# EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y EL TEOREMA DE BAYES

**Jesús Enrique Pinto Sosa, Jorge Carlos Tuyub Moreno, Javier Lezama Andalón**
Universidad Autónoma de Yucatán. (México), Instituto Tecnológico Superior de Huichapan. (México), Instituto Politécnico Nacional-CICATA. (México)
psosa@correo.uady.mx, jctuyub@iteshu.edu.mx, jlezamaipn@gmail.com

**RESUMEN:** El presente trabajo brinda evidencia sobre la construcción de significados asociados a los objetos matemáticos y que son la base de las propuestas didácticas y el DME que se difunde en el aula. Se analiza la interacción del profesor de matemáticas y el teorema de Bayes identificando la construcción de significados del saber para su enseñanza. Se realizó un estudio de corte cualitativo con un método de estudio de casos con profesores de bachillerato del estado de Yucatán, México. El estudio pretende resaltar la importancia del conocimiento matemático que poseen los profesores y la necesidad de generar espacios para que los profesores de matemáticas reflexionen sobre aquello que conocen y enseñan.

**Palabras clave:** teorema de Bayes, significados, profesor de matemáticas

**ABSTRACT:** The present work provides evidence on the construction of meanings associated to mathematical objects which are the basis of the didactic proposals and the DME that is spread in the classroom. We analyze the interaction of the mathematics teacher and Bayes' theorem by identifying the construction of knowledge meanings for teaching. A qualitative study was carried out with a case study method with high school teachers from the state of Yucatan, Mexico. The study aims to highlight the significance of mathematical knowledge teachers have and the need to create spaces for mathematics teachers to reflect on what they know and teach.

**Key words: Key words:** Bayes’ theorem, meanings, math teacher

## Introducción

Actualmente los diversos sistemas de bachillerato que operan en México cuentan con una asignatura obligatoria dentro de su curricular dedicada a la formación de estocásticos, como respuesta a la demanda de formación de individuos críticos y reflexivos de la realidad en la que se encuentran, capaces de tomar decisiones a través de la recopilación de información de su entorno bajo condiciones de incertidumbre. (Azcárate y Cardeñoso, 2003; Rocha, 2007; Del Pino y Estrella, 2012; Ortiz, 2014).

Si bien, los estocásticos son consideradas como parte de las matemáticas, esta requiere de un tipo de pensamiento diferente a las que se encuentran presentes en otras áreas de la misma (Azcárate, 2006; Rocha, 2007; García, Medina, y Sánchez, 2014; Elizarrarás, 2014). El pensamiento estocástico tiene un grado de complejidad diferente al que presentan el determinista; se basa en el desarrollo de la capacidad de tomar decisiones bajo condiciones de incertidumbre mediante la interpretación y uso de la información que se obtienen en un fenómeno, remarcando que dicha decisión deber ser bajo una base racional, científica y ética (Elizarrarás, 2014; Salcedo, 2006).

Por otro lado, se han realizado investigaciones que dan cuenta de la importancia de fijar la atención más en el profesor y lo que genera su práctica dentro del aula, haciendo énfasis en el conocimiento sobre lo que enseña y el objeto matemático a fin de reflexionar sobre su construcción, sus procesos de institucionalización y de inserción en el ámbito escolar. Se asume que una continua interacción del profesor con los estocásticos debería permitirle profundizar sobre lo que son, su construcción, su difusión y reproducción, a fin de proponer escenarios dentro del aula donde se vive el conocimiento funcional, útil y lo más honesto posible.

Esto último conduce a cuestionamientos sobre la propuesta didáctica que el profesor de matemáticas diseña para su implementación en el aula, en particular, sobre el teorema de Bayes. El proyecto de investigación tuvo por objetivo identificar los significados que el profesor de matemáticas le atribuye al teorema de Bayes y describir la propuesta generada por estos significados.

