



Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Concurso de acceso a una plaza de Profesor Titular de Universidad del área Didáctica de la Matemática (Resolución de 27 de febrero de 2012, de la Universidad de Granada, por la que se convoca concurso de acceso a plazas de cuerpos docentes universitarios. BOE 65, 11 de marzo de 2012).

Código de la plaza: 7/1/2012

15 de junio de 2012

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
<i>Primera Parte. Proyecto Docente</i>	
1. CONTEXTO ACADÉMICO E INSTITUCIONAL	7
1. Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada	8
2. El Grado de Maestro de Educación Primaria	8
3. Expectativas Formativas	10
4. Estructura del Grado	12
5. Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria	14
6. Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas de Educación Primaria	17
7. Competencias Matemáticas en Educación Primaria	19
2. LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN LA UNIVERSIDAD DE GRANADA	21
1. Una Necesidad Constatada	22
2. Prioridades de la Investigación Sobre Formación de Profesores	24
3. Conocimiento y Competencias del Profesor de Matemáticas	26
4. El Análisis Didáctico en la Formación de Maestros	31
5. Fundamentación del Proyecto Docente	33
3. PROGRAMACIÓN DE LA MATERIA “BASES MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA”	37
1. Competencias Generales y Específicas	38
2. Objetivos	39
3. Temario de Contenidos	40
4. Metodología Docente	43
5. Organización Temporal	46
6. Evaluación	47

7. Documentación de la Materia para los Estudiantes	56
4. BASES MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA	59
Bloque 1. Números y Operaciones	61
Bloque 2. Geometría	101
Bloque 3. La Medida: Estimación y Cálculo de Magnitudes	133
Bloque 4. Tratamiento de la Información, Azar y Probabilidad	157
<i>Segunda Parte. Proyecto de Investigación</i>	
5. APRENDIZAJE DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA EN FORMACIÓN INICIAL	175
1. Planteamiento y Contexto de la Investigación	176
2. Antecedentes	176
3. Preguntas y Objetivos de la Investigación	179
4. Metodología y Plan de Trabajo	180
5. Beneficios del Proyecto	183
6. Otras Actividades de Investigación	184
6. REFERENCIAS	193
ÍNDICE DE DOCUMENTOS ANEXOS	209

“Ninguna herramienta, por muy perfecta que llegue a ser, alcanzará a suplantar al afecto y la palabra orientadora del maestro. Porque no hay mejor pedagogía que la del amor y el ejemplo.”

Federico Mayor Zaragoza

Prólogo al libro *Nadie olvida a un buen maestro*, de Raúl Cremades

Introducción

El proyecto docente e investigador que he elaborado responde a la Resolución del 27 de febrero de 2012, de la Universidad de Granada, por la que se convoca concurso de acceso a plazas de cuerpos docentes universitarios, publicada en el BOE número 65 el 16 de marzo de 2012 (Universidad de Granada, 2012). En esta resolución figura una propuesta para cubrir una plaza vacante con el siguiente perfil (p. 24138):

- ◆ Código: 7/1/2012
- ◆ Identificación de la plaza: Profesor Titular de Universidad
- ◆ Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática
- ◆ Departamento: Didáctica de la Matemática
- ◆ Actividad docente: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas
- ◆ Actividad investigadora: Formación Inicial y Aprendizaje de los Profesores de Matemáticas de Educación Obligatoria

La concreción de la actividad tiene la misma denominación que uno de los seis módulos de formación didáctico-disciplinar que organizan el Grado de Maestro en Educación Primaria: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a). En la Universidad de Granada, este módulo está conformado por varias materias que describiré globalmente más adelante. En mi propuesta de proyecto docente desarrollaré una de ellas, denominada “Bases matemáticas para la Educación Primaria”, que se ubica en el primer curso del citado Grado como asignatura obligatoria.

En relación con la actividad investigadora, presento un proyecto de investigación que, respondiendo al perfil seleccionado, se centra en el aprendizaje que desarrollan profesores de Educación Primaria que cursan un modelo formativo específico en el marco del Grado de Maestro en Educación Primaria.

El área de conocimiento en la que se adscriben tanto el proyecto docente como el proyecto de investigación es *Didáctica de la Matemática*. Esta área ha tenido un desarrollo relativamente reciente como disciplina científica durante el cual ha sido necesario establecer y delimitar sus fundamentos y su finalidad, definir y acotar sus campos y problemas de actuación y caracterizar los agentes e instituciones participantes. En palabras de Luis Rico, la Didáctica de la Matemática

se ocupa, en primer término, de un conjunto de problemas que proceden de un campo de fenómenos que surgen de la actividad humana, cuyo estudio da lugar a una disciplina organizada. La Didáctica de la Matemática trata de conjuntar herramientas de muy diversas procedencias para atender a una tarea social relevante y abordar el núcleo de su competencia: los fenómenos de transmisión, comunicación y construcción del conocimiento matemático, de los que se derivan los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (...) Es la disciplina dedicada al estudio racional y crítico de los problemas de la educación que surgen cuando las matemáticas son instrumento principal de formación, parte crucial del patrimonio cultural que hay que transmitir a los ciudadanos, cuando se requiere de profesionales para esta formación. (Rico, 2012, p. 48)

Por tanto, la Didáctica de la Matemática tiene su campo de estudio y aplicación en la educación matemática. Este es el marco en el que se ubica tanto el proyecto docente, que propone un modo de abordar la formación inicial de los profesores de matemáticas, como el proyecto de investigación, que presenta un modelo de análisis de los resultados de esa formación.

La educación matemática sostiene como principio fundamental que todos los ciudadanos alcancen, por medio de las matemáticas, el máximo desarrollo posible de todas sus capacidades intelectuales, sociales, culturales y afectivas. Las matemáticas forman parte activa de la tradición cultural de las sociedades; contribuyen singularmente a la formación de las personas; proporcionan herramientas para la actividad laboral y el ejercicio profesional; y son instrumento de preparación y formación para la ciudadanía (Rico y Lupiáñez, 2008).

Esta última característica que destaca el papel de las matemáticas en la formación integral de los ciudadanos, ha tenido un gran énfasis en varias propuestas curriculares recientes que promueven un enfoque funcional de las matemáticas escolares. Según este enfoque, los conceptos y procedimientos matemáticos constituyen herramientas mediante las que actuamos para dar respuesta a cuestiones, problemas e interrogantes. Esta perspectiva funcional se concreta más en cómo los escolares pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana, que en controlar qué contenidos del currículo han aprendido. Es obvio que para abordar la resolución de problemas se requieren un conocimiento teórico y un dominio técnico, pero el carácter funcional en las matemáticas propugna que no sean sólo esos los aspectos que se tengan en cuenta en la Educación obligatoria, sino que se persiga, además, que los escolares sean capaces de poner en juego y aplicar ese conocimiento y ese dominio técnico para resolver problemas en una variedad de situaciones y contextos.

En el caso del currículo español de Educación Obligatoria, también se destaca la visión funcional de las matemáticas. Se hace explícita la necesidad de formar a nuestros escolares de manera que sean capaces de afrontar la resolución de problemas en diferentes situaciones y contextos; y esa necesidad formativa, se expresa en términos de competencias básicas.

En el caso de la competencia básica de matemáticas, existen unos descriptores que caracterizan su finalidad (Rico y Lupiáñez, 2008):

- ◆ *La competencia matemática se muestra en la habilidad para el uso de conceptos y procedimientos matemáticos diversos, con el fin de producir, interpretar, y expresar información en términos matemáticos, ampliar el conocimiento de la realidad y abordar y resolver problemas.*
- ◆ *La competencia matemática incluye conocimientos matemáticos básicos y*

procesos de razonamiento, desde algoritmos de cálculo a elementos de lógica para establecer la validez de los razonamientos.

- ◆ *La competencia matemática supone la capacidad para aplicar los conocimientos matemáticos a una variedad de situaciones y contextos.*
- ◆ *La competencia matemática incluye actitudes positivas, basadas en el rigor y la certeza que aportan los razonamientos bien hechos. (p. 187)*

En el marco del proyecto PISA (OCDE, 2005), también se acota un significado para la competencia matemática sobre un enfoque funcional de las matemáticas escolares, que se define como

La capacidad para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo actual, emitir juicios bien fundamentados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas de manera que puedan satisfacer las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (p. 26)

La formación de profesores necesita tomar en consideración esta visión de las matemáticas escolares para que los docentes, cuando estén ejerciendo su actividad profesional, dispongan de los conocimientos y las estrategias necesarias para promover el desarrollo de la competencia matemática de sus escolares. Esta es la finalidad de la propuesta formativa que planteo en el proyecto docente y el proyecto de investigación se centra en analizar sus resultados.

Para llevar a cabo ambas propuestas, en el primer capítulo describo el contexto institucional en el que se enmarca el proyecto docente, mostrando la presencia del área Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada y esbozando una visión global del Grado de Maestro en Educación Primaria. Finalmente describo las materias de ese Grado que se centran en matemáticas.

En el segundo capítulo caracterizo, desde la investigación y desde trabajos que proponen experiencias formativas, el conocimiento y las competencias que deben desarrollar los profesores en formación para llevar a cabo su labor docente en el área de matemáticas. Este capítulo fundamenta tanto el proyecto docente como el proyecto de investigación.

El tercer capítulo se ocupa de la descripción detallada de la programación de la materia “Bases matemáticas para la Educación Primaria” que es en la que se centra el proyecto docente. La selección de las competencias, el enunciado de objetivos, la concreción de contenidos, las directrices metodológicas, la organización temporal y la evaluación, son los puntos centrales de esa descripción.

En el capítulo cuarto desarrollo cada uno de los temas que componen el programa de la materia y resulta el más extenso del documento. Presenta una estructura diferente al resto y constituye el centro de la propuesta del proyecto docente, que finaliza ahí.

En el quinto capítulo presento un proyecto de investigación centrado en evaluar el aprendizaje desarrollado por los maestros que hayan cursado la formación propuesta en el proyecto docente. Contextualizo el proyecto, describo sus finalidades, la forma de abordarlo y algunos de sus posibles beneficios. Finalmente, describo otras actividades de investigación en la que estoy participando.

En el capítulo sexto recojo las referencias usadas tanto en el proyecto docente como en el de investigación.

La propuesta que presento tanto en el proyecto docente como en el de investigación, se sostiene en el trabajo y el esfuerzo de un colectivo de compañeros con los que he

cooperado en los últimos años. La asignatura “Bases matemáticas para la Educación Primaria” se ha ido constituyendo sobre la experiencia y la profesionalidad de muchos de los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática, a los que presento mi respeto y mi admiración. Encuentro especialmente importante citar a los profesores Isidoro Segovia, Pablo Flores y Juan D. Godino, pues en ellos ha recaído la responsabilidad desinteresada de fundamentar un programa de formación de maestros coherente, estructurado y consensuado. Con este proyecto docente pretendo contribuir al desarrollo y la implementación de esta propuesta formativa.

El proyecto de investigación que presento también se apoya en trabajos de investigación previos coordinados por el profesor Luis Rico y se ha generado también por la labor colectiva de investigadores de diferentes universidades españolas. A todos ellos, agradezco su profesionalidad y sus aportes.

PRIMERA PARTE

PROYECTO DOCENTE

Contexto Institucional

En este capítulo ubico el proyecto docente desde un punto de vista institucional. La finalidad es describir el contexto en el cual se ve inmerso. En la introducción he enmarcado esta propuesta en el área de Didáctica de la Matemática y lo primero que describo aquí es la presencia de esta área en la Universidad de Granada por medio de un departamento y un colectivo de profesores e investigadores entre los que me encuentro.

A continuación esbozo las características globales del Grado de Maestro en Educación Primaria, aunque no es mi objetivo hacer una revisión profunda de todas sus características. Todo el detalle de su proceso de elaboración, sus fundamentos y justificación y su contexto de aplicación, se puede consultar en el documento elaborado por el Equipo Docente del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada (2010)¹, que fue ratificado por la ANECA.

Lo que me interesa destacar aquí es lo relativo a la formación que reciben los estudiantes como futuros maestros de matemáticas. Con esa finalidad presento brevemente algunas características contextuales del Grado en la Universidad de Granada, como los centros en los que se imparte o la cantidad y la procedencia de los alumnos que lo cursan. A continuación, enuncio las expectativas formativas de la titulación, en términos de objetivos y competencias, así como los principales descriptores de su estructura curricular. Finalmente me centro con más detalle en el módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas” y las cuatro materias que lo conforman. La mayor parte de la información incluida en esta parte está extraída del documento citado en el párrafo anterior.

¹ Documento incluido en el Anexo que acompaña esta memoria.

1. DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD DE GRANADA

El departamento de Didáctica de la Matemática está constituido por el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática y, de acuerdo con lo establecido en el artículo 14.3 de los Estatutos de la Universidad de Granada, está formado por las secciones departamentales de Ceuta, Granada y Melilla. Las facultades de cada sección son, respectivamente, la Facultad de Educación y Humanidades de Ceuta, la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada y la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla.

Este departamento se creó en el curso académico 1985-1986, cuando la Junta de Gobierno de la Universidad de Granada puso en marcha el proceso de constitución de los nuevos Departamentos Universitarios. Entonces, los 23 profesores de Matemática y su Didáctica de las distintas Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB de la Universidad de Granada, distribuidos en los campus de Almería, Ceuta, Granada, Jaén y Melilla, tomaron la decisión unánime de adscribirse al Área de Didáctica de la Matemática, constituyéndose así el departamento. Años después, al crearse las Universidades de Almería y Jaén por segregación de la Universidad de Granada, cuatro profesores de Didáctica de la Matemática que impartían docencia en Jaén y otros seis que impartían docencia en Almería pasaron a formar parte de departamentos de sus respectivas Universidades.

En la actualidad², el departamento de Didáctica de la Matemática está compuesto por veintidós profesores de diferentes categorías profesionales que imparten docencia en el Grado de Maestro en Educación Primaria, Grado de Maestro en Educación Primaria (modalidad bilingüe), Grado de Maestro en Educación Infantil³, Máster Universitario en Didáctica de la Matemática, Máster Universitario Erasmus Mundus en Formación de Profesionales de la Formación (Mundusfor), Máster Universitario en Matemáticas, Máster Universitario en Investigación e Innovación en Currículum y Formación, Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza, Programa Oficial de Doctorado en Fundamentos del Currículum y Formación del Profesorado en Educación Primaria y Secundaria. Esta actividad docente refleja la importante representación del citado departamento en la formación de profesores y de profesionales de la educación matemática.

2. EL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

La Universidad de Granada tiene una acreditada experiencia en la formación de maestros. En 1846 tiene lugar la inauguración de la Escuela Normal Seminario de Maestros de Instrucción Primaria en Granada y, desde entonces, se vienen impartiendo estos estudios. La Facultad de Ciencias de la Educación, desde su creación en 1992, imparte las titulaciones de Pedagogía, Psicopedagogía (2º ciclo), Educación Social, y

² Información recogida el 25 de abril de 2012.

³ La docencia en esos tres grados suponen una carga obligatoria para el departamento de 434,5 créditos.

Maestro en las especialidades de Educación Infantil, Educación Primaria, Lengua Extranjera, Educación Musical, Educación Física, Audición y Lenguaje y Educación Especial. En el curso académico 2010-2011, con la implantación de los nuevos planes de estudios en la Universidad de Granada, se comienzan a impartir los Grados de Maestro de Educación Primaria, Maestro de Educación Infantil, Educación Social y Pedagogía, eliminándose progresivamente la docencia de los planes de estudios anteriores⁴.

El plan de estudios del Título de Grado de Maestro en Educación Primaria se enmarca en las directrices y recomendaciones del Espacio Europeo de Educación Superior y tiene establecido y regulado un perfil profesional recogido en sucesivas leyes educativas a través de las cuales ha ido adaptándose a las circunstancias sociales de nuestro país; el perfil profesional actual queda recogido en la Ley Orgánica de Educación (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) y en la correspondiente Ley de Educación de Andalucía (Junta de Andalucía, 2007). El diseño del Grado, se sostiene en la Orden ECI/3857/2007 en la que se establecen los requisitos para la ratificación de los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b)⁵ y en la Ley Andaluza de Universidades (Junta de Andalucía, 2003 y 2011).

Este Grado se imparte en cuatro centros de la Universidad de Granada o adscritos a ella: Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, Facultad de Educación y Humanidades de Ceuta, Facultad de Educación y Humanidades de Melilla y Centro Adscrito Escuela Universitaria de Magisterio la Inmaculada de Granada. Este Grado, que es único para los cuatro centros, se adapta a las particularidades de cada uno de ellos en lo referente a optatividad, personal académico y recursos materiales y servicios, entre otros aspectos.

La principal salida profesional de los egresados del Grado, es la docencia en ese nivel educativo en todos los centros públicos, concertados y privados de España. Pero también disponen de posibilidades profesionales en academias de formación, en centros de educación permanente, en ludotecas, en servicios educativos en centros sanitarios, en centros socioculturales, de acogida y penitenciarios y en organizaciones no gubernamentales.

Los estudiantes que cursan este Grado en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada provienen de poblaciones repartidas por gran parte del territorio nacional, si bien destaca notablemente Granada y su provincia⁶. En el curso académico 2010-2011, se matricularon 686 estudiantes (8 de ellos no españoles), con una nota media de admisión de 8,3 y una nota mínima de 5,38⁷. En el curso actual 2011-

⁴ Si bien se realizaron previamente actividades de adecuación en el marco de experiencias piloto para la implantación del crédito europeo en algunas materias de la Diplomatura de Maestro en la Especialidad de Educación Primaria, promovidas por la Junta de Andalucía.

⁵ Son muchos más los documentos, la normativa y la legislación que han regulado el diseño y la puesta en práctica de los nuevos Grados. Un detalle de todos ellos se puede consultar en Equipo Docente del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada (2010, pp. 7-8).

⁶ En el curso 2010-2011, de los 678 estudiantes españoles matriculados, 432 provenían de Granada y su provincia (63,7%), 130 provienen del resto de provincias andaluzas (19%), 28 provienen de la Comunidad Valenciana (4%), 26 de Cataluña (3,8%), 21 de la Comunidad de Murcia (3%). El resto (6,5%) provienen del País Vasco, Navarra, Galicia, Castilla La Mancha, Islas Canarias, Comunidad de Madrid, Ceuta y Melilla.

⁷ Notas medias y mínimas sobre 14.

2012, ha habido 622 estudiantes de nuevo ingreso, con un 7,87 de nota media de admisión y un 5,14 de nota mínima.

Este proyecto docente se centra en la materia de primer curso de ese Grado, “Bases matemáticas para la Educación Primaria”. En el curso 2010-2011, la tasa de rendimiento de los estudiantes fue de 83,43 mientras que la tasa de éxito fue de 89,23⁸. Un año más tarde la tasa de rendimiento ha disminuido a 78,39 y la de éxito a 85,03.

Esta disminución en ambas medidas en dos cursos académicos consecutivos exige un proceso de reflexión entre los profesores responsables de la misma. Este proyecto docente pretende aportar una propuesta formativa que responda satisfactoriamente a las necesidades formativas de los maestros en formación y que enriquezca y mejore el planteamiento y los resultados de este curso, enfatizando sus puntos fuertes y diluyendo sus puntos débiles.

3. EXPECTATIVAS FORMATIVAS

Las expectativas de aprendizaje y formación del Grado de Maestro en Educación Primaria en la Universidad de Granada se expresan en términos de objetivos generales y competencias, tal y como describo a continuación:

Objetivos

Los objetivos generales contemplados para el título son los siguientes:

- ◆ Alcanzar una sólida formación personal de los estudiantes. Aspectos como el autoconocimiento, la estima personal, la capacidad de establecer relaciones de grupo constructivas, la actitud solidaria y democrática, etc. comunes a los títulos de grado, adquieren especial relevancia en el título de Maestro de Educación Primaria.
- ◆ Capacitar para desarrollar la labor de maestro de educación primaria en la sociedad del conocimiento, en las distintas áreas y tareas que la caracterizan, lo que implica que:
 - Sean organizadores de la interacción de cada alumno/a con el objeto de conocimiento.
 - Actúen como mediadores para que toda la actividad que se lleve a cabo resulte significativa y estimule el potencial de desarrollo de cada uno de los alumnos/as en un trabajo cooperativo de grupo.
 - Tengan capacidad para diseñar y organizar trabajos disciplinares e interdisciplinares y de colaborar con el mundo exterior a la escuela.
 - Sean capaces de analizar el contexto en el que se desarrolla su actividad y planificarla, dando respuesta a una sociedad cambiante.
 - Estén capacitados para ejercer las funciones de tutoría, orientación de los alumnos/as y evaluación de sus aprendizajes.
- ◆ Promover el espíritu crítico y analítico necesario para aplicar los conocimientos adquiridos en distintos ámbitos y contextos profesionales.

⁸ La tasa de rendimiento expresa la ratio entre el número de estudiantes aprobados en una materia y el número de estudiantes matriculados en la misma. La tasa de éxito, expresa los mismo pero comparando el número de estudiantes aprobados con el número de estudiantes que se presentaron a las convocatorias oficiales.

- ◆ Promover el respeto a los derechos fundamentales y de igualdad de oportunidades entre hombres y mujeres, los principios de igualdad de oportunidades y accesibilidad universal de las personas con discapacidad, y los valores propios de una cultura de la paz y de valores democráticos.

Competencias

El listado completo de competencias, organizadas en *generales*, *específicas del título* y *específicas de la optatividad* y cada una de esas categorías clasificadas a su vez en varios tipos, puede consultarse en la descripción del título (Equipo Docente del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada, 2010, pp. 13-20). Este profuso listado de competencias “pone de manifiesto la complejidad de los requerimientos profesionales que se establecen para los futuros profesores de Educación Primaria, singularmente para su trabajo como profesores de matemáticas.” (Rico y Díez, 2011, p. 26)

Estos autores enfatizan algunas de esas competencias por su proximidad al trabajo del profesor de matemáticas de Educación Primaria. En el caso de las competencias generales, destacan que las dos siguientes afectan de manera especial a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas por la propia naturaleza de esta disciplina científica y escolar (p. 25):

- ◆ *C.G. 19.* Comprender y relacionar los conocimientos generales y especializados propios de la profesión teniendo en cuenta tanto su singularidad epistemológica como la especificidad de su didáctica.
- ◆ *C.G. 22.* Conocer los fundamentos científicos y didácticos de cada una de las áreas y las competencias curriculares de la Educación Primaria: su proceso de construcción, sus principales esquemas de conocimiento, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en relación con los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.

También argumentan que el Maestro de Primaria necesita desarrollar un conocimiento que incluye fundamentos y bases científicas y didácticas sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y su aprendizaje, lo que le lleva a destacar también algunas de las competencias específicas del título (p. 26):

- ◆ *C1.* Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
- ◆ *C2.* Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- ◆ *C4.* Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.

Como describiré a continuación, la estructura del Grado incluye un módulo específico para matemáticas, para el que se detallan, también dentro de las específicas del título, unas *competencias específicas de formación didáctico-disciplinar* para esta área de conocimiento. Son las siguientes:

- ◆ *CDM 6.1.* Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo,

geométricas, representaciones especiales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.).

- ◆ *CDM 6.2.* Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- ◆ *CDM 6.3.* Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- ◆ *CDM 6.4.* Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.
- ◆ *CDM 6.5.* Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.
- ◆ *CDM 6.6.* Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

Estas competencias destacan que la formación inicial de profesores de Educación Primaria debe promover el aprendizaje de

unos determinados conocimientos, conceptuales y procedimentales, que se centran, en cada caso, en los contenidos disciplinares y en los conocimientos epistemológicos y didácticos propios de la disciplina, en los conocimientos sobre planificación y organización del trabajo escolar, sobre el análisis y síntesis didácticos de los contenidos disciplinares, sobre el papel de la resolución de los problemas en la disciplina, así como de las estrategias para la toma de decisiones, diseño de tareas e instrumentos de evaluación. (Lupiáñez, 2009, p. 147)

4. ESTRUCTURA DEL GRADO

La estructura del plan de estudios satisface la normativa existente a nivel estatal sobre verificación de títulos universitarios oficiales (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007c), así como a nivel autonómico por medio de la cual, el 75% de los créditos de los distintos títulos han de ser comunes a todas las universidades andaluzas (Consejo Andaluz de Universidades, 2008). Esta estructura se concreta en la distribución de créditos ECTS, según el tipo de materia, que recojo en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1
*Distribución de créditos por tipo de materia del
Grado de Maestro en Educación Primaria*

<i>Tipo de materia</i>	<i>Créditos ECTS</i>
Formación básica	60
Obligatorias	100
Optativas	30
Prácticas externas	44
Trabajo fin de Grado	6
Total	240

Partiendo de esta distribución, los equipos docentes de la Universidad de Granada acordaron los siguientes módulos y materias (Tabla 1.2):

Tabla 1.2
Módulos y materias del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada

Módulo	Créditos	Materia	Créditos
<i>Formación básica</i>			
1. Aprendizaje y desarrollo de la personalidad	18	Psicología	12
		Dificultades de aprendizaje	6
2. Procesos y contextos educativos	30	Educación	18
		Didáctica	12
3. Sociedad, familia y escuela	12	Sociología	6
		Acción tutorial en Educación Primaria	6
<i>Formación didáctico-disciplinar</i>			
4. Enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Experimentales	15	Didáctica de las Ciencias Experimentales I	8
		Didáctica de las Ciencias Experimentales II	7
5. Enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Sociales	15	El patrimonio histórico y cultural y su didáctica	6
		Didáctica de las Ciencias Sociales	9
6. Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	22	Bases matemática en la Educación Primaria	9
		Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria	6
		Diseño y desarrollo del currículo de Matemáticas en Educación Primaria	7
7. Enseñanza y aprendizaje de las Lenguas	27	Didáctica de la Lengua Española I	6
		Didáctica de la Lengua Española II	9
		Didáctica de la Literatura infantil y juvenil	6
		Idioma extranjero y su didáctica	6
8. Enseñanza y aprendizaje de Música, Plástica y Visual	15	Enseñanza y aprendizaje de las Artes Visuales y Plásticas	9
		Educación Musical	6
9. Enseñanza y aprendizaje de la	6	Enseñanza de la Educación	6

Tabla 1.2

Módulos y materias del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada

Módulo	Créditos	Materia	Créditos
Educación Física		Física en Educación Primaria	
<i>Practicum</i>			
10. Prácticas escolares	50	Practicum I	10
		Practicum II	10
		Practicum III	24
		Trabajo Fin de Grado	6

Como muestra la Tabla 1.2, el sexto módulo (Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas) incluye tres materias. Las tres son obligatorias y se imparten en cursos diferentes: “Bases matemáticas en la Educación Primaria” se imparte en el primer semestre del primer curso; “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria” lo hace en el segundo semestre del segundo curso; y “Diseño y desarrollo del currículo de Matemáticas en la Educación Primaria” se imparte en el segundo semestre del tercer curso.

Además de estas tres materias, existe una cuarta que se imparte en el primer semestre del cuarto curso, pero es de carácter optativo. Se denomina “Competencias matemáticas en Educación Primaria” y tiene una carga lectiva de 6 créditos ECTS.

Dedico los apartados siguientes a una breve descripción de las materias de los cursos segundo, tercero y cuarto, dado que este proyecto docente se centra en la materia de primer curso y su programación se desarrolla más concisamente en los capítulos 3 y 4. Con el único objetivo de presentar aquí una visión de conjunto de todas las materias, simplemente indico que la de primer curso está centrada en el estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos, sus formas de representación y modelización, su fenomenología y aspectos históricos de los mismos, utilizando materiales y recursos sobre los bloques de matemáticas de Educación Primaria. También considera el tratamiento de los contenidos transversales de matemáticas en Educación Primaria, destacando la resolución de problemas y el uso de nuevas tecnologías en matemáticas.

5. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Esta materia, de segundo curso, se centra en los fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas y su aplicación para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de Educación Primaria en sus diferentes bloques. Una de las nociones que articula la materia es el análisis conceptual y procedimental de esas matemáticas escolares y la visión de las mismas desde el punto de vista del profesor: el sentido matemático. También incluye una reflexión cognitiva centrada en las expectativas de aprendizaje que tiene el profesor, enfatizando el papel de la competencia matemática básica y los posibles errores y dificultades de los escolares.

Finalmente, considera también los criterios para el diseño y selección de tareas y para el uso de materiales y recursos. En esta materia los estudiantes, trabajando en equipos de cuatro o cinco integrantes, analizan un tema de las matemáticas de Educación Primaria desde esas tres perspectivas: conceptual, cognitiva y sobre instrucción.

En el anexo de esta memoria se recoge la guía docente oficial de la materia.

Competencias

Específicas del Título

- ◆ Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- ◆ Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro
- ◆ Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana
- ◆ Fomentar la convivencia en el aula y fuera de ella, resolver problemas de disciplina y contribuir a la resolución pacífica de conflictos. Estimular y valorar el esfuerzo, la constancia y la disciplina personal en los estudiantes.
- ◆ Valorar la responsabilidad individual y colectiva en la consecución de un futuro sostenible desde el papel que corresponde a la Educación Matemática.
- ◆ Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los estudiantes
- ◆ Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación en la enseñanza de las matemáticas. Discernir selectivamente la información audiovisual que contribuya a los aprendizajes, a la formación cívica y a la riqueza cultural.
- ◆ Comprender la función, las posibilidades y los límites de la educación matemática en la sociedad actual y las competencias fundamentales que afectan a los colegios de educación primaria y a sus profesionales.

Específicas de Formación Didáctico-Disciplinar

- ◆ Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- ◆ Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- ◆ Desarrollar y evaluar contenidos matemáticos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes
- ◆ Desarrollar y evaluar la comprensión y el razonamiento de los niños en matemáticas de acuerdo con sus edades y capacidades.

Temario de Contenidos

Contenidos Teóricos

- ◆ **Tema 1. Matemáticas, cultura y sociedad.** La importancia social y cultural de las matemáticas. Las matemáticas en el sistema educativo. Fines de la educación matemática. La resolución de problemas matemáticos.

- ◆ **Tema 2. Sentido matemático.** De la alfabetización al sentido matemático. El sentido numérico, relación con currículo, componentes. El sentido de la medida, relación con currículo, componentes. El sentido espacial, relación con currículo, componentes. El sentido estocástico, relación con currículo, componentes.
- ◆ **Tema 3. Aprendizaje de las matemáticas.** Aprendizaje constructivista de las matemáticas, aprendizaje de conceptos y procedimientos. Expectativas de aprendizaje de matemáticas, objetivos y competencias. Limitaciones del aprendizaje, errores y dificultades.
- ◆ **Tema 4. La enseñanza de las matemáticas.** Propuestas de enseñanza constructivista. Dimensiones instructivas de la enseñanza. Diseño y selección de tareas (componentes, modalidades, complejidad y función). Materiales y recursos para la enseñanza, manipulativos y tecnológicos.
- ◆ **Tema 5. Aprendizaje y enseñanza de los bloques de contenido de matemáticas de Educación Primaria.** Análisis didáctico de las matemáticas escolares. Didáctica del número, de las operaciones y proporcionalidad, la geometría, la medida y el azar y probabilidad y las gráficas. Expectativas de aprendizaje, limitaciones, tareas, materiales y recursos.

Contenidos Prácticos

- ◆ Conocimiento matemático en educación primaria.
- ◆ Matemáticas y resolución de problemas.
- ◆ Características del sentido numérico, del sentido de la medida y del sentido espacial.
- ◆ Análisis de contenidos de las matemáticas de educación primaria.
- ◆ Análisis cognitivo del currículo de matemáticas de Educación primaria: expectativas y limitaciones.
- ◆ Análisis, selección y diseño de tareas matemáticas, sus variables y conocimientos puestos en juego.

Evaluación

La evaluación del nivel de adquisición de las competencias será continua y formativa, atendiendo a los aspectos del desarrollo de la materia, en la que se aprecie el trabajo individual y en grupo y el aprendizaje significativo de los contenidos teóricos y su aplicación práctica. La calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los diferentes aspectos y actividades que integran el sistema de evaluación:

1. Valoración de pruebas escritas.
2. Trabajos y presentaciones realizadas, individualmente o en equipo, atendiendo a la presentación, redacción y claridad de ideas, estructura y nivel científico, creatividad, justificación de lo argumentado, capacidad y riqueza de la crítica que se hace y actualización de la bibliografía consultada.
3. Valoración del grado de implicación y actitud del alumnado manifestada en su participación en las consultas, exposiciones y debates; así como en la elaboración de los trabajos, individuales o en equipo, y en las sesiones de puesta en común.
4. Valoración de la asistencia a clase, seminarios y tutorías.

La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente. El peso de los apartados 1 y 2 es de un 40% para cada uno, mientras que la conjunción de los apartados 3 y 4 es de un 20%.

El proceso de evaluación se vale de dos instrumentos prioritarios: Calidad y participación del alumno en los trabajos prácticos (prácticas temas 1 a 4, y trabajo en tema 5, con sus respectivas presentaciones) y examen teórico al final del desarrollo de la materia.

6. DISEÑO Y DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Esta materia se centra en el conocimiento y la aplicación de criterios para la fundamentación, el diseño y la implementación de unidades didácticas de matemáticas en Educación Primaria. De nuevo la noción de currículo de matemáticas se convierte en descriptor central de la materia, poniendo especial atención a los fines del currículo y a su concreción en los distintos ciclos de Educación Primaria. La organización y la gestión de la clase de matemáticas, el tratamiento de los aspectos afectivos hacia la matemática, las técnicas, instrumentos y criterios de evaluación en matemáticas, el tratamiento a la diversidad y la atención a temas transversales en matemáticas en Primaria, son el resto de nociones clave que se consideran.

En el anexo de esta memoria se recoge la guía docente oficial de la materia.

Competencias

Específicas del Título

- ◆ Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- ◆ Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- ◆ Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.
- ◆ Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los estudiantes.
- ◆ Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación en la enseñanza de las matemáticas.
- ◆ Comprender la función, las posibilidades y los límites de la educación matemática en la sociedad actual y las competencias fundamentales que afectan a los colegios de educación primaria y a sus profesionales.

Específicas de Formación Didáctico-Disciplinar

- ◆ Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- ◆ Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- ◆ Desarrollar y evaluar contenidos matemáticos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

Temario de Contenidos

Contenidos Teóricos

- ◆ Tema 1. Currículo de matemáticas. Estructura y elementos. Normativas curriculares nacional y autonómica.
- ◆ Tema 2. Propuestas curriculares para la enseñanza de las matemáticas escolares.
- ◆ Tema 3. Diseño, selección y secuenciación de tareas.
- ◆ Tema 4. Planificación de la enseñanza de las matemáticas de Educación Primaria.
- ◆ Tema 5. La evaluación en matemáticas.
- ◆ Tema 6. Aspectos afectivos y atención a la diversidad en la enseñanza de las matemáticas escolares.

Contenidos Prácticos

- ◆ Análisis de la normativa curricular en España.
- ◆ Comparación de propuestas curriculares de matemáticas.
- ◆ Análisis y comparación de libros de texto.
- ◆ Diseño de una programación anual de un curso.
- ◆ Diseño de una unidad didáctica de matemáticas.
- ◆ Diseño de una hora de clase de matemáticas en Educación Primaria.

Evaluación

La evaluación del nivel de adquisición de las competencias será continua y formativa, atendiendo a los aspectos del desarrollo de la materia, en la que se aprecie el trabajo individual y en grupo, y el aprendizaje significativo de los contenidos teóricos y su aplicación práctica. La calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los diferentes aspectos y actividades que integran el sistema de evaluación:

1. Elaboración por grupos de una unidad didáctica sobre un tema de matemáticas de Educación Primaria y presentación y defensa individual de la misma.
2. Valoración de trabajos o pruebas individuales realizados.
3. Realización y presentación de trabajos realizados en grupo.
4. Valoración del grado de implicación y actitud del alumnado manifestada en su participación en las consultas, exposiciones y debates; así como en la elaboración de los trabajos, individuales o en equipo, y en las sesiones de puesta en común.
5. Valoración de la asistencia a clase, seminarios, tutorías y sesiones de grupo.

La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente; el peso de los apartados 1 y 2 es de un 30% para cada uno de ellos, el apartado 3 tiene un peso de un 20% y la conjunción de los apartados 4 y 5 otro 20%. En caso de no superar alguno de los apartados anteriores el estudiante tendrá que superar una prueba final que podrá ser oral.

7. COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA⁹

La última materia dirigida a la formación de maestros de matemáticas tiene su principal descriptor en la noción de competencia y en su implicación en la actividad del profesor. Parte de un análisis comparativo de los diferentes currículos de matemáticas que se han implementado en España, hasta llegar al actual, basado en un enfoque funcional de las matemáticas escolares. El papel crucial de la noción de competencias en ese enfoque y la relación de la competencia matemática con las demás competencias básicas es otro elemento de reflexión importante. También se consideran los elementos y criterios básicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basado en competencias. El diseño y selección de tareas para promover el desarrollo de la competencia y el establecimiento de un modelo de evaluación basado en competencias son también dos referentes clave.

Competencias

Generales

- ◆ Analizar y sintetizar la información.
- ◆ Buscar, seleccionar, utilizar y presentar la información usando medios tecnológicos adecuados.
- ◆ Investigar y seguir aprendiendo con autonomía.

Específicas del Título

- ◆ Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- ◆ Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- ◆ Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.
- ◆ Fomentar la convivencia en el aula y fuera de ella, resolver problemas de disciplina y contribuir a la resolución pacífica de conflictos. Estimular y valorar el esfuerzo, la constancia y la disciplina personal de los estudiantes.
- ◆ Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los estudiantes.
- ◆ Comprender la función, las posibilidades y los límites de la educación matemática en la sociedad actual y las competencias fundamentales que afectan a los colegios de educación primaria y a sus profesionales.

Específicas de Formación Didáctico-Disciplinar

- ◆ Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- ◆ Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.

⁹ Diseño orientativo. Aún no se ha acordado la guía docente definitiva en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

- ◆ Desarrollar y evaluar contenidos matemáticos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

Temario de Contenidos

Contenidos Teóricos

- ◆ Tema 1. Diferentes enfoques en el currículo de matemáticas.
- ◆ Tema 2. El enfoque funcional de las matemáticas escolares y la competencia matemática.
- ◆ Tema 3. Matemáticas e interdisciplinariedad.
- ◆ Tema 4. Tareas que promueven en el desarrollo de la competencia matemática.
- ◆ Tema 5. Evaluación basada en competencias en matemáticas. Pruebas de diagnóstico y el proyecto PISA.

Contenidos Prácticos

- ◆ Descriptores de la competencia matemática.
- ◆ Invención de problemas.
- ◆ Diseño de un banco de tareas de modelización.
- ◆ Diseño de un modelo de evaluación de la competencia matemática.

Evaluación

La evaluación del nivel de adquisición de las competencias será continua y formativa, atendiendo a los aspectos del desarrollo de la materia, en la que se aprecie el trabajo individual y en grupo, y el aprendizaje significativo de los contenidos teóricos y su aplicación práctica. La calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los diferentes aspectos y actividades que integran el sistema de evaluación:

1. Elaboración y defensa por grupos de un banco de ítems sobre los contenidos de matemáticas de Educación Primaria que promuevan el desarrollo de la competencia matemática y de un modelo de evaluación para determinar el grado de desarrollo de la misma.
2. Realización y presentación de trabajos realizados en grupo.
3. Valoración del grado de implicación y actitud del alumnado manifestada en su participación en las consultas, exposiciones y debates; así como en la elaboración de los trabajos, individuales o en equipo, y en las sesiones de puesta en común.

La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente; el peso del apartado 1 es de un 50%, el segundo apartado tiene un peso de un 30% y el tercero un 20%.

La Formación del Profesor de Matemáticas de Primaria en la Universidad de Granada

La formación de profesores constituye un línea prioritaria de la investigación actual en Educación Matemática (English, 2009). Esta formación, se relaciona con una “intervención orientada por objetivos que persigue promover el aprendizaje de los profesores, y que incluye todas las formas de preparación del profesor y de su desarrollo profesional” (Krainer, 2008, pp. 1-2). Este mismo autor señala que, en el caso de las matemáticas, la formación puede orientarse “hacia perfeccionar las creencias de los profesores, su conocimiento y su práctica, y aumentar su motivación, su autoconfianza y su identidad como profesores de matemáticas y, lo más importante, contribuir al desarrollo afectivo y cognitivo de sus escolares.” (p. 2)

La formación inicial de profesores se ha convertido, además, en foco de investigación en los últimos veinte años (Oliveira y Hannula, 2008) y en el área de Didáctica de la Matemática también se han realizado importantes avances en los últimos años (Oser, Achtenhagen y Renold, 2006; Sánchez, 2011; Sfard, Hashimoto, Knijnik, Robert y Skovsmose, 2004). Algunas de esas investigaciones centradas en el profesor se han preocupado del conocimiento que un profesor adquiere y desarrolla en los programas formativos en los que se involucra.

La finalidad de este capítulo es fundamentar y justificar el diseño y la implementación de un programa de formación de profesores de matemáticas de Educación Primaria en la Universidad de Granada. Para ello, en primer lugar recojo dos fuentes relevantes que han puesto de manifiesto una necesidad de cambio en la formación de maestros. A continuación, situó las líneas prioritarias de la investigación sobre formación de profesores de matemáticas para situar y enmarcar el proyecto docente. A continuación, profundizo en una de esas líneas, referida al conocimiento y las competencias que deben

desarrollar los profesores para su desempeño profesional, lo que me permite fundamentar el proyecto. También describo un modelo para llevarlo a cabo y, finalmente, resumo todos los elementos anteriores para caracterizar el modelo formativo que presento en este proyecto.

