos tienen dificultades en la verificación: para el profesor A consiste en revisar paso a paso los procedimientos, o bien reconstruir la estrategia. El profesor B, aunque sabe en qué consiste la verificación de la solución, utiliza recursos inadecuados.
- 7) Algunas de las acciones que llevan a cabo los profesores para resolver el problema son: 1) hacer y desechar conjeturas, 2) establecer relaciones, 3) descomponer segmentos, 4) supervisar el proceso de resolución, 5) apelar a recursos en la memoria de largo plazo, entre otras.
- 8) Respecto a la influencia de la toma de decisiones cuando se presentan dificultades o se requiere emplear otra estrategia durante el proceso de resolución, el profesor A abandona estrategias fallidas y desecha sus conjeturas falsas, por lo que el proceso se ve detenido en repetidas ocasiones. En el proceso de resolución, el profesor B generalmente hace una supervisión constante de sus acciones, lo cual muestra en el constante y cuidadoso monitoreo que realiza para justificar sus decisiones.

■ Referencias bibliográficas

- Maher, C. A. & Sigley, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. In S. Lernman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.