## El conocimiento del profesor de matemáticas

El interés en el conocimiento del profesor se debe a que las propuestas sobre los estocásticos dentro del aula dependerán exclusivamente de lo que conocen sobre los objetos, al respecto Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) al citar a Ma (1999), señalan:

> los profesores no necesitan un conocimiento probabilístico abstracto, sino requieren una comprensión profunda de la probabilidad básica, de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos probabilísticos y sus aplicaciones

Por tanto, el conocimiento sobre los estocástico está relacionado con esas construcciones del saber lo más honestas posibles, que se llevan a cabo en los diferentes momentos en que profesor interactúa con el saber matemático; siendo estas interacciones las que conforman, construyen y deconstruyen los significados que se promueven en el aula, se estructuran en un plan de clase y sirven de base para tomar decisiones sobre los recursos didácticos que se implementarán para el aprendizaje. (Figueroa, Baccelli, Prieto y Moler, 2013).

En términos de la investigación, el interés está en el conocimiento que el profesor usa para la enseñanza y se distingue por un conocimiento sobre aquello que enseña y el conocimiento de las formas de construir, difundir y negociar dentro del aula; dicho conocimiento es denominado Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) caracterizado por las formas en que el profesor representa y formula un saber matemático para hacerlo comprensible a otros bajo un contexto específico de enseñanza (Pinto, 2010).

En específico, son dos componentes del CDC que nos permiten comprender los significados asociados al saber: 1) El conocimiento del contenido a enseñar, se basa en el supuesto de que el profesor debe ser consciente de la naturaleza de los saberes matemáticos que le permitan tomar decisiones respecto a su enseñanza y sobre los contexto que propone para su aprendizaje y 2) Conocimiento de la didáctica específica, establece que un conocimiento de las matemáticas no lo es todo en la labor profesional del profesor, también es pertinente conocer las formas en que este conocimiento puede ser llevado al aula, los momentos apropiados, las formas de relacionarnos, las dificultades, las secuencias didácticas más apropiadas, las representaciones y las actividades que faciliten a los alumnos aprehender matemáticas

## El teorema de Bayes en relación al conocimiento del profesor

La incorporación del teorema de Bayes en contextos escolares ha tenido fuertes implicaciones en cuando a su enseñanza, algunas veces limitado a una explicación más determinista o bien frecuentista de la probabilidad; aunado a ello se le atribuye al teorema una complejidad debido a su matematización que involucra propiedades, definiciones y conceptos como la probabilidad simple, compuesta, condicional, particiones, eventos mutuamente excluyentes, eventos independientes, regla del producto, regla de la adición, entre otros (Díaz, Ortiz y Serrano, 2007), tópicos que debido a la estructura temática se ven aislados y sin relación uno con otro, dificultando la comprensión del teorema de Bayes.

Contrario a la escuela, los tratados de Bayes y Price (1763) señalan que el propósito de este teorema era proponer una estrategia para el cálculo de una probabilidad simple (la razón de éxito de un evento y posibles) de forma inversa. Bayes propone el hecho de pensar que si ocurrió un evento, este podría ser explicado bajo diversas causas o bien diversas hipótesis, por tanto era necesario hacer inferencia sobre la posibilidad de que una de esas causas o las causas generaron dicho evento.

El pensamiento de Bayes, tiene la intención de expresar que a todo suceso corresponde una causa que ha determinado dicho efecto, de ser así, es posible encontrar un método que permita establecer resultados acerca de la probabilidad que tiene de ocurrir un suceso bajo cierta causa o circunstancia, basado en la experiencia que se tiene en los efectos que han provocado un número de veces y han intervenido en su no ocurrencia otro cierto número de veces. Para Bayes la experiencia adquirida a partir de la repetición de un evento se postula como una hipótesis acerca de su comportamiento futuro; estas adquiridas mediante la observación se establecen como probabilidad a priori, y la hipótesis, que en el momento no es observable, luego de ser comprobada se establece como una probabilidad a posteriori.

$$P(a \mid b) = \frac{P(b \mid a)P(a)}{P(b)} \qquad (1)$$

En la ecuación 1, se resalta que $a|b$ es la hipótesis de que un suceso $a$ haya ocurrido bajo ciertas circunstancias $b$, para esto se conoce los datos empíricos de $b$ denominados las probabilidades a priori; dichas probabilidades determinan un valor de éxito en que el evento $a\ y\ b$ ocurren simultáneamente $(a \cap b)$ bajo condiciones de dependencia dando lugar a calcular la probabilidad de la razón de la posibilidad de que ocurre $a$ y la ocurrencia de $b$ cuando el suceso $a$ ocurrió, dividido entre la ocurrencia de la circunstancia $b$ ya que es la que nos interesa. Esta probabilidad va acorde a la probabilidad clásica, ya que la ocurrencia simultánea $(a \cap b)$ es las causas favorables y la ocurrencia de $b$ las causas posibles de nuestro interés.