1. UNA NECESIDAD CONSTATADA

Las ya casi extintas titulaciones anteriores al EEES que habilitaban para la docencia en Educación Primaria en España, evidenciaron unas carencias y unas desconexiones internas importantes, al menos en el caso de la matemáticas. Estudios como TEDS-M 2008¹⁰, han puesto de manifiesto la escasa presencia del área de Didáctica de la Matemática en la formación de los futuros maestros entre 1991 y 2010 en las universidades españolas, en donde, a pesar de grandes diferencias entre instituciones, primaban los contenidos sobre pedagogía y didáctica general (Castro y Flores, 2008; Rico, Gómez y Cañadas, en prensa). Los resultados generados en los futuros profesores por ese tipo de formación también han sido analizados en el contexto de ese proyecto.

Para analizar la formación adquirida por los egresados, se evaluaron dos áreas de conocimiento, Matemáticas y Didáctica de la Matemática, mediante cuestionarios a estudiantes de magisterio que estaban finalizando sus estudios. En España participaron casi 1100 futuros profesores, lo que supuso un 86,5% del total de estudiantes en esa titulación. Para analizar los resultados, en cada una de las dos áreas se definieron *puntos de anclaje* para caracterizar el rendimiento de los estudiantes, dando lugar a diferentes niveles de conocimiento (Tatto et al., 2012).

En el caso del área de Matemáticas, el 83% de los futuros maestros españoles eran capaces de resolver cuestiones con cálculos básicos, de identificar las propiedades de los números enteros o razonar sobre números pares o impares. También podían resolver problemas con fracciones sencillas, visualizar e interpretar figuras geométricas en dos y tres dimensiones, resolver problemas sobre perímetros, comprender relaciones sencillas entre variables y equivalencias de expresiones y resolver ecuaciones simples. Además, sólo un 26% de los entrevistados eran capaces de usar fracciones para resolver problemas verbales, reconocer ejemplos de números racionales e irracionales, calcular el mínimo común múltiplo de dos números en contextos familiares o reconocer la validez de algunos argumentos sobre números enteros. Sólo ese porcentaje podían calcular áreas y perímetros de figuras simples, dominaban algunas clasificaciones de polígonos y estaban familiarizados con expresiones y funciones lineales (pp. 136-137).

En el área de Didáctica de la Matemática, el 82% de los futuros profesores fueron capaces de reconocer si una estrategia docente era o no correcta para un caso particular y de evaluar el trabajo de los escolares cuando se refiere a contenidos básicos de primaria. También podían identificar los elementos aritméticos que pudieran influir en la dificultad de un problema verbal de un solo paso. Y aunque por lo general eran capaces de interpretar partes del trabajo de los escolares a tareas, sus respuestas eran a menudo imprecisas. Además, ese porcentaje de los futuros maestros raramente empleaban representaciones concretas para apoyar el aprendizaje escolar o para reconocer cómo piensa un escolar cuando emplea representaciones algebraicas. Tampoco dominaban los conceptos probabilísticos necesarios para diseñar o reformular

¹⁰ Siglas de *Teacher Education and Development Study in Mathematics*. Es posible consultar más información en <http://www.ugr.es/~tedsm>.

una tarea. En muy pocas ocasiones raramente identificaron cuando una estrategia docente particular tenía sentido y si podía o no funcionar. No eran conscientes de ciertas concepciones erróneas de los escolares ni concebían representaciones útiles de conceptos numéricos (p. 140).

Esta realidad de los futuros maestros españoles, debe impulsar un esfuerzo por replantear la estructura y la finalidad de los programas de formación inicial, aprovechando el campo de actuación que ofrecen las nuevas titulaciones. Este impulso ha sido promovido expresamente desde la comunidad de investigadores españoles en educación matemática.

En abril de 2011, organizado por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), se celebró un panel de expertos de veintiuna universidades españolas, con el objetivo de analizar las diferentes situaciones y necesidades derivadas de la implantación de las nuevas titulaciones, en relación con la educación matemática. Algunas de las conclusiones alcanzadas en el caso del Grado de Maestro en Educación Primaria son las siguientes¹¹:

- ◆ Es necesario plantear una nueva organización curricular de la formación inicial del Maestro, de Educación Primaria, a partir de tareas o situaciones didácticas que permitan la construcción del conocimiento funcional del profesor y el desarrollo de competencias profesionales. Tanto la experiencia docente como los resultados de varias investigaciones nos permiten avanzar en esta línea.
- ◆ Dada la importancia del Practicum en relación con las actividades de planificación, puesta en práctica y reflexión sobre la acción docente, se considera fundamental la participación del área de Didáctica de la Matemática para que los estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria alcancen las competencias del título, y así contribuir, significativamente, a la consecución de las competencias de esta materia.
- ◆ El objetivo inicial de las Menciones en los Grados, es intensificar la formación de los profesores en aquellas materias que se consideran fundamentales (Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Experimentales y Ciencias Sociales). A este respecto, consideramos importante diseñar y desarrollar menciones específicas que profundicen en la educación matemática.
- ◆ Es necesario establecer unas directrices más concretas y adecuadas a la tarea que se considera debieran realizar los futuros profesores en los Trabajos Final de Grados. A este respecto, parece conveniente valorizar este trabajo dándole contenidos que profesionalicen.

Estas dos fuentes ponen de manifiesto la necesidad de aprovechar la oportunidad que brindan los nuevos Grados, para fundamentar y estructurar la formación de profesores, desde la experiencia docente de los formadores y desde los resultados de la investigación sobre formación de profesores.

¹¹ Información disponible en <http://www.seiem.es/congresos/seminarioFormacion.htm>.

2. PRIORIDADES DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE FORMACIÓN DE PROFESORES

En la actualidad, la investigación sigue avanzando de cara a profundizar y dar respuesta a esas y otras cuestiones sobre el profesor de matemáticas y su formación. En estos momentos, podemos establecer cuatro áreas generales de interés. La primera de ellas tiene que ver con el conocimiento y las creencias del profesor y cómo éstos pueden llevar a fundamentar un programa de formación de profesores (Sullivan y Wood, 2008). La segunda se concreta en cómo pueden diseñarse y llevarse a la práctica esos programas formativos (Tirosh y Wood, 2008). La tercera aborda el estudio de todos los agentes y participantes que toman parte en la formación de profesores (Krainer y Wood, 2008) y la última se concreta en el desarrollo profesional y la actividad del formador de profesores (Jaworski y Wood, 2008). A continuación, ejemplifico algunas investigaciones que se han desarrollado en cada una de estas líneas (Lupiáñez, 2009).

Conocimiento y Creencias del Profesor

Estas investigaciones se centran en el rol del profesor de matemáticas, en las diferentes dimensiones que posee el conocimiento que debe dominar y en las creencias que puede considerar en relación a la enseñanza, además de las implicaciones de estos aspectos en la formación del profesor. Dado que la fundamentación del proyecto docente se centra en el conocimiento que deben desarrollar los profesores en formación, detallaré este punto en el apartado siguiente.

En relación con las creencias del profesor, Lerman (2001) señala que éstas han constituido la línea de investigación predominante durante muchos años en los trabajos sobre profesores y sobre formación de profesores (p. 35). Godino et al. (2011) sostienen esta idea, confirmado la presencia de trabajos de investigación sobre creencias de los profesores en el marco de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Alguno de estos estudios se han llevado a cabo con profesores de Educación Primaria (Amorim, 2004; Caballero, Blanco y Guerrero 2007; Muñoz-Catalán, 2009).

Diseño e Implementación de un Programa de Formación de Profesores

Sowder (2007), se preocupa de dar significado a qué significa preparar profesores de matemáticas tanto en formación inicial como permanente. Para organizar su reflexión, caracteriza esa formación en términos del desarrollo profesional del profesor y plantea diez cuestiones, que explora con el soporte de elementos teóricos y de evidencias de la investigación reciente. Algunas de esas preguntas son:

1. *¿Porqué el desarrollo profesional ha llegado a convertirse en una prioridad para la consecución de las finalidades actuales de la educación matemática?*
2. *¿Cuáles son los objetivos del desarrollo profesional?*
3. *¿Qué principios pueden usarse para guiar el diseño del desarrollo profesional?*
4. *¿Cómo aprenden los profesores lo que necesitan conocer para enseñar matemáticas? (p. 158)*

Otras investigaciones se centran en las diferentes herramientas y recursos que se pueden emplear en un programa de formación de profesores. Así, por ejemplo, algunas de ellas constatan que el uso de ejemplos de las respuestas de los escolares a determinadas tareas

matemáticas escolares o de situaciones educativas, puede jugar un papel importante en los programas de formación, ya que introducen a los profesores en la variedad de posibles interpretaciones que los escolares pueden desarrollar acerca de las matemáticas escolares (Zazkis, 2008). Otros autores reflexionan sobre la relevancia de introducir, en esos programas formativos, elementos teóricos sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje (Tsamir, 2008).

La selección de las actividades que pueden realizar los profesores en el marco de esos programas, también es objeto de estudio. Perks y Prestage (2008) y Zaslavsky (2008), destacan la importancia de la selección de esas actividades para responder a las demandas y necesidades formativas de los profesores. Así por ejemplo, Gómez y González (2009) ejemplifican las implicaciones que tuvieron, para el aprendizaje de algunos profesores en formación inicial, las actividades que llevaron a cabo durante un curso formativo.

Agentes Involucrados en la Formación Profesores

Otro tipo de investigaciones se centran en los diferentes participantes y agentes que forman parte de la formación de profesores. Además de los propios profesores en formación sobre, los que ya hemos hablado, también son objeto de estudio las agrupaciones de éstos, los profesores en ejercicio, los formadores de profesores, las comunidades o redes formativas, los centros en los que se lleva a cabo esas formaciones o los sistemas educativos y formativos en los que se enmarcan (Krainer y Wood, 2008).

Desde nuestra experiencia, el trabajo en grupo es primordial. Como señalan Bjuland (1999) y McDougal y Nason (2005), las reflexiones de los futuros profesores cuando trabajan en pequeños grupos, juegan un papel central en su aprendizaje. Muchas de las nociones y herramientas que se introducen en los programas de formación toman sentido para ellos cuando, en discusiones internas, se enfrentan a analizarlas, ejemplificarlas y usarlas. Es, en cierta medida, un tipo de *aprendizaje colaborativo* en donde los integrantes del grupo, que poseen un conocimiento y unas habilidades en principio heterogéneas, se ayudan entre sí y facilitan entre ellos el aprendizaje y el desarrollo de determinadas competencias (Fernández, 2007; Topping, 2005). Pero más allá del trabajo y del aprendizaje en grupo, la investigación reciente enfatiza el papel de las comunidades de prácticas.

Algunas de las investigaciones sobre la noción de comunidad de prácticas para el caso del aprendizaje de los profesores, destacan cómo emerge el aprendizaje en esas comunidades tanto si se dan a nivel presencial (Lin y Ponte, 2008), como a nivel virtual (Llinares y Olivero, 2008; Borba y Gadanidis, 2008). Lerman y Zehetmeier (2008) analizan y contrastan ambos niveles, mientras que en Gómez (2007) se describe el funcionamiento y la organización de una comunidad de práctica en el caso de grupos de futuros profesores de matemáticas de Educación secundaria, a partir del constructo de comunidad de práctica de Wenger (2008). Otros investigadores como Krainer (2003) y Leikin (2008), sostienen que, aunque es innegable el interés formativo que poseen las comunidades de práctica en el aprendizaje de futuros profesores, es difícil que un grupo de profesores en formación se constituya en una de estas comunidades dentro de un programa formativo.

Sobre los Formadores de Profesores

Finalmente, el centro de otras investigaciones es la profesión, la fundamentación y la práctica del formador de profesores. También tienen que ver con el desarrollo

profesional del formador y sus implicaciones prácticas. Una revisión detallada de varios trabajos en estas áreas puede consultarse en Jaworski (2008).

La fundamentación de este proyecto docente se centra, sobre todo en la primera de esas líneas (conocimiento del profesor) y parcialmente en la segunda (diseño e implementación de planes de formación), al concretarse un programa de formación inicial. Estos dos aspectos son lo que desarrollo en los dos siguientes apartados.

3. EL CONOCIMIENTO Y LAS COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La importancia del conocimiento matemático del profesor y de su conocimiento de las matemáticas escolares, es un objeto de estudio prioritario en la investigación (Gómez y González, 2008; Kulm, 2008; Hill, Rowan y Ball, 2005).

En gran parte de este tipo de trabajos se retoman las categorías de Shulman y diversos autores las amplían o complementan con otras dimensiones como el *análisis cultural del contenido* (Boero y Guala, 2008) o con componentes antropológicas de los sujetos y las instituciones y con distintos tipos de discurso (Adler y Huillet, 2008).

Otros autores, como Hill, Rowan y Ball (2005), destacan que “la eficacia en la enseñanza radica no sólo en el conocimiento que un profesor ha acumulado, sino también en cómo usa ese conocimiento en el aula” (pp. 375-376). Esta idea es defendida también por Ball, Bass y Hill (2004) quienes sostienen que “la enseñanza implica establecer conexiones entre dominios matemáticos, ayudando a los escolares a construir relaciones en su conocimiento de manera coherente.” (p. 11)

Basándose en una revisión detallada de la literatura, Leikin (2008) constata cuatro aspectos problemáticos interrelacionados en este ámbito. Uno de ellos tiene que ver con la necesidad de entremezclar las diferentes componentes del conocimiento del profesor en su formación (p. 66). Una propuesta que enfatiza esas interrelaciones es la que describo a continuación. Después, describo otro modelo centrado en las competencias que debe desarrollar un profesor.

El Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)¹²

Esta denominación es la propuesta de un equipo de investigadores de la Universidad de Michigan para caracterizar el conocimiento que necesita desarrollar un profesor de matemáticas para llevar a cabo su labor docente (Ball, Thames y Phelps, 2008). Esta propuesta, que está teniendo una notable repercusión en la investigación actual propone una revisión y un enriquecimiento del modelo de Shulman, e incluye seis dominios para ese conocimiento organizados en dos grupos; tres tienen que ver con el *conocimiento del contenido* y otros tres se relacionan con el *conocimiento didáctico del contenido* (Hill, Ball y Schilling, 2008).

Climont (2011) destaca la repercusión de este modelo en la investigación sobre formación de profesores y sintetiza sus aportes principales:

Las aportaciones fundamentales del modelo del MKT se encuentran en las dimensiones referidas al conocimiento de contenido. Por un lado, se perfila la diferencia entre el

¹² De las siglas en inglés: *Mathematics Knowledge for Teaching*.

conocimiento matemático que necesita el profesor (conocimiento especializado del contenido) y el que necesita otro usuario de la matemática (dependiendo del contenido podría ser un ciudadano cualquiera instruido en ese contenido o un matemático u otro tipo de especialista que necesita utilizar un conocimiento matemático avanzado pero no necesita enseñarlo). La especialización, por tanto, se refiere a la tarea de la enseñanza, no a lo avanzado del conocimiento matemático necesario. Por otro lado, toma cuerpo la idea de la importancia del conocimiento de la estructura de la materia, en el sentido de relaciones entre los propios contenidos, y relaciones con otros contenidos de otras materias. Esto último queda reflejado en el conocimiento del horizonte matemático. (pp. 66-67)

A continuación, resumo cada uno de los seis dominios que estructuran el MKT. En primer lugar, los tres dominios vinculados con el conocimiento del contenido:

- ◆ *Conocimiento común del contenido.* Se centra en el conocimiento preciso de las matemáticas que el profesor debe enseñar a sus escolares y se define como el “conocimiento matemático y habilidades que se emplean en contextos más allá de la enseñanza” (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 399).
- ◆ *Conocimiento especializado del contenido.* Se refiere al conocimiento y las habilidades de y sobre las matemáticas que necesita un profesor para la enseñanza: “para buscar patrones en los errores de los estudiantes o valorar si una solución no estándar funciona en general (...). Enseñar requiere conocimiento más allá del que está siendo enseñado a los alumnos” (p. 400).
- ◆ *Conocimiento del horizonte matemático.* Destaca la importancia de que el profesor conozca los vínculos entre diferentes temas de matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas curriculares.

En segundo lugar, los tres dominios vinculados con el conocimiento didáctico del contenido:

- ◆ *Conocimiento del contenido y de los estudiantes.* Se centra en el aprendizaje y enfatiza la importancia de que el profesor se “anticipe a lo que los escolares pensarán y a lo que les causará confusión (...); necesitan predecir qué les interesa y motiva.” (p. 401). También es importante que el profesor planifique las demandas cognitivas de las tareas o qué errores pueden surgir en el proceso de aprendizaje.
- ◆ *Conocimiento del contenido y de la enseñanza.* Destaca el conocimiento necesario para planificar y secuenciar tareas, “qué ejemplos pueden escoger para iniciar y cuáles para profundizar en un contenido específico” (p. 401). También incluye el conocimiento para valorar las ventajas e inconvenientes de determinadas formas de representación para la enseñanza de un tema concreto o de las estrategias de instrucción más apropiadas.
- ◆ *Conocimiento del currículo.* Se refiere al conocimiento sobre las directrices y recomendaciones curriculares que afectan a la enseñanza de las matemáticas en los diferentes cursos.

Este modelo explicita la complejidad de los conocimientos que necesita desarrollar un profesor de matemáticas para desempeñar con eficacia su labor docente. Otros autores enfatizan también esta complejidad usando otros referentes como, por ejemplo, las competencias profesionales que deben desarrollar (Abbott y Huddleston, 2000; Achtenhagen, Oser y Renold, 2006; Beck, Hart y Kosnik, 2002; Niss, 2004a y b; Recio, 2004; Rico, 2004). Una de estas propuestas coincide, en varios aspectos, con el modelo anterior del MKT, como muestro a continuación.

Competencias del Profesor de Matemáticas

En el marco del *Danish KOM Project*¹³, además de investigar sobre la clasificación y organización de las competencias matemáticas de los escolares, también se produjeron resultados acerca de cómo debe orientar su actividad docente un profesor de cara a desarrollar esas competencias en sus alumnos (Niss, 2004a y 2004b). El propio Niss sostiene que un profesor de matemáticas competente es aquél que “de una manera efectiva y eficiente es capaz de ayudar a sus escolares a construir y desarrollar competencias matemáticas.” (Niss, 2006, p. 44)

Esta caracterización de profesor competente posee al menos dos implicaciones. En primer lugar, el profesor debe poseer un dominio de las competencias matemáticas que serán objeto de aprendizaje por parte de sus escolares que vaya acorde con el nivel educativo en el que se centra su actividad docente. Esto implica que el profesor de matemáticas en formación necesita desarrollar y lograr cierta maestría sobre una serie de conocimientos matemáticos, capacidades, destrezas y actitudes hacia las matemáticas y que debe poder utilizarlos en una variedad de contextos y situaciones propios de un ciudadano alfabetizado.

Si consideramos las ocho competencias que desglosan la competencia matemática general del estudio PISA (OCDE, 2005), podemos sostener que entre los conocimientos, destrezas y capacidades necesarias para el profesor de matemáticas, siempre en relación con cada uno de los temas que forman parte del currículo de secundaria, se encuentran (Lupiáñez, 2009, pp. 153-154):

- ◆ El manejo de los principales conceptos y procedimientos matemáticos (*pensar y razonar*).
- ◆ Los procedimientos y técnicas usuales de prueba y demostración (*argumentar y justificar*).
- ◆ La capacidad de expresar ordenadamente y con claridad las propias ideas matemáticas (*comunicar*).
- ◆ La selección de tareas que pongan en juego diferentes fases del proceso de modelización (*modelizar*).
- ◆ La selección y secuenciación de problemas en diferentes situaciones y con distintos niveles de complejidad (*plantear y resolver problemas*).
- ◆ Analizar y emplear distintos sistemas de representación para un mismo concepto y expresar sus propiedades en cada uno de ellos (*representar*).
- ◆ Emplear de manera operativa el simbolismo matemático y poner en juego los rudimentos y las destrezas básicas (*usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*).
- ◆ La capacidad de usar recursos tecnológicos que fomenten y apoyen el aprendizaje (*emplear soportes y herramientas tecnológicas*).

Todos estos conocimientos y capacidades muestran la necesidad de un considerable dominio de los contenidos del programa escolar de matemáticas, centrado en las estructuras conceptuales, en el uso experto de los correspondientes sistemas de representación y en el manejo de los diversos contextos y situaciones en los que tales

¹³ Este proyecto fue promovido por el Ministerio de Educación de Dinamarca y otros estamentos, con el objetivo de crear una plataforma para llevar a cabo una profunda reforma de la educación matemática en ese país, desde la educación básica hasta la universitaria (Niss, 2003). KOM son las siglas en danés de *Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas*.

contenidos tienen un uso social convenido, así como en la aplicación de diversas estrategias para la resolución de problemas.

Al profesor en formación le es imprescindible desarrollar su propia competencia matemática, pero no le resulta suficiente. Por ello, en segundo término, Niss también afirma que un profesor de matemáticas competente debe poseer seis competencias didácticas y pedagógicas centradas en matemáticas, que son las siguientes (pp. 44-45):

- ◆ *Competencia curricular.* Centrada en analizar, evaluar, relacionar e implementar programas formativos y currículos existentes, así como construir otros nuevos.
- ◆ *Competencia de enseñanza.* Para diseñar, planificar, organizar, orquestar y gestionar la enseñanza de las matemáticas como por ejemplo crear un amplio espectro de situaciones de enseñanza y aprendizaje, inspirar y motivar a los escolares o discutir con ellos sobre currículos o sobre esas actividades de enseñanza y aprendizaje.
- ◆ *Competencia sobre aprendizaje.* Centrada en descubrir, interpretar y analizar el aprendizaje de las matemáticas de los escolares, así como sus nociones, creencias y actitudes hacia las matemáticas. También incluye identificar el desarrollo individual de cada uno de los escolares.
- ◆ *Competencia sobre evaluación.* Para identificar, evaluar, caracterizar y comunicar los resultados de los escolares y sus competencias. También incluye seleccionar, modificar, construir, analizar críticamente e implementar una variedad de formas de evaluación e instrumentos para diferentes propósitos formativos y sumativos.
- ◆ *Competencia colaborativa.* Centrada en colaborar con diferentes colegas de matemáticas y de otras disciplinas, así como con otras personas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas y sus condicionantes, como padres o autoridades.
- ◆ *Competencia para el desarrollo profesional.* Para desarrollar la propia competencia como profesor de matemáticas (meta-competencia), y que incluye, participar y relacionarse con actividades de desarrollo profesional, tales como cursos formativos, proyectos o conferencias; reflexionar sobre la propia enseñanza y sus necesidades, y mantenerse actualizado acerca de nuevas tendencias en la investigación y en la práctica.

Balance de los dos Modelos

A partir de estos dos modelos, es posible identificar dominios de contenido matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) con algunas de las competencias propuestas por Niss (2006). Eso no significa que sean simplemente dos maneras diferentes de nombrar un mismo aspecto clave para la actividad del profesor. Lo que he tratado es de relacionar los énfasis que, desde cada modelo, los autores han expresado. También se observan diferencias, ya que en la propuesta del MKT no hay un dominio de conocimiento expresamente destinado a trabajo colaborativo o desarrollo profesional. En el modelo de competencias, Niss señala que el desarrollo de esas dos competencias se lleva a cabo, fundamentalmente, con motivo de la práctica docente (p. 46).

Este análisis conjunto me permite identificar cuáles deberían ser las dimensiones a incluir en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Obligatoria (Tabla 2.1).

Tabla 2.1

Dimensiones de un programa de formación de profesores y su relación con el modelo MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008) y el de competencias de Niss (2006)

<i>Dimensión</i>	<i>Modelo MKT</i>	<i>Modelo Niss</i>
Matemáticas escolares	Conocimiento común del contenido	Competencia matemática (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, plantear y resolver problemas, utilizar el lenguaje simbólico)
Significado de las matemáticas escolares ¹⁴	Conocimiento especializado del contenido	Competencia matemática (representar, plantear y resolver problemas, modelizar, emplear herramientas tecnológicas)
Conexiones ¹⁵	Conocimiento del horizonte matemático	Competencia matemática (pensar y razonar, modelizar)
Aprendizaje de las matemáticas	Conocimiento del contenido y de los estudiantes	Competencia sobre aprendizaje
Enseñanza de las matemáticas	Conocimiento del contenido y de la enseñanza	Competencia de enseñanza
Evaluación	Conocimiento del contenido y de la enseñanza	Competencia sobre evaluación
Currículo de matemáticas	Conocimiento del currículo	Competencia curricular
Trabajo en equipo del profesor		Competencia colaborativa
Desarrollo profesional del profesor		Competencia para el desarrollo profesional

Esta es la formación que buscamos desarrollar en los futuros docentes que cursen el Grado de Maestro en Educación Primaria en la Universidad de Granada. Es una propuesta ambiciosa y compleja, pero abordable. La actual configuración de este Grado, con una notable presencia de materias centradas en Didáctica de la Matemática, nos permite planificar el desarrollo de varios de esos conocimientos y competencias. ¿Cómo llevarlo a cabo? Dedico el siguiente apartado a describir una propuesta organizativa en

¹⁴ Proviene de la reflexión de Rico (2012), en la que identifica los elementos que constituyen el significado de un concepto con el triángulo semántico formado por la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología (pp. 52-53).

¹⁵ Considero esta dimensión usando la caracterización propuesta por el NCTM (2003) para caracterizar un estándar de procedimiento. El estándar “conexiones” destaca, entre otros aspectos, la importancia de “comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente [y] reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.” (p. 68)

la que se ve inmersa la materia “Bases matemáticas para la Educación Primaria”, objeto de este proyecto docente y que describo en los capítulos 3 y 4.

4. EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS

En su indagación acerca de la noción de currículo, como concepto central para la actividad del profesor, Rico (1997b) caracteriza un modelo sistémico y organiza una serie de herramientas para, entre otras facetas, analizar y planificar las matemáticas escolares. Estas herramientas, denominadas *organizadores del currículo*, se refieren a “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45). Algunos de esos organizadores analizan los significados de las nociones matemáticas, como los sistemas de representación, la historia de la matemática o la fenomenología. Otros organizadores se centran en el aprendizaje de las matemáticas: como las expectativas de aprendizaje o las limitaciones en el aprendizaje; otros abordan aspectos relacionados con la enseñanza: diseño y selección de tareas o uso de materiales y recursos, por ejemplo.

Gómez (2007) y Lupiáñez (2009) caracterizan y definen un procedimiento denominado *análisis didáctico* que, sobre la base de los organizadores del currículo, permite al profesor diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje sobre un tema específico de las matemáticas que conforman el currículo, desde una perspectiva funcional.

Una descripción detallada del análisis didáctico, además de su interpretación con otros significados y usos en educación matemática, se recogen en el libro “Análisis didáctico en educación matemática: componentes, usos e interpretaciones”¹⁶. Dos ejemplos precisos del uso del análisis didáctico para el diseño, puesta en práctica y evaluación de una unidad didáctica se pueden consultar en García y Romero (En prensa) y en Serrano et al. (2012). Mi objetivo aquí es presentar de manera global la visión del análisis didáctico con la que abordamos la implementación de las cuatro materias que conforman el módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas” para la formación del maestro de Educación Primaria. En el capítulo 5, describiré proyectos de investigación que nos han permitido reflexionar en profundidad sobre la implementación del análisis didáctico en la formación de maestros, mientras que en el capítulo 3, describiré la experiencia de varios proyectos de innovación docente centrados en su puesta en práctica en la materia de primer curso “Bases matemáticas para la Educación Primaria”, (Lupiáñez, Molina, Flores y Segovia, 2007).

Estructura del Análisis Didáctico

El análisis didáctico introduce un nivel de reflexión curricular (Rico, 1997a), centrado en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de los temas de la matemática escolar. El análisis didáctico se organiza en torno a cuatro procedimientos que abordan diferentes facetas de la enseñanza y aprendizaje de las

¹⁶ Libro en proceso de edición. En la misma intervenimos, en orden alfabético, Jose Luis Lupiáñez, Marta Molina y Luis Rico.

matemáticas: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación*.

En el análisis de contenido, situado en la dimensión cultural y conceptual del currículo, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción. La revisión y organización de los conceptos y procedimientos que conforman ese tema, el modo en que pueden representarse y la organización de los fenómenos y problemas a los que pueden dar respuesta, junto a su desarrollo histórico, delimitan los organizadores del currículo que conforman del análisis de contenido.

El análisis cognitivo, ubicado en la dimensión cognitiva del currículo, aborda la problemática del aprendizaje de ese tema matemático por parte de los escolares. El profesor, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, enuncia y organiza los objetivos de aprendizaje sobre ese tema matemático y su vínculo con la competencia matemática básica. También analiza aquellas limitaciones que pueden interferir el aprendizaje, en términos de errores y dificultades y organiza la selección de tareas que les suministrará a los escolares la oportunidad de aprender.

En el análisis de instrucción, el profesor selecciona, diseña y secuencia las tareas que empleará en la instrucción para lograr las expectativas de aprendizaje que ha concretado anteriormente. También analiza los diferentes materiales y recursos que podrá emplear en sus clases y, entre otros aspectos, define la secuenciación de tareas y sesiones y delimita aspectos centrales de la gestión del aula. Finalmente, también delimita los criterios, los instrumentos y las técnicas de evaluación.

El último de los análisis, el de actuación, se lleva a cabo después de implementar la unidad didáctica y le sirve al profesor para recabar información acerca de: la medida en que se han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas, la funcionalidad de las tareas empleadas o la bondad de las herramientas de evaluación puestas en juego. Esta información es útil de cara a la próxima implementación de la unidad diseñada o al inicio de la planificación del tema siguiente.

Esquematizo la estructura cíclica del análisis didáctico en la Figura 2.1.

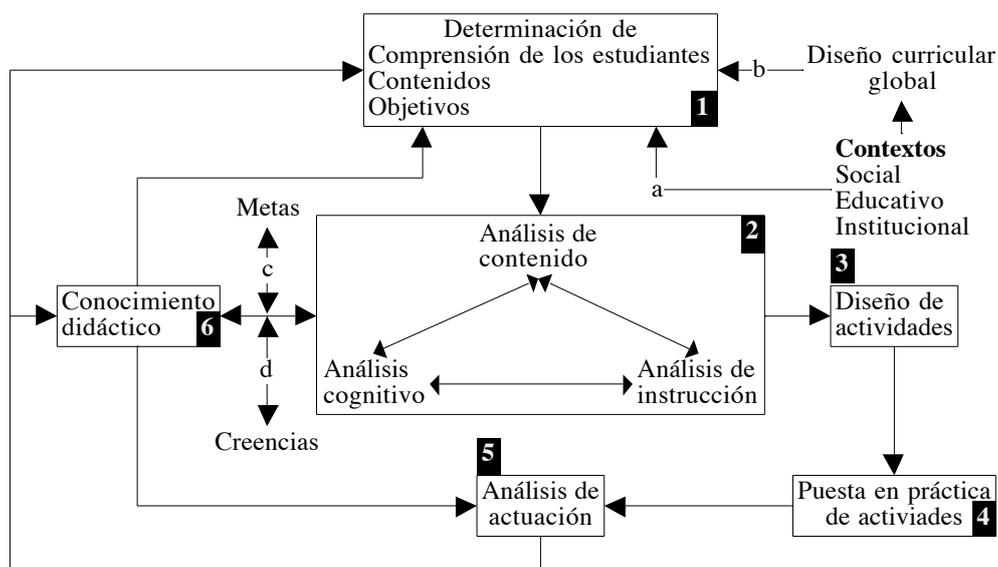


Figura 2.1. Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 31)

Todo el análisis didáctico contextualiza la realidad social y escolar en que tiene lugar la actividad del profesor. La ubicación e infraestructura del centro, el nivel socio-económico de los escolares o su estatus cultural, son algunos de los elementos que contextualizan esa actividad docente. El inicio del análisis didáctico incluye la selección de un tema de matemáticas y la concreción del nivel educativo en el que se sitúa la planificación. Con esos dos elementos, es posible ubicar y revisar los documentos curriculares que aportan información general sobre la formación previa de los escolares, sobre organización de contenidos, y sobre expectativas generales que perseguir. La revisión de los criterios de evaluación también aporta información relevante a la planificación.

Ese proceso de diseño comienza explícitamente con los tres análisis que recoge el cuadro 2 de la Figura 2.1. Las flechas expresan que cualquiera de ellos puede suministrar información que modifica o complementa a los otros. Una revisión de los objetivos puede ampliar la lista de contenidos seleccionados, o una tarea que se ha encontrado en un libro de texto moviliza un objetivo que no estaba contemplado originalmente. Como muestro en la Figura 2.1, el conocimiento didáctico del profesor le permite llevar a cabo estos tres análisis y, a su vez, la realización de los análisis contribuye al aprendizaje del profesor suministrándole nueva información que aumenta su conocimiento didáctico.

Después de llevar a cabo los tres análisis, el profesor concreta las actividades de enseñanza que llevará a cabo en la fase de puesta en práctica (cuadro 3 de la Figura 2.1). Para diseñar estas actividades se basa en la información de los análisis previos y añade aspectos de gestión del aula que organizarán la instrucción. Después de la implementación de la planificación, el profesor puede realizar el análisis de actuación para valorar los resultados obtenidos y disponer de información para una nueva puesta en práctica del análisis didáctico (cuadro 5 de la Figura 2.1). Esta última fase también contribuye al desarrollo del conocimiento didáctico del profesor.

El conocimiento didáctico necesario para llevar a cabo el análisis didáctico, puede concretarse en términos del MKT que presenté en el apartado anterior. Rojas, Flores y Ramos (en prensa), han hecho una propuesta estructurada que relaciona estos modelos, para mostrar cómo cada uno de los análisis del análisis didáctico puede informar sobre algún dominio específico del conocimiento matemático para la enseñanza que posee un profesor (Tabla 2.2). En este trabajo describen y ejemplifican los vínculos.

Aunque los autores de este estudio usan esta relación entre los modelos para analizar la práctica docente de profesores en ejercicio, sus resultados me permiten inferir cómo cada una de las herramientas (organizadores) del análisis didáctico activa o promueve el desarrollo de diferentes dominios del conocimiento de las matemáticas para la enseñanza.

Tabla 2.2

Relación entre los organizadores del análisis didáctico y los dominios de conocimiento del profesor de matemática (Rojas, Flores y Ramos, en prensa)

Organizadores	Dominios de conocimiento ¹⁷					
	Conocimiento del contenido			Conocimiento didáctico del contenido		
	CCC	CEC	CH	CCEs	CCEn	CC
<i>Análisis de contenido</i>						
Estructura conceptual	✓	✓	✓			✓
Análisis fenomenológico		✓	✓			
Sistemas de representación		✓			✓	
Desarrollo histórico		✓			✓	
<i>Análisis cognitivo</i>						
Expectativas de aprendizaje				✓	✓	
Limitaciones de aprendizaje		✓		✓		
Oportunidades de aprendizaje		✓		✓		
<i>Análisis de instrucción</i>						
Tareas y secuencias de tareas		✓		✓	✓	✓
Materiales y recursos					✓	✓
Evaluación				✓	✓	✓

He añadido a la propuesta de los autores los organizadores “Desarrollo histórico” y “Evaluación”, con sus correspondientes vínculos, además, de otras dos relaciones. La primera entre el organizador “Análisis fenomenológico” con el “Conocimiento del horizonte matemático”, ya que ese análisis puede suministrar información sobre los problemas que están en la base de las nociones matemáticas que, en varias ocasiones, provienen de diversas disciplinas. La segunda vincula el organizador “Expectativas de aprendizaje” y “Conocimiento del contenido y de los estudiantes”. Cuando el profesor enuncia lo que espera que aprendan sus escolares, debe tomar en cuenta el tipo de alumnos que tiene y los conocimientos de los que parten. Debe tener información acerca de sus puntos fuertes y débiles en matemáticas, de sus características contextuales o de sus motivaciones. También reflexiona sobre la competencia matemática de los escolares y su nivel de desarrollo y en todos estos aspectos justifico ese vínculo.

¹⁷ CCC: Conocimiento común del contenido; CEC: Conocimiento especializado del contenido; CH: Conocimiento del horizonte matemático; CCEs: Conocimiento del contenido y los estudiantes; CCEn: Conocimiento del contenido y la enseñanza; CC: Conocimiento del currículo.

Este análisis relacional es el que fundamenta la organización de las materias presentadas en el capítulo anterior, tal y como muestro en el siguiente apartado.

5. FUNDAMENTACIÓN DEL PROYECTO DOCENTE

Asumiendo la importancia y la relevancia del MKT, del modelo de competencias profesionales del profesor y del análisis didáctico, nuestra propuesta aporta un programa de formación inicial de maestros que persigue tres grandes finalidades:

- ◆ Formar a un profesor que sea matemáticamente competente.
- ◆ Desarrollar su conocimiento matemático para la enseñanza.
- ◆ Desarrollar conocimientos y habilidades para llevar a cabo un análisis didáctico de cualquier de los temas que conforman el currículo de matemáticas de Educación Primaria.

Estas finalidades nos permiten organizar las prioridades de cada una de las materias del “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas” del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada en términos de los cuatro análisis del análisis didáctico, los dominios del MKT y las competencias del profesor (Tabla 2.3).

Tabla 2.3

Prioridades estructurales de las materias del módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas”

Análisis Didáctico	Modelo MKT	Modelo Niss
<i>Bases matemáticas para la Educación Primaria</i>		
Análisis de contenido	Conocimiento común del contenido (actualización) Conocimiento especializado del contenido Conocimiento del horizonte matemático	Competencia matemática
<i>Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria</i>		
Análisis cognitivo	Conocimiento del contenido y de los estudiantes Conocimiento del currículo	Competencia sobre aprendizaje Competencia curricular

Tabla 2.3
Prioridades estructurales de las materias del módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas”

Análisis Didáctico	Modelo MKT	Modelo Niss
<i>Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en Educación Primaria</i>		
Análisis de instrucción	Conocimiento del contenido y de la enseñanza Conocimiento del currículo	Competencia de enseñanza Competencia curricular Competencia sobre evaluación
<i>Competencias matemáticas en Educación Primaria</i>		
Análisis de instrucción	Conocimiento del currículo Conocimiento del contenido y de la enseñanza	Competencia curricular Competencia de enseñanza Competencia sobre evaluación

El caso de la materia “Bases matemáticas para la Educación Primaria”, la alusión al conocimiento común del contenido expresa la importancia de que los futuros maestros recuerden, actualicen y profundicen en las matemáticas que forman parte del currículo de Educación Primaria. Pero en los capítulos siguientes pongo de manifiesto que la finalidad de esta materia es desarrollar en los estudiantes su conocimiento específico del contenido matemático, de cara a su futura labor docente.

Programación de la Materia “Bases matemáticas para la Educación Primaria”

En el capítulo anterior he presentado la materia “Bases matemáticas para la Educación Primaria” como parte del módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas” del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada. La materia es de carácter obligatoria¹⁹, tiene asignados 9 créditos ECTS²⁰ y se imparte en el primer semestre del primer curso del citado Grado.

Como también he descrito en el capítulo anterior, esta materia se centra en el estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos de los bloques de matemáticas de Educación Primaria, de sus formas de representación y modelización, (incluyendo materiales y recursos), de su fenomenología y de algunos aspectos históricos de los mismos, pero siempre desde la perspectiva del conocimiento y las competencias que debe desarrollar un profesor para el ejercicio de su labor docente.

En este capítulo presento la información global de la materia para, en el siguiente, detallar cada uno de los bloques y temas que la componen y organizan. Concretamente, en primer lugar describo las competencias generales y específicas a las que espera

¹⁹ En la documentación oficial de la materia no se exigen requisitos curriculares previos para poder cursarla, aunque sí se recomienda que los estudiantes tengan dominio de los conocimientos y procedimientos propios de las matemáticas de Educación Primaria.

²⁰ Estos 9 créditos implican que cada estudiante tenga 3 horas de clase a la semana con todo el grupo más 1,5 horas de seminarios a los que asiste un tercio de los estudiantes. El profesor ha de reproducir tres veces por semana el mismo seminario; una por cada uno de los tres subgrupos en los que se divide el número total de estudiantes. Esto supone una carga docente de 11,25 créditos para el profesor (con el significado obsoleto de 10 horas lectivas por crédito).

contribuir esta materia, así como los objetivos que persigue y que se expresan como resultados esperables de la enseñanza. En segundo lugar detallo el temario de contenidos, distinguiendo los teóricos y los prácticos y cómo se relacionan y complementan. En tercer lugar describo la organización metodológica y a continuación hago lo propio con el modelo de evaluación. Finalmente, presento la documentación que se les distribuye a los estudiantes sobre la materia.

1. COMPETENCIAS GENERALES Y ESPECÍFICAS

Dentro del programa del EEES, una de las iniciativas más destacables es el proyecto Tuning, que persiguió la adopción de un sistema reconocible y comparable de titulaciones en Europa (González y Wageenar, 2006). Uno de sus aportes fue la puesta en uso del concepto de competencia para precisar el significado de los nuevos objetivos formativos de la educación universitaria. Esta noción pone énfasis en lo que el estudiante universitario es capaz de hacer al término de su proceso formativo y en los procesos que le permitirían continuar aprendiendo autónomamente a lo largo de su vida. (Moreno, Bajo, Moya, Maldonado y Tudela, 2007, p. 1). En el proyecto Tuning se consideran dos tipos de competencias que se han usado en el diseño de los nuevos Grados en España. Por una parte están aquellas que se relacionan con áreas temáticas determinadas (como Geología, Historia o Matemáticas), y que se denominan *específicas*; y, por otra, las *competencias genéricas* que recogen “aquellos atributos compartidos que pudieran generarse en cualquier titulación y que son considerados importantes por ciertos grupos sociales” (González y Wagenaar, 2003, p. 70).

