# NIVELES DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO IDENTIFICADOS POR DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN CONTINUA

**Jesús Victoria Flores Salazar, Daysi García, Saddo Ag Almouloud, Maria José Ferreira da Silva**
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP (Perú).
Pontificia Universidad Catolica de São Paulo (Brasil)
jvflores@pucp.pe, garcia.daysi@pucp.pe, saddoag@pucsp.br, zeze@pucsp.br

**RESUMEN:** La presente investigación evidencia resultados de una formación continua de profesores en geometría, que consta de cuatro encuentros y en el que participan dieciséis docentes peruanos de Educación Básica Regular - nivel secundario. Basados en una secuencia de actividades y en el enfoque teórico de Parzysz, específicamente en los niveles de geometría, los docentes desarrollan diversas estrategias de resolución de las actividades y realizan un análisis matemático y didáctico de las mismas. Para este reporte presentamos el desarrollo de dos de las actividades realizadas en el primer encuentro. En cuanto a los resultados de la formación notamos que los docentes participantes utilizan estrategias de resolución en los niveles de geometría concreta y, geometría espacio-gráfica, de acuerdo con Parzysz, sin embargo, aún presentan confusión entre los tipos validaciones perceptivas y deductivas.

**Palabras clave:** geometría, pensamiento geométrico, formación de profesores

**ABSTRACT:** The present research provides the outcomes of Geometry teachers' continuous training that consists of four meetings where sixteen Peruvian teachers, of secondary school- regular basic education, participated. Based on a sequence of activities and the theoretical approach of Parzysz, specifically, in the levels of geometry, teachers develop different strategies for solving activities and analyzed them from a mathematical and didactic perspective. In this report we show the development of two of the activities carried out in the first meeting. Regarding the results of the training, we noted that the teachers use solving strategies in the levels of concrete geometry, and in space-graph geometry in accordance with Parzysz; however, they are still mixed-up with respect to perceptive and deductive types of validations.

**Key words:** geometry, geometric thinking, teacher training

## Consideraciones iniciales

En el presente artículo mostramos un recorte de una formación de profesores de matemáticas que forma parte del proyecto internacional "*Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática em ambientes tecnológicos*" desarrollado entre investigadores de la PUC-SP y la PUCP. Este proyecto, de forma general, tiene como finalidad analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; dar herramientas teóricas al trabajo de profesores e investigadores interesados en la integración de investigaciones en educación matemática; producir conocimiento en el área de formación de profesores de matemáticas, entre otros objetivos.

Es por ello, que presentamos un recorte del proyecto (primer encuentro) pues queremos dar elementos teóricos y prácticos a los profesores en formación continua que están comprometidos con la integración de la educación matemática en su práctica docente.

## Aspectos teóricos de la formación

Sobre formación continua de profesores, André (2000) señala que este tipo de formación es considerada indispensable para el profesor tanto para actualizar conocimientos y técnicas del área en la cual trabaja, como para desarrollar competencias y actitudes.

En esa misma línea de pensamiento, Pacheco y Flores (1999) explican que la tarea fundamental del profesor es seleccionar y organizar actividades didácticas adaptándolas a situaciones específicas de su área en ejercicio y que todo esto debe realizarse por medio de una reflexión en la acción.

Por otro lado y, en consonancia con lo afirmado por André (2000) en cuanto a los conocimientos del área, presentamos aspectos del enfoque teórico de Parzysz (1989) que identificó diferentes niveles de geometría y estudió los procesos y mecanismos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria y plantea una clasificación que toma en cuenta los objetos en el juego: físicos o teóricos y las formas de validación: perceptiva (basadas en las representaciones) o deductiva (con base en aspectos teóricos). El investigador, presenta la siguiente clasificación:

*Concreta (G0)* en el que se parte de la realidad, de lo concreto y es donde los objetos matemáticos en estudio son materializados.

*Espacio-gráfica (G1)* es la geometría de representaciones figurales y gráficas; en la que los objetos son bidimensionales. La justificación de las propiedades de los objetos representados es hecha por lo que se ve.

*Proto-axiomática (G2),* en este tipo los objetos son teóricos y las demostraciones de los teoremas son hechas a partir de propiedades y/o características de los mismos, no habiendo la necesidad de explicitar un sistema de axiomas. En G2 las validaciones son realizadas por medio de propiedades del objeto matemático representado y;

*Axiomática (G3)* en la que los axiomas son explicados completamente.