En efecto, lo que hay detrás del teorema de Bayes, es un cambio de creencias respecto a la o las causas de un evento, estas creencias están basadas en información empírica. Cuando evaluamos las causas condicionándolo al evento sucedido, se realiza una hipótesis previa, la cual después de ser valorada, evidentemente provocará un cambio de creencias con respecto a las causas que originan dicho evento. El teorema, permite observar el grado de racionalidad con la que una persona cambia sus creencias cuando consigue nueva información, este cambio de creencias debería ayudarlo a tomar una decisión de cómo actuar ante tal evento.

## Marco Metodológico

De acuerdo al objetivo, se consideró el desarrollo de una investigación de corte cualitativo; este enfoque permite comprender la realidad del conocimiento del profesor de una forma dialéctica y sistémica, y más aún cuando se considera que los significados surgen de aquello que conoce sobre el saber (sus constructos, nociones, naturaleza, etc.) en un contexto de la enseñanza y aprendizaje bajo un paradigma naturalista e interpretativo.

En cuanto al método, se eligió un estudio de casos debido a que puede ser: 1) Descriptivo si lo que se pretende es identificar y describir la relación que tienen los diferentes factores que influyen en el fenómeno, y 2) Exploratorio cuando pretende vincular la teoría con la realidad del objeto de estudio (Martínez, 2006).

En cuanto a los casos se contaron con profesores con la misma formación inicial, que estuvieran laborando en una institución de educación media superior, que en el período de la investigación estuviera impartiendo la materia relacionada con los estocásticos.

Para el establecimiento de las unidades de análisis se consideró la propuesta de Pinto (2010) sobre la perspectiva teórica del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC). Dicha propuesta surge del análisis y reflexión sobre diferentes investigaciones de carácter sistémico y con rigor científico, que han establecido algunos aspectos que componen y caracterizan el CDC. En su propuesta se dividen las tres componentes en dimensiones, que son las formas en que se divide cada componente y que son las unidades de análisis; a su vez estas dimensiones se segmentan y codifican en indicadores, las que permiten recolectar los datos y categorizar todo lo observado dentro CDC. De tal forma que los componentes quedan particionados de la siguiente manera:

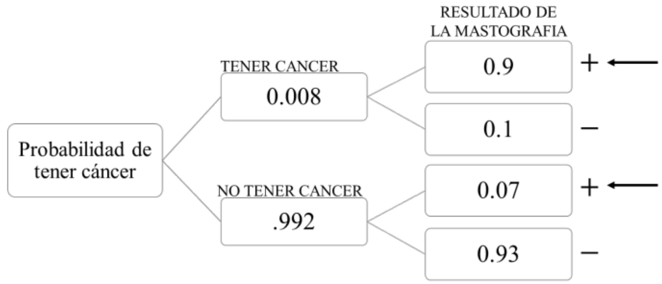
- El conocimiento del contenido a enseñar: contiene 6 dimensiones, 18 indicadores y 25 subindicadores
- El conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales: contiene 6 dimensiones, 24 indicadores y 19 subindicadores

Partiendo del estudio del teorema de Bayes y el sistema de dimensiones e indicadores del CDC de Pinto, se establecieron tres tipos de instrumentos de recolección de información: 1) una entrevista en profundidad, 2) entrevista basada en un problema típico y 3) los materiales utilizados por los profesores en su enseñanza.