Esta es la orientación que asumimos para las competencias a cuyo desarrollo pretende contribuir la materia “Bases matemáticas para la Educación Primaria”. Destaco la idea de la contribución, ya que estas competencias se asumen para todo el grado y no son responsabilidad de una única materia. Esas competencias expresan un nivel de expectativa a largo plazo a la que contribuyen las diferentes materias que lo componen. En el caso de “Bases matemáticas para la Educación Primaria”, las competencias seleccionadas son las siguientes:

Generales

- ◆ Analizar y sintetizar la información.
- ◆ Comunicar oralmente y por escrito con orden y claridad.
- ◆ Buscar, seleccionar, utilizar y presentar la información usando medios tecnológicos adecuados.
- ◆ Trabajar en equipo.
- ◆ Investigar y seguir aprendiendo con autonomía.

Específicas

- ◆ Valorar la responsabilidad individual y colectiva en la consecución de un futuro sostenible desde el papel que corresponde a la Educación Matemática.
- ◆ Conocer cuáles son los contenidos de Matemáticas en el currículo de Educación Primaria y su organización en el mismo.
- ◆ Desarrollar competencias matemáticas básicas (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y emplear

soportes y herramientas tecnológicas) sobre los bloques de contenido de las matemáticas escolares.

- ◆ Conocer las matemáticas de la Educación Primaria, su relación interdisciplinar con las demás áreas y los conocimientos didácticos referidos a su historia, fenomenología, sistemas de representación y modelización.
- ◆ Conocer y utilizar materiales y recursos didácticos así como tecnologías de la información y de la comunicación, que sirven para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- ◆ Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- ◆ Plantear y resolver problemas de matemáticas vinculados con la vida cotidiana.
- ◆ Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.

El desarrollo de las competencias se puede promover desde la concreción de objetivos, la selección de contenidos o las decisiones metodológicas. Esto se puede observar en la descripción detallada de cada uno de los bloques y temas que realizo en el capítulo siguiente. En principio, las competencias específicas son más accesibles por la particularización de los contenidos. ¿En qué medida se puede promover también el desarrollo de las competencias genéricas? En el capítulo siguiente, describo las actuaciones propuestas para promover su desarrollo. Mención especial recibe la competencia “Investigar y seguir aprendiendo con autonomía”, a la que dedico un apartado preciso dentro de cada tema.

También resulta fundamental que la evaluación informe sobre el grado en el que se han desarrollado esas competencias. En la descripción del modelo de evaluación en este mismo capítulo, ejemplifico esta posición en el caso de la competencia “Plantear y resolver problemas de matemáticas vinculados con la vida cotidiana”.

2. OBJETIVOS

Al desarrollo de las competencias anteriores contribuyen, en mayor o menor medida y entre otros factores, el logro de los objetivos que persigue la materia. Estos objetivos son los siguientes:

- ◆ Conocer y relacionar los principales conceptos, estructuras y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares de Educación Primaria.
- ◆ Comprender y emplear adecuadamente los hechos y las propiedades de los conceptos y estructuras matemáticos.
- ◆ Utilizar correctamente procedimientos matemáticos de forma escrita y simbólica.
- ◆ Analizar, razonar y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas.
- ◆ Manejar y relacionar los diferentes modos de representar los conceptos y procedimientos matemáticos propios de Educación primaria.
- ◆ Modelizar fenómenos de diferentes disciplinas con nociones y herramientas matemáticas básicas.
- ◆ Enunciar, formular y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos.
- ◆ Utilizar modelos manipulativos, gráficos, simbólicos y tecnológicos para expresar relaciones, propiedades y operaciones matemáticas.

- ◆ Emplear el lenguaje simbólico en matemáticas y relacionarlo con el lenguaje cotidiano.
- ◆ Conocer y manejar la estructura básica del currículo de matemáticas de Educación Primaria en cuanto a sus contenidos, y describirla con claridad y precisión.
- ◆ Percibir el conocimiento matemático como parte de nuestra cultura, con un carácter interdisciplinar y socialmente útil.
- ◆ Valorar la labor educativa en matemáticas como un compromiso profesional, ético y social.

Estos enunciados están expresados como resultados esperables de la enseñanza programada. La especificidad de estos objetivos permiten concretar las competencias específicas anteriores en un nivel de expectativas accesible y operativo y suministra, como se verá en el capítulo siguiente, la prioridad que debe perseguir el formador. Siguiendo la propuesta de Rico y Lupiáñez (2008a), este tipo de objetivos “se expresan como capacidades y se muestran mediante conductas observables, relativos a una disciplina, una asignatura o un tema concreto y referidos a tareas de una complejidad establecida” (p. 68)

Los temas a los que se vinculan los objetivos son los presentados en el siguiente apartado y algunas de las tareas que pueden promover y mostrar su logro se describen en el capítulo siguiente.

3. TEMARIO DE CONTENIDOS

Los contenidos de la materia se organizan en dos secciones: contenidos teóricos y contenidos práctico. Esta clasificación obedece a las competencias y objetivos perseguidos y las directrices propugnadas por la organización general del Grado. A su vez, los contenidos se organizan en torno a cuatro bloques, que se corresponden con los cuatro que organizan las matemáticas de Educación Primaria²¹.

Contenidos Teóricos

Bloque 1. Números y Operaciones

- ◆ **Tema 1. El número natural. Sistemas de numeración.** Número natural. Concepto y usos. Cuantificación y ordenación. Sistemas de numeración: sistemas posicionales. El sistema de numeración decimal.
- ◆ **Tema 2. Aritmética.** Estructura aditiva: suma y resta de números naturales; conceptos y propiedades; usos. Estructura multiplicativa: producto y división de números naturales; conceptos y propiedades; usos. Divisibilidad. Cálculo mental y estimación. La calculadora en el aula. Los problemas aritméticos. Resolución de problemas. Introducción a los números enteros.
- ◆ **Tema 3. Números racionales.** Concepto y significados de fracción. Operaciones con fracciones. Equivalencia de fracciones. El número racional. Operaciones con racionales. Propiedades. Ordenación de racionales. Representación gráfica. Números decimales. Representación decimal de los números racionales. Operaciones con decimales. Ordenación de decimales. Razón y proporción. Porcentajes.

²¹ He respetado la denominación precisa con la que estos bloques figuran en el currículo, si bien no el orden (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, pp. 31555-31556).

Bloque 2. Geometría

- ◆ **Tema 4. Figuras geométricas.** Las formas y el entorno. La geometría y sus aplicaciones. Elementos fundamentales, del plano y del espacio: relaciones y propiedades. Figuras en el plano (polígonos y circunferencia) y cuerpos en el espacio (poliedros y cuerpos de revolución): elementos y propiedades. Representaciones planas de los cuerpos geométricos.
- ◆ **Tema 5. Transformaciones geométricas planas. Orientación espacial.** Isometrías en el plano: traslaciones, giros y simetrías; composición de movimientos. Regularidades: simetrías, frisos y rosetones. Recubrimientos del plano. Visualización espacial. Posiciones en el plano y en el espacio: sistemas de coordenadas. Mapas, planos y redes.

Bloque 3. La medida: Estimación y Cálculo de Magnitudes

- ◆ **Tema 6. Magnitudes y su medida.** Idea de magnitud. Cantidad. Tipos de magnitudes. Las magnitudes longitud, superficie, volumen, amplitud, capacidad, tiempo y dinero. Medida directa de magnitudes; sistemas de unidades de medida; evolución histórica Medida indirecta de magnitudes: proporcionalidad aritmética y geométrica. Estimación y aproximación en la medida. El número π .

Bloque 4. Tratamiento de la Información, Azar y Probabilidad

- ◆ **Tema 7. Introducción a la estadística y a la probabilidad.** La Estadística y sus aplicaciones. Estudios estadísticos: Población, censo y muestra. Variables estadísticas, distribución. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión. Fenómenos y experimentos aleatorios. Sucesos. Probabilidad: asignación subjetiva; estimación basada en la frecuencia y asignación clásica (regla de Laplace).

Contenidos Prácticos

La sección práctica del temario incluye tres tipos de prácticas. Las dos primeras se integran en el desarrollo natural de la materia y su contenido y organización depende del tema al que pertenezcan. Se llevan a cabo en las sesiones de seminario y son de obligada asistencia para los estudiantes. El tercer tipo de prácticas, por el contrario, constituyen actividades voluntarias que los estudiantes pueden realizar fuera del horario establecido y que tienen un carácter más transversal e integrador que las anteriores.

Prácticas de Resolución de Problemas

Estas prácticas se intercalan con las sesiones en las que se presentan y ponen en juego los contenidos teóricos. Durante su desarrollo, los formadores enfatizamos que sean los estudiantes los que afronten la resolución de los ejercicios y problemas y que participen mostrando sus resultados en la pizarra. Las actividades que se plantean en estas prácticas son específicas para cada uno de los siete temas y se describen en los guiones incluidos en el anexo. En estos seminarios los estudiantes también realizan informes, tal y como describo más adelante.

Prácticas de Laboratorio

Las prácticas de laboratorio se asocian a cada uno de los temas anteriores. Estas prácticas se realizan a través del uso de materiales manipulativos y/o recursos informáticos. Su diseño persigue un doble objetivo.

En primer lugar, pretendemos que los estudiantes, en pequeños equipos y de manera autónoma, exploren y experimenten actividades matemáticas para introducirse en el trabajo con nuevas nociones matemáticas o para profundizar en el estudio de nociones

ya introducidas en sesiones previas. En segundo lugar, estas actividades contribuyen a conocer y utilizar un gran número de materiales y recursos, tanto manipulativos como tecnológicos, que pueden emplearse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.

Algunos de los contenidos y materiales de estas prácticas en cada uno de los cuatro bloques de contenido son los siguientes:

- ◆ *Números y operaciones*. Sistemas de numeración, cálculo: algoritmos y métodos, análisis de problemas aritméticos, fracciones y decimales. Ábaco, bloques multibase, diagrama de Freudenthal, círculo de fracciones.
- ◆ *Geometría*. Polígonos: clasificación y propiedades, patrones y formas, poliedros: clasificación y elementos básicos, transformaciones geométricas. Tangram, geoplano, Polydron, GeoGebra.
- ◆ *La medida: estimación y cálculo de magnitudes*. Medidas directas e indirectas; instrumentos de medida; sistema métrico decimal. Cinta métrica, balanzas, romanas, clinómetro, GeoGebra.
- ◆ *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*. Organización de datos; interpretación de información en medios de comunicación; fenómenos relacionados con el azar. Excel.

La descripción detallada de cada una de las prácticas de laboratorio están incluidas en el capítulo siguiente, junto a los temas en las que se llevan a cabo.

Prácticas de Campo

Las prácticas a realizar en el exterior tendrán un carácter más transversal e interdisciplinar que las prácticas de laboratorio y en su desarrollo están implicadas otras áreas de conocimiento. En la materia tenemos programadas dos prácticas de campo que se proponen en dos momentos diferentes del curso:

- ◆ *Matemáticas y fotografía*. Itinerario fotográfico para identificar y describir matemáticas en el entorno. Esta práctica se propone en el tema 4.
- ◆ *Matemáticas en el Parque de las Ciencias*. Visita temática guiada a este parque con una propuesta de actividades para realizar en algunas de sus instalaciones. Esta práctica se propone en el tema 6.

La descripción de cada una de las prácticas de campo están incluidas en el capítulo siguiente, junto a los temas en las que se llevan a cabo.

Esta propuesta de contenidos no es arbitraria. Responde, en primer lugar, a los contenidos que forman parte del currículo oficial de Educación Primaria. También responde a la visión de esos contenidos que debe desarrollar un profesor, porque no se limita al *conocimiento común del contenido*, según describimos en el capítulo 2. Incluye, sobre todo, facetas del *conocimiento especializado del contenido*: relaciones y complementariedad entre contenidos conceptuales y procedimentales, sistemas de representación y modelos, significados y usos, campos de fenómenos y problemas, materiales y recursos y notas del desarrollo histórico de algunas de las nociones. Además, este modo de abordar el análisis de las matemáticas escolares permite ejemplificar la labor que puede realizar un profesor poniendo en juego, fundamentalmente, *el análisis de contenido* que también he presentado en el capítulo anterior²².

²² En ningún caso se presentan esos aspectos como herramientas del análisis de contenido en el contexto de la materia. En la de segundo curso, “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Primaria”, se hace balance del trabajo realizado en la materia de primero y se esboza el esquema

El diseño de los contenidos prácticos de la materia pone de manifiesto el modo en el que venimos proponiendo contribuir al desarrollo de las competencias genéricas²³. El diseño de las prácticas, tanto de resolución de problemas como laboratorio o de campo, exigen que los estudiantes, individualmente y en equipo, localicen y analicen información, elaboren informes y reflexiones que sintetizen esa información y que recojan las opiniones y visiones de los integrantes del equipo, para finalmente presentarla y someterla al juicio crítico de sus compañeros y del formador.

Estas actuaciones se esbozan en el apartado siguiente y se detallan en el capítulo 4.

4. METODOLOGÍA DOCENTE

La organización metodológica de la materia incluye diferentes escenarios y agrupamientos. A continuación describo cada uno de ellos junto a las sesiones de tutoría y a la plataforma digital que se emplea. Finalmente, detallo la distribución de los contenidos a lo largo del semestre.

Sesiones Presenciales

Dentro de las sesiones presenciales se incluyen sesiones de gran grupo y seminarios.

Sesiones de Gran Grupo

A estas sesiones pueden asistir todos los estudiantes matriculados en la materia²⁴. Por lo general, en ellas el formador presentará, orientará y sintetizará los contenidos del temario teórico, profundizando en aquellos de mayor complejidad. El formador también guía las reflexiones y análisis de los alumnos basadas en las lecturas de los textos recomendados y promueve y modera los debates que puedan surgir. En estas sesiones también asumen protagonismo los estudiantes, pues tienen la oportunidad de resolver ejercicios y problemas que ejemplifica o introducen los contenidos tratados. Además, en la sesión de gran grupo que sucede a un seminario en el que se realice una práctica de laboratorio, dos grupos de estudiantes harán una presentación breve del trabajo realizado en esa práctica²⁵. Durante esas presentaciones, el resto de estudiantes valoran el trabajo de los compañeros con una hoja de seguimiento, que describiré en el apartado de evaluación.

En la programación de la materia hay tres horas de trabajo a la semana con el gran grupo, organizadas en dos sesiones, una de dos horas y otra de una.

de trabajo usado. Así, en segundo curso, los estudiantes identifican aspectos recurrentes en cada uno de los aspectos tratados y llevan a cabo un sencillo análisis de contenido de un tema de las matemáticas de Educación Primaria.

²³ Este diseño de prácticas y su articulación con el contenido teórico de la materia comenzó a planificarse y llevarse a cabo en el curso 2002-2005, con motivo del trabajo de un proyecto de innovación docente ideado y coordinado por el profesor Isidoro Segovia sobre una asignatura de la antigua Diplomatura. Proyectos de innovación posteriores, como los coordinados por los profesores Pablo Flores (2003-2004), Marta Molina (2009-2010) y yo mismo (2010-2011), han contribuido a analizar, evaluar y reformular este diseño de manera continuada.

²⁴ Rondan los 65 estudiantes.

²⁵ Estas presentaciones consiste en un breve balance del trabajo de equipo realizado en la práctica de laboratorio anterior, en un tiempo máximo de 5 minutos. El resto de estudiantes pueden intervenir con sus dudas, comentarios y aportes. Los equipos, formados por cuatro estudiantes, que se encargan de presentar ese balance de su trabajo rotan durante el curso para que al menos cada uno intervenga una vez durante el mismo.

Seminarios

Para la realización de los seminarios los estudiantes se dividen en tres subgrupos. Cada estudiante tiene una hora y media de seminario a la semana, mientras que el formador reproduce el seminario tres veces por semana, una vez con cada uno de los subgrupos. En los seminarios se realizan las prácticas de resolución de problemas y las de laboratorio.

En las prácticas de resolución de problemas, los estudiantes trabajan individualmente y participan colectivamente en los debates y discusiones que el formador propone. En las prácticas de laboratorio, cada uno de los subgrupos se divide en equipos de trabajo compuestos por cuatro o cinco integrantes que se mantendrán durante todo el curso. Las prácticas de laboratorio se desarrollan con materiales y recursos didácticos manipulativos en un aula estándar o bien se centran en el manejo de software educativo y recursos de Internet en un aula de informática. Durante las prácticas de laboratorio se fomenta el trabajo autónomo de los estudiantes. Para cada una de ellas, los estudiantes disponen de un cuaderno individual de trabajo que deberán llevar a clase y que irán completando conforme realiza la práctica. Además, cada equipo cumplimentará un cuaderno de grupo que deberá entregar al profesor al inicio de la siguiente sesión de gran grupo.

La labor del formador en los seminarios se focaliza en presentar las actividades, atender las dudas, animar y orientar el trabajo de los alumnos y fomentar y moderar los debates. El contenido de los cuadernos individuales y de grupo de cada una de las prácticas de laboratorio, se describen en el capítulo siguiente junto al tema en que se llevan a cabo.

La conjunción de estos diferentes tipos de sesiones presenciales, pone de manifiesto una organización de la formación de maestros que se sustenta en las directrices curriculares oficiales y que destaca la importancia de conjugar el estudio y trabajo individual (conocimiento subjetivo), la reflexión compartida en equipos de trabajo (conocimiento intersubjetivo) y la puesta en común y los debates (conocimiento objetivo) (Davidson, 2003).

Sesiones no Presenciales

Las actividades no presenciales pueden ser individuales y grupales, tal y como detallo a continuación.

Actividades no Presenciales Individuales

Se centran en el trabajo autónomo del estudiante. Su responsabilidad básica es el estudio, de los contenidos indicados en el temario, empleando los documentos recomendados, así como la resolución de tareas correspondientes a esos contenidos. Casi todos los temas incluyen la elaboración de resúmenes e informes que sintetizan la información básica de cada tema y este tipo de actuaciones también forman parte del trabajo individual y facilitará y promoverá su comprensión. Estos informes deberán presentarse con una ortografía y redacción cuidada.

Actividades no Presenciales Grupales

Tienen que ver con el trabajo en equipo fuera de las horas lectivas. Estas actividades implicarán la reflexión, discusión, debate y redacción de informes con los medios tecnológicos adecuados por parte de todos los miembros del equipo, acerca de los cuadernos de grupo de las prácticas de laboratorio. También se incluye aquí la planificación de las presentaciones que realizan sintetizando ese trabajo en las sesiones de gran grupo. Las prácticas de campo también involucran trabajo en equipo.

Tutorías Académicas

Este tipo de escenario ha tenido un especial empuje y he destacado su presencia con motivo de las directrices del EEES (Coriat y Sanz, 2005). La lectura de la actividad del profesor universitario como asesor y orientador implica un seguimiento individualizado de los estudiantes. En esta línea, las tutorías académicas suministran un espacio para potenciar

la acción docente del profesorado en la que éste diseña situaciones de aprendizaje significativas para sus alumnos y los acompaña en su trayectoria académica (en su doble plano instructivo y formativo) a la vez que se ocupa, también, de aspectos personales y de orientación profesional. (Delgado, 2005, pp. 16-17)

Los resultados de estas actuaciones han tenido y tienen reconocimiento y resultados positivos. Álvarez (2002) destaca entre ellos el aumento de la satisfacción de los estudiantes, la reducción de las tasas de abandono y de la proporción de suspensos e, incluso, la eficacia en su inserción laboral.

En el contexto de la materia propuesta, la acción tutorial se concreta en reuniones periódicas individuales o grupales entre el formador y los estudiantes para guiar, supervisar y orientar las distintas actividades académicas propuestas. También tienen cabida asuntos personales y sociales de los equipos de trabajo. Esta doble función, caracteriza la acción tutorial como *integral* (Delgado, 2005, p. 21).

Algunas de las reuniones o conversaciones tutoriales se llevarán a cabo mediante una plataforma educativa virtual que describo a continuación.

Plataforma Educativa Virtual

Parte del desarrollo de la materia se realiza usando una plataforma creada en la Universidad de Granada, denominada SWAD (Sistema Web de Apoyo a la Docencia).

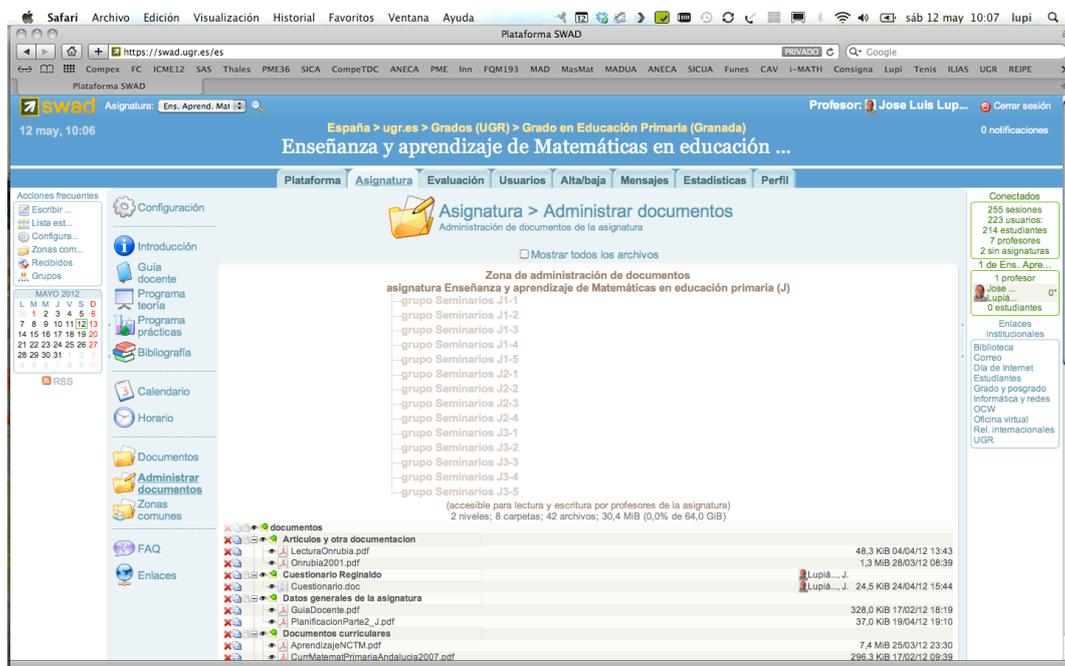


Figura 3.1. Administración de documentos en la plataforma SWAD

SWAD²⁶ es una plataforma de teleformación que integra diversas funciones de apoyo al aprendizaje, a la docencia y a la gestión de datos de estudiantes y profesores. Entre ellas destacan el acceso a información y documentación de la materia (guía docente, guiones, cuadernos de prácticas,...), la posibilidad de compartir y descargar archivos (transparencias usadas por el formador, documentos curriculares y de consulta, artículos...), las listas y fichas de alumnos y profesores, los foros de discusión, la asignación y gestión de actividades, la autoevaluación mediante exámenes interactivos y la consulta individual de calificaciones. Además, SWAD proporciona espacio para que los equipos de estudiantes compartan sus trabajos y puedan avanzar en ellos de manera virtual. Asimismo, el formador puede mantener tutorías y asesorías específicas con todos los estudiantes, con el subgrupo que participa en cada seminario, con un equipo concreto de cuatro estudiantes o individualmente con cada uno de ellos.

5. ORGANIZACIÓN TEMPORAL

La carga lectiva de la materia implica una duración de 15 semanas en un mismo semestre, con una distribución uniforme entre ellas. La Tabla 3.1 muestra la distribución de temas y la duración de las diferentes actividades. Obviamente, esta programación es orientativa pues siempre requerirá determinados ajustes según las características del grupo de estudiantes así como a las circunstancias del calendario académico.

La temporalidad surge de la distribución semanal del tiempo total de la asignatura según el concepto de crédito ECTS y no pretende establecer un horario inflexible del trabajo del alumno ni del profesor. Los datos de las columnas que describen las actividades presenciales y no presenciales, así como los de los totales, están expresados en horas. La séptima semana, señalada con las siglas *A-E*, se dedica a los posibles *ajustes* pertinentes del programa según el desarrollo del curso y a una *evaluación* parcial intermedia.

Tabla 3.1

Organización temporal de los temas

Semana	Tema	Actividades presenciales		Actividades no presenciales				Total
		Sesiones gran grupo	Seminarios	Tutoría individual	Tutoría colectiva	Trabajo individual	Trabajo en equipo	
1 ^a	1	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
2 ^a	1	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
3 ^a	2	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
4 ^a	2	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
5 ^a	3	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
6 ^a	3	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
7 ^a	A-E	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75

²⁶ <http://swad.ugr.es/info/>

8 ^a	4	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
9 ^a	4	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
10 ^a	5	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
11 ^a	5	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
12 ^a	6	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
13 ^a	6	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
14 ^a	7	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
15 ^a	7	3	1,50	0,05	0,2	8	2	14,75
Evaluación final durante el periodo oficial de exámenes								3,75
Total	45	22,5	0,75	3	120	30	225	

Lo primero que destaca de esta organización temporal, es que un estudiante debe dedicar casi quince horas de trabajo y estudio a esta materia por semana. Si se eliminan las cuatro horas y media que está en sesiones presenciales, aún restan algo más de diez horas de actividad fuera del aula. Este hecho es relevante y es importante que el profesor lo destaque en la presentación y durante el desarrollo de la asignatura. No todas las materias de primer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria tienen la misma carga lectiva y los estudiantes deben ser conscientes de este hecho para organizar apropiadamente su trabajo.

El horario de las actividades presenciales enfatiza un tratamiento equilibrado de los diferentes temas a lo largo del curso. La alternancia de los tiempos entre las sesiones de gran grupo y los seminarios, permiten integrar y articular coherentemente los contenidos teóricos y los prácticos. La distribución de las actividades no presenciales pretenden servir de orientación al alumno acerca del tiempo de dedicación necesario para superar la asignatura satisfactoriamente. El peso del trabajo en equipo es considerable en este diseño metodológico y pretende responder a la necesidad de promover el desarrollo de esta competencia. En el caso de las tutorías, simplemente expresan una estimación del tiempo que puede y debe dedicar un estudiante o un equipo a un trabajo personalizado. Como he señalado anteriormente, no todas estas tutorías tienen porqué realizarse presencialmente.

6. EVALUACIÓN

Las expectativas de aprendizaje de la materia están expresadas en términos de determinadas competencias genéricas y específicas. La evaluación, por tanto, independientemente de que deba generar una calificación, debe permitir describir ésta en términos del desarrollo de las competencias programadas. Para ello, es fundamental diseñar un modelo de evaluación basado en competencias que establezca técnicas e instrumentos de evaluación, niveles de desempeño y criterios. Además de presentar esos aspectos y ejemplificar alguno, en este apartado también describo los criterios de calificación.

Técnicas e Instrumentos de Evaluación

El diseño metodológico de la materia permite disponer de un buen número de técnicas e instrumentos que permiten observar y valorar el aprendizaje que desarrollan los estudiantes. La finalidad de éstos debe ser evaluar de manera formativa y continua, atendiendo tanto al aprendizaje individual como al colectivo (Sierra, 2010, p. 18). La Tabla 3.2 recoge las técnicas más destacables y una breve descripción.

Tabla 3.2

Técnicas de evaluación

Técnica	Descripción
Controles	Se realizan al finalizar cada uno de los temas y consisten en la resolución de cuestiones y actividades propias del tema (similares a las recogidas en los guiones). Su finalidad es que los estudiantes lleven un seguimiento continuo del temario teórico de la materia.
Exámenes	Existen de dos tipos: parciales y final. Los parciales no son oficiales y por esa razón se realizan durante periodo lectivo. Se llevan a cabo dos en el curso: uno al acabar el tema 3 y el segundo al finalizar el 7. Permiten eliminar materia del temario teórico con respecto al examen final. La finalidad de ambos es valorar el dominio de los conocimientos teóricos y prácticos de la materia.
Cuadernos individuales de prácticas de laboratorio	Son específicos a cada tema y, aunque no es necesario que los estudiantes lo entreguen al formador, es importante hacer seguimiento de si lo completan adecuadamente. En ellos se puede comprobar no sólo el tipo de respuestas que proponen los estudiantes, sino también cómo las argumentan y expresan.
Cuadernos de equipo de prácticas de laboratorio	Enfatizan la reflexión de los equipos de estudiantes con motivo del trabajo realizado previamente en los seminarios. Estos cuadernos sí los entregan al formador y constituyen buenos indicadores acerca del grado de maduración de las nociones trabajadas y de la capacidad de síntesis y expresión de los equipos de estudiantes.
Prácticas de campo	Se realizan dos a lo largo del año, una individual y otra en equipo. En ambos casos ponen de manifiesto la capacidad de los sujetos para relacionar los contenidos de la materia con problemas y situaciones del entorno y de otras disciplinas. Al realizarse en equipo, también constituyen una muestra del estado de cohesión y de responsabilidad compartida.
Trabajos voluntarios	Se proponen individualmente en el contexto de varios de los temas y, por lo general, se centran en que el estudiante localice y sintetice información de los medios o que la elabore personalmente con ciertas dosis de creatividad. Constituyen una técnica para valorar la capacidad de puesta en juego de los conocimientos del tema considerado, además del grado de compromiso y responsabilidad en el trabajo.

Tabla 3.2
Técnicas de evaluación

Técnica	Descripción
Presentaciones en clase	Son presentaciones breves que ponen de manifiesto la capacidad de los equipos de estudiantes para sintetizar y compartir las ideas claves de las respuestas que dieron en el cuaderno de equipo de las prácticas de laboratorio. En ellas se valoran, más que las propias respuestas, el modo de organizar y presentar la información y la claridad con la que la exponen.
Valoraciones de las presentaciones	Cada uno de los estudiantes que ven la presentación de un equipo de compañeros, debe elaborar una valoración en la que destaca un aspecto positivo de la exposición y propone una mejora de la misma. Estas valoraciones después se devuelven al equipo, lo cual supone una nutrida retroalimentación. Mediante estas valoraciones los estudiantes ponen de manifiesto su conocimiento de las nociones trabajadas y su forma de expresión acerca de cuestiones matemáticas y educativas. En conjunto, todos ellos desarrollan su capacidad comunicativa y crítica.
Elaboración de informes	Un informe puede incluir la resolución de uno o varios problemas matemáticos, pero no se limita a ese tipo de actuaciones ya que, por lo general, tendrán que elaborar una serie de argumentos en relación con el papel de esos problemas en el aprendizaje de los escolares de Educación Primaria. Su realización se inicia en determinados seminarios en los que se lleven a cabo una práctica de resolución de problemas.
Participación en las actividades	En los seminarios en los que se llevan a cabo prácticas de resolución de problemas, los estudiantes pueden participar de una manera activa en las sesiones, saliendo a resolver actividades a la pizarra y valorando las propuestas de los compañeros. También se producen interacciones cuando el formador abre un debate en el que pueden intervenir todos los estudiantes.
Asistencia	La asistencia sólo es obligatoria a los seminarios. Sin embargo, la asistencia regular a las sesiones de gran grupo también pone de manifiesto un interés y una responsabilidad del estudiante en su propia formación.

Cada una de estas técnicas debe llevar aparejados una serie de instrumentos para valorar el aprendizaje conseguido. Por ejemplo, para las presentaciones en clase, propongo una escala de valoración que el formador puede emplear para describir los logros obtenidos por los estudiantes tanto a nivel individual como colectivo (Figura 3.2). En el apartado siguiente se propone otro vinculado con la técnica “elaboración de informes”.

Presentaciones de los Equipos

Tema:

Equipo:

Fecha:

Intervienen:

MB	B	R	M												

	S/N	MB	B	R	M	Comentarios
Responde a las cuestiones						
Sintetiza y destaca ideas						
Argumenta las respuestas						
Introducen el trabajo						
Hacen balance final						
Uso correcto lenguaje y terminología						
Aportación del grupo						
Originalidad (problemas propios, análisis)						
Estructura presentación						
Fomenta la participación de los compañeros						
Respeto el tiempo						
Distribución equitativa intervenciones						

Figura 3.2. Escala de valoración para las presentaciones de los equipos de estudiantes

Evaluación de Competencias

El carácter de las competencias enunciadas en el primer apartado de este bloque, define las técnicas de evaluación que se emplearán en cada caso (Tabla 3.3).

Tabla 3.3

Técnicas para evaluar las competencias propuestas

Competencias genéricas	Cuadernos de equipo de prácticas de laboratorio Prácticas de campo Trabajos voluntarios Presentaciones en clase Valoraciones de las presentaciones Elaboración de informes Participación en las actividades
Competencias específicas	Controles Exámenes Cuadernos individuales de prácticas de laboratorio Cuadernos de equipo de prácticas de laboratorio Elaboración de informes

Cada una de las competencias, por su significado y complejidad, establece unos requerimientos específicos para su evaluación. Las técnicas antes descritas suministran una gran cantidad de información que es necesario convertir, mediante los instrumentos adecuados, en indicadores objetivos del desarrollo de cada una de ellas. Veamos un ejemplo para la competencia “Plantear y resolver problemas de matemáticas vinculados

con la vida cotidiana”, que es una de las seleccionadas para la materia. Esta competencia se puede concretar en una serie de descriptores, que permite focalizar la prioridad de la evaluación (Tabla 3.4).

Tabla 3.4

Descriptores de la competencia “Plantear y resolver problemas de matemáticas vinculados con la vida cotidiana”

1. Identificar acciones cotidianas en las que intervengan las matemáticas.
2. Plantear un problema matemático a partir de unos datos concretos o en un contexto determinado.
3. Modificar el enunciado de un problema matemático para cambiar su dificultad o el tipo de solución.
4. Inventar problemas matemáticos en una variedad de situaciones.
5. Identificar y describir los datos relevantes de un problema.
6. Resolver un problema empleando estrategias de resolución apropiadas.
7. Valorar la conveniencia de una solución en relación con el contexto del problema.

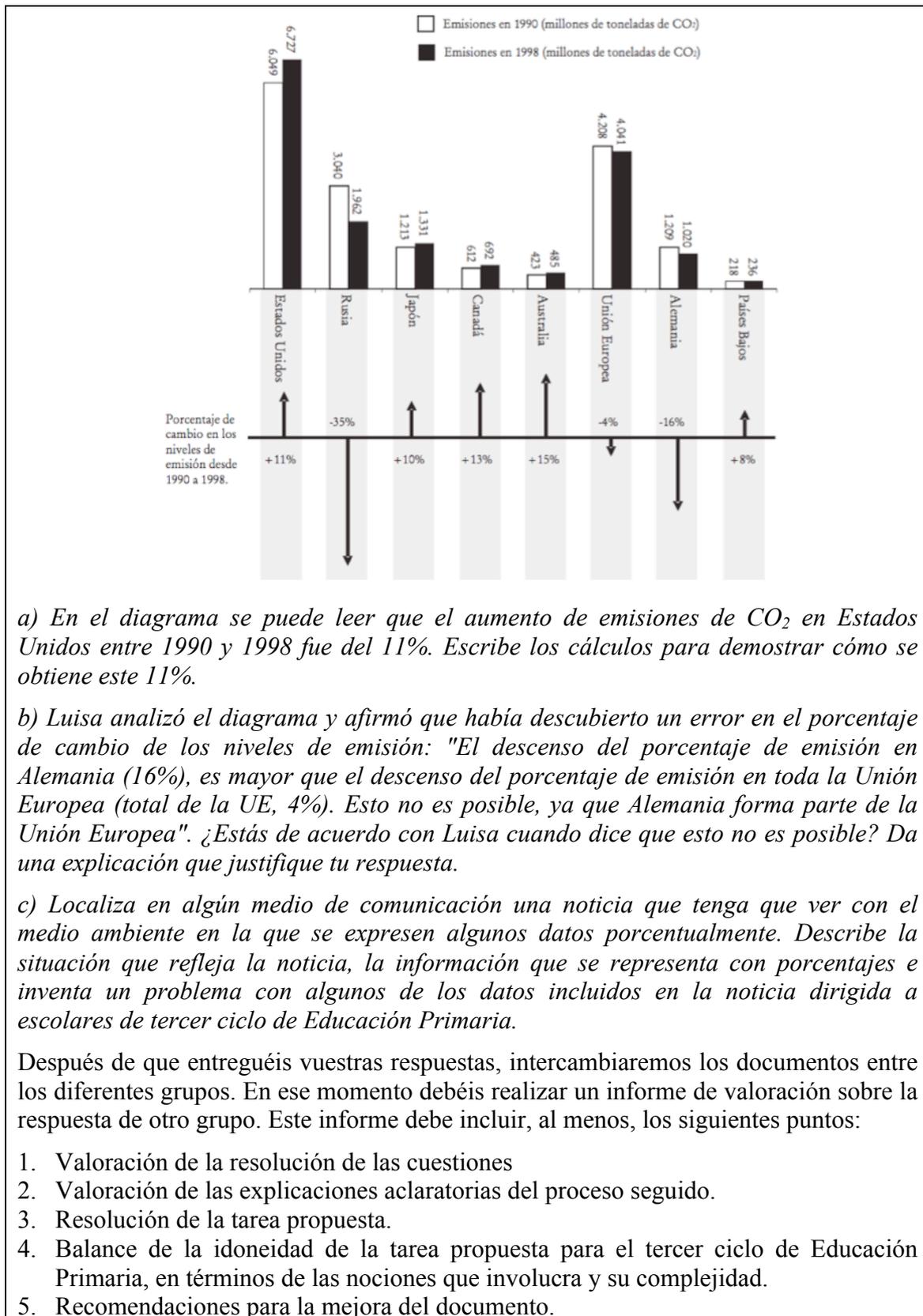
Una técnica de evaluación que emplearemos a lo largo de los diferentes temas de la materia y que, por tanto, nos brindará información longitudinalmente, es la elaboración de informes. Estos informes los realizan los equipos de estudiantes y su planteamiento surge en las prácticas de resolución de problemas que se llevan a cabo en los seminarios. Veamos un ejemplo detallado de esta técnica de evaluación (Figura 3.3).

Tema: Los números decimales y los porcentajes

A continuación os proponemos una tarea en la que se presenta una situación relacionada con las emisiones de CO₂ a la atmósfera. La tarea incluye tres cuestiones que debéis resolver individualmente. Al acabar, en equipo, iniciaréis la elaboración de un informe.

Tarea: *Las emisiones de CO₂*

Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO₂ en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático. El diagrama siguiente muestra los niveles de emisión de CO₂ en 1990 (las barras claras) de varios países (o regiones), los niveles de emisión en 1998 (las barras oscuras), y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y 1998 (las flechas con porcentajes):



a) En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO₂ en Estados Unidos entre 1990 y 1998 fue del 11%. Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene este 11%.

b) Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%), es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea (total de la UE, 4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea". ¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

c) Localiza en algún medio de comunicación una noticia que tenga que ver con el medio ambiente en la que se expresen algunos datos porcentualmente. Describe la situación que refleja la noticia, la información que se representa con porcentajes e inventa un problema con algunos de los datos incluidos en la noticia dirigida a escolares de tercer ciclo de Educación Primaria.

Después de que entreguéis vuestras respuestas, intercambiaremos los documentos entre los diferentes grupos. En ese momento debéis realizar un informe de valoración sobre la respuesta de otro grupo. Este informe debe incluir, al menos, los siguientes puntos:

1. Valoración de la resolución de las cuestiones
2. Valoración de las explicaciones aclaratorias del proceso seguido.
3. Resolución de la tarea propuesta.
4. Balance de la idoneidad de la tarea propuesta para el tercer ciclo de Educación Primaria, en términos de las nociones que involucra y su complejidad.
5. Recomendaciones para la mejora del documento.

Figura 3.3. Propuesta de elaboración de informe para el tema de números racionales²⁷

²⁷ Problema extraído de Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2005).

Este ejemplo permite evaluar, entre otros aspectos, el desarrollo de la competencia seleccionada en términos de sus descriptores. El primer apartado se centra en el sexto descriptor de la Tabla 3.4 (resolver un problema empleando estrategias de resolución apropiadas), mientras que el segundo se centra en el séptimo (valorar la conveniencia de una solución en relación con el contexto del problema). El tercer apartado puede informar del segundo descriptor (plantear un problema matemático a partir de unos datos concretos o en un contexto determinado).

Para llevar a cabo esa evaluación, es necesario proponer una serie de niveles de desempeño. En el caso del sexto descriptor de la competencia, estos niveles son los siguientes (Tabla 3.5).

Tabla 3.5

Niveles de desempeño para el descriptor “Resolver un problema empleando estrategias de resolución apropiadas”

<i>Nulo</i>	No ser capaz de resolver ningún tipo de problemas matemáticos ni en contextos muy próximos a los practicados previamente.
<i>Bajo</i>	Aplicar técnicas sencillas para resolver problemas similares a los ya practicados de manera cerrada.
<i>Medio</i>	Resolver problemas ya practicados mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).
<i>Alto</i>	Resolver problemas abiertos en situaciones no necesariamente conocidas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar, pero también aplicando estrategias de resolución de problemas más complejas y elaboradas que permitan validar la bondad de las respuestas obtenidas. También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

Sobre la base de estos niveles, propongo la siguiente rúbrica siguiente como instrumento de evaluación de este ejemplo de elaboración de informe sobre los números racionales (Figura 3.4)²⁸.

²⁸ Realizadas con el software gratuito *Rubistar*, disponible en <http://rubistar.4teachers.org>.

Matemáticas-Resolución de Problemas : Rúbrica Tarea CO2. Apartado A

Nombre del maestro/a: **Jose Luis Lupiáñez Gómez**

Nombre del estudiante: _____

CATEGORY	Alto	Medio	Bajo	Nulo
Cálculo realizado	Resta correcta, y correcto cálculo del porcentaje.	Error en la resta y cálculo del porcentaje correcto, o resta correcta pero dividiendo por 6.727.	Realiza operaciones pero no definidas o precisas.	Reponde sí o no sin resolver la cuestión
Errores Matemáticos	90-100% de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Casi todos (85-89%) los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	La mayor parte (75-85%) de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Más del 75% de los pasos y soluciones tienen errores matemáticos.
Explicación	La explicación es detallada y clara.	La explicación es clara.	La explicación es un poco difícil de entender, pero incluye componentes críticos.	La explicación es difícil de entender y tiene varios componentes ausentes o no fue incluida.