De acuerdo con el autor, en G0 y G1 los objetos son concretos y las justificaciones y validaciones son perceptivas, mientras que en G2 y G3 los objetos son teóricos y las validaciones son deductivas.

Parzysz (2001;2006) señala que se debe tomar en cuenta que este enfoque teórico no describe un desarrollo progresivo de niveles de geometría, sino que permite identificar los niveles que se evidencian al resolver un problema que envuelve contenidos de geometría.

Con base en lo anterior, exponemos en seguida el desarrollo de las dos actividades que forman parte del primer encuentro.

## Desarrollo de la formación

La formación fue realizada en 2015 y constó de cuatro encuentros, los cuales estuvieron a cargo de los investigadores de la PUC-SP, Prof. Saddo Ag Almouloud y la Prof. Maria José Ferreira da Silva y, en los que colaboraron también investigadores de la PUCP y además, participaron dieciséis profesores peruanos de matemática del nivel secundario.

**Tabla 1.** Estructura del primer encuentro

| Actividad | Nombre de la actividad |
|---|---|
| 1 | Una introducción al estudio de diferentes geometrías |
| 2 | Menor distancia |

La tabla 1 muestra las dos actividades del primer encuentro que presentaremos en este artículo. En la primera actividad llamada “una introducción al estudio de diferentes geometrías” los formadores explicitan aspectos del enfoque teórico de Parzysz (1989) que servirá de base para la segunda actividad llamada “menor distancia” en la que se les solicita a los profesores, realizar un análisis matemático y didáctico de la misma.

En relación a la colecta de datos, estos fueron colectados por medio de fichas de trabajo y grabación de video.

Subrayamos que el material de las dos actividades que presentamos en este reporte fue elaborado y desarrollado por los profesores investigadores Saddo Ag Almouloud y María José Ferreira da Silva, ambos de la PUC-SP.

**Actividad 1**

Probar/demostrar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º. ¿Cuál sería una estrategia de resolución ubicada en el: G0, G1, G2, G3?

- En el G0, se puede confeccionar un triángulo de papel y luego recortar con una tijera los tres ángulos, formando con ellos un semicírculo. En este caso, el docente estará en G0 que corresponde a la geometría concreta, según el investigador, porque manipula un pedazo de papel de forma triangular y lo recorta.
- Por otro lado, se puede dibujar un triángulo o construir un triángulo con la ayuda de un software (ver figura 1), medir los tres ángulos y observar la suma de sus medidas comparándola con el resultado de sus colegas, en este caso el docente estará en G1 (geometría espacio-gráfica), pues conjetura el resultado y lo comprueba empíricamente en la comparación con los resultados de otros sujetos.

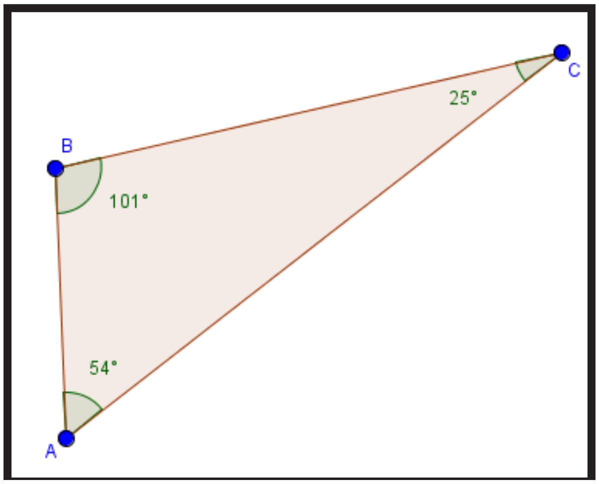



**Figura 1.** Estrategia de resolución en G0

- Si el docente traza una recta paralela en uno de los lados (ver figura 2) y señala que las retas paralelas determinan ángulos alternos internos congruentes para probar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, él estaría en el G2 (geometría proto axiomática, pues traza una recta paralela, usa la congruencia de los ángulos alternos internos y realiza deducciones en base a estos trazos auxiliares realizados en la figura.