## Resultados

En cuanto a los resultados se discute el caso de Ana, sus significados y la propuesta de enseñanza sobre el teorema de Bayes. Respecto a la propuesta de enseñanza se propone discutir sobre un ejemplo concreto:

> Se sabe que 0,8 % de las mujeres adultas pueden tener cáncer de mamas. Si una mujer tiene cáncer de mamas, hay un 90 % de probabilidad que tenga una mastografía positiva. Si una mujer no tiene cáncer de mamas, todavía existe un 7 % de probabilidades que tenga una mastografía positiva. Si una mujer va al control anual y tiene su mastografía positiva ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer? (Strogatz, 2010)




$$\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{0.008(0.90)}{\underbrace{0.008(0.9) + (0.992)(0.07)}_{\text{SUBTOTAL}}} = \frac{0.0072}{0.07664} = 0.0939$$

**Figura 1.** Trascripción de la propuesta de Ana para la enseñanza del teorema de Bayes

La figura 1, representa el modelo que Ana promueve en el salón de clases, su propósito es la reducción de la fórmula del teorema de Bayes a la forma clásica de la probabilidad, casos favorables entre casos posibles. Para dicha reducción, tiene que llenar cada una de las ramificaciones con la información proporcionada y suponer que cada evento tiene su contraparte: Si el evento $A$: tiene cáncer, $A'$: está determinado por no tener cáncer; sí $B$: tiene una mastografía positiva, $B'$: tiene una mastografía negativa; dicha organización del contenido responde a la experiencia en el cotidiano. Sin embargo Ana no distingue en que la naturaleza de esta organización responde a que el espacio muestra está conformado por subespacios equiprobables, mutuamente excluyentes y exhaustivos.

Por otra parte, ella sabe que debido a que el teorema de Bayes es una fórmula para calcular probabilidades, debe poder reducirse a su forma más clásica aunque la profundidad de dicha aseveración es basada en su experiencia. Para el cálculo de los casos favorables entre los casos posibles se reducen las opciones a considerar de acuerdo al evento que ya sucedió, es decir, Ana asume que el teorema de Bayes es una probabilidad condicionada. Dicha condición nos permite el cálculo de lo que ella denomina subtotal, mediante las multiplicaciones de las probabilidades en cada ramificación y la suma de todos los casos en los que, según el ejemplo, se obtiene una mastografía positiva. Cuando se le cuestionó del por qué hay que multiplicarlos y no sumarlos, su respuesta fue debido a que estos eventos dependen de lo que paso antes. Del subtotal la información pedida responde a un caso, que se convierte automáticamente en la probabilidad del caso favorable.

Cabe señalar, que para Ana el teorema de Bayes se convierte en una generalidad de la probabilidad condicionada, ya que en sus palabras “Es calcular una probabilidad condicionada, teniendo otras posibilidades condicionadas”, este aspecto es cuestionable sobre cuál sería la diferencia entre ambas nociones la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes.

La figura 2, enfatiza los significados asociados al teorema de Bayes por la profesora Ana, que continuamente estuvieron presentes en su discurso y que son los que comunica y de los que se apoya para dar validez al modelo que propone.

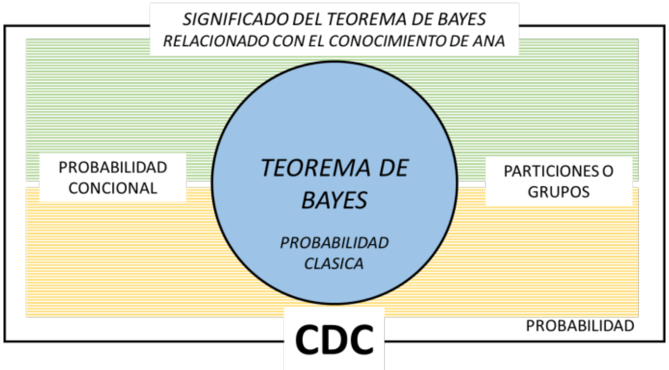



**Figura 2.** El significado del teorema de Bayes

La propuesta de Ana es acorde al enfoque determinista de la probabilidad, pues permite establecer procedimientos y algoritmos que tienden a enfocarse en el cálculo de probabilidades, y nuevamente cumple con el requerimiento escolar. La propuesta de Gómez (2000), que es la propuesta de Ana, señala que en el diagrama se haga mención de elementos como eventos dependientes, excluyentes, cálculo de probabilidad conjunta, etc., como parte comprender porque la asignación de probabilidades en cada una de las ramificaciones y el cálculo de los casos favorables entre los casos posibles.