Matemáticas-Resolución de Problemas : Rúbrica Tarea CO2. Apartado B

Nombre del maestro/a: **Jose Luis Lupiáñez Gómez**

Nombre del estudiante: _____

CATEGORY	Alto	Medio	Bajo	Nulo
Respuesta	No, con una explicación correcta. Ej: No, otros países de la UE pueden haberlo aumentado, como los Países Bajos, de tal modo que el descenso total en la UE puede ser menor que el descenso en	No, con explicación incompleta. Ej: No tiene nada que ver.	No, sin explicación	Sí o sin respuesta.
Razonamiento Matemático	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.
Terminología Matemática y Notación	La terminología y notación correctas fueron siempre usadas haciendo fácil de entender lo que fue hecho.	La terminología y notación correctas fueron, por lo general, usadas haciendo fácil de entender lo que fue hecho.	La terminología y notación correctas fueron usadas, pero algunas veces no es fácil entender lo que fue hecho.	Hay poco uso o mucho uso inapropiado de la terminología y la notación.
Estrategia/Procedimientos	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no lo hace consistentemente.	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas.

Matemáticas-Resolución de Problemas : Rúbrica Tarea CO2. Apartado C

Nombre del maestro/a: **Jose Luis Lupiáñez Gómez**

Nombre del estudiante: _____

CATEGORY	Alto	Medio	Bajo	Nulo
Orden y Organización	La descripción de la noticia se presenta de una manera ordenada, clara y organizada que es fácil de leer.	La descripción de la noticia se presenta de una manera ordenada y organizada que es, por lo general, fácil de leer.	La descripción de la noticia se presenta en una manera organizada, pero puede ser difícil de leer.	La descripción de la noticia se presenta se ve descuidada y desorganizada. Es difícil saber qué información está relacionada.
Terminología Matemática y Notación	La terminología y notación son siempre correctas.	La terminología y notación son ,por lo general, correctas.	La terminología y notación son correctas sólo ocasionalmente.	Hay poco uso o mucho uso inapropiado de la terminología y la notación.
Conceptos Matemáticos	La explicación demuestra completo entendimiento de los porcentajes.	La explicación demuestra entendimiento sustancial de los porcentajes.	La explicación demuestra algún entendimiento de los porcentajes.	La explicación demuestra un entendimiento muy limitado de los porcentajes para resolver problemas o no está escrita.
Inventión	Problema original alejado de los practicados en clase	Problema original cercano a los practicados en clase	Problema de estructura idéntica a los practicados en clase	No se describe un problema.
Complejidad del problema	Reflexión	Conexión	Reproducción	Nula

Figura 3.4. Rúbricas para evaluar el desarrollo de un descriptor de la competencia “Plantear y resolver problemas de matemáticas vinculados con la vida cotidiana”

Esta propuesta de modelo pone de manifiesto la complejidad de la evaluación de las competencias de un programa de formación de profesores (Lupiáñez, 2009).

Criterios de Calificación

Para obtener las calificaciones que definen la promoción de los estudiantes, propongo cuatro criterios de evaluación:

1. Valoración de las pruebas escritas (controles, exámenes parciales y final)
2. Trabajos realizados, individualmente o en equipo, atendiendo a la presentación, redacción y claridad de ideas, estructura y nivel científico, creatividad, justificación de lo que argumenta, capacidad y riqueza de la crítica que se hace, y actualización de la bibliografía consultada.
3. Valoración del grado de implicación y actitud del alumnado manifestada en su participación en las consultas, exposiciones y debates; así como en la elaboración de los trabajos, individuales o en equipo y en las sesiones de puesta en común.
4. Valoración de la asistencia a las sesiones de gran grupo, a los seminarios y a las tutorías individuales y colectivas.

La calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente, siendo el peso de cada uno el siguiente:

- ◆ Criterio 1: 40 %
- ◆ Criterio 2: 40 %
- ◆ Criterios 3 y 4: 20 %

7. DOCUMENTACIÓN DE LA MATERIA PARA LOS ESTUDIANTES

Además de la información sobre la materia que se incluye en la Guía Docente oficial, los estudiantes reciben otro tipo de documentos que les permite conocer y llevar a cabo el seguimiento de la materia. Entre estos documentos destacan dos, la guía didáctica de la materia, una bibliografía de referencia y los guiones de cada uno de los temas que la conforman.

La Guía Didáctica

Es una concreción de la Guía Docente que detalla varios aspectos metodológicos, entre los que están los siguientes:

- ◆ Distribución temporal de los diferentes bloques y temas a lo largo del semestre.
- ◆ Organización de la actividad en las sesiones de gran grupo y en los seminarios.
- ◆ Contenido de los cuadernos de prácticas de laboratorio individuales y colectivos.
- ◆ Estructura y puesta en práctica de las presentaciones de los equipos en clase.
- ◆ Planificación de las prácticas de campo.
- ◆ Finalidad de las tutorías.
- ◆ Criterios de evaluación y calificación.
- ◆ Manejo básico de la plataforma SWAD.

En el anexo a este proyecto he incluido la Guía Didáctica de la materia.

Bibliografía Básica

Aunque el formador puede compartir las transparencias con los estudiantes, es fundamental que éstos se habitúen a consultar documentación y referencias básicas. Como se puede comprobar en el capítulo siguiente, la propuesta que presento fomenta el trabajo autónomo del estudiante y una de las iniciativas que propongo es que los estudiantes elaboren parte del temario teórico de la materia. Para ello, es fundamental que exista una relación organizada de bibliografía de referencia y aunque cada tema incluye una lista de documentos de consulta, los siguientes se consideran básicos en la materia²⁹:

- ◆ Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
- ◆ Chamorro, C. (Coord.) (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.
- ◆ Dickson, L. Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor.

²⁹ De hecho, la referencia de Segovia y Rico (2011) es el texto base de la materia.

- ◆ Godino, J. D. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.
- ◆ Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Madrid: Paidós-MEC.
- ◆ Segovia, I. y Rico, L. (Coord.) (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- ◆ Van De Walle, J. A. (2009). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. New York: Longman.

Asimismo, también se recomienda la consulta de libros de texto de Educación Primaria y se indican algunas páginas Web que incluyen recursos educativos virtuales o unidades didácticas de matemáticas:

- ◆ <http://nlvm.usu.edu/es/>
- ◆ <http://illuminations.nctm.org/>
- ◆ <http://recursostic.educacion.es/descartes/web>
- ◆ http://clic.xtec.cat/db/listact_es.jsp

Guiones de los Temas

Al inicio de cada tema, el formador suministra a los estudiantes un guión que presenta y organiza la estructura del mismo. La información incluida en estos guiones se organiza en los siguientes apartados:

- ◆ Objetivos del tema.
- ◆ Contenidos contemplados.
- ◆ Bibliografía de referencia para el tema.
- ◆ Contenido de cada una de las sesiones.
- ◆ Orientaciones para el trabajo del estudiante.
- ◆ Descripción de trabajo voluntario o la práctica de campo (si los hay).
- ◆ Cuestiones que los estudiantes deben poder responder al finalizar el estudio del tema.
- ◆ Listado extenso de actividades.

Estos guiones se convierten en herramientas valiosas para los estudiantes, pues les permite evaluar el conocimiento y el control que tienen sobre las nociones que organiza cada uno de los temas que conforman la materia.

En el anexo he incluido los guiones de los siete temas que conforman la materia y que describo en el capítulo siguiente.

4

Bases Matemáticas para la Educación Primaria

Este capítulo sigue una estructura y un modo de presentación diferentes a los anteriores. No aparece organizado en apartados numerados, sino que se divide en los cuatro bloques en los que se articula la propia materia: *números y operaciones*, *geometría*, *la medida: estimación y cálculo de magnitudes*, *tratamiento de la información*, *azar y probabilidad*. Cada uno de estos bloques no tiene la misma extensión ya que algunos incluyen más temas que otros. Pero todos comparten una estructura básica que muestro en la Figura 4.1.

Al inicio de cada bloque de contenido presento el tratamiento y la presencia curricular del mismo, analizando el currículo español de Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b), la visión de los “principios y estándares” y del “curriculum focal points” del NCTM (2003 y 2006, respectivamente) y la propuesta de organización del contenido del proyecto PISA (OCDE, 2005). El análisis conjunto de estos tres documentos suministran un marco integrador de las matemáticas escolares, que permite delimitar cuál debería ser la forma en la que el profesor las presente y trabaje en el aula. Esta análisis me permite acotar el *sentido matemático*, que expresa la forma de entender, conocer y aplicar las matemáticas que son necesarias para desarrollar la competencia matemática.

Este sentido matemático puede concretarse en cada bloque de contenidos, dando lugar a un sentido numérico, un sentido geométrico, un sentido de la medida y un sentido estocástico. Esta manera de concebir las matemáticas escolares no se aleja de las recomendaciones curriculares. En el Currículo de Educación Primaria, por ejemplo, al describir el área de matemáticas, se señala que “El bloque 1, Números y operaciones, pretende esencialmente el desarrollo del sentido numérico (...)” (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, p. 31555). El sentido matemático también está en consonancia con diferentes propuestas formativas de maestros de matemáticas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001; Fosnot y Dolk, 2001; Krause,

1991; Llinares, 2001; Lupiáñez y Flores, 2011; NCTM, 2003). Esta caracterización de la forma de entender las matemáticas está en consonancia con el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) que proponemos que desarrollen los futuros maestros que cursan el Grado de Maestro en Educación Primaria en la Universidad de Granada, tal y como he descrito en el capítulo 2.

Finalmente, en la presentación de cada bloque he añadido una breve descripción de los temas que lo conforman.

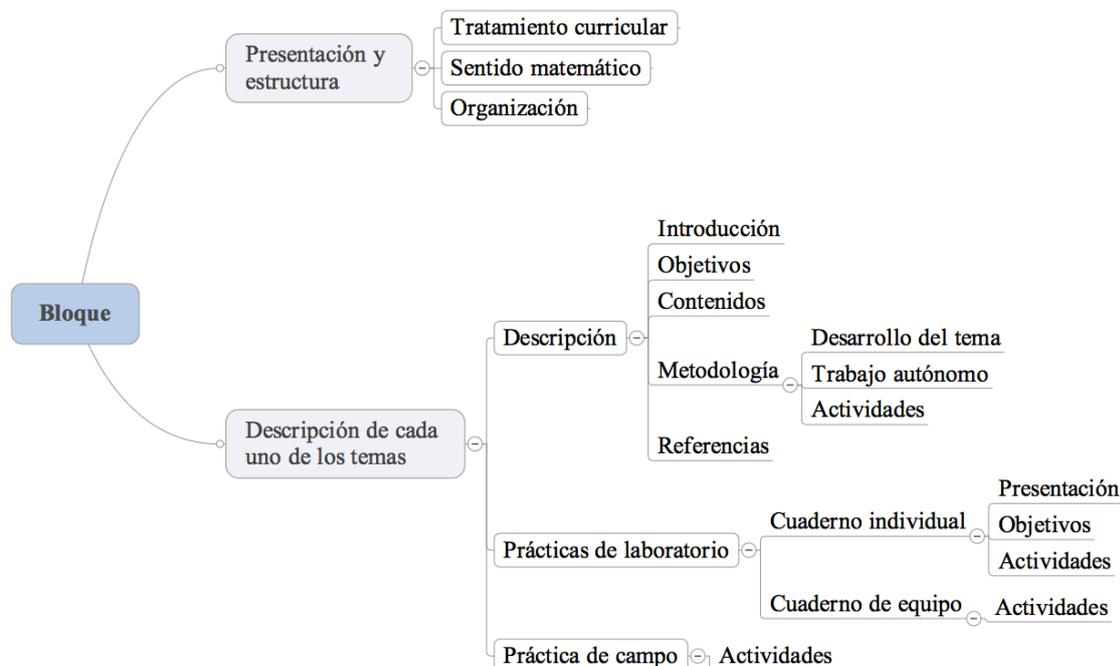


Figura 4.1. Estructura de presentación de cada uno de los bloques de la materia

Para describir cada uno de los temas propuestos, en primer lugar incluyo una breve introducción tras la cual presento los objetivos perseguidos y los principales contenidos tratados. A continuación, desde un punto de vista metodológico, describo el desarrollo del tema que esboza la secuencia de contenidos y actividades, las actuaciones planificadas para promover la competencia “Investigar y seguir aprendiendo con autonomía” y algunos ejemplos de actividades que se pueden plantear a los estudiantes. Al término de estos apartados, enumero algunas referencias clave para profundizar y documentar el tema.

Después de describir un tema, presento las prácticas de laboratorio asociadas a él. Incluyo el cuaderno individual de trabajo y el de equipo y, en ambos casos, aparecen tal y como se entregan a los estudiantes. Los cuadernos individuales incluyen una presentación de la práctica, los objetivos que persigue y las actividades que debe realizar cada estudiante. El cuaderno de equipo sólo incluye las actividades que cada equipo de trabajo ha de responder y, eventualmente, presentar en clase.

Finalmente, dos de los temas (el cuarto y el sexto) incluyen prácticas de campo; las actividades que éstas incluyen se describen al final de cada uno de ellos.

BLOQUE 1

NÚMEROS Y OPERACIONES

Tratamiento Curricular

El primer bloque de contenidos del área de matemáticas en el currículo de Educación Primaria, abarca el conocimiento y el uso de varios conjuntos numéricos, que se introducen progresivamente durante los tres ciclos, así como diferentes técnicas y estrategias de cálculo con ellos (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b):

El bloque 1, Números y operaciones, pretende esencialmente el desarrollo del sentido numérico, entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se puede expresar en capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar mentalmente cálculos. Los números han de ser usados en diferentes contextos, sabiendo que la comprensión de los procesos desarrollados y el significado de los resultados es un contenido previo y prioritario frente a la destreza de cálculo. Interesa principalmente la habilidad para el cálculo con diferentes procedimientos y la decisión en cada caso sobre el que sea más adecuado. A lo largo de la etapa, se pretende que calculen con fluidez y hagan estimaciones razonables, tratando de lograr un equilibrio entre comprensión conceptual y competencia en el cálculo. (pp. 31555-31556)

Dentro de sus principios y estándares, el NCTM (2000) propone un estándar denominado “números y operaciones” que se basa a su vez en la caracterización de sentido numérico que propone Sowder (1992). En su descripción se defiende que la noción de número ha sido la piedra angular de un gran número de programas curriculares y se propone que

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- ◆ *comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos;*
- ◆ *comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras;*
- ◆ *calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables. (p. 34)*

Además, al concretar ese estándar en la etapa que corresponde con la de Primaria en España, cada uno de esos tres descriptores se detallan aludiendo al conocimiento y manejo del sistema decimal de numeración, a diversos modos de representar y usar números naturales, enteros fraccionarios y decimales. También se destacan los diferentes significados de las operaciones aritméticas y de sus propiedades, así como la capacidad para seleccionar la más apropiada para resolver problemas de acuerdo a la situación planteada y el uso de estrategias de cálculo mental, estimación y de determinados instrumentos como la calculadora (NCTM, 2003, p. 400).

Esta descripción de la expectativas formativas para lo escolares sobre números y operaciones es muy similar a la propuesta en el Curriculum Focal Points. En este caso se acota un foco de contenido denominado “números y operaciones” desde Infantil hasta tercer curso de Primaria, donde pasa a denominarse “números y operaciones y álgebra” (NCTM, 2006).

Finalmente, en el marco del proyecto PISA (OCDE, 2003), se define un área de contenido denominado “Cantidad” que:

abarca los fenómenos numéricos, así como las relaciones y los patrones cuantitativos. Se refiere a la comprensión del tamaño relativo, el reconocimiento de patrones

numéricos y el uso de los números para representar cantidades y características cuantificables de objetos de la vida real (cálculos y medidas). Por otra parte, la cantidad aborda el procesamiento y la comprensión de los números representados bajo diversas formas. Un aspecto importante a la hora de tratar el tema de la cantidad es el razonamiento cuantitativo, que implica un sentido numérico, la representación de los números, la comprensión del significado de las operaciones y la aritmética y el cálculo mental. (p. 39)

Componentes del Sentido Numérico

Estas propuestas ponen de manifiesto unas prioridades para el trabajo con números y operaciones en las matemáticas escolares, que permiten acotar una caracterización del sentido numérico:

- ◆ Comprender los números como referentes para medir, ordenar y clasificar en situaciones reales.
- ◆ Entender y utilizar diferentes formas de representar los números de acuerdo al propósito.
- ◆ Componer, descomponer y relacionar diferentes tipos de números.
- ◆ Conocer y describir los efectos de las operaciones sobre los números.
- ◆ Manejar los algoritmos tradicionales para las operaciones e inventar procedimientos alternativos.
- ◆ Realizar operaciones mentalmente mediante una diversidad de estrategias.
- ◆ Estimar el resultado de operaciones y valorar la bondad del resultado o el error generado.
- ◆ Manejar e identificar los diferentes niveles de precisión y sensibilidad de la razonabilidad de los cálculos.
- ◆ Desarrollar y aplicar estrategias útiles para resolver problemas aritméticos.
- ◆ Utilizar números y métodos cuantitativos para comunicar, procesar e interpretar información.

Organización del Bloque en la Materia

El primer bloque de contenido de matemáticas en el currículo de Educación Primaria, constituye también el primer bloque de la materia propuesta e incluye tres temas.

El primero está centrado, fundamentalmente, en el número natural y en el sistema decimal de numeración. Incluye la práctica 1 en uno de sus seminarios, en la que los estudiantes emplean el material multibase y el ábaco para explorar las propiedades del sistema decimal de numeración.

El núcleo del segundo tema es la aritmética, con los significados, usos, representaciones, propiedades y algoritmos de las cuatro operaciones elementales. También se exploran los problemas aritméticos y en el segundo seminario se realiza la práctica 2. En ella, los estudiantes vuelven a usar el material multibase y el ábaco pero, en esta ocasión, el objetivo es profundizar en el significado de las operaciones y los problemas aritméticos.

Finalmente, el tercer tema de este bloque se ocupa de las fracciones y los decimales, destacando, fundamentalmente, sus significados, usos y sus representaciones. En este tema también se realiza una práctica de laboratorio, la tercera, centrada en las diferentes formas de representar fracciones, usando materiales manipulativos como el muro o el círculo de fracciones y algunos “applets” disponibles en Internet.

Tema I

EL NÚMERO NATURAL. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Tres son las ideas básicas asociadas a este tema: la de número natural, introducida a partir de la cardinalidad de las colecciones o conjuntos coordinables entre sí, pero sustentada en las otras dos ideas: el uso de los números y sus formas de representación. En relación con su uso, hay que destacar la importancia del dominio de la secuencia numérica, el conocimiento de los principios básicos de la actividad de contar y el manejo de estrategias que se emplean en los usos fundamentales del número: la ordenación y cuantificación. Estos usos dan como resultado dos concepciones de número natural: la ordinal y la cardinal. En relación con las formas de representación, es básico el dominio de los principios del funcionamiento del sistema de numeración decimal así como otras formas de representación que permitan una reflexión y análisis del mismo, como la recta numérica. Por último, el tema también incluye una presentación de los materiales y recursos más usuales en la enseñanza y el aprendizaje de los números y del sistema de numeración, como las regletas Cuisenaire, los bloques multibase y el ábaco.

Algunos ejemplos de cuestiones que el estudiante debe ser capaz de responder al finalizar su estudio con este tema son las siguientes:

- ◆ ¿Qué es número natural? ¿Para qué se usan los números naturales?
- ◆ ¿En qué consiste contar? ¿Qué debe ser capaz de hacer un niño para contar un conjunto de elementos? ¿Qué tipo de número resulta de contar? ¿En qué se diferencian cuantificar y contar?
- ◆ ¿En qué consiste ordenar? ¿Qué tipo de número resulta de ordenar?
- ◆ ¿De qué formas se representan los números? ¿En qué situaciones se emplean esas representaciones?
- ◆ ¿Qué es un sistema de numeración? ¿Cuáles son las características de los sistemas de numeración posicionales?
- ◆ ¿Qué características tiene el sistema decimal de numeración escrito? ¿Y el sistema oral? ¿En qué se diferencian del sistema de numeración romano? ¿Qué otros sistemas tienen las mismas características? ¿Qué función tiene el signo del cero en el sistema de numeración decimal?
- ◆ ¿Qué materiales se pueden emplear para trabajar el sistema de numeración? ¿Cómo se emplea cada uno de ellos?

Objetivos

1. Diferenciar el concepto de número de los signos que empleamos para representarlo.
2. Clarificar en qué consiste el conteo y la ordenación y conocer los principios del conteo.
3. Distinguir y describir los usos que se hacen del número.
4. Aprender y comprender los principios del sistema decimal de numeración y sus analogías y diferencias con otros sistemas.

Contenidos

1. Usos del número natural.
2. Concepto de número natural.
3. Ordenación. La secuencia numérica. Estrategias de cuantificación.
4. Representación del número. Sistemas de Numeración: antecedentes y evolución.
5. Sistemas posicionales. El sistema de Numeración Decimal.
6. Materiales y recursos.

Metodología

Desarrollo del Tema

- ◆ En el inicio del tema se realiza una breve revisión curricular, para que los estudiantes identifiquen los diferentes conjuntos numéricos que se trabajan en Educación Primaria. Después se describe la estructura global del bloque y las tres cuestiones que organizan este tema: ¿Qué es un número natural? ¿Para qué los usamos? ¿Cómo los representamos?
- ◆ La primera pregunta se afronta usando la reflexión que propone Skemp (1980): “Igual que transmitimos el concepto rojo, apuntando a varios objetos rojos, así, en este caso, podríamos encontrar una colección de objetos que ejemplificasen el concepto de tres: tres manzanas, tres dedos, tres lápices... Tres es la propiedad característica de una cierta colección de conjuntos, de los cuales podemos elegir una variedad suficiente para capacitar a nuestro estudiante para formar él mismo el concepto.” (pp. 150-151)
Así, la presentación del número natural se afronta empleando las nociones de correspondencia entre colecciones de elementos y la de cardinalidad de estas colecciones, siguiendo la propuesta de Castro y Molina (2011). Este acercamiento se ejemplifica con algunas imágenes de libros de texto de Educación Primaria.
- ◆ Los usos de los números naturales se organizan en seis categorías: *contar* (seguir la secuencia numérica), *cuantificar*, *ordenar*, *medir*, *operar* y *codificar*. Cada una de estas categorías se ejemplifican con situaciones cotidianas (actividad 1) y se destacan con más énfasis la de contar y cuantificar. También se realizan actividades que profundizan en ellas (actividades, 2, 3, 5, 6y 7).
- ◆ Las formas de representar números naturales, destacan la importancia de no confundir un número con su presentación simbólica. En este momento se introduce la noción de sistema de numeración y se ejemplifican algunos que han sido significativos en la historia e la matemática, como el egipcio, el babilonio o el romano (actividades 9, 11 y 13).
- ◆ Durante el primer seminario se realiza la práctica 1, centrada en otro modo de representar y modelizar los números naturales: los materiales manipulativos. Como se detalla más adelante, en esta práctica se emplean los bloques multibase y el ábaco.
- ◆ El sistema decimal de numeración y sus principios, ocupan también un papel relevante en este tema. Estos principios son importantes porque en ellos se sostienen, fundamentalmente, los algoritmos de las operaciones y la estructura del sistema métrico decimal (actividades 4, 8 y 10).
- ◆ Finalmente, se destacan otras formas de representar números naturales, como la recta numérica, la tabla 100 y los números figurados con el objetivo de comprobar que esas formas de representación enfatizan determinadas propiedades y relaciones de los números naturales (actividades 14 y 15).

- ◆ En el segundo seminario, se resuelven actividades que recogen varias facetas del tema y se repasan las dudas que puedan haber surgido.

Trabajo Autónomo del Estudiante

En este tema las actuaciones propuestas para fomentar el trabajo autónomo del estudiante son dos:

- ◆ Los estudiantes deben preparar un documento de estudio sobre el cero, que incluya una breve descripción histórica en la que se indique cuándo comenzó a usarse en la escritura de números y un análisis del papel que juega en el sistema decimal de numeración. Es recomendable que consulten Castro y Molina (2011, pp. 61-62) o Castro y Castro (2001, 136-137).
- ◆ Como trabajo voluntario individual, los estudiantes pueden leer un libro divulgativo de matemáticas dirigido a niños y que se centre en los números. Deben hacer un resumen del mismo en el que describan el tipo de números que aparecen, qué usos de ellos propone el autor y de cuántas maneras diferentes se representan. Un posible listado de libros es el siguiente:
 - Balbuena, L. (2006). *Cuentos del cero*. Madrid: Nivola.
 - Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números*. Madrid: Alfaguara Juvenil.
 - Gómez, R. (2000). *El mundo secreto de los números. Aventura en el castillo numeral*. Madrid: SM.
 - Gómez, R. (2000). *La Selva de los números*. Madrid: Alfaguara Juvenil.
 - Molina, M. I. (2000). *El señor del Cero*. Madrid: Alfaguara Juvenil.
 - Ortega, R. (2008). *Aventuras en el castillo de los números*. Madrid: Nivola.
 - Parisi, A. (2005). *Números mágicos y estrellas fugaces*. Barcelona: Oniro.
 - Rodríguez, E. (2012). *Breve historia de los números. Desde el cero babilónico a los números imaginarios*. Madrid: Nivola.
 - Serrano, E. (2002). *¡Ojalá no hubiera números!* Madrid: Nivola.

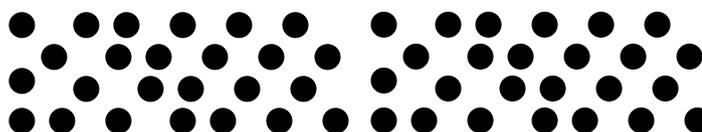
Actividades

1. Identifica los usos del número natural que ejemplifica cada una de las viñetas siguientes:





2. Indica qué es subitizar y en qué situaciones es posible. Pon varios ejemplos en los que se utilice esta estrategia para cuantificar. ¿Podemos subitizar la cantidad de 125 con una colocación determinada de la cantidad?
3. ¿De qué formas se puede cuantificar? ¿Cuál de ellas es más efectiva? Razona la respuesta.
4. Cuantifica esta colección de objetos en base 8 y en base 5 de dos formas: a) por medio de la agrupación y b) por medio del conteo.



5. Jugando al parchís, Juan tira el dado, dice “*Me ha salido un cinco*”. Mira su ficha y va moviéndola mientras dice: “*Uno, dos, tres, cuatro y cinco. Te como una*”. Como tiene que avanzar 20 casillas por comer, mira las casillas de delante, observa una ficha del contrario y dice “*esa está a una distancia de cómo mucho quince casillas. Estoy en la casilla cuatro, luego tengo que ir a la casilla cuatro más veinte, o sea veinticuatro*”, y coloca la ficha en la casilla marcada 24. Explica las estrategias de cuantificar que ha empleado Juan en cada uno de los pasos que ha dado.
6. Analiza qué principios del conteo se han aplicado correctamente y cuáles no se han aplicado bien en las siguientes situaciones:
 - a) Un juego para engañar a los niños cuenta los dedos de las dos manos cantando la siguiente letra: *Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, sie, te, ocho y nueve*. Con ello resulta que tenemos en la mano nueve dedos.
 - b) Un niño que sube las escaleras de su casa contando los escalones mediante la siguiente expresión: *Uno, tres, siete, cuatro, tres, dos, seis*. Al terminar dice que hay seis escalones.
 - c) Un niño que sube las escaleras de su casa contando los escalones mediante la siguiente expresión: *Uno, dos- tres* (mientras está en el segundo escalón), *cuatro, cinco, seis*. Al terminar dice que hay seis escalones.

7. En la página Web siguiente encontrarás un programa que permite que los escolares practiquen el conteo simple (comenzado en 1 e incrementando una unidad) o bien comenzando en otro número y avanzar de dos e dos, de tres en tres, etc. Explora el programa y señala qué principios del conteo destaca.

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_337_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html

Contar en: 3		Empezando en: 2		Borrar					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Practicar
 Mostrar
 Animar

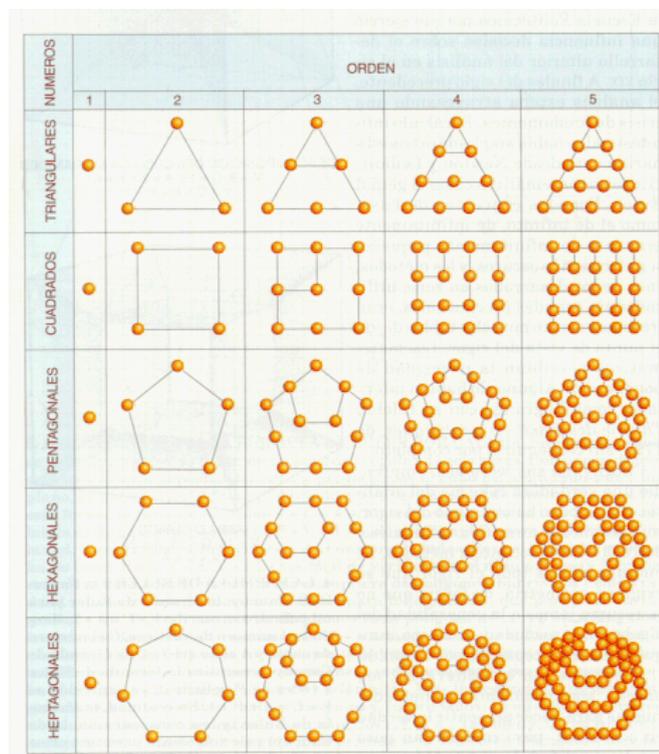
8. La expresión de la medida del tiempo es compleja, pues utiliza diversas agrupaciones de unidades, con distintas bases y formas. Así, la duración de un acontecimiento, como una guerra, puede venir representada en la forma: 1 (a), 2 (m), 27 (d), 15 (h), 25 (m), 18 (s), donde a son años, m meses, etc. Estudia qué características tiene el sistema de numeración que utilizamos para medir el tiempo, las características que tiene en común con el sistema de numeración decimal y las que lo hacen diferente.
9. Define el número cero. Indica sus características. Justifica por qué no tenían cero los sistemas antiguos de numeración como el egipcio o el romano y por qué es necesario en nuestro sistema de numeración decimal.
10. Calcula con una calculadora lo que obtienes al multiplicar por sí mismo, cada uno de los números siguientes: 1, 11, 111, 1111 y 11111. Explica la regularidad que observas y trata de encontrar una explicación de ella ¿Qué conjetura propones? Señala las propiedades del sistema de numeración decimal o de las operaciones que puedes usar para probar esa conjetura.
11. Resume brevemente la evolución de los sistemas de numeración. ¿Cuáles son los momentos clave?
12. Un folio queda dividido por una recta en dos partes, por dos rectas en cuatro partes como máximo, pero si son tres rectas ¿en cuántas partes quedaría dividido como máximo? ¿Y con cuatro? ¿Sabrías encontrar alguna forma que te permita calcular el número de partes que saldrían según el número de rectas? Explica tu propuesta.
13. Supongamos que tenemos que comunicar a un extraterrestre el “número de alumnos” que hay en la clase. El extraterrestre obviamente no sabe español ni ninguna lengua hablada en la Tierra, pero tampoco conoce los símbolos indoarábicos (0, 1, 2,...), ni los símbolos romanos, o de otras civilizaciones.

Busca formas de comunicar a este personaje la cantidad de alumnos que hay en clase y justifica por qué crees que serían adecuadas.

14. Una tabla como la siguiente, en la que representan los primeros 100 números naturales ordenados por decenas en filas, se llama *Tabla 100* (en la actividad 7 hemos propuesto un uso de ella):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Traza las dos diagonales principales de la Tabla 100. ¿Qué propiedad comparten todos los números que están en la misma diagonal?
 - Busca familias de números que compartan una propiedad y descríbela.
 - ¿Qué propiedades del sistema decimal de numeración se destacan en las relaciones que has encontrado en el apartado anterior?
15. La imagen siguiente muestra unos ejemplos de números naturales que, cuando se representan mediante configuraciones puntuales, satisfacen una serie de propiedades geométricas. Se denominan números figurados o poligonales.



- Los números 1, 3, 6, 10 y 15 son números triangulares ¿Hay más? ¿Cuáles? ¿Es posible idear un procedimiento para calcular tantos como queramos?

- b) Investiga la relación entre los números cuadrados y las potencias al cuadrado de los primeros números naturales. ¿Es posible también idear un procedimiento para calcular tantos números cuadrados como queramos?
- c) Busca en Internet la relación que puede existir entre los números triangulares y los cuadrados y ejemplifica esa relación con los números que muestra la imagen anterior.

Referencias

- Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: Editorial CSS.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.
- Castro, E. y Castro, E. (2001). Primeros conceptos numéricos. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 123-149). Madrid: Síntesis.
- Castro, E. y Molina, M. (2011). Números naturales y sistemas de numeración. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 47-74). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 5-162). Universidad de Granada.
- Dienes, Z. P. (1978). *Cómo utilizar los bloques multibase*. Barcelona: Teide.
- Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Granada: Arial.
- Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.
- Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa Calpe.
- Ifrah, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.
- Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 151-175). Madrid: Síntesis.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Nortes, A. (1995). *Matemáticas y su didáctica*. Madrid: Lerco Print.
- Rico, L., Castro, E. y Castro, E. (1985). *Sistemas de numeración. El sistema decimal: evolución histórica*. Granada: Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada.
- Ruiz, F. (2000). *La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Universidad de Granada.
- Skemp, R. (1980). *Psicología para el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
- Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y R. A. Hattrop (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Seminarios del Tema I

PRÁCTICA 1. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Una de las responsabilidades fundamentales del maestro es lograr que los niños comprendan el concepto de número. Para ello tiene que ser consciente de la dificultad de dicho concepto y disponer de herramientas teóricas y prácticas que le permitan plantear actividades para sus clases. En esta práctica vamos a centrarnos en el número, su uso para expresar una cantidad de objetos y la forma que tenemos para representarlo, en el *sistema de numeración decimal*.

Partimos de la tarea de determinar la cantidad de objetos de una colección. Para ello, hay que realizar acciones concretas con los objetos, emplear otros medios para expresar esta cantidad, manipular los medios y sus representaciones, hasta lograr representarlo conscientemente mediante un proceso simbólico (que es lo que hacemos al usar el sistema de numeración decimal). En esta práctica vas a emplear tres materiales que permiten representar y manipular las representaciones: el material multibase, el ábaco vertical y el ábaco de fichas.

El *material multibase* está diseñado específicamente para comprender los *sistemas de numeración* y apreciar con claridad sus características. Podemos trabajar con bloques multibase en base decimal o en otra base. Aunque cambien las piezas según la base, hay propiedades de los sistemas que son siempre las mismas, independientemente de la base que emplees.

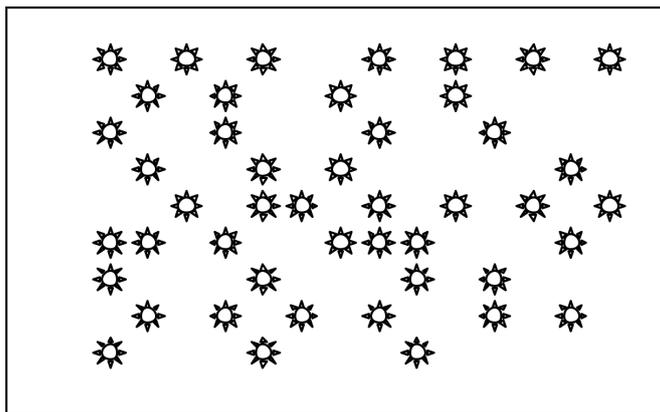
El ábaco es un instrumento que se usa desde hace siglos para realizar cálculos. Una versión del ábaco para la escuela es el *ábaco vertical*, diseñado para comprender la cualidad del sistema de numeración decimal de ser posicional. Otra versión escolar del ábaco es el *ábaco de fichas*, que por su facilidad pueden construirlo los niños con sus medios y usarlos para representar cantidades y para hacer cálculos. La cualidad de estos ábacos es que emplean representaciones más abstractas que el material multibase, pero sin llegar a la complejidad del sistema de numeración decimal.

Objetivos

- ◆ Reconocer las propiedades y cualidades de nuestro sistema de numeración decimal, y las ventajas que tiene.
- ◆ Conocer y utilizar materiales didácticos, como los bloques multibase y el ábaco vertical y de fichas, que son útiles para enseñar y aprender el sistema de numeración decimal.

Actividades

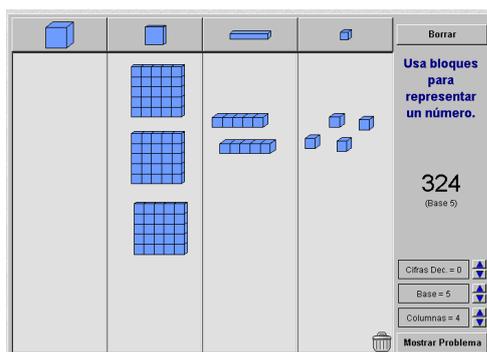
1. Un método para contar: el agrupamiento.
 - a) Obtén el cardinal de esta colección de objetos agrupando de cuatro en cuatro hasta formar las unidades de distintos órdenes. Después, representa esa cantidad con el material multibase en *base cuatro*, con el menor número posible de bloques.



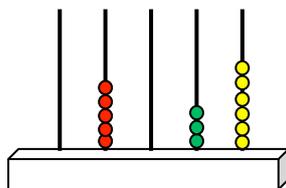
- b) En la página siguiente, puedes encontrar un material que permite representar números utilizando material multibase:

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_152_g_3_t_1.html.

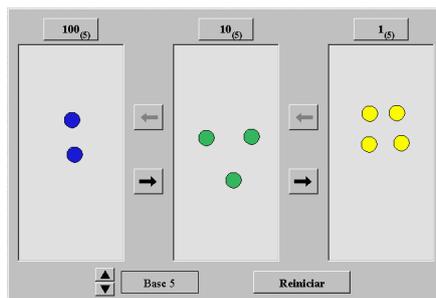
Selecciona la base *cuatro*, 0 cifras decimales y 3 columnas. Introduce en la columna de las unidades la cantidad de objetos de la colección, pulsando tantas veces como sea necesario sobre el pequeño cubo de la columna de las unidades. Agrupa de cuatro en cuatro, seleccionando dichas unidades con el puntero (enciérralos en un rectángulo) y coloca la placa de las decenas en su casillero correspondiente.



- c) Realiza las mismas acciones anteriores en otra base diferente.
- d) También es posible descomponer los bloques en unidades y colocarlas en la casilla de las unidades. Realiza la descomposición 213 en sus unidades, pasando 2 placas, 1 barra y 3 unidades a la casilla de las unidades descomponiéndolas en unidades sueltas.
- e) ¿Qué operación realizas cuando pasas de izquierda a derecha las barras y las placas hasta la casilla de las unidades y las descompones en unidades sueltas? Escribe el desarrollo polinómico de 213 en potencias de 10 y relaciónalo con la pregunta anterior.
2. Valor de posición de las cifras.
- a) El Ábaco Vertical consta de varillas verticales con cuentas sueltas. El número se representa insertando cuentas en las varillas. Cada cuenta tiene un valor diferente según la varilla en que se encuentre y para distinguirlas suelen tener colores diferentes. Representa algunos números en el ábaco y pide a un compañero que te diga qué números son.



- b) Representa en distintas bases la cantidad de objetos de la colección de partida en el ábaco vertical, indicando la base en cada caso.
- c) Representa los números 35, 108, 3553 y 5000 en el ábaco vertical.
- d) En la página siguiente puedes encontrar un *ábaco de fichas*:
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_209_g_1_t_1.html



Trabaja en base cinco. Coloca en la columna de las unidades 37 fichas amarillas (pulsando 37 veces en el botón superior de las unidades). Agrupa las unidades de 5 en 5 pulsando en la flecha izquierda, obteniendo una ficha verde por cada 5 amarillas. Continúa este proceso hasta representar 37 en base cinco.

- e) Selecciona la base cinco. Pulsa 3 veces sobre la primera columna ($100_{(cinco)}$) 4 veces sobre la segunda columna ($10_{(cinco)}$) y 2 veces sobre la primera columna ($1_{(cinco)}$). ¿Qué número representa en base *cinco*? ¿Qué número representa en base *diez*? Después de pasar todas las fichas a la columna de la derecha (amarillo) ¿Cuántas fichas amarillas hay?

3. Simbolización

El último paso del problema consiste en asignar símbolos numéricos del Sistema de Numeración Decimal, empleando sus convenios y principios. Para ello nos hemos valido de la correspondencia entre las expresiones en los materiales icónicos empleados (material multibase, ábaco vertical y ábaco de fichas) y la expresión en sistema de numeración, en el que los símbolos son ideográficos (no corresponden con lo representado).

- a) Utiliza el programa http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_152_g_3_t_1.html para representar la secuencia numérica de la primera centena en base cinco. Comienza con una unidad y añade sucesivamente una unidad para obtener el siguiente número, teniendo en cuenta que el agrupamiento se realiza de 5 en 5. Continúa la secuencia hasta la cantidad de objetos de la colección.
- b) Selecciona la base dos ¿Cuál es el mayor número que puedes representar con este programa? Explícalo.
- c) Utiliza este programa para expresar: $241_{(cinco)}$ en base cuatro, $110_{(dos)}$ en base cinco y $36_{(diez)}$ en base cuatro.
- d) Utiliza el programa para averiguar en qué base está escrito 32 para que equivalga a $17_{(diez)}$. Explica cómo lo has hecho y como la harías con papel y lápiz.