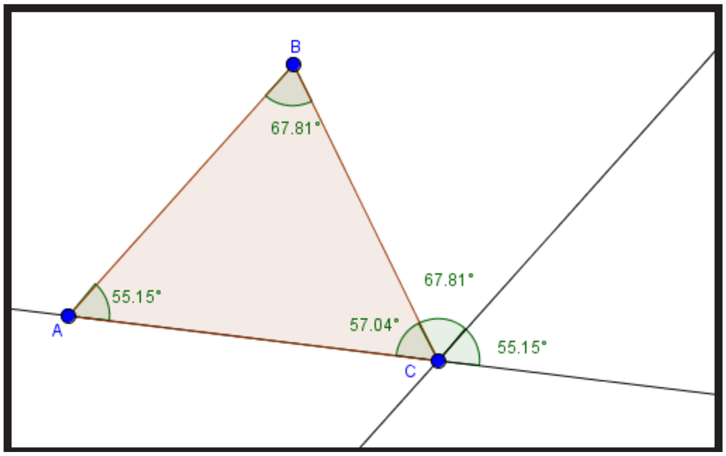



**Figura 2.** Estrategia de resolución en G1 (material de formación 2015, p. 3)

- En caso de que el docente realice una demostración basada en un sistema axiomático de referencia, él estará en el G3 (geometría axiomática).

En consonancia con el enfoque teórico, notamos que lo percibido pauta (conjetura) y controla (verificación) lo sabido, pero no lo comanda.

A continuación, presentamos la actividad "menor distancia" en la que se pide hacer un análisis matemático didáctico según el enfoque de Parzysz. Esta reflexión didáctica fue realizada por los docentes e investigadores que participaron en la formación.

**Actividad 2**

Los paralelogramos *ABCD* y *LMNO* de la figura 3 son tales que *AB* = *LM*. ¿Los dos paralelogramos tienen la misma área? ¿Y el perímetro? Justifique sus respuestas.

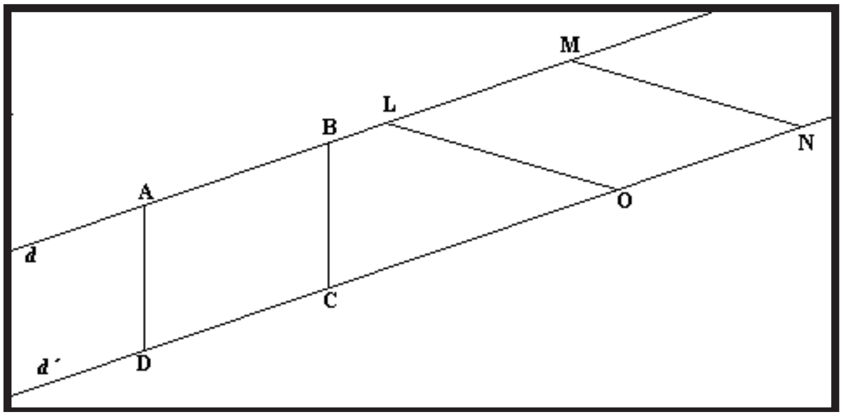



**Figura 3.** Actividad “menor distancia” (material de formación 2015, p. 5)

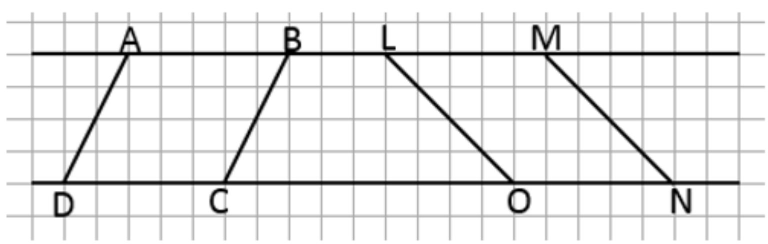
Presentamos, para este artículo el desarrollado de la actividad 2 realizada por un docente participante al que llamaremos Alejandro para resguardar su identidad.

***Resolución***

***Nivel G0:*** *para este nivel procedemos de la siguiente manera:*

***a) Respecto al área:***

*Se puede recortar el paralelogramo ABCD (regular) y llevar sobre el paralelogramo LMNO*




*Se realiza un nuevo recorte, se traslada una región triangular y se comprueba que el área del paralelogramo ABCB es igual al área del paralelogramo LMNO.*

**Figura 4.** Parte a) de la actividad realizada por Alejandro

La figura 4, muestra el trabajo realizado por el profesor y la transcripción de lo escrito por él dadas las condiciones de la actividad los paralelogramos ABCD y LMNO tienen la misma medida de área, el profesor Alejandro explicó que podría recortar la representación del paralelogramo ABCD y después superponer esta figura a la del paralelogramo LMNO, estrategia que el mismo profesor identificó en G0 (geometría concreta).