## Conclusiones

Con base en lo anterior, sobresale la afirmación de Llinares (1989), quien señala la importancia de los significados que los profesores le otorgan a los saberes, ya que estos determinan el modo en el que una persona ve a los saberes, los usos que les da, los contextos en que decide utilizarlo y también la forma en que los trasmite o habla sobre ellos. La propuesta de Ana responde a los significados que ella ha asociado al teorema de Bayes, debido a que su interacción se reduce a la información que se encuentra en la mayoría de los libros de texto, asimismo su desarrollo es meramente empírico y tiende a ser lógico, común a la toma de decisiones que se hace en el cotidiano y donde solo es necesario saber que la probabilidad puede resumirse en una razón de casos favorables entre casos posibles.

Estos resultados apoyan la idea de que es mediante la interacción continua con el saber matemático que los profesores construyen su conocimiento alrededor de un saber específico, pues dependen de aquellos significados que construyan y reconstruyan en cada momento que ellos se acerquen y conozcan esos saberes, no solo en el ámbito escolar, sino en diversos ámbitos donde es funcional;

mirar los saberes solo en el contexto escolar, es solo mirar un objeto matemático producto de una transposición didáctica que ha perdido mucho de aquello que le brinda significado.

Por tanto, la profundidad de los saberes se logrará cuando se permita al profesor reflexionar y problematizar lo que conoce del saber, de interactuar con él en diferentes escenarios y en profundizar sobre la epistemología del saber. Esta profundidad brinda autonomía en la práctica lo que permite al profesor diseñar propuestas, rediseñar el discurso matemático escolar y cambiar el paradigma de enseñanza de los estocásticos, pasando de la centración del objeto a la centración del saber, de la trasmisión de conocimiento a la construcción colectiva de los saberes.

Con lo anterior, se busca enfatizar la importancia de estudios que den evidencia del conocimiento del profesor, de la necesidad de proponer espacios y mecanismos para la interacción y sobre entender el conocimiento del profesor basado en los significados que le otorgan a los saberes, y más aún cuando estos determinan el modo en el que una persona ve a los saberes, los usos que les da, los contextos en que decide utilizarlo y también la forma en que los trasmite o habla sobre ellos.

## Referencias bibliográficas

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. (2003). Conocimiento Profesional de referencia con relación al conocimiento probabilístico. Una aproximación a las ideas de los futuros profesores de primaria sobre el mismo. *Acta del Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. 27*, 941-984

Azcárate, P. (2006). ¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad? Universidad de Cádiz. Recuperado de: http://www.earlystatistics.net/.../files/Azcarate_thales2006_Conferencia.doc

Bayes, T. y Price, M. (1763). An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price. In a letter to John Canton, AMFRS. *Philosophical Transactions* (1683-1775), 370-418.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49(1)*, 53-64.

Díaz, C., Contreras, J., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Boletim de Educação Matemática, 26(44)*, 1207-1225.

Díaz, C., Ortiz, J., y Serrano, L. (2007). Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del Teorema de Bayes. *Investigación en Educación Matemática XI*. 199-208.

Elizarrarás, S. (2014). El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docente para la educación básica: Viabilidad, Trascendencia y Pertinencia. *Libro de avances de investigación en la mejora de la educación en la formación de docentes, 2*, 15-27

Figueroa, S., Baccelli, S., Prieto, G., y Moler, E. (2013). Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas Bayesianos. *Revista de Educación Matemática*.

García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5-23.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión*, (20)

Ortiz, J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM

Pinto, J. (2010). Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudio de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación. *Tesis doctoral no publicada*. Universidad de Salamanca

Rocha, P. (2007). Epistemología del razonamiento estadístico y aleatorio y su desarrollo a partir de proyectos de trabajo estadístico como innovación en la enseñanza de los objetos de estudio estocásticos. *Memorias del ENAES*. Bogotá.

Salcedo, A. (2006). Didáctica de la Estocástica. Universidad Nacional Abierta. Caracas.