Seminarios del Tema I

TRABAJO EN GRUPO. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1. En la práctica individual habéis expresado la cantidad de elementos de una colección empleando distintos sistemas de numeración basados en el uso de bloques de material multibase, de un ábaco vertical y de un ábaco de fichas. Ahora debéis estudiar y describir las características de cada uno de esos sistemas, analizando razonadamente:
 - a) Signos que se emplean en cada sistema
 - b) Proceso de agrupamiento y base utilizada
 - c) Si el sistema es aditivo y/o multiplicativo
 - d) Si es posicional
2. Construid un sistema aditivo de base 16 y utilizadlo para expresar los números 4096, 49152, 38144 y 38157 (que están representados en base decimal). Haced las transformaciones necesarias para convertirlo en un sistema posicional de base 16 y volved a escribir los números anteriores en el nuevo sistema.
3. Indicad, justificadamente, qué operaciones hay que hacer para obtener la expresión de una cantidad en base diez, si conocemos su expresión en otra base a .
4. Indicad, justificadamente, qué operaciones hay que hacer para obtener la expresión de una cantidad en una base a , si conocemos su expresión en base diez.

Tema 2

ARITMÉTICA

Como se ha visto en el tema anterior, uno de los usos de los números naturales es el operacional, ya que las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división permiten representar y resolver una gran cantidad de situaciones y problemas en una amplia variedad de contextos. Además, como señala Gómez (1998, citado por Segovia, 1997, p. 143), “el desarrollo histórico de los conceptos y las operaciones aritméticas está ligado al del concepto de número y los procedimientos de cálculo están ligados al desarrollo de los sistemas de numeración”. La finalidad de este tema es que el estudiante profundice en el significado de las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) de números naturales y en las relaciones que hay entre ellas, que dan lugar a las estructuras aditiva y multiplicativa. Pero para lograr esa finalidad es básico romper tres ideas que están fuertemente arraigadas en los estudiantes y que consideran los algoritmos tradicionales como centro único de la aritmética.

La primera es asociar indisolublemente el significado de las operaciones con sus algoritmos tradicionales. Por esta razón, el punto de inicio del tema es la descripción y análisis de las situaciones en las que se usan las operaciones. Estos campos de aplicación permiten acotar unos significados precisos y vinculados a la actuación y a la resolución de problemas. La clasificación semántica de los problemas juega aquí un papel relevante. La segunda idea que sostienen los futuros maestros, es que la única manera de realizar operaciones son, precisamente, esos algoritmos tradicionales. En este tema también se introducen otros medios de afrontar las operaciones, como algoritmos no convencionales, el cálculo mental o la estimación, que ponen de manifiesto la riqueza y la funcionalidad del sentido numérico. Finalmente, otra idea que manifiestan los estudiantes es la aparente simpleza o sencillez de los algoritmos, pues los entienden de manera mecánica y aislados de un conocimiento conceptual más elaborado. En esta idea reside la importancia de enfatizar los vínculos entre esos algoritmos y, por una parte, las propiedades de las operaciones y, por otra, la compleja estructura del sistema de numeración decimal.

Este segundo tema de la materia también persigue que el estudiante identifique y describa situaciones que pueden ser expresadas y explicadas mediante relaciones de divisibilidad y que, finalmente, reflexione sobre el significado de los números con signo a través de las situaciones en las que se utilizan y los modelos que permiten su introducción en el aula.

Algunos ejemplos de cuestiones que el estudiante debe ser capaz de responder al finalizar su estudio con este tema son las siguientes:

- ◆ ¿Qué es sumar? ¿Qué es restar? ¿En qué situaciones se usan la suma y la resta? ¿En qué tipo de problemas aparecen y qué modelos pueden emplearse para resolverlos?
- ◆ ¿Qué es multiplicar? ¿Qué es dividir? ¿En qué situaciones se usan multiplicaciones y divisiones? ¿En qué tipo de problemas aparecen y qué modelos pueden emplearse para resolverlos?
- ◆ ¿Qué relación existe entre las cuatro operaciones aritméticas básicas?

- ◆ ¿De qué formas se puede llegar a obtener el resultado de una operación? ¿En qué consisten los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones? ¿Por qué se hacen así?
- ◆ ¿En qué consiste el cálculo mental? ¿Qué estrategias se pueden emplear para hacer cálculos mentalmente? ¿En qué consiste estimar una cantidad? ¿Y estimar el resultado de una operación? ¿Qué estrategias se pueden emplear para ello?
- ◆ ¿Qué situaciones están asociadas con relaciones multiplicativas de divisibilidad?
- ◆ ¿Qué situaciones de la vida cotidiana dan sentido a los números con signo?

Objetivos

1. Conocer el significado de las operaciones con números naturales, y los contextos y situaciones con los que están asociados.
2. Definir y relacionar los conceptos de las diferentes operaciones.
3. Conocer, identificar y enunciar tipos de problemas que se pueden plantear con cada operación.
4. Representar los problemas empleando modelos para resolverlos.
5. Justificar los algoritmos tradicionales de las distintas operaciones.
6. Conocer y efectuar distintos tipos de cálculo: con calculadora, mental y estimativo.
7. Hacer una reflexión crítica sobre el uso de los distintos tipos de cálculo.
8. Conocer situaciones de la vida cotidiana y modelos que dan sentido a los números con signo.
9. Identificar situaciones que involucren relaciones de divisibilidad.

Contenidos

1. Estructura aditiva: adición y sustracción. Contextos y usos.
2. Significados, representaciones y modelos de las operaciones aditivas. Propiedades.
3. Problemas simples de estructura aditiva.
4. Estructura multiplicativa: multiplicación y división. Contextos y usos.
5. Significados, representaciones y modelos para la estructura multiplicativa. Propiedades.
6. Problemas simples de estructura multiplicativa.
7. Algoritmos de cálculo. Los algoritmos tradicionales: suma, resta, multiplicación y división. Otros algoritmos.
8. Divisibilidad: divisores y múltiplos. Propiedades. Números primos.
9. Cálculo mental y estimado.
10. Números con signo. Contextos, usos y modelos.

Metodología

Desarrollo del Tema

- ◆ La secuencia del tema es la siguiente: comienza con la estructura aditiva seguida de la multiplicativa. Ambas estructuras se introducen con el mismo esquema: significado de las operaciones, representaciones, propiedades de las operaciones, algoritmos y problemas aritméticos. Tras la estructura multiplicativa, se introduce el cálculo mental y la estimación y, finalmente, se aborda de manera breve el trabajo con divisibilidad y números enteros. Esta brevedad se justifica en la presencia que tienen estos temas en el currículo de Educación Primaria.

- ◆ Las operaciones aditivas responden a dos tipos de situaciones básicas: *dinámicas*, en las que existe un conjunto base que se ve modificado y, *estáticas*, en donde coexisten dos conjuntos bases que se combinan o comparan. Estos son los significados que se presentan y ejemplifican para la suma y la resta (actividades 1 y 3).
- ◆ A continuación se destacan tres formas de representar las operaciones: simbólicamente, la más usual, icónica y usando diferentes modelos. Las propiedades que verifica cada una de las operaciones son el siguiente aspecto considerado, enfatizando el uso de las mismas que se usa en los algoritmos tradicionales (actividad 10). El trabajo con la estructura aditiva se cierra con la justificación de los algoritmos tradicionales y los problemas aditivos y su clasificación semántica (actividades 2, 3 y 4).
- ◆ El primer seminario se dedica a la resolución de actividades de las que se incluyen en el guión del estudiante. En esas sesiones se promueve que los estudiantes salgan a la pizarra a compartir su estrategias de solución con los compañeros.
- ◆ Los significados de multiplicación que se introducen son el de suma reiterada y el de producto cartesiano. En el caso de la división, se introduce la división partitiva y la cuotitiva, además de presentarla como operación inversa a la multiplicación. Las representaciones incluyen las de la estructura aditiva y se añaden los diagramas de árbol o los modelos de área. También se justifican los algoritmos convencionales y se introduce la clasificación semántica de los problemas multiplicativos (actividades 6, 7, 8, 9 y 10).
- ◆ En el segundo seminario se desarrolla la práctica 2, centrada en problemas y cálculos aritméticos con materiales multibase y ábacos, tal y como se detalla más adelante.
- ◆ La última parte del tema incluye la presentación del cálculo mental y la estimación (de manera breve ya que los estudiantes la desarrollan autónomamente). A continuación, se describen las principales situaciones y problemas en las que se presentan relaciones de divisibilidad y en las que es necesario el uso de números enteros negativos (actividades 11, 12, 13, 14 y 15).

Trabajo Autónomo del Estudiante

En este tema hay una actuación propuesta para fomentar el trabajo autónomo del estudiante:

- ◆ Los estudiantes deben preparar un documento de estudio sobre estrategias de cálculo mental. Deben ejemplificar cada estrategia con operaciones específicas y especificar las propiedades de las operaciones y del sistema decimal de numeración que destaca cada una. Opcionalmente, pueden describir estrategias propias que usen habitualmente. Es recomendable que consulten Segovia y Lupiáñez (2011, pp. 156-159) o, para un análisis más detallado, Segovia, Castro, Rico y Castro (1989).

Actividades

1. Estudia qué y cuántas operaciones aparecen en el problema siguiente e identifica sus tipos: “Antonio ha perdido 17 cromos de su colección; le han quedado 38, 12 menos de los de que tiene su amigo Paco; como le ha molestado que Paco tenga más que él, se los ha regalado a su primo Juan que tenía 5 menos que Paco. ¿Cuántos cromos tiene ahora su primo Juan?”.

2. Indica de qué tipo es el siguiente problema: “Ignacio tiene 50 cromos más que Fernanda que, a su vez, tiene 20 cromos menos que Adela, la cual tiene 80 cromos. ¿Cuántos cromos tienen Ignacio y Fernanda?”
3. Inventa un problema aditivo en el que intervengan números naturales con significado ordinal. Resuélvelo utilizando el modelo lineal.
4. Enuncia un problema que se resuelva con dos restas correspondientes a los tipos de Cambio y Combinación.
5. Inventa un problema que tenga más de una solución y en cuya resolución intervengan operaciones de la estructura aditiva.
6. Enuncia dos problemas que se resuelvan con la división 135:3 de forma que en uno de ellos se realice un reparto (división partitiva) y en otro una medida o resta repetida (división cuotitiva).
7. Enuncia un problema que se resuelva con un producto y una división correspondientes a los tipos de comparación y producto cartesiano.
8. Inventa varios problemas que se resuelvan con una misma división en los que el resto juegue un papel diferente en cada caso a la hora de dar respuesta al problema.
9. Identifica las operaciones que hay que realizar para resolver el siguiente problema y describe el significado con el que se emplean:

El cotilleo es muy dado a practicarse en los mercados. Por la mañana una persona cuenta una noticia. Si en el puesto hay cinco personas y cada una cuenta la misma noticia a cinco personas más cada 20 minutos ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que sepan la noticia 3000 personas?

10. Utiliza el modelo de área para demostrar las propiedades de la suma y la multiplicación.
11. Examina las estrategias empleadas por tres alumnos, María, Pedro y Carlos, para resolver la suma $567 + 259$. Explica la estrategia de cada alumno y utilízala para resolver el problema $1367 + 498$.

$200 - 567, 667, 767$
$50 - 777, 787, 797, 807, 817,$
$9 - 818, 819, 820, 821, 822, 823,$
$824, 825, 826$

Trabajo de María

259	600
$- 33$	$+ 226$
$\hline 226$	$\hline 826$

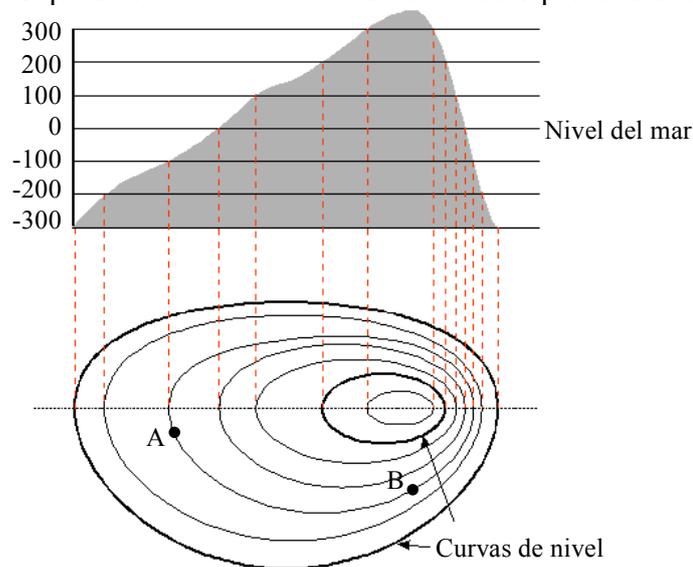
Trabajo de Pedro

567
$+ 259$
$\hline 700$
110
16
$\hline 826$

Trabajo de Carlos

12. El servicio postal de Estados Unidos utiliza un número de serie de 11 cifras para cada giro, cuyo dígito final es un número de control colocado para evitar errores. Así, si escribimos 3953988757 el mecanismo añade un 1 al final que es el resto obtenido al dividir el número anterior entre 9.
 - a) ¿Qué dígito falta en el número de serie 2324252627_?
 - b) Si nos equivocamos y escribimos el 3955988757, ¿qué número añadirá? ¿Funciona el mecanismo de detección de errores aquí?
 - c) Busca un número que se diferencie en dos cifras del anterior y tenga el mismo dígito de control.
 - d) ¿Qué significado de las operaciones aritméticas se ponen en juego en las cuestiones anteriores?

13. En la siguiente imagen, la parte superior representa una isla y a su izquierda, se indica la elevación o la profundidad con respecto al nivel del mar. La parte inferior es un mapa de relieve, en el que las líneas se denominan *curvas de nivel* y unen lugares que se encuentran a la misma altitud o profundidad.



- Sitúa sobre las curvas de nivel un punto *C* que se encuentre a una altura de 200 metros, otro *D* que se encuentre a una profundidad de 200 metros, otro punto *E* que esté a una profundidad de 300 metros y otro *F* que esté a nivel del mar.
 - ¿Qué diferencia de altura hay entre los puntos *A* y *B*? ¿Y entre *C* y *D*? ¿Y entre *D* y *E*?
 - La zona en la que se encuentra la isla ha sufrido una elevación por razones sísmicas y el resultado ha sido que el nivel del mar ha bajado 10 metros. ¿Qué valores representan ahora cada una de las curvas de nivel? ¿Cuál es la diferencia de altura entre *C* y *D*?
 - Describe el uso que se hace de los números con signo en la resolución de cada uno de los apartados anteriores.
14. En un Instituto hay 100 alumnos de Ciencias que han elegido tres materias optativas: Biología, 51; Ciencias de la Tierra, 30; Geología, 19. Un profesor debe dar clase a los 100 alumnos repartiéndolos en 5 grupos. ¿Cómo formarías estos grupos de forma que el reparto te parezca equitativo? Justifica los criterios del reparto en base a las operaciones realizadas.
15. Resuelve los siguientes problemas e indica en cada caso qué relaciones de divisibilidad encuentras:
- Un juego de dos jugadores consiste en ir añadiendo 1 o 2 al número dicho por el otro, hasta alcanzar el número 20. Investiga qué números se debe decir para estar seguro de ganar. ¿Qué relación existe entre esos números?
 - En una clase hay 28 alumnos. Para realizar una competición el profesor de Educación Física quiere formar equipos con igual número de alumnos y sin que sobre ninguno. ¿De cuántas formas podrá hacer los equipos? ¿Y si el número de alumnos es 29?
 - Dos cometas se aproximan al Sol, uno cada 25 años y otro cada 60. Si ambos se aproximaron juntos al Sol en 1950 ¿Cuándo volverán a hacerlo de nuevo?

Referencias

- Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 75-98). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones*. Síntesis. Madrid.
- Castro, E. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 99-121). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 5-162). Universidad de Granada.
- Giménez, J. y Gironde, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.
- Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.
- González, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 257-283). Madrid: Síntesis.
- Martínez, J. (1991). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid: Editorial Escuela Española.
- Maz, A. y Bracho, R. (2011). Números enteros. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 167-188). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 177-202). Madrid: Síntesis.
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Madrid: Síntesis.
- Maza, C. (1991). *Multiplicación y división. A través de la resolución de problemas*. Madrid: Visor.
- Molina, M. y Castro, E. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 123-146). Madrid: Ediciones Pirámide.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 231-255). Madrid: Síntesis.
- Segovia, I., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2011). Cálculo y estimación. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 147-166). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Sierra, M., González, M. T., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis.
- Udina, F. (1989). *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis.

Seminarios del Tema 2

PRÁCTICA 2. PROBLEMAS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS CON MATERIAL MULTIBASE Y ÁBACO

El aprendizaje de las estructuras aditiva y multiplica requiere comprender el significado de las operaciones suma, resta, multiplicación y división, de las situaciones y problemas en que éstas se utilizan, de su propiedades y relaciones y de las diferentes formas en que puede obtenerse el resultado. De entre los diversos métodos de cálculo disponibles, nos centramos aquí en los algoritmos de cálculo. Un algoritmo consiste en una serie finita de reglas, a aplicar en cierto orden, a unos datos, para llegar con certeza y en un número finito de pasos a un resultado (Gómez, 1988).

Los algoritmos que se trabajan en las aulas son los llamados algoritmos estándares o usuales de lápiz y papel. Estos procedimientos no son los únicos algoritmos que se han utilizado a lo largo de la historia para realizar los cálculos con las cuatro operaciones aritméticas básicas, pero sí son los más extendidos e utilizados en la actualidad, siendo su aprendizaje un componente destacado del trabajo aritmético en la Educación Primaria.

Para aprender de manera comprensiva los algoritmos de las operaciones básicas es recomendable comenzar con objetos físicos que se puedan manipular. El material multibase, que ya conoces de la práctica anterior, avanza un paso hacia la simbolización de las operaciones, que se completará en el ábaco vertical y su estructura posicional. Los ábacos y el material multibase ayudan a comprender el significado de ciertos pasos de los algoritmos, como el “llevarse una”, permitiendo justificar los algoritmos de la resta. En esta práctica vamos a utilizar estos materiales para operar.

También se plantean las operaciones a realizar en el contexto de problemas aritméticos, los cuales proporcionan situaciones cercanas al escolar para la comprensión de las operaciones. Estos problemas se caracterizan por tener un enunciado en el que la información es de carácter cuantitativo y su resolución suele consistir en la realización de una o varias operaciones aritméticas. La dificultad de los problemas aritméticos escolares puede variar dependiendo de factores como el tamaño del problema, la complejidad gramatical, el orden de presentación de los datos, las palabras clave.

Objetivos

1. Comprender el mecanismo de los algoritmos de la suma y resta por medio de la manipulación del ábaco horizontal.
2. Trasladar la acción manipulativa realizada en el ábaco a representación icónica.
3. Relacionar la acción en estos materiales con los algoritmos de lápiz y papel.
4. Conocer y utilizar el material didáctico (bloques multibase y ábacos) para enseñar y aprender los algoritmos de cálculo.
5. Reconocer los significados de las operaciones aritméticas al operar con el ábaco horizontal y el material multibase.
6. Identificar los problemas aritméticos con las categorías semánticas en las que se encuadran.
7. Inventar problemas aritméticos con unas determinadas condiciones.

Actividades

Problemas y Actividades con el Material Multibase

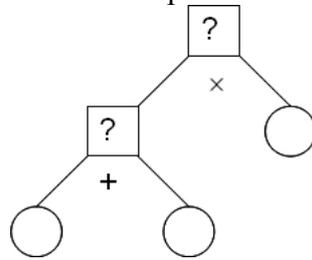
1. Un panadero está trabajando una masa de 2131 gramos a la que añade 231 gramos de harina para espesarla. ¿Cuánto pesará la masa tras añadirle la harina?
 - a) Clasifica el problema en una de las categorías semánticas de los problemas aditivos de una etapa.
 - b) Representa con el material multibase de base **cuatro, cinco o seis** los números que aparecen en el enunciado y realiza la suma necesaria para resolver el problema. Explica qué ocurre con las unidades de segundo orden. ¿Qué significado de la suma utilizas?
 - c) Resuelve el problema mediante el algoritmo estándar. ¿Qué relación observas con el proceso seguido al sumar previamente con el material multibase?
2. Se considera la resta 313-130.
 - a) Inventa un problema aditivo de una etapa de comparación con dicha operación.
 - b) Inventa un problema aditivo de combinación (partes-todo) en el que haya que realizar dicha resta.
 - c) Utiliza el material multibase de base **cuatro, cinco o seis** para resolver dicha resta. Explica qué ocurre con las unidades de segundo orden. ¿Qué significado de la resta utilizas?
 - d) A continuación realiza dicha resta utilizando el algoritmo estándar. ¿Qué relación observas con el proceso seguido al restar con el material multibase?
3. Se consideran las operaciones 32:3, 102:3 y 231:2.
 - a) Utiliza el material multibase de base **cuatro, cinco o seis** para resolver cada una de las operaciones anteriores. Indica, en cada caso, qué significado de la multiplicación y de la división estás utilizando. ¿Puedes realizar dichas divisiones utilizando otro significado de la división?
 - b) Realiza dichas operaciones utilizando el algoritmo estándar. ¿Qué relación observas con el proceso seguido al operar previamente con el material multibase?
 - c) Inventa tres problemas: uno de proporcionalidad (o de razón) para la primera operación, un problema de comparación para la segunda y uno de producto cartesiano (producto de medidas o combinación) para la tercera.

Problemas y Actividades con el Ábaco Vertical

4. Realiza la siguiente suma usando el ábaco vertical y mediante el algoritmo tradicional: $246+758$. Describe las semejanzas y diferencias entre ambos procedimientos.
5. Existen muchas palabras que se asocian con suma: juntar, unir, reunir, atar, amontonar, aplicar, añadir, agregar, adjuntar, suscribir, syndicar, recopilar, ascender, enlaza, capturar, cargar, recolectar, alistar, adherir, compendiar, elevar, llenar, agrupar, ...
 - a) Elabora una lista de palabras que se asocien con resta.
 - b) Inventa un problema de una etapa en el que aparezca una de las palabras asociadas a suma y que se resuelva realizando la resta 573-468.
 - c) Realiza la resta 573-468 utilizando el ábaco y mediante los dos algoritmos estándares de la resta. Describe las semejanzas y diferencias que observas entre esos tres procedimientos.

Problemas de Varias Etapas

6. Se considera el problema “Jaime tenía dos caramelos y Paula le dió cinco. De esta forma, a Paula le quedan el doble de los caramelos que tiene Jaime. ¿Cuántos caramelos tiene Paula?”
- Representa el problema en el diagrama.
 - Clasifica las operaciones en los tipos semánticos adecuados.



7. Inventa un problema de dos etapas, donde la primera sea aditiva de comparación y la segunda multiplicativa de proporcionalidad simple o razón. Realiza un diagrama que represente las operaciones a realizar para resolver dicho problema.

Seminarios del Tema 2

TRABAJO EN GRUPO. PROBLEMAS Y CÁLCULOS ARITMÉTICOS CON MATERIAL MULTIBASE Y ÁBACO

1. Explicad las reglas generales para efectuar la suma, la resta, la multiplicación y la división, empleando el material multibase y el ábaco.
2. Indicad diferencias y semejanzas entre operar con el ábaco vertical y operar con el material multibase. Para ello comparad el modo en que se realiza cada una de las operaciones con ambos materiales y el significado de las operaciones que utilizáis en cada caso.
3. El siguiente programa utiliza el material multibase para hacer restas: http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_155_g_3_t_1.html.
 - a) Elegid una resta e investigad como puede resolverse utilizando dicho programa. Explicad cómo habéis realizado dicha operación y qué significado de la resta habéis utilizado.
 - b) Inventad dos problemas: uno de comparación y otro de combinación que se resuelvan con la operación resuelta en el apartado anterior.
 - c) Identificad qué algoritmo utiliza el programa para realizar restas con llevada.
4. Proponed un problema multiplicativo de producto cartesiano de una sola etapa en el que intervengan cantidades de dos cifras. Resolved el problema utilizando el programa que está disponible en la siguiente página. Explicad el significado de las imágenes y operaciones que muestra el programa en dicha resolución.
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_192_g_1_t_1.html?from=category_g_1_t_1.html.
5. Indicad algunas ventajas, para el aprendizaje de los algoritmos de cálculo, de realizar el cálculo con el ábaco vertical, el material multibase y los programas anteriores.

Tema 3

NÚMEROS RACIONALES

Con este tema, el futuro maestro aborda el concepto de número racional a través de sus dos representaciones más utilizadas: la *fracción* y el *número decimal*. Para ello, es necesario distinguir ambos conjuntos numéricos, estableciendo cuáles han sido los problemas que han hecho necesario ampliar el conjunto de números naturales y han llevado a establecer los *números racionales*.

Esos problemas surgen, fundamentalmente, en situaciones de medida cuando la unidad de medida seleccionada es mayor que la cantidad que se desea medir. Desde ese punto de partida, se analizan y estudian los diferentes usos y sentidos que tienen las fracciones, insistiendo especialmente en los significados relacionados con la relación parte-todo y operador, por ser éstos los que se trabajan con más intensidad en Educación Primaria. La modelización juega en este caso un papel fundamental para dotar de significado a los conceptos de número racional y sus representaciones en forma de fracción y decimal, así como a la forma de realizar distintas operaciones con ambas representaciones.

Conviene retomar la multiplicación y división, pues en este tema adquieren un sentido con diferencias importantes respecto al que tenían estas operaciones en los números naturales. También el estudiante debe conocer que los números decimales constituyen una representación de los números racionales que amplía el uso del Sistema de Numeración Decimal a la expresión de números con comas, válido para los algoritmos de cálculo con números racionales. El uso de los racionales y las fracciones en los problemas de proporcionalidad, se afronta el tema de medida (bloque 3, tema 6).

Algunos ejemplos de cuestiones que el estudiante debe ser capaz de responder al finalizar su estudio con este tema son las siguientes:

- ◆ ¿Qué es un número racional? ¿Qué es una fracción?
- ◆ ¿En qué situaciones se usan las fracciones y qué significados son los más importantes?
- ◆ ¿Qué modelos pueden emplearse para trabajar con fracciones?
- ◆ ¿Cómo se representa con fracciones la suma, resta, multiplicación y división de números racionales? ¿Qué significado tienen esas operaciones? ¿Cómo pueden realizarse?
- ◆ ¿Qué es la expresión decimal de un número racional? ¿Qué relación tiene con la expresión en el sistema decimal de numeración?
- ◆ ¿Qué cambia y qué se mantiene de los algoritmos de las operaciones con la expresión decimal de números racionales respecto a los algoritmos con números naturales y por qué?
- ◆ ¿Qué tipo de problemas se resuelven usando fracciones y sus operaciones?
- ◆ ¿Qué recursos pueden utilizarse para trabajar y operar, de manera manipulativa, con expresiones fraccionarias y decimales del número racional?

Objetivos

1. Conocer y describir los conceptos de fracción y número racional y sus relaciones.
2. Manejar y relacionar diferentes representaciones de los números racionales:

- fracciones, decimales y porcentajes.
3. Identificar los diferentes significados de fracción y cómo se caracteriza la equivalencia de fracciones en cada uno de ellos.
 4. Realizar justificadamente operaciones con fracciones y racionales para resolver problemas.
 5. Representar los problemas empleando diversos modelos para obtener el resultado de las operaciones.
 6. Justificar los algoritmos de las operaciones con números racionales y con números decimales.
 7. Conocer materiales y recursos para la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales en todas las formas de representarlos.
 8. Hacer una reflexión crítica sobre el papel de las fracciones y los números decimales en situaciones cotidianas y su repercusión en la Educación Primaria.

Contenidos

1. Contextos y usos de las fracciones.
2. Definición y significados del concepto de fracción: parte-todo, operador, razón, y cociente.
3. Representaciones y modelos para las fracciones. Porcentajes.
4. Concepto de número racional. Fracciones equivalentes. Operaciones con números racionales en expresión fraccionaria. Propiedades.
5. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y números decimales (2, 308-311).
6. Los números decimales. Conceptos y representaciones.
7. Comparación y operaciones con números decimales. Algoritmos.
8. La familia de los decimales.

Metodología

Desarrollo del Tema

- ◆ El punto de partida es la expresión y el análisis de situaciones en las que los números naturales no son suficientes para medir (actividades 2 y 14), así como la descripción de usos cotidianos de las fracciones y los decimales (actividad 1). Es importante destacar que el conjunto de fracciones que usamos habitualmente es considerablemente pequeño.
- ◆ Mediante una breve consulta al currículo, los estudiantes identifican el tratamiento de las fracciones en Educación Primaria (actividad 3).
- ◆ A continuación se presentan los diferentes significados que admite el concepto de fracción: parte-todo, operador, reparto (cociente indicado), medida y razón, si bien el resto del trabajo se focaliza en el primero de ellos. Se describen situaciones en las que se pueden usar esos significados (actividad 6). En el estudio de la fracción como parte de un todo, se destaca la importancia de la unidad de referencia y de que el fraccionamiento sea igualitario y exhaustivo.
- ◆ Las diferentes formas de representar fracciones constituye el siguiente aspecto de reflexión. Estas formas son *simbólica*, con cifras mediante cociente indicado decimal, tanto por ciento o número mixto; *verbal*, con determinadas reglas lingüísticas; *gráfica*, en términos de punto en la recta numérica (modelos lineales), modelos de área o modelos discretos (actividades 5 y 8).
- ◆ En el primer seminario de este tema se realiza la práctica 3 (ver detalle más adelante), en donde se emplean materiales manipulativos e informáticos para

conjugar diferentes formas de representar fracciones e introducir las operaciones.

- ◆ A continuación se recuerdan algunos tipos especiales de fracciones (unitarias, propias, impropias, decimales, irreducibles y equivalentes). La noción de equivalencia es la que se emplea para caracterizar el concepto de número racional (actividad 4).
- ◆ Como parte del trabajo autónomo, los estudiantes tienen que elaborar la parte dedicada a las operaciones con fracciones (ver más adelante). No obstante, en sesión de gran grupo se destacan algunas ideas claves y se proponen problemas que den sentido a esas operaciones (actividades 7, 8, 9 y 10).
- ◆ El estudio de los números decimales comienza recordando que una manera de representar fracciones es usando decimales (notación decimal de las fracciones). Pero la existencia de números decimales que no se pueden expresar como fracción (irracionales), el conjunto de los números decimales es un conjunto numérico con entidad propia. De nuevo resulta clave enfatizar la variedad de situaciones en las que usamos habitualmente decimales con diferente nivel de precisión (actividades 12, 13 y 15).
- ◆ El segundo seminario se dedica a la resolución de actividades de las que se incluyen en el guión del estudiante. En esas sesiones se promueve que los estudiantes salgan a la pizarra a compartir sus estrategias de solución con los compañeros y también se resuelven dudas sobre el tema.

Trabajo Autónomo del Estudiante

En este tema las actuaciones propuestas para fomentar el trabajo autónomo del estudiante son dos:

- ◆ Los estudiantes deben preparar un documento de estudio sobre las operaciones con fracciones. El objetivo es que recojan el significado de la suma, resta, multiplicación y división de fracciones. Es recomendable que consulten Flores y Torralbo (2011, pp. 206-215) o Castro y Torralbo (2001, pp. 301-308).
- ◆ Como trabajo voluntario individual, a los estudiantes se les propone que inventen un cuento infantil relacionado con las fracciones o bien que localicen y analicen situaciones que involucren decimales o porcentajes que aparezcan en algún medio de comunicación. En cualquiera de las dos opciones, el trabajo tendrá una extensión máxima de 2000 palabras.

Actividades

1. Pon ejemplos de situaciones en las que se utilizan fracciones. Identifica en ellas las fracciones, su significado y qué representan sus elementos.
2. Clasifica las fracciones los siguientes criterios: relación con la unidad (mayor o menor que la unidad), relación de divisibilidad entre numerador y denominador. Busca la definición y el concepto de número mixto.
3. Localiza los contenidos sobre fracciones y decimales que se trabajan en Educación Primaria en cada uno de los ciclos. Haz un esquema de lo que encuentres y detalla lo que los criterios de evaluación proponen para el aprendizaje de esos contenidos.
4. Indica qué significa que dos fracciones sean equivalentes en el modelo de áreas. Igualmente en el de recta numérica.
5. Representa las fracciones $7/4$ y $2/5$ en una recta y mediante un modelo de área. Indica justificadamente qué ocurre si se representan de esas formas las

fracciones $21/12$ y $8/20$.

6. Relaciona cada una de las dos siguientes viñetas con alguno de los significados que admite el concepto de fracción. Justifica tu selección. Describe cómo otra viñeta podría representar algún otro significado de fracción, distinto a los anteriores.



7. Plantea un problema de la vida real en el que su resolución requiera la suma de números racionales en expresión fraccionaria.
8. Resuelve los siguientes problemas con fracciones mediante modelos adecuados. Indica en ellos quién es la unidad de cada fracción.
- En una clase hay dos tercios de chicas. Si hay catorce chicas, ¿Qué número hay de alumnos?
 - Jorge pedalea a 8 km por hora. Al cabo de 45 minutos, ¿a qué distancia está de su casa?
 - Un terreno mide 200 metros cuadrados. ¿Cuánto miden las $5/8$ partes del terreno?
 - La tasa de crecimiento anual del índice de precios es de $3/100$. Si he comprado un piso de 120.000 euros y el año próximo lo vendo por 122.000 euros, ¿he ganado dinero?
 - En una bolsa de frutos secos, $3/4$ del peso son cacahuetes. Sabiendo que hay 270 gramos de cacahuetes ¿Cuánto pesa la bolsa?
 - Una persona gasta cada mes la quinta parte de su salario mensual en alimentación y la sexta parte en alquiler del piso, tras lo que le quedan 570 euros. ¿Cuál es su salario?
 - Sabemos que en cada revisión se corrigen $9/10$ de los errores de un manuscrito. El manuscrito se ha revisado dos veces y aún quedan 23 errores. ¿Cuántos errores había?

- h) Dos pastores que tienen 5 y 3 panes, respectivamente, se encuentran a un cazador con hambre. Reparten los panes y comen igual cantidad los tres. Al despedirse, el cazador les da 8 monedas, ¿cómo deben repartirlas?
- i) Se prepara un combinado poniendo el licor de una botella de $\frac{1}{4}$ de litro y una lata de refresco de $\frac{1}{5}$ de litro. ¿Cuánto ocupa el combinado? ¿Qué fracción de litro?
- j) A Ana le quedan los $\frac{6}{9}$ de una bolsa de caramelos, y los reparte entre Eva y Juan. A Eva le da un tercio de los $\frac{6}{9}$ y a Juan $\frac{6}{9}$ de los $\frac{6}{9}$. ¿Qué parte de la bolsa le queda a Ana? ¿Quién tiene más caramelos?
- k) Un tejido encoge $\frac{1}{8}$ después de un lavado a mano y $\frac{1}{5}$ si es lavado en lavadora. Si primero lo lavamos a mano y después con lavadora ¿cuánto habrá encogido?
9. Encuentra dos fracciones cuya suma sea 2 y cuyo producto sea $\frac{7}{16}$. Inventa un problema en el que se presente esas fracciones y resuélvelo.
10. Identifica la operación que corresponde a cada uno de los siguientes enunciados, estudiando cuáles son equivalentes. Determina en cada fracción quién es la unidad y la fracción que resulta. Expresa mediante un modelo cada enunciado.
- | | |
|--|--|
| a) La mitad de la tercera parte. | g) Lo que la tercera parte contiene a la mitad. |
| b) Tercera parte de la mitad. | h) Lo que la mitad contiene a la tercera parte. |
| c) Un medio de la tercera parte. | i) El lado de un rectángulo de área $\frac{1}{2}$ y lado $\frac{1}{3}$. |
| d) Un tercio de la mitad. | j) El área de un rectángulo de lados $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. |
| e) La porción de la tercera parte que es un sexto. | k) El área de un rectángulo triple del que tiene de área $\frac{1}{2}$. |
| f) La porción de la mitad que es la sexta parte. | l) El área de un rectángulo mitad del que tiene de área $\frac{1}{3}$. |
11. ¿Qué es un número decimal? Indica tipos de decimales y la relación que tienen con los números racionales.
12. En el desarrollo de $\frac{1}{17}$, ¿qué dígito ocupa el lugar 1996? ¿Qué propiedades del sistema decimal de numeración hay que usar para hallar la respuesta?
13. Inventa un problema que se resuelva con una división de un entero por un decimal.
14. Haz una lista de diferencias y similitudes entre los números naturales y los números racionales. Busca situaciones específicas en las que se utilizan los números naturales, pero no los racionales, y otras en que se emplean los racionales. En esas últimas, interpreta cuándo se emplean números naturales.
15. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta.
- | |
|---|
| a) Dividir por dos una cantidad es equivalente a multiplicarla por $\frac{1}{2}$. |
| b) El 50% del 30% de una cantidad es equivalente al 80% de esa cantidad. |
| c) Las fracciones mayores que la unidad no se pueden representar con el modelo de área. |

d) Existen números decimales que no pueden expresarse como una fracción.

Referencias

- Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CSS.
- Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 315-345). Madrid: Síntesis.
- Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 285-314). Madrid: Síntesis.
- Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.
- Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 5-162). Universidad de Granada.
- Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 189-218). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética*. Barcelona: Aprendizaje-Visor.
- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones: la relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Pujadas, M. y Eguiluz, L. (2004). *Fracciones ¿un quebradero de cabeza?* México D.F.: Ediciones Novedades Educativas.
- Ruiz-Hidalgo, J. F. y Castro, E. (2011). Decimales. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 219-244). Madrid: Ediciones Pirámide.

Seminarios del Tema 3

PRÁCTICA 3. REPRESENTACIÓN FRACCIONARIA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El aprendizaje del número racional en Educación Primaria tiene que ser preferentemente práctico, basado en su utilización en situaciones concretas. Con este fin, esta práctica presenta materiales diversos para la enseñanza de los números racionales en su representación fraccionaria. Con los materiales representamos fracciones, las manipulamos para resolver problemas de fraccionamiento y de operaciones, obteniendo una representación del resultado. La mayoría se valen de representaciones de superficie, empleando como magnitudes el área, la amplitud de los ángulos o las longitudes. Estas representaciones se pueden hacer con materiales manipulativos o usando programas informáticos. En esta práctica veremos varios ejemplos de los primeros y también algunos de estos recursos informáticos.

El *Diagrama de Freudenthal* o *Muro de fracciones* está formado por un rectángulo dividido en franjas de igual amplitud, cada una de ellas dividida a su vez en partes iguales que corresponden a fracciones de la unidad. Si este diagrama se parte en trozos, se obtienen nuevos materiales, como las *Tablas de fracciones*, que son rectángulos en plástico de igual tamaño, en los que aparecen ranuras que los dividen en fracciones del rectángulo unidad. Si se separan estas partes se obtiene el *Puzle de fracciones*, que puede tener forma rectangular o circular, con lo que las partes serán sectores. Las *Transparencias de fracciones* son dos hojas con el mismo dibujo, una en papel y la otra en una hoja transparente. En ellas hay dibujados varios cuadrados divididos en partes iguales que representan fracciones del cuadrado.

Con estos recursos vas a representar de fracciones, buscar relaciones, realizar operaciones y emplearás todos estos recursos para resolver problemas.

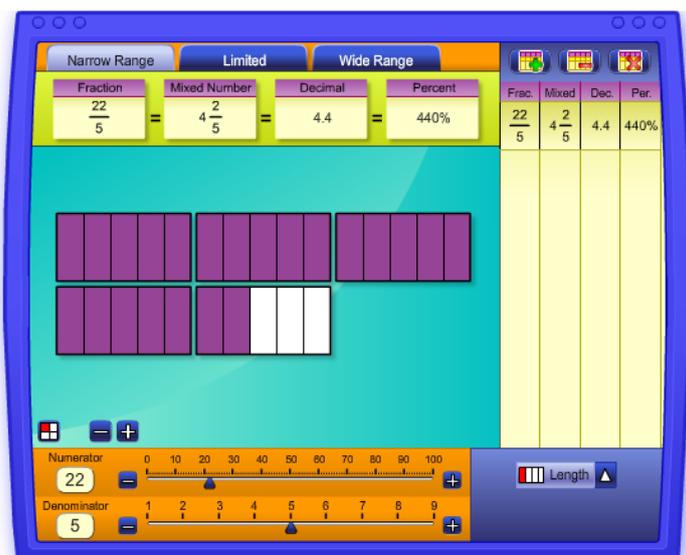
Objetivos

1. Manejar representaciones concretas de las fracciones.
2. Interpretar y estudiar relaciones entre fracciones, por medio de sus representaciones.
3. Relacionar esas representaciones con las diferentes operaciones.
4. Profundizar en los elementos que conforman las fracciones: unidad de referencia, relaciones que dan lugar a las operaciones, acciones para operar, etc.
5. Justificar los algoritmos de las operaciones con fracciones.
6. Conocer materiales y recursos para la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, tanto físicos como informáticos.
7. Analizar los conocimientos que se ponen en juego usando estos recursos y valorar sus posibilidades como recurso didáctico en Educación Primaria.