En seguida, sugiere el docente realizar un nuevo recorte con el fin de trasladar la región triangular y comprobar que ambas figuras poseen la misma área.

En cuanto al perímetro, parte b) que se muestra en la figura 5, se presenta la resolución realizada por el docente, esta afirmación la realiza basado en los conocimientos matemáticos que moviliza.

***Resolución***

***b) En relación al perímetro:***
*Después de realizar el corte se comparan los lados de los paralelogramos, encontrándose que AB = LM, CD = MO; pero AD <LO y BC < MN. Por lo tanto, el perímetro de ABCD es menor que el perímetro de LMNO*

**Figura 5.** Parte b) de la actividad realizada por Alejandro

Sin embargo, para que esté configurado el G0, las validaciones deben ser perceptivas y no teóricas y por la afirmación que observamos el docente realiza una validación “deductiva” que correspondería al G2 (geometría proto axiomática).

El profesor Alejandro en la figura 6, para resolver la misma actividad, pero ahora en G1 realiza trazos auxiliares, es decir, se vale de una cuadrícula para descomponer las figuras (los dos paralelogramos) y luego recomponer para validar que ambos tienen la misma área.

Como lo explica en la figura 6.

***Nivel G1:***
*En este nivel se puede proceder en ambos paralelogramos (regiones) mediante descomposición y reconfiguración de formar rectángulos, descomponerlos en unidades cuadradas, contarlas y compararlas.*

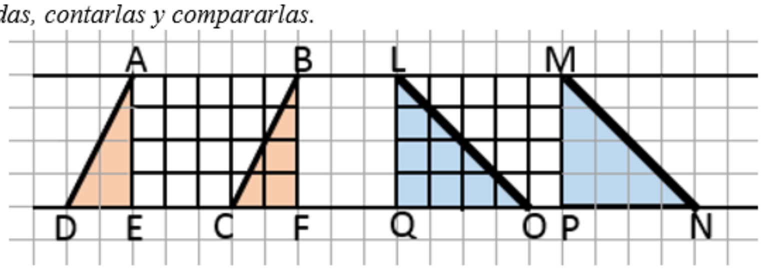



**Figura 6.** Actividad realizada por Alejandro-nivel G1

Sin embargo, con esta estrategia no consigue responder, que sucede con el perímetro de los paralelogramos.

La estrategia de solución de la actividad en G1, con relación al área de los paralelogramos parece la adecuada pues el profesor Alejandro realiza la justificación del área de los paralelogramos representados por lo que ve y no por lo que sabe.

## Consideraciones Finales

Notamos que lo realizado por el docente Alejandro muestra que consigue desarrollar estrategias para G0 y G1, es decir para la geometría concreta y espacio-gráfica por tal razón solamente realiza validaciones perceptivas, en el sentido de Parzysz.

En cuanto al grupo de profesores, podemos afirmar que diez de los dieciséis profesores desarrollaron estrategias similares a las presentadas por el profesor Alejandro, lo cual los ubica en los mismos niveles que él.

En relación a los otros seis profesores del grupo, justificaron sus respuestas con algunas propiedades de paralelogramos y semejanza de triángulos, por lo que pensamos que se encuentran en el tránsito de G1 a G2.

En ese sentido, observamos de manera general que los docentes confunden las validaciones perceptivas con las deductivas y no consiguen desarrollar una “estrategia” basada fundamentalmente en las propiedades y/o características del objeto matemático representado.

## Referencias bibliográficas

André, M.E.D.A. (2000). A pesquisa sobre a formação de professores no Brasil – 1990-1998. En M. Candau (Org.). *Ensinar e aprender: sujeitos, saberes e pesquisa* (p. 83-99). Rio de Janeiro: DP&A.

Pacheco, J. A. y Flores, M. A. (1999). *Formação e avaliação de professores.* Portugal : Porto.

Parzysz, B. (1989*). Représentations planes et enseignent de géométries de l`espace au lycée. Contribution à l`étude de la relation voir/savoir* (Tesis de doctorado). Universidad Paris 7, Paris, Francia.

Parzysz, B. (2001). *Articulatión entre perception et deduction dans une demarche geométrique em PE1*. Extrait du coloque de la COPIRELEM – Tours

Parzysz, B. (2006*).* La géométrie dans l’enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s’agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17. 128-151.