Actividades

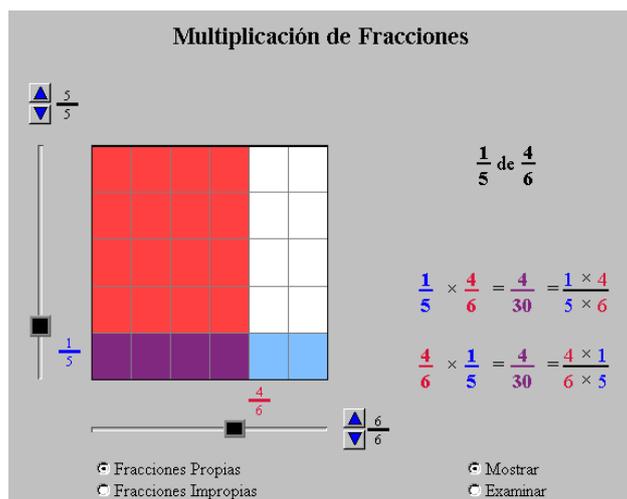
1. Para representar números racionales existe un recurso informático disponible en la página siguiente:

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=11>



- a) Explora el funcionamiento del programa cambiando las distintas opciones. Desliza los cursores inferiores y observa y describe su efecto.
 - b) Representa las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{8}$ y obtén fracciones equivalentes a cada una de ellas.
 - c) Expresa 3 unidades y un tercio con diversas representaciones.
2. Usando el muro de fracciones, relaciona los siguientes grupos de fracciones según indican los enunciados:
- a) Descompón en varios sumandos y de distintas formas $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$.
 - b) Comparar los siguientes pares de fracciones, indicando cuál es mayor y, si es posible, en qué cantidad se diferencian: $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}; \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$.
 - c) Completa las siguientes frases empleando alguno de estos materiales y expresar la relación descrita utilizando operaciones entre fracciones:
Un medio contiene ___ veces a $\frac{1}{8}$. ___ está contenido 2 veces en un tercio.
Si a $\frac{1}{2}$ le quito $\frac{1}{8}$ quedan ____ . La cuarta parte del doble de $\frac{1}{3}$ es ____.
3. Obtén las fracciones resultantes de las siguientes sumas y restas, empleando el muro de fracciones:
- a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$
 - b) $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$
 - c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$
 - d) $\frac{3}{7} + \frac{1}{5}$
 - e) $\frac{2}{7} - \frac{1}{8}$
4. La figura muestra una pantalla producida por el programa disponible en la siguiente página:

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_194_g_3_t_1.html



- a) Explora el funcionamiento del programa cambiando opciones. Desliza los cursores y observa su efecto.
 - b) Realiza las siguientes operaciones empleando el programa y las transparencias de fracciones: $\frac{3}{7} \times \frac{1}{5}$, $\frac{2}{7} \times \frac{1}{8}$ y $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$.
5. Resuelve los siguientes problemas, empleando los materiales anteriores. También puedes usar papel cuadrulado. Indica en todos ellos la unidad de cada fracción.
- a) En cada 1000 g. de monedas hay 100 g. de aluminio y 900 g. de cobre. Expresa en fracción irreducible las cantidades de aluminio y cobre que hay en 1g. de dichas monedas.
 - b) Juan ha hecho una compra y le han rebajado $\frac{1}{5}$ del total. Si ha tenido que pagar 200 €, ¿cuál era el valor de la compra?
 - c) El agua al congelarse aumenta su volumen $\frac{1}{10}$ del mismo. ¿Qué volumen ocuparán 200 l. después de helarse?
 - d) De una botella de aceite se saca un día la mitad de su contenido y al día siguiente la mitad de lo que quedaba. ¿Qué fracción de líquido queda en la botella?

Seminarios del Tema 3

TRABAJO EN GRUPO. REPRESENTACIÓN FRACCIONARIA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Elaborad un documento con vuestras respuestas a las cuestiones siguientes, respetando una extensión de entre 600 y 800 palabras.

1. Describid brevemente los materiales vistos en clase para la enseñanza de las fracciones y cómo se representan con ellos las fracciones y las relaciones de equivalencia y orden.
2. Indicad cómo se realizan las operaciones con fracciones empleando los dos materiales empleados: la suma y resta empleando el muro y la multiplicación y división empleando las transparencias.
3. Resolved los siguientes problemas empleando algunos de los materiales utilizados en esta práctica o papel cuadriculado.
 - a) *He echado gasolina al coche. Tenía $\frac{2}{3}$ del depósito y le he echado $\frac{1}{4}$ del depósito más. ¿Qué porción de depósito está lleno?*
 - b) *Al cocer la masa de un bizcocho ha pasado a ocupar $\frac{3}{4}$ del volumen original. Al cortarle el quemado observo que se ha disminuido a $\frac{4}{5}$ el volumen del bizcocho. ¿Qué porción del volumen de la masa ocupa el bizcocho que he dejado?*
 - c) *En la mesa hay 5 comensales. Cada uno consume $\frac{1}{3}$ de litro de cerveza ¿cuánto consumen en total? ¿Cuántas botellas de $\frac{1}{5}$ de litro se llenarían con lo que han consumido?*
4. Localizad en Internet dos páginas que tengan que ver con la enseñanza y aprendizaje de los números racionales. Mostrad especial atención a la existencia de algún programa interactivo (no visto en clase) que aporte ayuda a su enseñanza. Describid esas páginas, destacando lo que os parece más interesante de cada una de ellas.

BLOQUE 2

GEOMETRÍA

Tratamiento Curricular

La geometría es parte central de las matemáticas desde sus orígenes, cuando se desarrolló como ciencia deductiva. Esa importancia histórica tiene su reflejo en la matemática escolar, donde la geometría ocupa un lugar preponderante en los programas educativos internacionales por su valor para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. En el currículo de Educación Primaria, la geometría se desarrolla en todos los ciclos dentro de un bloque específico (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b):

A través del estudio de los contenidos del bloque 3, Geometría, el alumnado aprenderá sobre formas y estructuras geométricas. La geometría es describir, analizar propiedades, clasificar y razonar, y no sólo definir. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra, estableciendo relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales (geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) y de la actividad personal realizando plegados, construcciones, etc. para llegar al concepto a través de modelos reales. A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica. (p. 31556)

Siguiendo la descripción propuesta en el currículo, la geometría en el contexto escolar persigue una doble finalidad. En primer lugar se persigue que los escolares exploren, conozcan e interpreten formas geométricas, sus propiedades, relaciones y transformaciones, tanto en el plano como en el espacio. En segundo lugar, el aprendizaje de la geometría escolar también debe promover que los escolares perciban el modo en el que esas nociones geométricas se presentan en nuestro entorno y el papel que juegan y representan en él (Lupiáñez y Segovia, 2011). En la caracterización del estándar “Geometría”, el NCTM también enfatiza esta doble componente (2003):

A través del estudio de la Geometría, los alumnos aprenderán sobre las formas y estructuras geométricas y cómo analizar sus características y relaciones. La visualización espacial, esto es, construir y manipular mentalmente representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y percibir un objeto desde perspectivas diferentes, es un aspecto importante del pensamiento geométrico. La Geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, culminando en la enseñanza secundaria con el trabajo con demostraciones. La construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial ofrecen vías para interpretar y describir entornos físicos y pueden constituir herramientas importantes en la resolución de problemas. (p. 43)

En la propuesta del *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006) también queda delimitado un foco de contenido para Educación Primaria que se denomina “Geometría” en los dos primeros ciclos y “Geometría, medida y álgebra” en el tercero. Comienza destacando la composición y descomposición de formas geométricas y la descripción y el análisis de formas bidimensionales. A partir de 5º curso señala la descripción de formas tridimensionales y el análisis de sus propiedades, incluyendo el cálculo de volúmenes y áreas (Rico y Lupiáñez, 2008a, pp. 278-281).

También en el marco del proyecto PISA se define un dominio de contenido denominado “Espacio y forma” que enfatiza el carácter funcional de las nociones geométricas:

Incluye fenómenos y relaciones espaciales y geométricos, a menudo basados en la disciplina curricular de la geometría. Requiere la búsqueda de similitudes y diferencias a la hora de analizar los componentes de las formas y reconocerlas en diferentes representaciones y dimensiones, así como la comprensión de las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas. (p. 39)

Componentes del Sentido Espacial

Estos acercamientos al aprendizaje escolar de la geometría, nos permiten delimitar los componentes del sentido espacial:

- ◆ Identificar, analizar y describir características y propiedades de figuras geométricas, en dos y tres dimensiones.
- ◆ Conocer y aplicar criterios estandarizados de clasificación de esas figuras y elaborar criterios propios.
- ◆ Localizar y describir posiciones y trayectorias, usando sistemas de coordenadas, mapas y planos.
- ◆ Aplicar e identificar transformaciones geométricas en el plano, destacando la simetría, para explicar situaciones matemáticas.
- ◆ Usar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para analizar y describir el entorno y para resolver problemas.

Organización del Bloque en la Materia

Esa caracterización del sentido espacial estructura el tratamiento de este bloque en la asignatura. Se compone de dos temas, el cuarto y el quinto en la secuencia global. El primero de ellos se ocupa de la geometría del plano y el espacio, mientras que el segundo se centra en las transformaciones en el plano, en la visualización y en la orientación espacial.

El tema 4, *Figuras geométricas*, incluye dos seminarios en los que se realizan dos prácticas de laboratorio. La primera de ellas se dedica a la geometría del plano y la segunda a la del espacio. En uno de los seminarios del tema 5, *Transformaciones geométricas planas. Orientación espacial*, se realiza la práctica 6, centrada en el uso de GeoGebra para el estudio de transformaciones y en el diseño de mosaicos.

Además, este bloque incluye una práctica de campo voluntaria en grupo en la que se propone un trabajo de matemáticas y fotografía, que se propone en el tema 4. La presento con el mismo formato con el que se entrega a los estudiantes.

Tema 4

FIGURAS GEOMÉTRICAS

Los elementos geométricos son abstracciones que realizamos a partir de objetos del entorno y en este tema se hace un recorrido por los elementos básicos de la geometría del plano y del espacio. La geometría del plano utiliza elementos con los que podremos estudiar y representar el espacio. La geometría del espacio nos ayuda a analizar, comprender, describir e interpretar el entorno. Esta sencilla caracterización nos lleva a introducir en primer lugar la geometría plana para pasar después a la del espacio. Pero en este tema abandonamos un tratamiento meramente formal de la geometría. Enfatizamos el uso de materiales que permiten un acercamiento constructivo y exploratorio de los elementos geométricos. La finalidad del tema es que los estudiantes identifiquen, caractericen, describan, construyan y clasifiquen estos elementos, así como que conjeturen y justifiquen propiedades y relaciones entre ellos.

Algunos ejemplos de cuestiones que el estudiante debe ser capaz de responder al finalizar su estudio con este tema son las siguientes:

- ◆ ¿Qué elementos geométricos aparecen en el entorno? ¿Cómo repercuten las propiedades geométricas en la utilidad de estos elementos?
- ◆ ¿Cómo se pueden caracterizar los elementos geométricos para delimitarlos? ¿Cómo se construyen y dibujan?
- ◆ ¿Cómo se definen los elementos geométricos del plano y del espacio? ¿De qué partes se componen? ¿Cómo se pueden clasificar? ¿Qué características resultan de estas clasificaciones?
- ◆ ¿Qué propiedades tienen los elementos geométricos? ¿Cómo se justifican estas propiedades? ¿Es posible demostrar alguna de ellas?
- ◆ ¿Qué tipos de problemas se resuelven empleando la geometría? ¿Cómo se resuelven?

Objetivos

1. Identificar elementos geométricos en el entorno.
2. Caracterizar con precisión estos elementos.
3. Manejar, dibujar y construir elementos geométricos.
4. Clasificar y enunciar propiedades de los mismos.
5. Desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.
6. Obtener medidas empíricas y formales de figuras, y relacionarlas entre sí.
7. Justificar y demostrar algunas propiedades de cuerpos y figuras.
8. Plantear y resolver problemas empleando elementos geométricos.
9. Buscar relaciones entre los conceptos geométricos.

Contenidos

1. Primeros elementos geométricos: punto, recta, plano, espacio.
2. Semirecta. Semiplano. Segmentos. Ángulos. Medida de ángulos.
3. Relaciones entre elementos: incidencia, paralelismo, perpendicularidad.
4. Polígonos: diferenciación y clasificaciones.
5. Triángulos. Elementos. Clasificación. Propiedades.
6. Cuadriláteros. Elementos. Clasificación. Propiedades.
7. Figuras curvilíneas; circunferencia y círculo.
8. Materiales y recursos para la enseñanza de la geometría plana.

9. Rectas y planos en el espacio.
10. Ángulos diedros y poliedros.
11. Cuerpos geométricos y sus elementos.
12. Poliedros. Fórmula de Euler. Poliedros regulares.
13. Prismas y pirámides.
14. Cuerpos de revolución.
15. Materiales y recursos para la enseñanza de la geometría espacial.

Metodología

Desarrollo del Tema

- ◆ La introducción al tema se inicia mediante un debate en gran grupo en el se abordan cuestiones como el ámbito de estudio de la geometría, los elementos geométricos que conocen los estudiantes y la utilidad de la geometría en diferentes ámbitos (actividad 1). También se comentan expresiones cotidianas que emplean nociones o propiedades geométricas (actividad 8) y se presenta la organización del bloque en dos temas.
- ◆ El primer aspecto tratado es la geometría básica y sus elementos: puntos, rectas, segmentos, ángulos o planos, así como sus relaciones básicas (actividad 2). A continuación se inicia el estudio de los polígonos y la circunferencia. En este momento se comienza el uso de determinados recursos, como los útiles de dibujo o GeoGebra (actividades 5 y 6), y de actividades que promueven la reflexión y el razonamiento (actividades 4 y 7).
- ◆ La clasificación de los polígonos permite que los estudiantes propongan criterios personales, que se conjugan con los tradicionales en función de la medida de sus lados, la de sus ángulos y la posición relativa de los lados (actividad 3). También se destaca la composición y descomposición de polígonos regulares para obtener otros más complejos (actividad 10). El estudio de los triángulos se centra en sus invariantes, propiedades y en sus relaciones métricas (actividad 9).
- ◆ El primer seminario de este tema profundiza en algunos de los aspectos tratados en las sesiones anteriores e introduce la manipulación, la construcción y la representación por parte de los estudiantes. Mediante el tangram y el geoplano, se descubren nuevas relaciones entre elementos de geometría plana. También se presentan algunas opciones de GeoGebra y se describen las construcciones estables (ver detalle más adelante).
- ◆ Para introducir la geometría espacial, de nuevo se introduce el estudio y la interpretación del entorno que nos rodea. Con imágenes de objetos y construcciones habituales, se identifican los elementos básicos de los cuerpos geométricos (actividad 14).
- ◆ En esta segunda parte del tema, los contenidos desarrollados con más detalle son los poliedros y los sólidos de revolución. En primer lugar se identifican los elementos básicos de los poliedros (vértices, aristas, caras, ángulos) que permiten clasificarlos y descubrir relaciones (actividades 11 y 12). Igualmente se destacan actividades de razonamiento, como las que permiten relacionar poliedros regulares con relaciones de dualidad o los criterios que se pueden emplear para encontrar y organizar los desarrollos planos de estos poliedros, entre otros aspectos (actividad 13).
- ◆ El contenido prioritario del segundo seminario son, precisamente, los poliedros y su estudio mediante un material manipulativo (Polydron) y un software interactivo (Poly), como se detalla más adelante. La práctica grupal de los

seminarios de este tema, propone que, en pequeños grupos, los estudiantes analicen y comparen los diferentes materiales usados en el tema y que valoren la conveniencia de cada uno de acuerdo al propósito perseguido.

- ◆ El cierre del tema se lleva a cabo con los sólidos de revolución, caracterizándolos y destacando algunas de sus propiedades, como las de rodadura (actividad 15). Se enfatizan dos actuaciones importantes que tienen cabida en Educación Primaria: la generación de sólidos mediante revoluciones y la determinación de la curva y el eje de revolución que generan un sólido dado.

Trabajo Autónomo del Estudiante

En este tema las actuaciones propuestas para fomentar el trabajo autónomo del estudiante son dos:

- ◆ Los estudiantes deben preparar el contenido relativo a la clasificación de los cuadriláteros usando diferentes criterios, como la medida de los lados, su posición relativa y la medida de sus ángulos. Para hacerlo, pueden consultar varios documentos, como Cañadas y Ruiz (2011), Serrano (2001) o la página Web: <http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/cuadri2.htm>.
- ◆ Este tema también incluye un trabajo voluntario que persigue que los estudiantes pongan en juego las nociones presentadas en el tema. Se trata de que analicen, describan y representen, mediante elementos geométricos, un espacio del entorno que les resulte habitual, como una habitación de sus casas, un recorrido que suelen hacer en la ciudad o algún espacio de la propia Facultad. Es importante que hagan el esfuerzo por analizar el papel que desempeñan los elementos geométricos que identifiquen y que usen un lenguaje apropiado. Las instrucciones precisas de este trabajo son las siguientes:

Con este trabajo se pretende que analices, describas y representes un “centro de interés geométrico” que es cualquier parte de tu entorno habitual, como el edificio donde vives, tu habitación, una calle, una plaza, un objeto o conjunto de objetos que tengan interés desde una perspectiva geométrica. El informe del trabajo constará de los siguientes apartados:

- Título del trabajo (se sugiere un título asociado al centro de interés).
- Autor.
- Redacción de dos a cinco páginas en la que se describe el centro de interés, haciendo énfasis en los elementos geométricos que lo constituyen. Esta redacción debe tener un estilo cuidado y podrá tener un formato puramente descriptivo o de cuento o historieta en donde aparecen inmersos los elementos geométricos. Se valorará el uso adecuado de lenguaje geométrico.
- Representación gráfica correcta mediante dibujo o fotografía del centro de interés o de algunos de los elementos más destacados.
- Invención de problemas o actividades que sugiere el trabajo, relacionadas con la geometría, para realizar por alumnos de Primaria.
- Conclusiones. Deben incluir una valoración de lo que el trabajo ha aportado al autor y sobre el interés educativo de esta actividad.

Actividades

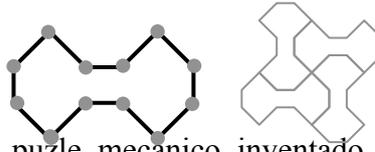
1. Pon ejemplos de la vida cotidiana que se relacionen con la idea de punto, recta, segmento, ángulo y plano.

2. En 1929, el escritor y arquitecto norteamericano Norton Juster escribió un libro infantil titulado “La recta y el punto: un romance matemático”, que años después fue llevado al cine como cortometraje. Localiza el libro en la Biblioteca y describe las características que este autor destaca de esos dos elementos geométricos.
3. Identifica en el entorno, polígonos de diferentes tipos. Define y dibuja un cuadrilátero convexo y otro cóncavo. Dibuja un polígono regular en el que sus lados, como segmentos de rectas, aparezcan ocupando todas las posibles posiciones de dos rectas en el plano. Identifica estos lados.
4. Describe un modo de hallar el valor de la suma de los ángulos internos de cualquier polígono. Haz lo mismo con los ángulos externos.
5. Usa GeoGebra para construir un cuadrado a partir de uno de sus lados y otro a partir de una de sus diagonales. Identifica las propiedades del cuadrado que se ponen en juego en cada una de las construcciones.
6. Construye, usando regla y compás, dos circunferencias tangentes y dos concéntricas. Repite esas construcciones con GeoGebra y compara las acciones realizadas con ambos métodos.
7. Las siguientes son propiedades de un triángulo. Justifica si son suficientes para saber de qué triángulo se trata: a) Tiene dos ángulos agudos; b) Es convexo; c) No tiene diagonales; d) Tiene solo dos lados iguales; e) Sus ángulos agudos suman 90° .
8. Analiza las siguientes expresiones populares y describe su significado, señalando en qué situaciones suelen emplearse. ¿Son matemáticamente correctas?
 - a) “Marcar un gol casi sin ángulo.”
 - b) “Más difícil que la cuadratura del círculo.”
 - c) “Salirse por la tangente.”
 - d) “El equipo ha perdido la verticalidad.”
 - e) “¡Los dos vehículos están en paralelo!”
 - f) “Deberíamos cambiar de sentido.”
 - g) “Le ha dado un giro de 180° a su vida.”
 - h) “Siga todo recto hasta llegar a una plaza.”
 - i) “¡Menudo control del esférico!”

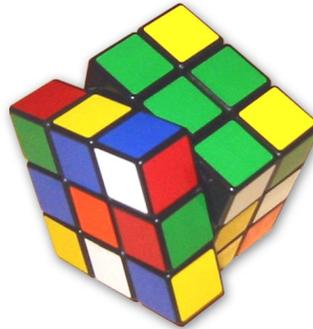
9. Completa la siguiente tabla construyendo los tipos de triángulos que correspondan.

	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

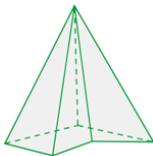
10. La figura siguiente representa un polígono que aparece en los mosaicos de la Alhambra. Se llama “hueso nazarí”. Identifica y di el nombre del polígono que es un hueso nazarí. Identifica todos los tipos de cuadriláteros distintos que tienen sus vértices en los vértices del hueso nazarí. Dibuja uno de cada tipo e indica su nombre. Clasifica estos cuadriláteros según el número de ejes de simetría.



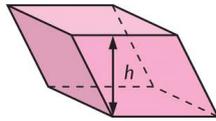
11. El cubo de Rubik es un puzle mecánico inventado en 1974 por el escultor y profesor de arquitectura húngaro, Ernő Rubik. Fue comercializado en 1980 y se ha convertido en el puzle más vendido en todo el mundo.



- ¿Cuántos cubos son necesarios para crear un cubo de Rubik?
 - ¿Cuántos tienen una cara roja?
 - ¿Cuántos tienen tres caras pintadas?
 - ¿Cuántos cubos de cada tipo son necesarios para crear un cubo de Rubik de lado 4?
12. Indica las características geométricas de los siguientes poliedros. Señala diferentes criterios que se permitan clasificarlos.



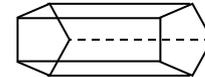
A



B



C



D

13. Busca o construye un tetraedro e identifica en él rectas que ocupen distintas posiciones. Describe las distintas posiciones de dos rectas en el espacio. Identifica planos que ocupen distintas posiciones en el espacio, partiendo de las caras de un tetraedro y de un cubo.
14. Identifica qué forma tiene la punta de un lápiz. Justifica porqué tiene esa forma.
15. En la imagen siguiente puedes ver una almazara que se usa para moler semillas o pequeños frutos, como aceitunas:



¿Qué razón puede haber para que la piedra que muele tenga forma de cono? ¿Tiene eso alguna relación con que la forma de los rodillos de cocina o la de la rueda delantera de una apisonadora tengan forma cilíndrica?

Referencias

- Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1988). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.
- Cañadas, M. C. y Ruiz, F. (2011). Geometría elemental del plano. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 245-274). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Cañizares, M. J. y Serrano, L. (2001). Introducción a la geometría. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 369-377). Madrid: Síntesis.
- Cañizares, M. J. (2001). Elementos geométricos y formas espaciales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 401-426). Madrid: Síntesis.
- Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2001). Transformaciones geométricas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 427-447). Madrid: Síntesis.
- Coriat, M. (2011). Geometría del espacio. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 275-300). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Elffers, J. (1992). *El Tangram: juego de formas chino*. Barcelona: Labor.
- García, J. y Bertrán, C. (1987). *Geometría y experiencias*. Madrid: Alhambra.
- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2004). Geometría para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 181-285). Universidad de Granada.
- Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.
- Martínez, A. M. y Rivaya, F. J. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Ruiz, F. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2011). Movimientos geométricos en el plano. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 301-327). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Serrano, L. (2001). Elementos geométricos y formas planas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 379-399). Madrid: Síntesis.

Seminarios del Tema 4

SEMINARIO 1. GEOMETRÍA PLANA CON TANGRAM, GEOPLANO Y GEOGEBRA

El *tangram chino* es un puzle que procede de la división de un cuadrado. En chino tangram significa *tabla de la sabiduría*, ya que para “jugar” con este puzle, hace falta reflexión e inteligencia. Es un juego con el que se forman figuras planas. El tangram tiene gran importancia para el desarrollo del sentido espacial y para fomentar la imaginación y la fantasía. Por el alto grado de concentración que exigen las tareas desarrolladas con él, se le concede un gran valor educativo. La posibilidad que brinda para la creatividad realza su aspecto lúdico.

El *geoplano* es un instrumento didáctico que consiste en una superficie punteada que permite la formación de diversas figuras para el análisis de sus propiedades. Existen geoplanos cuadrados, triangulares y circulares, estos últimos son muy adecuados para el estudio de ángulos. Habitualmente se fabrican con un tablero de madera o plástico en el que se introducen clavos en los nodos de la red. Los clavos se unen unos con otros mediante gomas elásticas para así formar los lados de los polígonos (o los ángulos). También existen geoplanos virtuales³⁰. Los programas de geometría dinámica son programas interactivos que permiten dibujar figuras, desplazarlas, modificarlas, encontrar propiedades y relaciones entre ellas, realizar conjeturas y comprobarlas. Existen diversos programas de este tipo. *GeoGebra* es relativamente reciente y, además de la ventaja de trabajar con un marco algebraico y otro geométrico (de ahí su nombre), se trata de un programa gratuito. Se puede descargar desde la página: <http://www.geogebra.org/cms/>.

Objetivos

Con esta actividad se pretende que te ejercites en el manejo de formas planas, tanto para identificarlas como para caracterizarlas y que también emplees diferentes métodos e instrumentos para construirlas y analizarlas. Esto se concreta en que:

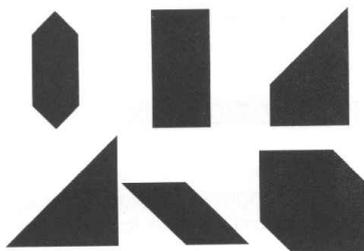
- ◆ Desarrolles el sentido espacial y tu capacidad creativa.
- ◆ Afiances habilidades de reconocimiento de formas, así como nociones geométricas, como la de semejanza de figuras, igualdad de lados, simetría, etc.
- ◆ Explora propiedades de figuras geométricas planas.
- ◆ Investigue algunos problemas geométricos.
- ◆ Conozcas el manejo básico de GeoGebra para poder representar figuras geométricas y comprobar algunas de sus propiedades.

Actividades

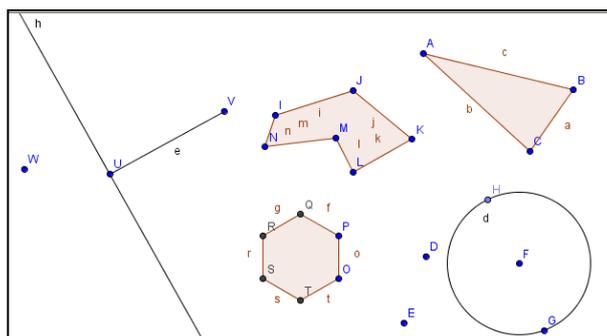
1. Observa las piezas del tangram e identifica su forma, el número de piezas de cada forma, el nombre y el polígono que es cada una, sus propiedades geométricas, etc. Construye dos figuras utilizando todas las piezas, de modo que una que sea un polígono y otra que no lo sea. Representa y pon nombre a las figuras realizadas de acuerdo con alguna de sus características geométricas.

³⁰ http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_279_g_4_t_3.html?open=activities
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_129_g_4_t_3.html?open=activities

2. Construye, con todas las piezas del tangram, dos de las figuras siguientes:



3. Construye, con las piezas del tangram que necesites en cada caso, cada uno de los cuadriláteros. ¿Por qué hay alguno que no puedes construir?
4. Utilizando la parte cuadrículada del geoplano, construye un triángulo de cada una de las clases que conozcas. ¿Hay algún tipo de triángulo que no se pueda construir? ¿Por qué no es posible?
5. Dale la vuelta al geoplano (geoplano isométrico) y observa sus características. ¿Cómo son las distancias que existen entre un punto dado y los seis puntos que lo rodean? Explica qué figuras se pueden construir en este geoplano que no se pueden realizar en el cuadrículado.
6. Construye las figuras que se muestran en el recuadro adjunto con GeoGebra. Cambia las características de algunos de ellos, como el color, grosor de línea, o la intensidad de sombreado.



7. Dibuja un segmento y una recta paralela a él que pase por un punto que no pertenezca al segmento. Para ello debes usar la herramienta “*Segmento entre dos puntos*” y “*Recta paralela*”. Si dibujas la recta paralela *a ojo*, al modificar el segmento, la recta dejará de ser paralela a él. Arrastra con el puntero uno de los extremos del segmento. ¿Qué ocurre con la recta?
8. Dibuja un triángulo rectángulo “a ojo” utilizando tres veces la herramienta “*segmento entre dos puntos*” o bien con la herramienta “*polígono*”. Luego arrastra uno de sus vértices con el puntero, y observa que el triángulo ha dejado ser rectángulo. Decimos que una construcción “está bien hecha” con GeoGebra, cuando las propiedades que caracterizan la construcción se mantienen aunque modifiquemos las figuras con el puntero.
9. Repite la construcción de manera que el triángulo que has construido siempre sea rectángulo. ¿Cómo se puede hacer? ¿Qué pasa ahora si arrastras alguno de los vértices del triángulo?

Seminarios del Tema 4

SEMINARIO 2. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

El estudio de los cuerpos geométricos debe comenzar con su identificación, manipulación y construcción. Así podremos compararlos, observar y enunciar sus características y obtener relaciones entre sus elementos. También podremos hacer clasificaciones, que se harán más complejas a medida que construimos y visualizamos nuevos ejemplos de cuerpos geométricos. Una tarea interesante es hacer representaciones gráficas de los cuerpos, sabiendo que al representarlo sobre un plano tenemos que alterar algunas propiedades del cuerpo, por lo que es necesario practicar la visualización espacial para interpretar las representaciones gráficas. En esta práctica vas a realizar este tipo de actividades para estudiar los poliedros.

En esta práctica trabajaremos con dos materiales diseñados para reconocer, construir y manipular poliedros. En la primera parte de la práctica utilizaremos el *Polydron*, un material manipulativo que consta de piezas poligonales de colores que pueden ensamblarse para construir poliedros. En la segunda parte de la práctica trabajaremos con el *Poly*, un programa que permite realizar actividades con sólidos de manera interactiva. Con Poly puedes rotar los poliedros, ocultar sus aristas, visualizar solamente los vértices, colorear las caras u obtener el desarrollo plano del poliedro. El programa se puede descargar gratuitamente desde <http://www.peda.com/download/>.

Objetivos

Esta práctica pretende que te familiarices de manera visual y táctil con los poliedros. Para ello, tendrás que:

- ◆ Identificar y construir distintos tipos de poliedros y reconocer sus elementos y propiedades.
- ◆ Familiarizarte, dibujar y utilizar diferentes representaciones planas de cuerpos tridimensionales.
- ◆ Utilizar y tomar contacto con un material didáctico para la construcción de modelos poliédricos, distinguiendo sus características y posibilidades.
- ◆ Conocer las principales características y propiedades de distintas clases de poliedros por medio de un programa interactivo.

Actividades

1. Construye los cinco poliedros regulares usando Polydron. Explora las medidas de los ángulos que forman sus caras usando el transportador.
2. A partir de dos polígonos iguales, construye un *prisma*. Describe sus caras y el orden de sus vértices (es decir, número de polígonos que concurren en cada vértice). Determina el número de caras, vértices y aristas y anota tus resultados en una tabla.
3. Construye tres poliedros convexos cuyas caras sean triángulos equiláteros. A estos poliedros se les llama *deltaedros*. Construye el deltaedro con el menor número de caras posible. ¿Qué poliedros regulares son deltaedros? Construye algún deltaedro que no sea un poliedro regular y explica por qué no lo es.
4. ¿Puede construirse algún poliedro convexo con hexágonos? Razona tu respuesta.

5. Instala y abre el programa Poly. Selecciona la categoría de poliedros regulares (*sólidos platónicos*). Elige el cubo y hazlo girar arrastrándolo con el cursor y soltándolo. Cuanto más fuerte le imprimas el impulso, más velozmente girarán. Hazlo de forma lenta y observa su regularidad. El aspecto es siempre el mismo. Activa el dodecaedro regular. Cámbiale las caras de color. Haz que desaparezcan las caras y aristas y observa solamente los vértices del sólido. Desliza la barra de desplazamiento horizontal y observa cómo se descompone el poliedro en doce pentágonos regulares.
6. Sabiendo que el icosaedro tiene 20 caras triangulares, ¿cuántas aristas tiene? Intenta responder a esta pregunta antes de utilizar Poly.
7. Repite el proceso con los restantes poliedros regulares y coloca los datos en una tabla como la siguiente. ¿Qué número obtienes en la última columna? Ese número siempre es el mismo para cualquier poliedro y se llama *característica de Euler*.

	n° caras	n° vértices	n° aristas	caras + vértices - aristas
Tetraedro				
Octaedro				
Cubo				
Dodecaedro				
Icosaedro				

8. ¿Cómo es el número de caras y vértices del cubo en relación con el número de caras y vértices del octaedro? A las parejas de poliedros regulares que cumplen esta propiedad se les llama *poliedros duales*. Encuentra otra pareja de poliedros regulares que cumpla la misma propiedad anterior.
9. ¿Cuál es el poliedro dual del icosaedro? ¿Y el dual del tetraedro? Cuando descubras el resultado, trata de imaginarlos uno dentro de otro. ¿En qué posición están los vértices de un poliedro en relación con las caras de su dual? Entra en: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_131_g_4_t_3.html?open=instructions&from=category_g_4_t_3.html para comprobar tus conjeturas.

Seminarios del Tema 4

TRABAJO EN GRUPO. GEOMETRÍA DEL PLANO Y EL ESPACIO

En grupo, responded las cuestiones siguientes, justificando siempre vuestras respuestas.

1. Clasificad las piezas del Tangram, atendiendo a dos criterios: el número de lados y el número de ángulos rectos. Representad los resultados en una tabla y esbozad las piezas que se clasifican en cada categoría.
2. Clasificad los cuadriláteros atendiendo al número de pares de lados iguales y al número de pares de lados paralelos. Utilizad GeoGebra para hacer un dibujo de cada uno de los cuadriláteros posibles, escribiendo su nombre.
3. Representad dos sólidos geométricos que no sean poliedros regulares. Describidlos y explicad por qué no lo son.
4. Consideremos las siguientes características de los poliedros: X significa que todas las caras son iguales; Y significa que todas las caras son iguales. Atendiendo a las características X e Y, escribid al menos el nombre adecuado de un poliedro en cada una de las celdas de una tabla como la siguiente y haced una representación de los mismos.

	Y	No Y
X		
No X		

5. ¿Dónde situaríais en la tabla anterior los siguientes poliedros? Un prisma pentagonal, un octaedro truncado, una pirámide de caras irregulares y los deltaedros convexos.
6. Escribid en la tabla adjunta qué poliedros regulares son deltaedros, prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides y justificad la respuesta.

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Icosaedro	Dodecaedro
Deltaedro					
Prisma					
Antiprisma					
Pirámide					
Bipirámide					

7. ¿Podéis definir el octaedro de tres formas distintas de acuerdo con la tabla anterior? ¿Cómo?
8. Describid los pasos que habéis necesitado realizar con los recursos informáticos utilizados en la práctica individual para: (a) visualizar los elementos de un dodecaedro; (b) contar el número de elementos (caras, vértices y aristas); y (c) verificar que todos los elementos están contados.

Tema 4

PRÁCTICA DE CAMPO 1. MATEMÁTICAS Y FOTOGRAFÍA³¹

El objetivo de esta práctica es comprobar cómo las matemáticas están presentes en nuestro entorno. Para ello, hemos diseñado un conjunto de actividades que realizarás con la guía de este **Cuaderno de Campo**. A continuación te detallamos qué debes hacer antes, durante y después de realizar el itinerario por las calles de Granada.

A. Antes del itinerario:

- Individualmente, debes imprimir este cuaderno de campo para llevarlo en tu paseo fotográfico por las calles de Granada.
- Si no dispones de una cámara de fotos digital, podemos prestarte una en el departamento de Didáctica de la Matemática.

B. Actividades durante el itinerario:

- Podéis realizar el itinerario que se propone en este cuaderno u otro de tu elección, por las calles de Granada, individualmente o en equipo.
- Toma las fotografías que quieras y completa las fichas correspondientes que encontrarás en este cuaderno. Procura también dejar constancia de que las imágenes las has tomado tú, haciendo otra fotografía. Para ello, te sugerimos que después de hacer una fotografía de algún lugar en el que “veas” matemáticas, repitas la fotografía pero saliendo tú mismo en ella, aunque el motivo fotografiado se vea desde más lejos.

C. Después del itinerario:

- Individualmente, selecciona una o dos de las fotos que has hecho. En equipos, seleccionad la que más os guste e imprimidla a color en tamaño A4, indicando su número (según la ficha del cuaderno correspondiente), el indicativo del grupo y justificando el motivo de la elección.
- Imprimid también la imagen que confirme que la fotografía es vuestra.
- Entregad al profesor o profesora responsable de la asignatura los cuadernos de campo de los integrantes del grupo junto con las fotos impresas en color y una descripción de dónde se ha hecho.

³¹ El formato en el que presento la práctica es el usado para entregarla a los estudiantes, con la salvedad que el cuaderno que recibe incluye varias fichas de análisis de las imágenes.

- La evaluación de esta práctica incluye la creatividad de las fotos, la variedad de contenidos matemáticos mostrados y las descripciones realizadas en el cuaderno de campo.

QUÉ HACER EN EL ITINERARIO "MATEMÁTICAS Y FOTOGRAFÍA EN GRANADA"

A lo largo del itinerario vas a encontrar muchos paisajes, edificios, motivos y detalles que te llamarán la atención por su belleza y forma.

Busca en ellos las MATEMÁTICAS que tú conoces.

Mira en todas partes y en todas direcciones. Cualquier detalle que tengas delante, detrás, arriba o abajo, puede encerrar un contenido matemático de los que trabajamos en clase o se trabajan en la Educación Primaria.

Recuerda que las Matemáticas no son sólo **números**, pues también hay **formas geométricas** (rectas, cuadrados, círculos, esferas,...), **características** y **propiedades** de esas formas (lejos, grande, perpendicular, paralelo,...), y otras muchas nociones.

Puedes hacer tantas fotos como quieras, pero recuerda que lo interesante es hacer fotos que "**capturen matemáticas**". Cada vez que hagas una foto, anota en tu cuaderno qué has fotografiado, y lo más importante: **qué matemáticas aparecen**, y **porqué crees que aparecen** ¿Será sólo por razones estéticas, o cumplen alguna función?

ITINERARIO PROPUESTO

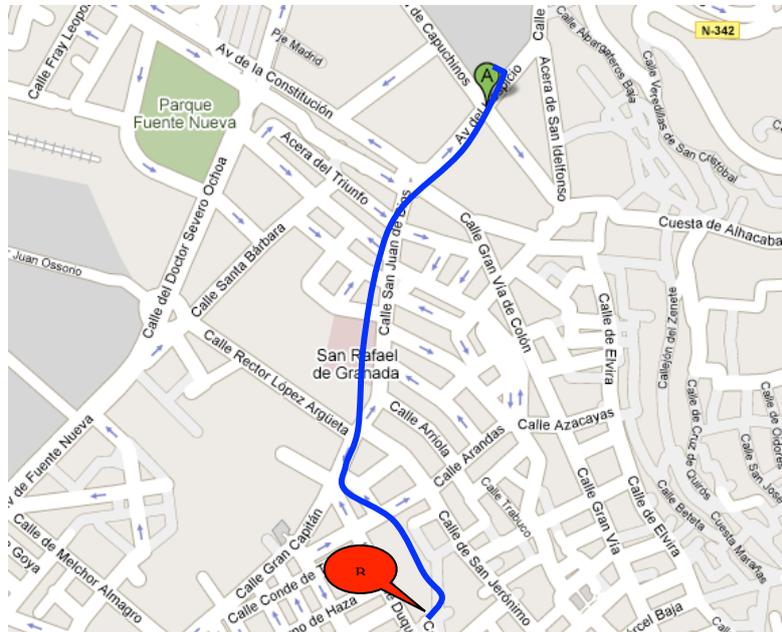
HOSPITAL REAL – PLAZA DE LA UNIVERSIDAD

El itinerario comienza en el Hospital Real y finaliza en la Plaza de la Universidad. Es una zona de Granada con mucha historia, con importantes monumentos, y con una gran actividad comercial y turística. Conozcamos algo más sobre este itinerario.

El Hospital Real comenzó a construirse en 1511 por orden de los Reyes Católicos en lo que entonces eran las afueras de la ciudad, rodeado de huertas y jardines, y junto al Campo del Triunfo. En la actualidad es sede del Rectorado y Biblioteca Central de la Universidad de Granada (señalado con la letra A en el mapa).

La entrada a la ciudad desde los pueblos de la provincia se realizaba por el Campo del Triunfo, por lo que la calle San Juan de Dios se convirtió en una vía comercial muy importante. En su entorno se establecieron posadas para los comerciantes, con grandes patios para que pasaran la noche los comerciantes con los carros y los animales. También se instalaron comercios con todo tipo de útiles para labores del campo y para los animales de carga. En la actualidad, esta calle conserva un fuerte dinamismo comercial con mucha afluencia de gente.

Cuando Carlos I de España creó la Universidad de Granada en 1536, su sede se ubicó en el Colegio de San Pablo (que en la actualidad es la sede de la Facultad de Derecho), en la Plaza de la Universidad (B en el mapa). Junto al Monasterio de San Jerónimo, también constituye un importante monumento granadino que está enclavado en una zona céntrica y muy concurrida.



Ficha de fotografías realizadas

Foto nº _____ Lugar de realización: _____

Breve descripción de la fotografía:

Conceptos o propiedades matemáticas que descubro:

¿Por qué aparecen ahí esas nociones matemáticas?

Título de la Foto: _____

Tema 5

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS PLANAS. ORIENTACIÓN ESPACIAL Y VISUALIZACIÓN

El estudio de las transformaciones geométricas o isometrías (traslaciones, giros y simetrías), nos permite percibir las regularidades de las formas así como estudiar las transformaciones de las figuras y las propiedades que cambian o permanecen invariantes. La primera parte del tema se ocupa de estos movimientos en el plano, poniendo especial énfasis en los elementos que los caracterizan, en aplicarlos con regla y compás y con GeoGebra y en estudiar las figuras que se pueden describir en términos de ellos. En este último punto destacan el análisis y la elaboración de frisos y mosaicos.

El trabajo con transformaciones geométricas complementa el tema anterior, en el que ya se han explorado formas geométricas y varias de sus propiedades y relaciones, tanto en el plano como en el espacio. Pero como hemos destacado al describir el sentido espacial, el aprendizaje de la geometría incluye otros aspectos, que contribuyen a percibir, interpretar y desenvolverse en el entorno. Dos de ellos son la orientación espacial y la visualización geométrica. La orientación se refiere al uso de formas de especificar el lugar que ocupan los objetos en el plano y en el espacio o la trayectoria que sigue un móvil, incluyendo los sistemas de localización en la esfera terrestre y el manejo e interpretación de mapas y de planos. La visualización en geometría incluye el reconocimiento de formas en el entorno, desarrollar relaciones entre objetos en dos y tres dimensiones y la habilidad para representar y reconocer objetos desde diferentes perspectivas.

Algunos ejemplos de cuestiones que el estudiante debe ser capaz de responder al finalizar su estudio con este tema son las siguientes:

- ◆ ¿En qué consiste transformar una figura mediante movimientos en el plano? ¿Qué tipos de movimientos mantienen las distancias y los ángulos?
- ◆ ¿Qué elementos caracterizan a cada movimiento? ¿Qué elementos permanecen invariantes en cada movimiento?
- ◆ ¿Qué regularidades presentan las figuras geométricas? ¿Qué relación existe entre las regularidades de las figuras y los movimientos?
- ◆ ¿Cómo se puede describir la posición relativa de un objeto? ¿Cuáles son los sistemas de localización terrestre más habituales?
- ◆ ¿Qué es la visualización geométrica? ¿Cómo puedo conocer mi capacidad de visualización? ¿Qué tipo de actividades fomentan su desarrollo?
- ◆ ¿Por qué es útil la visualización y la orientación espacial en la vida cotidiana?

Objetivos

1. Aplicar transformaciones geométricas a figuras planas y describir figuras mediante las transformaciones que las han generado.
2. Detectar regularidades de los cuerpos y figuras y analizarlas por medio de transformaciones geométricas.
3. Describir relaciones espaciales empleando coordenadas geométricas y otros sistemas de referencia, destacando las coordenadas geográficas.
4. Usar la visualización y el modelado geométrico para resolver problemas.

5. Desarrollar el sentido espacial y una visión dinámica de la geometría.

Contenidos

1. Isometrías en el plano: Traslaciones, giros y simetrías. Aplicación y composición de movimientos.
2. Regularidades: simetrías, frisos y rosetones. Figuras congruentes. Recubrimientos del plano.
3. Orientación. Posiciones relativas de objetos. Sistemas de coordenadas. Mapas, planos y grafos.
4. Visualización. Representaciones en el plano y en el espacio y sus relaciones. Identificación visual. Conservación de la percepción.

Metodología

Desarrollo del Tema

- ◆ La primera sesión de gran grupo en este tema se inicia con la presentación de una serie de imágenes de frisos, mosaicos y rosetones, que motivan la pregunta: ¿Cómo pueden realizarse? A continuación, se presenta las transformaciones geométricas como ejemplos de movimientos que se pueden aplicar a una figura en el plano y que no alteran ni su forma, ni su tamaño, ni la medida de sus lados o ángulos (actividad 5). Después se describen algunos de los frisos y mosaicos anteriores usando esas transformaciones (actividad 6) y se examinan situaciones no matemáticas en las que se pueden usar para interpretar algunas acciones (actividades 1 y 2).
- ◆ Dado que la simetría axial es la transformación que tiene más presencia en Educación Primaria, se dedica más tiempo a su análisis, observando la alteración que causa en la orientación de las figuras y proponiendo algunas actividades que profundizan en ella (actividades 3, 4 y 7).
- ◆ El único seminario de este tema se centra en la simetría y en las teselaciones, como se muestra más adelante, usando tanto regla y compás como GeoGebra. También propone una reflexión acerca de las ventajas e inconvenientes de ambos instrumentos.
- ◆ La segunda sesión de gran grupo se dedica a la segunda parte del tema. Las únicas aclaraciones conceptuales que el formador realiza se centran en el significado de orientación espacial y visualización, enfatizando su uso en actividades cotidianas. No se define ninguno de sus componentes, sino que se proponen tareas en la propia clase de las que los activan y promueven, usando la propuesta de Lupiáñez y Flores (2011) (actividades 8, 11, 12 y 13 sobre orientación y 9, 10, 14 y 15 sobre visualización).

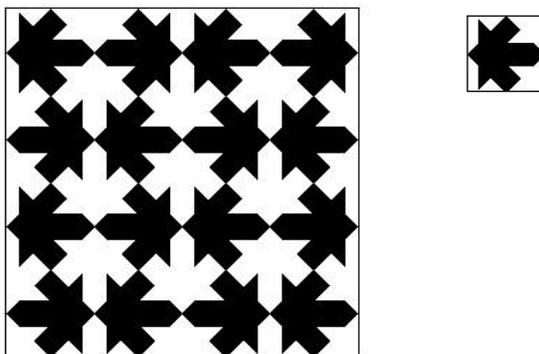
Trabajo Autónomo del Estudiante

En este tema existe una actuación propuesta para fomentar el trabajo autónomo del estudiante:

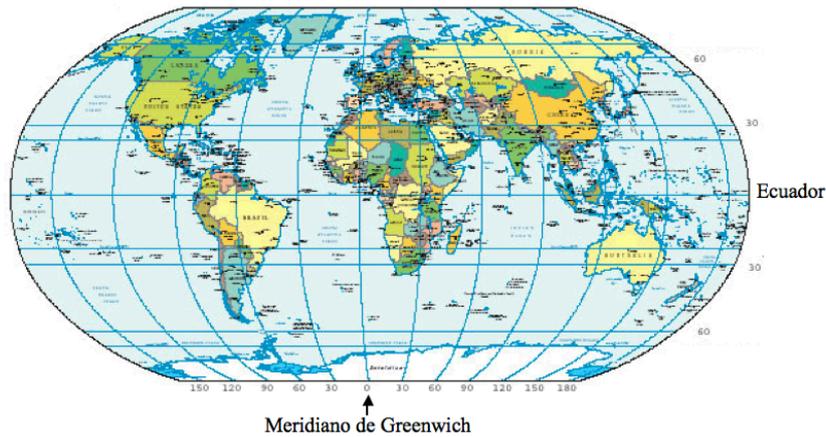
- ◆ Los estudiantes deben elaborar un documento de estudio personal en el que recojan las características básicas de cada una de las transformaciones geométricas, ejemplificando cada una de ellas sobre un polígono cualquiera. Para hacerlo, pueden consultar varios documentos, como Ruiz y Ruiz-Hidalgo (2011, pp. 307-310), Carrillo y Contreras (2001, pp. 430-436) o Godino y Ruiz (2004, pp. 236-238).

Actividades

1. Describe algunas situaciones de la vida cotidiana que tengan relación con cada uno de los movimientos en el plano que hemos considerado.
2. Indica qué movimiento puede utilizarse para describir cada una de las siguientes situaciones:
 - a) Huellas en la arena.
 - b) La mano derecha de una persona al subir una escalera vertical.
 - c) Las dos manos de una persona al subir una escalera vertical.
 - d) Bajar el volumen en una radio.
3. Usando GeoGebra, mueve un triángulo rectángulo isósceles mediante una simetría de eje la recta que pasa por la hipotenusa. Haz lo mismo con un giro de centro un vértice y de ángulo de giro $+45^\circ$. Haz igual con un giro de vértice el punto medio de la hipotenusa y de ángulo $+90^\circ$.
4. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles y, usando regla y compás, muévelo mediante una simetría axial, usando como eje la recta que genera la prolongación de la hipotenusa.
5. ¿Qué propiedades de las figuras se conservan al hacer un giro? ¿Y al hacer una simetría? ¿Y al hacer una traslación? ¿Qué es lo que cambia? Usa algunos ejemplos con figuras concretas para elaborar tus argumentos.
6. Analiza la composición del siguiente mosaico siguiendo estos dos pasos:
 - a) Indica qué regularidades percibes.
 - b) Escribe la secuencia de instrucciones a seguir para poder construirlo a partir de la pieza pequeña.

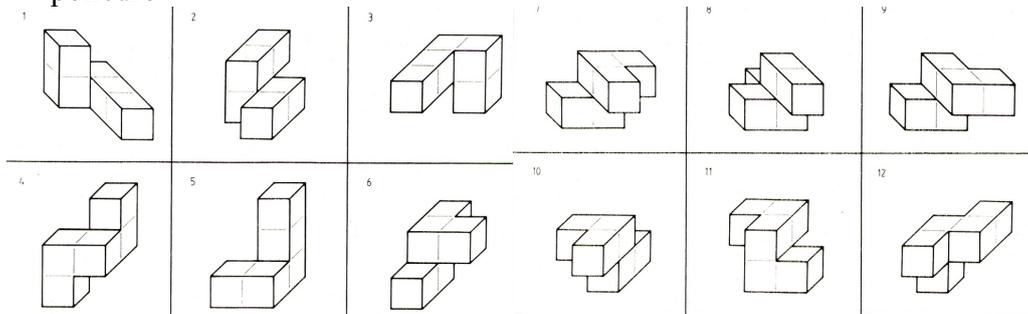


7. Busca y describe objetos de la vida cotidiana que tengan algún tipo de simetría. Identifica dónde está el eje de simetría.
8. Observa el mapa siguiente y localiza aproximadamente, la capital de Australia (Canberra), la capital de Brasil (Brasilia), Madrid y la capital de la República de Sudáfrica (Pretoria). ¿A cuál de esas ciudades corresponderán las siguientes coordenadas geográficas?
 - a) Latitud: $-33^\circ 55'$; Longitud: $18^\circ 27'$
 - b) $15^\circ 45'$ Sur y $47^\circ 57'$ Oeste
 - c) Latitud: $40^\circ 25'$; Longitud: $-3^\circ 45'$
 - d) $-35^\circ 15'$ y $149^\circ 28'$ Este

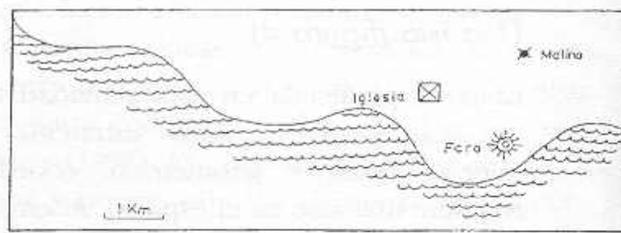


9. Un *pentaminó* es una figura plana formada por cinco cuadrados iguales unidos unos a otros como mínimo por una arista. Dibuja todos los pentaminós diferentes que encuentres. ¿Cuántos existen? Indica cuáles de ellos permiten construir cajas cúbicas (sin tapadera), justificando tu respuesta.

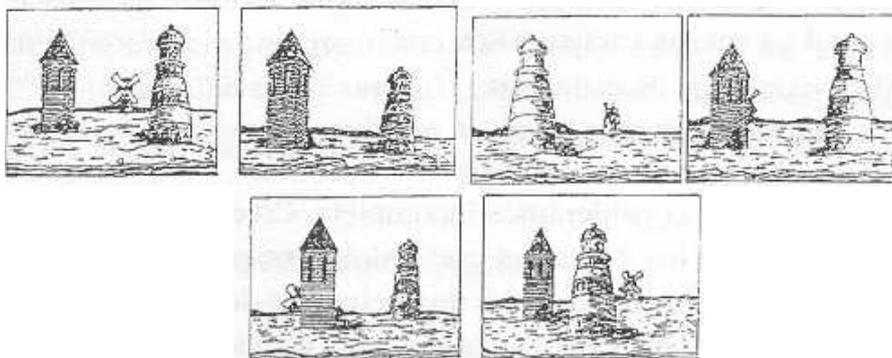
10. Identifica cuáles de los siguientes dibujos se corresponden con el mismo poliedro



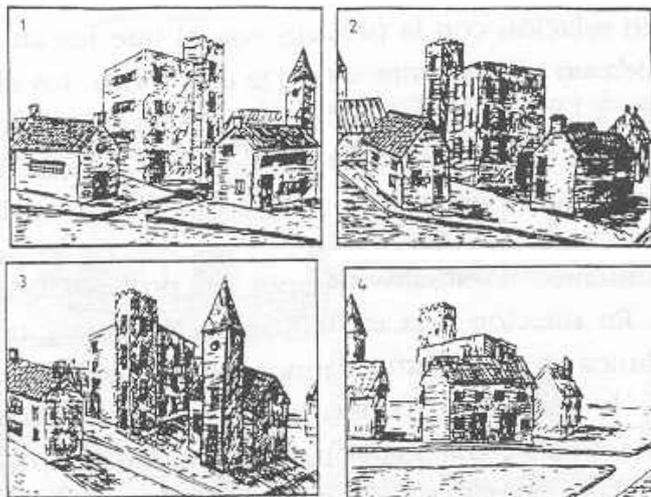
11. La siguiente imagen representa un mapa de una zona costera:



El capitán de un barco que pasa cerca de la costa tomó varias fotografías de las construcciones que veía, pero al imprimirlas se le desordenaron. ¿En qué orden fueron tomadas?



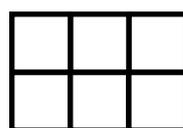
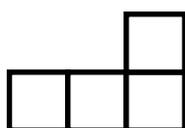
12. La siguiente colección de imágenes son fotografías de un pueblo. ¿Puedes dibujar un plano aproximado de esa población?



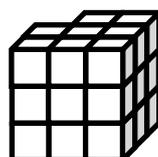
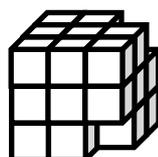
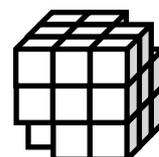
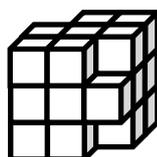
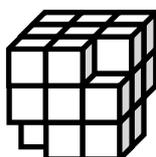
13. El escritor sudafricano J. R. R. Tolkien ideó un complejo mundo imaginario para su famosa obra “El Señor de los Anillos” y lo denominó la *Tierra Media*. En esta novela, un *hobbit* llamado *Frodo Bolsón*, debe abandonar su residencia en *Hobbiton*, para llevar a cabo una importante misión en el *Monte del Destino*, en *Mordor*. Localiza un mapa de la Tierra Media en un ejemplar del libro o usando Internet y estudia si Frodo podría llegar a su destino sin cruzar ningún río. Representa esa posible ruta usando un sistema de segmentos y puntos como los que se emplean para representar los recorridos de transporte público, de forma que permitiese a otro hobbit reproducir esa ruta entre Hobbiton y el Monte del Destino de la forma más fiel posible.
14. Representa en perspectiva al menos tres figuras diferentes, que admitan las siguientes vistas:

Alzado

Planta



15. Cada una de las siguientes figuras se han formado uniendo cubos exactamente iguales. En cada una de ellas hemos quitado uno o más de esos cubos. Compara cada una de las figuras con otra. ¿Cuál de esas parejas de figuras podrían ser la misma, teniendo en cuenta la esquina oculta?



Referencias

- Alsina, C. (2011). *Mapas del metro y redes neuronales: la teoría de grafos*. Madrid: RBA.
- Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.
- Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2001). Transformaciones geométricas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 427-447). Madrid: Síntesis.
- Cañizares, M. J. y Serrano, L. (2001). Introducción a la geometría. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 369-377). Madrid: Síntesis.
- Coriat, M. (1989). *Nudos y nexos: redes en la escuela*. Madrid: Síntesis.
- Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.
- García, F. (2012). *Viaje por la matemática discreta: De números, grafos y laberintos*. Madrid: Creaciones Copyright.
- García, J. y Bertrán, C. (1987). *Geometría y experiencias*. Madrid: Alhambra.
- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2004). Geometría para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 181-285). Universidad de Granada.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- Lupiáñez, J. L. y Flores, P. (2011). Sentido espacial. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 329-349). Madrid: Ediciones Pirámide.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Ruiz, F. (2001). Números y formas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 449-475). Madrid: Síntesis.
- Ruiz, F. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2011). Movimientos geométricos en el plano. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 301-327). Madrid: Ediciones Pirámide.

Seminarios del Tema 5

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS Y TESELACIONES

Uno de los principales objetivos de la enseñanza de la geometría es que el alumno se sitúe en el entorno físico. Para ello tiene que conocer elementos geométricos, que le sirven como referentes, y disponer de visión espacial. Así puede identificar los elementos en el entorno y emplearlos para relacionarse. Esta práctica se centra en los movimientos planos, que pueden utilizarse para formar teselaciones y otras regularidades del entorno, que son frecuentes tanto en expresiones artísticas y técnicas, como en manifestaciones de la naturaleza. La práctica se compone de dos partes. En la primera (organizada a su vez en tres apartados) vamos a trabajar las transformaciones geométricas básicas: traslaciones, simetrías y giros. En la segunda parte vamos a estudiar algunas teselaciones obtenidas con polígonos regulares.

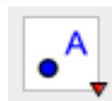
Objetivos

- ◆ Explorar y utilizar GeoGebra para el estudio de las transformaciones geométricas (también llamadas isometrías).
- ◆ Afianzar habilidades de reconocimiento de formas, de búsqueda de características de esas formas y de relaciones entre ellas.
- ◆ Estudiar y reconocer teselaciones y los movimientos que permiten obtenerlos.

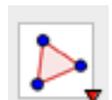
Actividades

A. Traslaciones

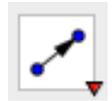
Construcción en GeoGebra



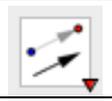
Construye un triángulo ABC de manera que las coordenadas de los puntos sean las siguientes: $A = (6, 4)$, $B = (12, 6)$ y $C = (8, 10)$.



Hay dos opciones para hacer esta construcción. O bien defines primero los puntos y luego creas el triángulo que pase por ellos o directamente creas el triángulo asegurándote que los puntos los sitúas sobre las coordenadas anteriores.



Crea un vector que tenga de coordenadas $D = (0, 0)$ y $E = (2, 4)$. Análogamente al caso anterior, esta construcción puede hacerse de dos formas.



Ahora, aplica al triángulo ABC una traslación del vector anterior.

1. Antes de modificar cualquier aspecto de tu construcción, describe la relación que observas entre los triángulos ABC y A'B'C'.
2. Modifica el triángulo ABC y observa lo que pasa con el triángulo A'B'C'. Haz lo mismo pero desplazando el punto E del vector. ¿Puedes describir lo que cambia en el triángulo A'B'C'?

3. Vuelve a llevar el punto E del vector y el triángulo ABC a sus coordenadas originales. Investiga la relación existente entre las coordenadas de E, A y A'. Haz lo mismo con E, B y B' e igual con E, C y C'. Explica lo que encuentras.
4. Expresa con tus palabras en qué consiste una traslación.
5. Determina lo que es necesario conocer para aplicar una traslación a una figura geométrica.

B. Simetrías

Construcción en GeoGebra

Vuelve a situar el triángulo ABC sobre las coordenadas originales [A = (6, 4), B = (12, 6), C = (8, 10)] y lo mismo con el vector [D = (0, 0), E = (2, 4)].

Borra el triángulo A'B'C'.



Crea una recta que pase por dos puntos cualesquiera.



Ahora, aplica al triángulo ABC una simetría axial a partir de la recta anterior.

6. Modifica el triángulo ABC y observa lo que pasa con el triángulo A'B'C'. Haz lo mismo pero moviendo la recta. ¿Puedes describir lo que cambia en el triángulo A'B'C'?
7. ¿A qué crees que se denomina en geometría *orientación* de una figura?
8. Expresa con tus palabras en qué consiste una simetría axial.
9. Determina lo que es necesario conocer para aplicar una simetría axial a una figura geométrica.

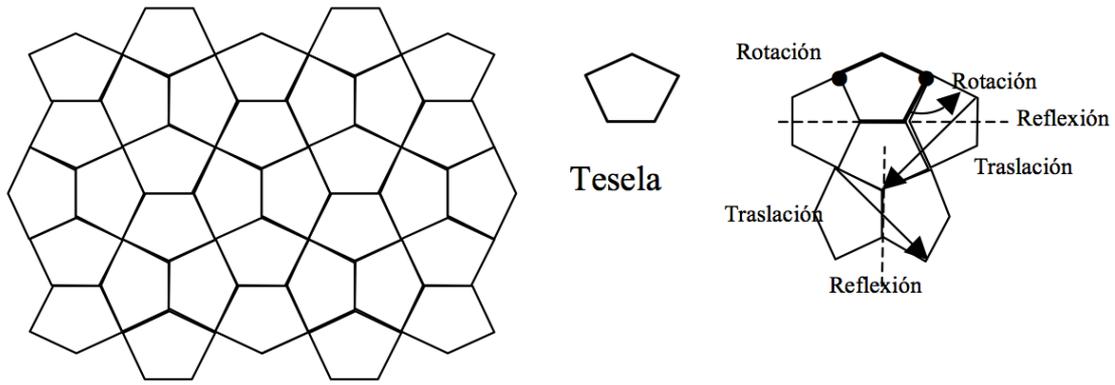
C. Giros

10. Explora el modo de aplicar un giro a una figura construida en GeoGebra a tu elección.
11. Aplica un giro de 180° a tu figura. ¿Modifica ese giro su orientación?

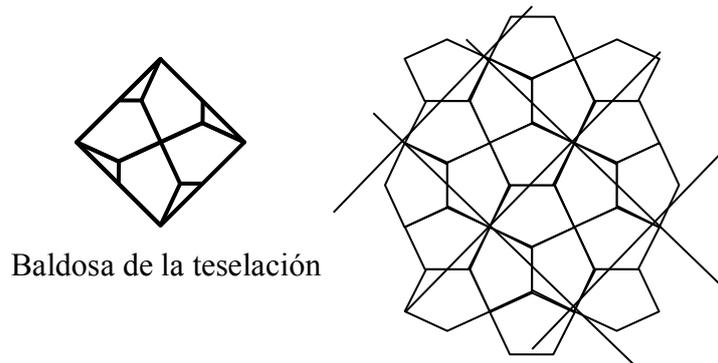
D. Teselaciones con Polígonos Regulares

Llamamos *teselación* a una regularidad o patrón de figuras planas que cubre o pavimenta completamente una superficie plana, de manera que no haya huecos ni solapamientos. Las figuras que la forman se llaman “teselas”. Si las figuras son polígonos hablamos de teselaciones poligonales, que son la base para realizar otras más complejas. Una teselación se forma a partir de una tesela, que al obtener sus transformadas por movimientos (mediante traslaciones, giros y reflexiones o simetrías), rellenan completamente el plano.

En la figura siguiente puedes observar una teselación formada por pentágonos irregulares convexos. Una tesela de la misma sería el pentágono, pues obteniendo sus simétricos, trasladados y girándolos, aparece la teselación completa:

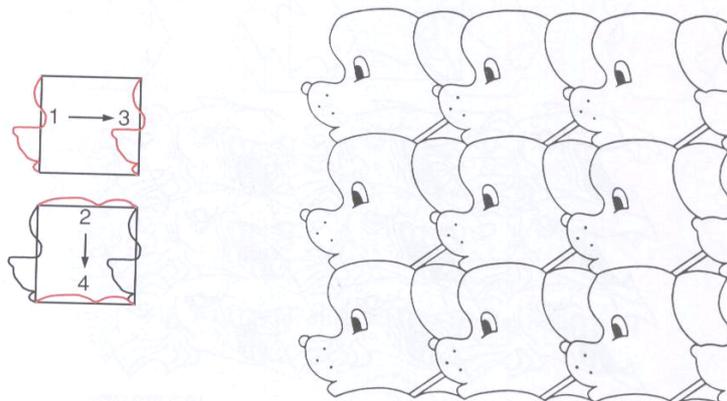


La teselación se puede construir a partir de una baldosa, es decir, una figura que permite construirla mediante traslaciones. En este caso, una baldosa es la siguiente:



Llamamos *teselación regular* a la formada por polígonos regulares iguales. Si se forman por dos o más polígonos regulares distintos, se llama *teselación semirregular* siempre que los vértices sean iguales (concurran los mismos polígonos en torno a los vértices).

12. Empleando Polydron, estudia qué polígonos regulares forman teselaciones regulares. ¿En qué características de los polígonos habrá que fijarse a la hora de indagar sobre teselaciones poligonales?
13. A partir de una teselación conocida podemos obtener otra, transformando la tesela original. Tal como se aprecia en la figura, podemos cambiar una tesela cuadrada añadiendo partes al cuadrado, que luego se quitan por otro lado.

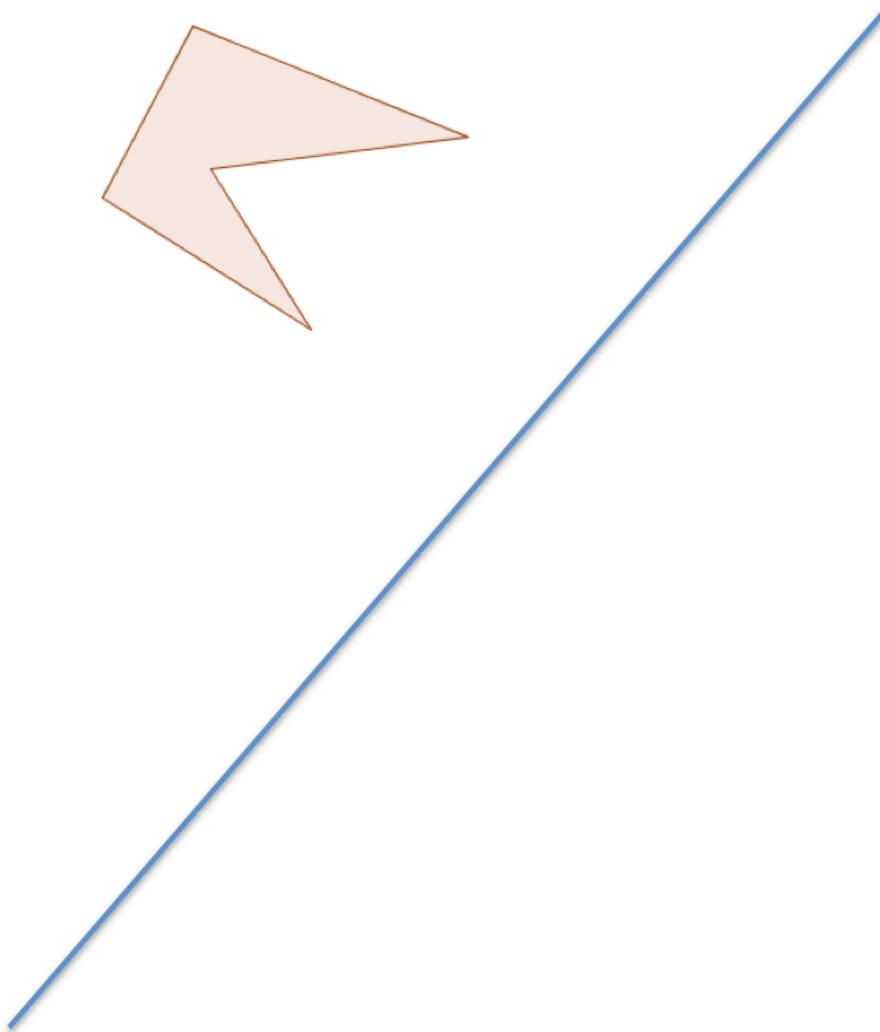


Inventa una teselación formada por polígonos irregulares, a partir de una teselación regular cuadrada.

Seminarios del Tema 5

TRABAJO EN GRUPO. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS Y TESELACIONES

1. Debajo de estas tres preguntas veréis una figura y una recta. Usando escuadra, cartabón y compás, aplicad una simetría axial a la figura tomando como eje la recta.
2. Diseñad una teselación usando GeoGebra. Podéis usar diferentes polígonos, colores o formas. Imprimid en una página vuestro diseño y describid el elemento mínimo que se reproduce y el tipo de movimientos que hay que aplicarle a ese elemento mínimo para generar la teselación.
3. Elaborad una reflexión en la que valoréis las ventajas e inconvenientes de esos dos recursos (regla y compás y GeoGebra), para el estudio de las transformaciones geométricas y de las teselaciones (máximo, 400 palabras).



BLOQUE 3

**LA MEDIDA: ESTIMACIÓN Y CÁLCULO
DE MAGNITUDES**

Tratamiento Curricular

En el currículo de Educación Primaria, el tratamiento de la medida se realiza en el segundo bloque de contenido, denominado “La medida: estimación y cálculo de magnitudes” y se lleva a cabo de una manera progresiva a lo largo de los tres ciclos (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b):

(...) busca facilitar la comprensión de los mensajes en los que se cuantifican magnitudes y se informa sobre situaciones reales que niños y niñas deben llegar a interpretar correctamente. A partir del conocimiento de diferentes magnitudes se pasa a la realización de mediciones y a la utilización de un número progresivamente mayor de unidades. Debe considerarse la necesidad de la medición, manejando la medida en situaciones diversas, así como estableciendo los mecanismos para efectuarla: elección de unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad. Se puede partir para ello de unidades corporales (palmo, pie), arbitrarias (cuerdas, varas) para pasar a las medidas normalizadas, que surgen como superación de las anteriores. (p. 31556)

La ideas destacadas en el currículo enfatizan la coordinación de dos dimensiones básicas, coincidiendo con la lectura del NCTM (2003): (1) comprender los atributos mensurables de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medida y, (2) aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas. En ambos casos, es necesario el conocimiento y el manejo del sistema métrico decimal. La propuesta *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006), dentro del foco curricular “Medida” o “Geometría, medida y álgebra” (según el nivel educativo) destaca la identificación de las magnitudes longitud, superficie y volumen y la adquisición de destrezas para realizar medidas relacionadas con ellas.

Desarrollar el sentido de medida requiere, pues, hacer que el niño perciba y sienta la magnitud y que realice tareas que ligadas a la necesidad de medir. Las tareas escolares más frecuentes suelen centrarse en una de las partes, desarrollar destrezas de cálculo de medidas, empleando otras medidas anteriores. De esta forma, el proceso se limita a una parte de la segunda componente (destrezas), enfatizando la medida indirecta o el cálculo (de medidas de magnitudes derivadas, de medidas por proporcionalidad), o el paso de unas unidades a otras. Son menos frecuentes las actividades que les conducen a medir, que también serían insuficientes si no se dan de manera coordinada con la creación de destrezas de medida.

El proyecto PISA no delimita un dominio de contenido específico para la medida, sino que lo incluye en el de “Cantidad”, que ya describí en el primer bloque (OCDE, 2005, p. 39).

Componentes del Sentido de la Medida

Partiendo de las dimensiones destacadas, es posible caracterizar los componentes del sentido de la medida en torno a ellas:

- ◆ Identificar y describir atributos y características mensurables.
- ◆ Dimensionar los rangos de las medidas habituales de diferentes magnitudes.
- ◆ Conocer, seleccionar y utilizar unidades de medida apropiadas a cada situación, tanto convencionales como no convencionales.
- ◆ Relacionar, convertir y dimensionar las unidades de medida básicas del S.M.D.
- ◆ Establecer y describir relaciones entre magnitudes mediante diferentes técnicas de comparación, facilitando la medida indirecta.

- ◆ Estimar medidas de diferentes magnitudes, explicitando las estrategias empleadas.
- ◆ Realizar y describir mediciones de diferentes magnitudes, usando distintos instrumentos y técnicas y con una precisión acorde con el propósito y la situación.

Organización del Bloque en la Materia

En el contexto de la materia que nos ocupa, el desarrollo de este bloque se lleva a cabo en un único tema, denominado “magnitudes y su medida”. Aparece secuenciado en sexto lugar e incluye dos seminarios. En el primero se desarrolla la práctica 7, centrada en la resolución de problemas de estimación y en el uso de diferentes instrumentos de medida. La práctica 8 está dedicada al uso del software GeoGebra para relacionar procesos de medida directa e indirecta y relaciones métricas en figuras geométricas.

Además, este bloque incluye una práctica de campo voluntaria en grupo, en la que se propone un visita matemática al Parque de las Ciencias de Granada.

Tema 6

MAGNITUDES Y SU MEDIDA

La finalidad de este tema es profundizar en qué significa medir. Para ello, es necesario clarificar qué es una magnitud, definida como propiedad o atributo mensurable y cuáles son sus elementos y características. La siguiente noción central es la de cantidad, que surge de la comparación de los objetos en relación a una determinada magnitud. Con una cantidad de magnitud que tomamos como referencia (la unidad de medida) puede llevarse a cabo un proceso de medida. También hay que conocer y dominar técnicas e instrumentos de medida que se pueden emplear para medir de manera directa las magnitudes con mayor presencia en Educación Primaria: longitud, superficie, amplitud, masa, volumen, capacidad y tiempo, identificando la precisión necesaria de la medida de acuerdo a la situación planteada. También es importante el trabajo con las unidades no convencionales y las convencionales del Sistema Internacional y del Sistema Métrico Decimal, reconociendo la pertinencia de la unidad de acuerdo al propósito y relacionando diferentes unidades de medida mediante conversiones. El análisis y estudio de medidas indirectas basadas en proporcionalidad, en relaciones entre magnitudes y las estrategias de estimación, también son importantes. Segovia (1997), señala que el hilo conductor de este tema debe ser la reflexión práctica sobre el proceso de medir, más que la concatenación de referentes teóricos formales. Esa es la perspectiva asumida en esta propuesta.

Algunos ejemplos de cuestiones que el estudiante debe ser capaz de responder al finalizar su estudio con este tema son las siguientes:

- ◆ ¿Qué es una magnitud? ¿Qué tipos de magnitudes hay? ¿Dónde se pueden identificar?
- ◆ ¿En qué consiste medir una cantidad de magnitud? ¿Qué acciones realizamos al medir? ¿Qué instrumentos de medida solemos usar?
- ◆ ¿Qué es el Sistema Internacional de Medidas? ¿Qué es el Sistema Métrico decimal?
- ◆ ¿Qué es la medida directa? ¿Y la indirecta? ¿Qué expresan las fórmulas de medida indirecta de áreas? ¿Y las de volumen?
- ◆ ¿Qué es estimar la medida de una cantidad de magnitud? ¿Qué estrategias se pueden emplear para ello? ¿En qué situaciones es útil?

Objetivos

1. Conocer las distintas magnitudes que se trabajan en la Educación Primaria.
2. Valorar la importancia social y cultural de la medida.
3. Conocer y manejar las distintas unidades de medida del S.I. y el S.M.D. y analizar otros sistemas antiguos de medición.
4. Manejar diferentes instrumentos de medida.
5. Identificar relaciones de proporcionalidad entre magnitudes.
6. Resolver problemas de proporcionalidad entre magnitudes.
7. Razonar la obtención de algunas fórmulas de determinación de medidas.
8. Identificar las medidas necesarias para determinar otras medidas de forma indirecta.
9. Realizar estimaciones de medidas.

10. Conocer materiales y recursos para la enseñanza de la medida en la Educación Primaria.

Contenidos

1. Importancia social y cultural de la medida.
2. Aproximación al concepto de magnitud; tipos de magnitudes y ejemplos.
3. Situaciones y contextos asociados a las magnitudes. Necesidad de la medida; soluciones históricas.
4. Noción de cantidad de magnitud.
5. Concepto de medida; unidad de medida; el Sistema Internacional de medidas
6. Medida directa de magnitudes (longitud, amplitud, superficie, volumen, masa, capacidad, tiempo); instrumentos de medida.
7. Medida indirecta de magnitudes. Proporcionalidad entre magnitudes. Regla de tres simple directa e inversa. Regla de tres compuesta.
8. Proporcionalidad geométrica.
Longitudes: circunferencia y arco; el número π .
Teorema de Pitágoras; Teorema de Thales.
Amplitud: ángulos centrales de un círculo.
Superficie: áreas de figuras planas y de cuerpos en el espacio.
Volumen: volúmenes de cuerpos en el espacio.
9. Estimación en medida. Destrezas previas. Estrategias básicas. Precisión y errores en la medida.
10. Materiales y recursos.

Metodología

Desarrollo del Tema

- ◆ Al inicio, el formador genera un debate acerca de porqué tratar este tema en la materia y qué debería incluir.
- ◆ En clase, los estudiantes leen un documento breve (González y Gómez, 2011, pp. 354-356) para abordar la descripción de los principales periodos históricos que han marcado el desarrollo de los sistemas de medida y de las estrategias de medida. Esta reflexión pone de manifiesto la necesidad de unas unidades y procesos de medida consensuados y comparables.
- ◆ A continuación se enfatizan y ejemplifican las relaciones entre la medida y la aritmética y la geometría.
- ◆ La noción de magnitud, como propiedad o atributo físico que puede ser medido, junto a los tipos de magnitudes, constituyen los principales elementos teóricos que el formador introduce en el tema. En este momento se relacionan magnitud, cantidad de magnitud, medir (directa e indirectamente) y unidad de medida (actividades 1 y 4).
- ◆ En la práctica 7 (durante el primer seminario), los estudiantes, en pequeños grupos, exploran y resuelven problemas de medida mediante estimación y medida directa usando diferentes instrumentos, tal y como describo más adelante.
- ◆ En clase, los estudiantes proponen unidades de medida que conocen y el profesor las organiza, para presentar el Sistema Internacional y el Sistema Métrico Decimal (actividades 2 y 3).
- ◆ A continuación el trabajo se centra en los procedimientos de medida directa. También se presentan algunas estrategias de estimación de estas magnitudes (actividades 13, 14 y 15).

- ◆ En el segundo seminario se desarrolla la práctica 8, centrada en el uso de GeoGebra e incluye tres partes: las herramientas de medida que incluye el programa, el estudio de las relaciones que tienen que satisfacer tres segmentos para que puedan conformar un triángulo y las relaciones entre área y perímetro en un paralelogramo (ver detalle más adelante).
- ◆ Finalmente, el profesor presenta la proporcionalidad entre magnitudes (actividad 5) y los procedimientos indirectos de medida mediante fórmulas que relacionan magnitudes (actividades 7, 8 y 9). Finalmente se realizan actividades en clase que combinan las nociones presentadas (actividades 6, 10, 11 y 12).

Trabajo Autónomo del Estudiante

En este tema las actuaciones propuestas para fomentar el trabajo autónomo del estudiante son dos:

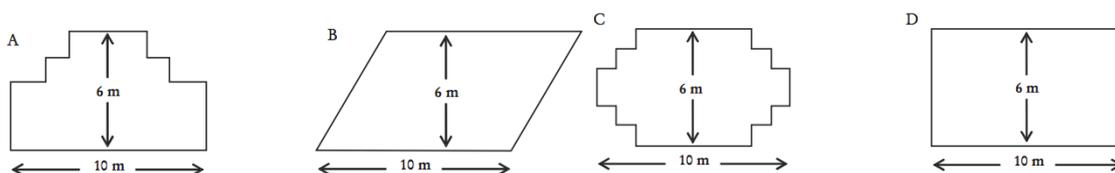
- ◆ Los estudiantes deben preparar el contenido relativo a la regla de tres (simple directa e inversa y compuesta). La regla de tres suele ser una técnica empleada por los estudiantes en una gran número de situaciones sin la consideración previa de su idoneidad. Esta actividad les hace, al menos, organizar la información que hay al respecto. Se recomienda que consulten Fernández y Segovia (2011).
- ◆ El desarrollo sostenible (*satisfacer las necesidades de generaciones presentes sin comprometer las posibilidades de las del futuro para atender sus propias necesidades*) puede ser expresado en medidas relacionados con el consumo. Como trabajo voluntario, los estudiantes deben en elaborar un informe, eligiendo un tema relacionado con el desarrollo sostenible en donde se destaquen las medidas de las cantidades de las diferentes magnitudes que promueven o que impiden este modelo de desarrollo. Las instrucciones precisas para este trabajo son las siguientes:

Busca información a través de Internet, medios de comunicación y otros textos donde se haga referencia al desarrollo sostenible, significado de la expresión, normativas establecidas, instituciones y foros relacionados, elementos que caracterizan el desarrollo, etc. Busca información sobre alguno de los elementos de consumo que caracterizan el desarrollo sostenible (consumo de petróleo, carbón, agua, tala de bosques, vertido de gases de efecto invernadero, etc.) y que vengan expresados en medidas de algunas de las magnitudes relacionadas con el tema. De igual forma expresa también en cifras cuál es tu aportación a la sostenibilidad en el elemento elegido (consumo de agua diario, reciclado de papel, etc.). Realiza un informe de no más de 1000 palabras, letra tamaño 12 e interlineado 1.5, que tenga la estructura siguiente:

1. Título del trabajo, autor.
2. Introducción, donde se describa el desarrollo sostenible, normativas y elementos que lo caracterizan.
3. Descripción en cifras, referidas a medidas de cantidades de alguno de los elementos que caracterizan el desarrollo sostenible (se pueden incluir gráficos estadísticos).
4. Aportación personal a la sostenibilidad.
5. Reflexión y valoración del papel de la medida en la evaluación de la sostenibilidad.
6. Valoración del tema desde la perspectiva de su utilidad en la Educación Primaria para la enseñanza de las matemáticas y su relación con otras áreas.
7. Referencias y páginas Web utilizadas.

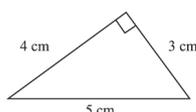
Actividades

- Busca en enciclopedias o en Internet, definiciones actuales de las magnitudes más utilizadas en Educación Primaria: Longitud, Superficie, Volumen, Capacidad, Masa y Tiempo. Identifica los objetos a las que se aplican, las relaciones que se establecen y cómo se pueden comparar y ordenar las cantidades de cada magnitud. Busca sus unidades de medida e varios instrumentos que se utilicen para su medida.
- Pon ejemplos de unidades de medida no convencionales, es decir que no pertenecen al S.I. ¿En qué situaciones se pueden usar?
- Indica situaciones o contextos asociados a las unidades de longitud. Haz lo mismo para las unidades de superficie. Señala ejemplos en los que sea necesaria diferentes precisión o exactitud en el uso de esas unidades.
- Define y distingue la medida directa de la medida indirecta. Pon ejemplos de ambas en situaciones reales.
- Identifica las magnitudes relacionadas en los siguientes problemas, justifica que entre ellas existe una proporcionalidad, estudia el tipo de la misma y resuélvelos.
 - En un hotel tienen carne para alimentar a 38 huéspedes durante 6 días. Si se marchan 26 huéspedes, ¿para cuantos días habrá carne?
 - En una granja, 80 gallinas consumen 60 kg de pienso al cabo de una semana. ¿Qué gasto de pienso tendrán 60 gallinas durante un mes?
 - Cuatro máquinas siegan un campo de 800 ha en 3 días. ¿Cuánto tardarán tres máquinas en segar un campo de 900 ha al mismo ritmo de trabajo?
- En un texto antiguo de agrimensura se lee el siguiente método para medir la anchura de un río AB con dos bastones desiguales: “Clávese bien a plomo el bastón menor (EB) en la orilla B, y el otro CD váyase separando hasta que su parte superior D y el punto E del otro se vea el punto A, y mídase la distancia CB, que sea de 32 pies. Dígase luego la diferencia de la altura de los dos bastones, que sea de dos pies, es a la altura del menor EB, que sea de 4 pies, como la distancia CB, que son 32 pies, es a la anchura del río, es decir, $2/4=32/AB$, de donde AB tiene 64 pies”. Explica el fundamento matemático del procedimiento, empleando un dibujo.
- Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para el jardín:

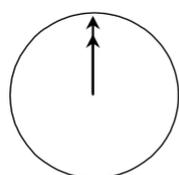


- Indica y justifica si, para cada diseño, es posible vallar el jardín con los 32 metros de madera.
 - Si para alguno de los diseños necesitarías más de 32 metros de madera, halla lo que faltaría para poder hacerlo.
 - Señala qué magnitud/es se está/n considerando en esta actividad.
- Busca y explica un método para determinar el volumen de una piedra o cuerpo irregular. ¿Es un procedimiento de medida directa o indirecta?

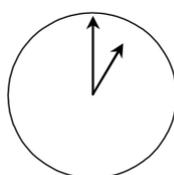
9. En una hoja cuadriculada dibuja dos figuras diferentes con: (a) igual perímetro y superficie, (b) igual perímetro y diferente superficie y, (c) igual superficie y diferente perímetro.
10. El diámetro de Júpiter es 11 veces mayor que el diámetro de la Tierra. ¿Cuántas veces es mayor el área de la superficie de Júpiter? ¿Cuántas veces es mayor el volumen? ¿A qué se debe la diferencia?
11. Un alumno de Primaria afirmó que no se podía calcular el área del siguiente triángulo porque no se daba la altura. ¿Por qué crees que dijo eso? ¿Tiene razón?



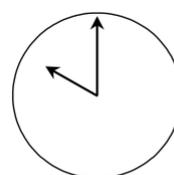
12. Mark (de Sydney, Australia) y Hans (de Berlín, Alemania) se comunican a menudo a través de Internet mediante el chat. Tienen que conectarse a Internet a la vez para poder "chatear". Para encontrar una hora apropiada, Mark buscó un mapa horario mundial y halló lo siguiente:



Greenwich 12 de la noche



Berlín 1:00 de la noche



Sydney 10:00 de la mañana

- a) Cuando son las 7:00 de la tarde en Sydney, ¿qué hora es en Berlín?
- b) Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana, de sus respectivas horas locales, porque estarán durmiendo. ¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?
- c) ¿Qué dato aporta el reloj que marca la hora en el meridiano de Greenwich?
- d) ¿Se está midiendo alguna magnitud en la situación planteada en el apartado a)? ¿Cuál? ¿Con qué unidad de medida?
13. Estima el volumen de tu cabeza y el volumen del aula donde se desarrolla la clase. Describe las estrategias que has puesto en juego y valora el grado de precisión que has obtenido.
14. Explica en qué consiste la estimación en la medida y propón situaciones de la vida cotidiana en las que se utilice. En cada caso, identifica la magnitud que se está estimando.
15. Estima la altura del edificio principal de la facultad. Explica la estrategia que has utilizado. ¿Qué otras estrategias podrías haber empleado? ¿Conoces algún instrumento que te permitiese medir de manera indirecta esa altura con una determinada precisión?

Referencias

- Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.
- Fernández, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

- Fernández, F. y Segovia, I. (2011). Proporcionalidad entre magnitudes. Medidas indirectas. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 375-400). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Frías, A., Gil F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 477-502). Madrid: Síntesis.
- García, J. y Bertrán, C. (1987). *Geometría y experiencias*. Madrid: Alhambra.
- Gete, J. y del Barrio, V. (1988). *Medida y realidad*. Madrid: Alhambra.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2004). Medida de magnitudes para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 287-331). Universidad de Granada.
- González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 351-373). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Moreno, M. F., Gil, F. y Frías, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 503-532). Madrid: Síntesis.
- Olmo, A., Moreno, F. y Gil, F. (1988). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Seminarios del Tema 6

PRÁCTICA 7. MEDIDA Y ESTIMACIÓN

La estimación de la medida de cantidades consiste en determinar su medida sin ayuda de instrumentos, y tiene como base el uso de referentes que previamente se han interiorizado. Nuestra estatura, peso, medida del palmo, parte de nuestro cuerpo que mide un metro, etc. son referencias que nos permiten, mediante la comparación, estimar la medida de otras cantidades. Resumimos las capacidades y destrezas básicas de las que conviene disponer para realizar estimaciones razonables en medida (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1998³³):

- A. *Interiorización de las unidades básicas de medida*: metro, centímetro, milímetro, segundo, minuto, hora, kilogramo, litro, etc.
- B. *Conocimiento de referentes*, es decir, de la medida de cantidades próximas: estatura usual, longitud del palmo, del dedo, de una baldosa, capacidad de un vaso, de una botella, etc.
- C. *Dominio de técnicas indirectas*: fórmulas para el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes y amplitudes.
- D. *Estrategias de comparación*: comparando con un referente aproximadamente igual, con un referente que es un múltiplo o con un referente que es un divisor de la cantidad que se estima.
- E. *Estrategias de descomposición/recomposición*: en algunos casos, la cantidad que se estima puede ser descompuesta en partes diferentes, para estimar cada parte y determinar su medida sumando.

La medida estimada depende de las experiencias y destrezas de las que disponga la persona que estima. Para mejorar las estimaciones que va a realizar en esta práctica conviene que contrastes con tu grupo los resultados obtenidos, ya que, a priori, cabe esperar que la media de todos los valores sea una mejor aproximación al valor exacto o real; aunque también puede ocurrir que el valor medio esté por debajo (se subestima) o por encima (se sobreestima).

Objetivos

Con esta actividad se pretende que lleves a cabo un proceso de estimación de medidas de magnitudes y que relaciones y contrastes tus estimaciones con las de tus compañeros y con los resultados exactos que obtendrás mediante la medición con instrumentos. Se concreta en que:

- ◆ Utilices y desarrolles tu capacidad de estimar haciendo estimaciones de diferentes cantidades de diversas magnitudes.
- ◆ Sientas la necesidad de este tipo de destrezas.
- ◆ Te des cuenta de los elementos que las caracterizan.
- ◆ Percibas el carácter aproximado de la medida (de una manera especial cuando se realiza mediante estimación) y de tus estimaciones.
- ◆ Emplees y conozcas diferentes instrumentos y estrategias de medida.

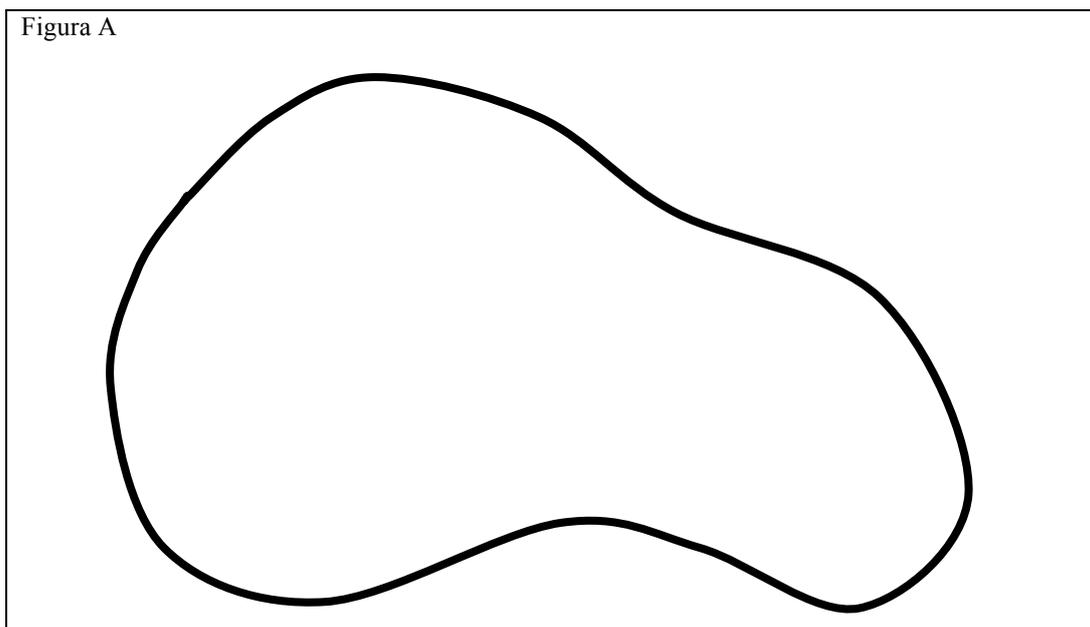
³³ Segovia, I., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1998). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

- ◆ Apliques de manera práctica el teorema de Tales para medir distancias inaccesibles.

Actividades

1. Realiza, de manera individual, las estimaciones que aparecen en la siguiente tabla (no las modifiques aunque no coincidan o se diferencien mucho de las de tus compañeros) y escribe el resultado. Puedes levantarte y emplear algún referente concreto, pero NO instrumentos de medida. Si has utilizado algunas de las destrezas antes mencionadas, anota las letras correspondientes (A, B, C, D o E) en la tabla.

Cantidad	Medida estimada	Destrezas empleadas
La superficie de la pizarra de la clase		
La diagonal de la pizarra de la clase		
El perímetro de la figura A		
La superficie de la figura A		
La capacidad de la papelera		
El volumen del aula		
El peso/masa de la silla donde te sientas		
El peso/masa de una canica		
El grosor de un folio		
La profundidad del recipiente		



2. Utilizando instrumentos y estrategias adecuadas, mide las cantidades anteriores por medio de medidas directas o indirectas utilizando diferentes instrumentos de medida. Debes buscar la mayor precisión posible. (Sugerencia: Para obtener una medida más precisa, en algunos casos es recomendable medir varios objetos y luego dividir la medida obtenida por el número de objetos). La siguiente tabla detalla qué instrumentos debes utilizar en cada caso. Complétala, indicando las medidas obtenidas y el tipo de medida realizada en cada caso.

Cantidad	Medida real		
	<i>Instrumento a utilizar</i>	<i>Tipo de medida</i>	<i>Medida obtenida</i>
La superficie de la pizarra de la clase	Cinta métrica		
La diagonal de la pizarra de la clase	Cinta métrica		
El perímetro de la figura A	Cuerda		
La superficie de la figura A	Cuadrícula transparente		
El volumen interior o capacidad de la papelería	Cinta métrica		
El volumen del aula	Cinta métrica		
El peso/masa de la silla donde te sientas	Romana		
El peso/masa de una canica	Balanza y pesas		
El grosor de un folio	Calibre/pie de rey		
La profundidad del recipiente	Calibre/pie de rey		

Seminarios del Tema 6

PRÁCTICA 8. MEDIDAS CON GEOGEBRA

El objetivo de esta actividad es doble. Por una parte, vas a conocer algunos recursos que ofrece GeoGebra para realizar actividades relacionadas con el tema de medida de magnitudes. Por otra, practicarás algunas de las nociones vistas en el tema hasta ahora, como procesos de medida, manejo de unidades y relaciones entre magnitudes. Como comprobarás, es posible planificar actividades que conjugan la potencialidad de un software de geometría dinámica con cuestiones matemáticas que se pueden proponer a escolares de Educación Primaria.

Esta práctica incluye tres actividades. La primera de ellas se centra en el manejo de las herramientas básicas de medida, además de una propuesta para usar la cuadrícula que muestra GeoGebra como recurso para realizar medidas directas. La segunda explora las condiciones que deben satisfacer tres segmentos para que pueda construirse un triángulo y, finalmente, la tercera actividad analiza la relación entre área y perímetro en un cuadrilátero.

Objetivos

- ◆ Explorar los comandos y el funcionamiento de GeoGebra relacionados con la medida de magnitudes.
- ◆ Llevar a cabo mediciones directas de una superficie, con diferente precisión.
- ◆ Explorar relaciones métricas en triángulos.
- ◆ Relacionar y distinguir las magnitudes área y perímetro.

Actividades

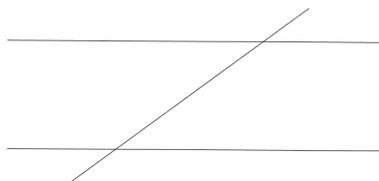
1. Herramientas de medida directa en GeoGebra.

Construcción en GeoGebra

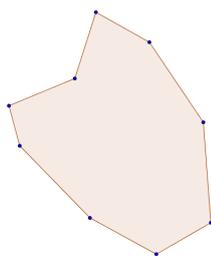


GeoGebra incorpora varias herramientas relacionadas con la medida. En las imágenes de la izquierda puedes ver algunas de ellas. En esta primera práctica las exploraremos y aprenderás a usarlas. Para ello, responde las cuestiones siguientes.

- a) Dibuja un segmento y calcula cuánto mide.
- b) Investiga si es posible construir un segmento con una medida predeterminada.
- c) Traza dos rectas paralelas y una recta secante a ellas de la siguiente forma:



- a) ¿Puedes medir los ángulos que se forman? ¿Encuentras alguna relación entre ellos?
- d) Dibuja un polígono irregular parecido al siguiente:



- ◆ Muestra la cuadrícula desde el menú “Visualiza”.
- ◆ ¿Puedes calcular el área de la figura usando esa cuadrícula? ¿Cuánto obtienes?
- ◆ Desde el menú “Opciones” entra en “Zona gráfica” y pincha en “Cuadrícula”. Activa la casilla “Distancia” y modifica los valores de x e y para modificar el tamaño de la cuadrícula que muestra GeoGebra (es interesante que el valor de x e y sean iguales para que se mantenga la forma de los cuadrados). ¿Puedes encontrar un tamaño de la cuadrícula que te permita calcular de manera más precisa el área del polígono? ¿Cuánto obtienes?
- ◆ Calcula su área exacta usando la herramienta de GeoGebra y compara el resultado con tu medición anterior. ¿A qué se debe la diferencia?

2. Tres segmentos... ¿siempre pueden formar un triángulo?

Construcción en GeoGebra



Borra la construcción anterior.

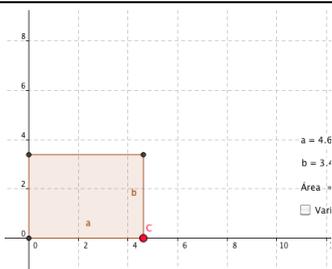
Construye un segmento de longitud 3 centímetros. Para ello, usa la herramienta “Segmento dados su longitud y punto extremo inicial” que has manejado antes. Cuando lo haces, GeoGebra llama al punto inicial A y automáticamente crea el otro punto B y nombra a al segmento.

Realiza las siguientes acciones y responde las cuestiones.

- a) Observa la diferencia que hay al mover el punto A y B. ¿En qué consiste cada movimiento? ¿A qué se debe?
- b) Construye otros dos segmentos, uno con longitud 4 (GeoGebra lo llamará b) y otro con longitud 5 (GeoGebra lo llamará c) siguiendo el procedimiento inicial.
- c) ¿Es posible construir un triángulo usando esos tres segmentos? Describe el procedimiento que has empleado para hacerlo.
- d) Define un nuevo segmento (d) que mida 1 centímetros. ¿Es posible construir un triángulo con los segmentos b , c y d ? ¿Cuál crees que es la razón? (Puedes usar la herramienta “circunferencia dados su centro y su radio”)
- e) ¿De qué depende la construcción de un triángulo dados tres segmentos?

3. Área y perímetro.

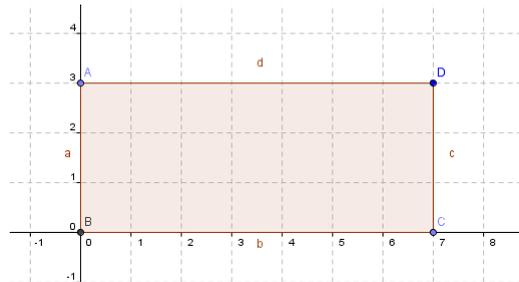
Construcción en GeoGebra



Entra en Tablón de Docencia y descarga el archivo “cuadrado.ggb” o bien “cuadrado.ggb.zip” si el anterior da problema.

Abre el archivo y responde las cuestiones siguientes.

- a) Mueve el punto C y verás que el rectángulo cambia de forma. En la pantalla puedes ver las medidas de los lados a y b y el área del rectángulo.
- b) ¿Puedes calcular el perímetro del rectángulo? ¿Qué observas?
- c) ¿El valor del área se modifica al mover el punto C? ¿Cómo explicas que el perímetro no cambie y que el área sí?
- d) Activa la casilla “Variación área” y vuelve a mover el punto C. Verás que aparece un punto P que deja un rastro. ¿Qué crees que representa el punto C?
- e) ¿Cuál es el valor máximo que alcanza el área del rectángulo? ¿Qué particularidad tiene el rectángulo en el caso de que el área sea máxima?



Seminarios del Tema 6

TRABAJO EN GRUPO. MEDIDA

Medida con instrumentos

Describir en el siguiente cuadro, los procedimientos de medida y de estimación más adecuados, en cada caso, seleccionados entre los que han empleado los miembros del equipo para obtener las medidas de los objetos realizadas en la fase de trabajo individual.

Medida	Estimación
	<i>Superficie de la figura A</i>
	<i>La capacidad de la papelera</i>
	<i>El volumen del aula</i>
	<i>El peso/masa de la silla</i>
	<i>El grosor de un folio</i>

Estudio de las nociones de área y perímetro

Elaborar un informe que aborde las siguientes cuestiones sobre las nociones de área y perímetro:

- Indicad con qué magnitudes se relacionan ambas nociones
- Construid en GeoGebra dos figuras diferentes que tengan el mismo perímetro y diferente área. Describid las figuras y explicar el modo en el que calculáis el área y el perímetro.

- c) Repetid el punto anterior, pero con dos figuras que tengan la misma área y distinto perímetro. Describid las figuras y explicar el modo en el que hacéis los cálculos.
- d) Localizad una página Web que hable de área y perímetro. Describid el modo en el que presentan o consideran el área y el perímetro, señalando lo que os parece más interesante.
- e) Proponed una tarea para mostrar a alumnos de Educación Primaria la distinción entre área y perímetro, usando la página que habéis encontrado en el punto anterior, o bien usando GeoGebra. En ambos casos, describid con detalle el contenido de la actividad y el recurso empleado. Si empleáis GeoGebra, describid las construcciones que empleéis.
- f) A partir de las respuestas a las cuestiones anteriores, obtener unas conclusiones acerca de la diferencia y la relación entre área y perímetro.
- g) Indicad la bibliografía o las páginas Web que habéis consultado para este estudio.

Tema 6

PRÁCTICA DE CAMPO 2. MATEMÁTICAS EN EL PARQUE DE LAS CIENCIAS³⁴

¿Qué es el Parque de las Ciencias?

El Parque de las Ciencias es un Museo Interactivo, primero en su género en el sur de España, en la línea de los más avanzados museos Europeos. Inaugurado en Mayo de 1995, supone una importante oferta museística, que demuestra que acercarse a la cultura científica puede ser algo ameno y divertido. Está situado en plena ciudad de Granada y es una novedosa oferta para el ocio, la cultura y el turismo, donde el visitante tiene la oportunidad de disfrutar y aprender con el mundo de la ciencia.

Un museo interactivo: "Se debe tocar"

El Parque de las Ciencias es un lugar para «hacer cosas», tener experiencias, avivar el afán de aprender y ayudarnos a comprender mejor el mundo en que vivimos. Un espacio donde comprobar por nosotros mismos muchos fenómenos físicos como el momento de inercia, la gravedad o el principio de Arquímedes; jugar con la luz y el sonido, comprender el Movimiento de la Tierra, el efecto invernadero o la explosión demográfica; experimentar con la electricidad y la erosión. Pero también es posible realizar experimentos y actividades matemáticas. En la entrada os darán un plano con el que podréis localizar las diferentes áreas del Parque.

¿Qué vamos a hacer en el Parque?

Este cuaderno es de equipo, y debéis entregarlo el primer día de clase que tengamos después de la visita al Parque. En el cuaderno encontraréis 9 actividades matemáticas que se pueden realizar usando algunos de los materiales que incluye el Parque de las Ciencias. Seleccionad 7 de esas actividades y realizadlas, recogiendo toda la información en tu cuaderno.

Recordad que el Parque de las Ciencias dispone de Monitores y Animadores Científicos que pueden ayudaros a localizar zonas concretas o explicaros el funcionamiento de algunos instrumentos o materiales.

Actividad 4. LA VISTA NOS ENGAÑA (Zona exterior. Avenida de Aristóteles)

Las figuras llamadas imposibles son formas dibujadas sobre el papel que no tienen sentido en tres dimensiones, ya que no se pueden construir realmente.

A. En el Parque hay algunas reproducciones de las obras de Escher. Uno de sus dibujos, llamado "Cónvavo convexo" (Figura 1), representa un "rincón" interior de un edificio, en el que existen diversos pisos unidos por escaleras. Indicad en la foto adjunta dos figuras que estén en posiciones imposibles respectivamente (si una está apoyada en el suelo, la otra estaría en una situación imposible) y explicad esta incompatibilidad.

³⁴ La información que incluyo aparece tal y como se le presenta a los estudiantes, si bien aquí sólo figura la introducción y un ejemplo de actividad. El cuaderno completo figura en el anexo.

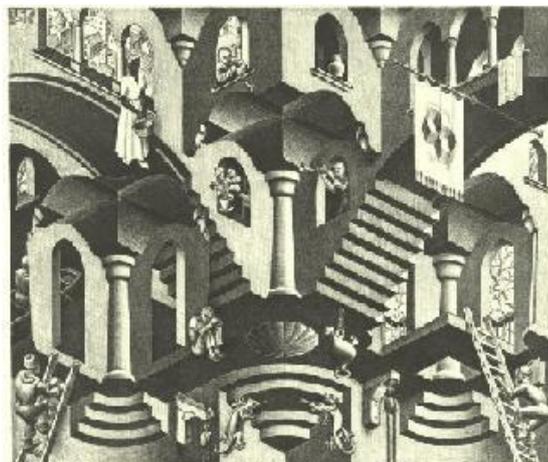
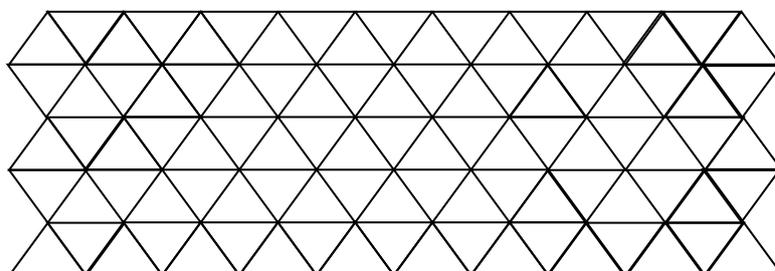


Figura 1. Fragmento de “Cóncavo Convexo” de Escher

En la bandera de uno de sus cuadros aparecen unos cubos. Reproducid el dibujo de la bandera en la trama siguiente:



B. El dibujo de la Figura 2 (a) es un triángulo imposible, ya que no se puede construir en la realidad. Sin embargo, la foto 2 (b), de Bruno Ernst, muestra cómo se puede construir tres lados perpendiculares dos a dos en el espacio de manera que desde una cierta posición podemos ver un triángulo.

Esto es lo que hay en el Parque de las Ciencias (Figura 2, c). Situaros en el punto adecuado hasta que consigáis ver el triángulo perfectamente.

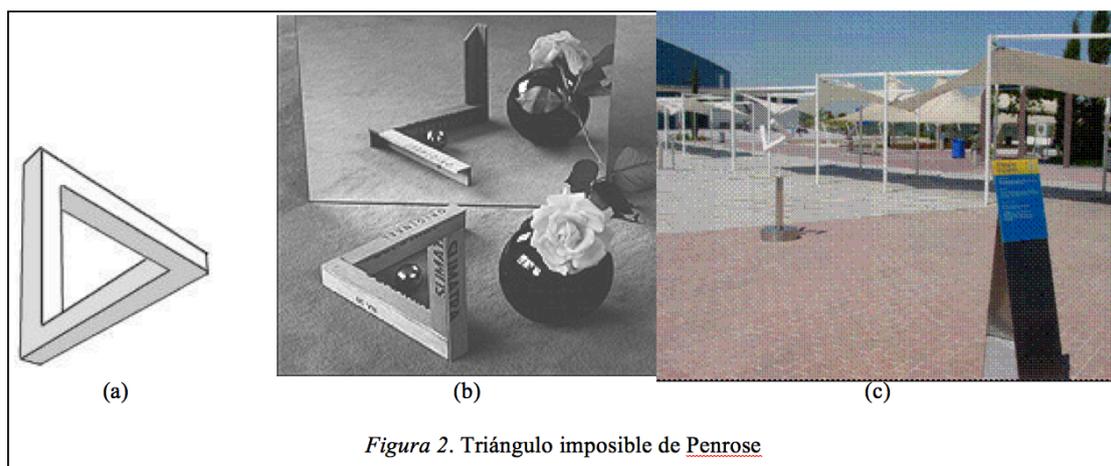
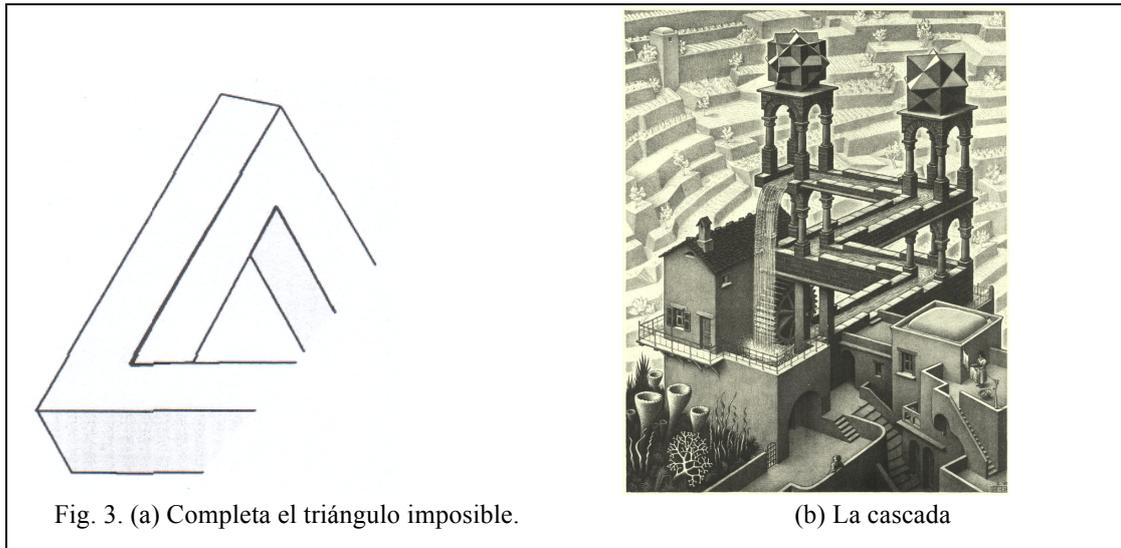


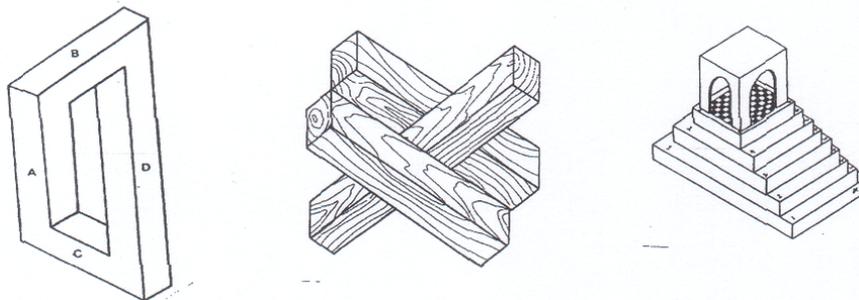
Figura 2. Triángulo imposible de Penrose

C. Completad la figura 3 (a) del triángulo de Penrose.



D. Escher utilizó el efecto del triángulo de Penrose en algunas de sus obras, como en el caso de “La cascada” (Figura 3, b). Con él consigue un efecto de movimiento continuo, de manera que el agua que cae y mueve el molino, vuelve a caer de nuevo en un ciclo imposible. Señalad los sitios donde Escher ha utilizado los triángulos imposibles en “La Cascada”. Identificad otros elementos geométricos en este grabado.

E. Justificad por qué son imposibles los dibujos de la figura siguiente:



BLOQUE 4

**TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN,
AZAR Y PROBABILIDAD**

Tratamiento Curricular

La consideración de la estadística y la probabilidad se lleva a cabo en el cuarto bloque de contenido de los cuatro que propone el currículo de Educación Primaria. También se desarrolla a lo largo de los tres ciclos que conforman la organización de los contenidos en esta etapa (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b):

Los contenidos del bloque 4, Tratamiento de la información, azar y probabilidad, adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen especial importancia en el bloque los contenidos actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios. (p. 31556)

El contenido de este bloque incluye dos facetas distintas de las matemáticas aunque con muchos vínculos que los relacionan: el tratamiento de datos y el azar. Estos fenómenos son la materia propia de estudio y trabajo de la estadística y de la probabilidad, respectivamente y juegan un papel predominante en la sociedad de la información y el consumo, como se destaca en el dominio de contenido “Incertidumbre” del proyecto PISA (OCDE, 2005, p. 39). Esta idea la constata el NCTM (2003)³⁵, al justificar el estándar “Análisis de Datos y Probabilidad”:

Es abrumador el número de datos disponible para ayudar a tomar decisiones en los negocios, la política, la investigación y la vida ordinaria. Las encuestas sobre consumo orientan el desarrollo y el estudio de mercado de los productos. Los sondeos de opinión contribuyen a definir estrategias en las campañas políticas. Los experimentos se usan para valorar la seguridad y eficacia de nuevos tratamientos médicos. Las estadísticas se manipulan frecuentemente con objeto de influir en la opinión pública o sobrevalorar la calidad y eficacia de los productos comerciales. Los estudiantes necesitan saber Análisis de datos y otros aspectos relativos a la Probabilidad para poder razonar estadísticamente. Son habilidades necesarias para llegar a ser ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes. (p. 51)

Para dar respuesta a estas necesidades, la estadística aporta un gran número de nociones, técnicas y razonamientos que permiten recoger, organizar, presentar y analizar grandes cantidades de datos. La probabilidad, al mismo tiempo, permite abordar el estudio de fenómenos aleatorios para comprender su complejidad y proponer argumentos dirigidos a la toma razonada de decisiones.

³⁵ El programa Curriculum Focal Points no introduce expresamente un foco curricular relacionado con estadística o probabilidad hasta el grado 8 (2º de ESO), si bien relaciona otros focos con la recogida y la organización de datos en tablas y gráficos.

Componentes del Sentido Estocástico³⁶

Estas características de la estadística y la probabilidad permiten acotar los componentes del sentido estocástico:

- ◆ Formular preguntas y recoger, organizar y presentar datos de diversa índole.
- ◆ Seleccionar, utilizar y validar métodos estadísticos para analizar conjuntos de datos.
- ◆ Proponer y evaluar inferencias y predicciones a partir de los resultados obtenidos en análisis estadísticos.
- ◆ Conocer y aplicar el lenguaje básico de la probabilidad para evaluar la posibilidad, imposibilidad o seguridad de determinados hechos y sucesos.
- ◆ Calcular la probabilidad de la ocurrencia de determinados sucesos en experimentos aleatorios sencillos y justificar la toma de decisiones a partir de los resultados obtenidos.

Organización del Bloque en la Materia

El desarrollo de este bloque se lleva a cabo, como en el caso anterior, en un único tema denominado “introducción a la estadística y la probabilidad”, que constituye el séptimo y último tema de la materia. En uno de los seminarios se desarrolla la práctica 9, dedicada a la realización de un proyecto estadístico usando la hoja de cálculo Excel.

³⁶ El término estocástico persigue recoger la estadística y la probabilidad que tienen presencia en el currículo de Educación Primaria, a pesar de que formalmente se refiere al tratamiento estadístico de procesos cuya evolución, en el tiempo, es aleatoria. Le agradezco al profesor Juan Díaz Godino sus reflexiones a este respecto.

Tema 7

INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA Y A LA PROBABILIDAD

La finalidad de este tema es que los estudiantes adquieran o actualicen nociones básicas de estadística y probabilidad, analizando su significado y la forma en que permiten afrontar una amplia variedad de problemas y situaciones. La estadística asocia modelos matemáticos para hacer descripciones y emitir juicios predictivos. Por tanto, el estudio del tema tiene que asociarse a la definición y estudio de problemas empíricos y a su tratamiento con elementos estadísticos. Pero en este tema no se centra tanto en la realización de cálculos o técnicas estadísticas, como en la interpretación de los resultados que arrojan esos análisis y en la importancia que tiene la correcta lectura de los gráficos y esquemas que habitualmente usan los medios de comunicación para lanzar mensajes sobre diferentes poblaciones. También es necesario delimitar los fenómenos aleatorios y su caracterización, para poder obtener probabilidades de sucesos, poniendo el énfasis, fundamentalmente, en el correcto uso del lenguaje del azar y el reconocimiento y la descripción de situaciones que se relacionan con la incertidumbre.

Algunos ejemplos de cuestiones que el estudiante debe ser capaz de responder al finalizar su estudio con este tema, son las siguientes:

- ◆ ¿Qué función tiene la estadística? ¿Qué tipo de fenómenos aborda?
- ◆ ¿Cuáles son los elementos principales de un estudio estadístico?
- ◆ ¿Qué criterios pueden usarse para organizar y presentar datos?
- ◆ ¿Qué tipos de gráficos existen para representar datos? ¿Qué expresa cada uno de ellos?
- ◆ ¿De qué informan las medidas de centralización (o tendencia central)? ¿Y las medidas de dispersión?
- ◆ ¿Qué situaciones cotidianas pueden relacionarse con el azar?
- ◆ ¿Qué se entiende por un fenómeno o una situación aleatoria? ¿En qué consiste el cálculo de probabilidades?
- ◆ ¿Qué argumentos pueden usarse para tomar decisiones en situaciones relacionadas con el azar?

Objetivos

1. Conocer las nociones básicas de estadística y probabilidad.
2. Reconocer situaciones y contextos donde la estadística tiene funcionalidad.
3. Interpretar y extraer conclusiones de informes estadísticos básicos.
4. Capacidad de elaborar informes estadísticos básicos.
5. Distinguir fenómenos aleatorios y determinísticos.
6. Interpretar la probabilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio.
7. Capacidad de valorar la probabilidad de ocurrencia de algunos fenómenos aleatorios simples.
8. Distinguir las distintas formas de medida de la probabilidad de los sucesos aleatorios.

Contenidos

1. Introducción a la estadística. Conceptos básicos: datos, poblaciones y variables.
2. Herramientas estadísticas. Tablas y gráficos: pictograma, diagrama de barras, polígono de frecuencias, diagrama de sectores, histograma.
3. Descripciones numéricas de los datos: Medidas de Posición (media, mediana y moda) y medidas de dispersión (rango y desviación típica). Interpretación.
4. Azar. Fenómenos aleatorios.
5. Noción de probabilidad. Asignación subjetiva de probabilidades.
6. Probabilidades en sucesos elementales equiprobables. Regla de Laplace.
7. Materiales y recursos.

Metodología

Desarrollo del Tema

- ◆ La reflexión acerca de la utilidad de la estadística y la probabilidad ocupa el inicio del tema, con un debate en gran grupo que promueve el profesor. En clase se muestran imágenes de tablas y gráficos extraídas de medios de comunicación para que los estudiantes opinen acerca de lo que pueden aportar estas disciplinas (actividades 1 y 2).
- ◆ El modo de trabajo en estadística, mediante la realización de un sencillo proyecto, es el guión de las sesiones de gran grupo. El esquema de trabajo para cada una de las herramientas estadísticas es: *motivación-presentación-análisis* (actividades 3, 4, 5, 6 y 7)
- ◆ En cada sesión, se dedica tiempo a que los estudiantes elaboren y discutan interpretaciones de las medidas estadísticas puestas en juego (actividades 8, 9, 10, 11 y 12).
- ◆ La práctica 9 se realiza durante el primer seminario y se lleva a cabo en una sala de informática en la que los estudiantes, en pequeños grupos, abordan la realización de un proyecto usando la hoja de cálculo Excel (ver detalle más adelante).
- ◆ La última sesión se dedica a la probabilidad, describiendo su presencia curricular y analizando las nociones y técnicas que tienen uso en Educación Primaria. En el segundo seminario se aborda la realización de actividades de probabilidad y azar (actividades 13, 14 y 15).

Trabajo Autónomo del Estudiante

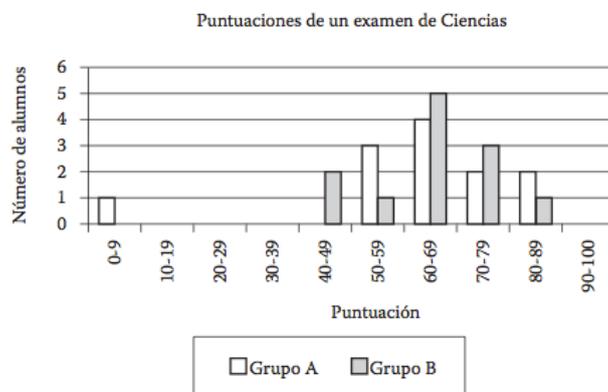
En este tema la actuación propuesta para fomentar el trabajo autónomo del estudiante son la siguiente:

- ◆ Los estudiantes deben preparar la información relativa a los principales gráficos que se emplean en estadística, justificando el uso recomendado de cada uno de ellos. En su estudio, deben destacar los diagramas de barras y de sectores, los polígonos de frecuencias, los pictogramas y los gráficos temporales. Pueden elaborar su informe basándose en Serrano (2011, pp. 414-420) y Batanero y Godino (2004, pp. 347-352).

Actividades

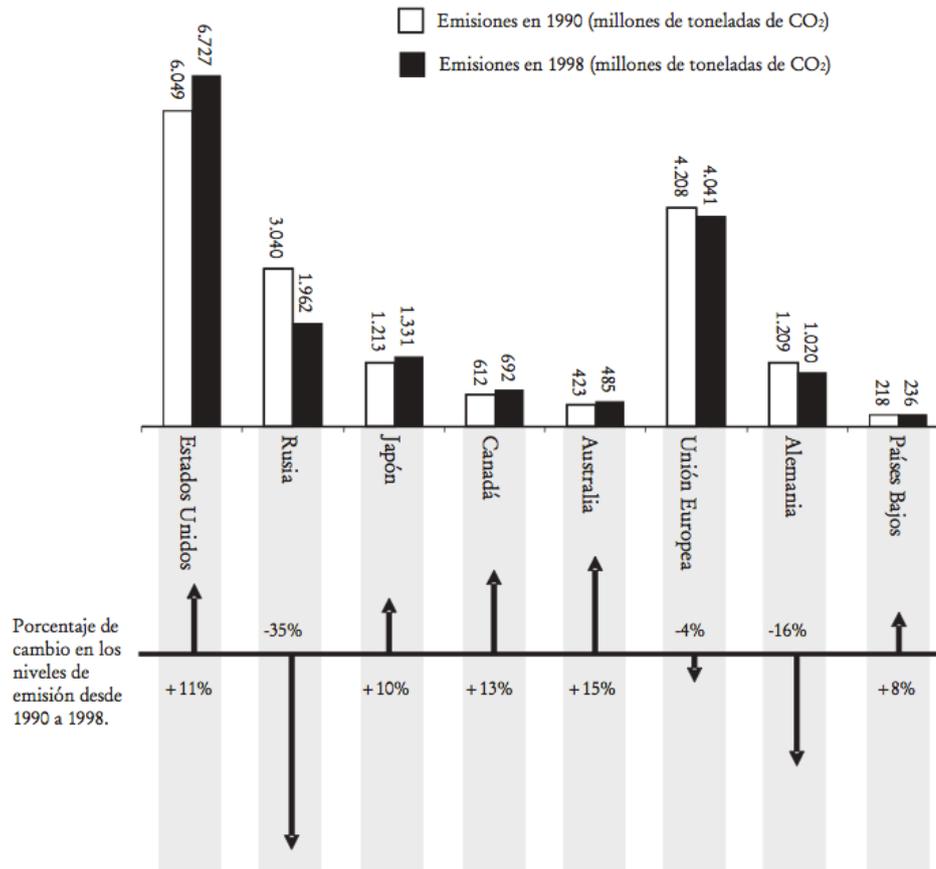
1. Pon ejemplos de variables estadísticas cuantitativas asociadas a la población de niños de un curso de Primaria. Igualmente para variables estadísticas cualitativas.
2. Busca y describe algunos ejemplos de estudios estadísticos que suelen aparecer en los medios de comunicación. Indica en ellos la variable que se estudia, su tipo y la población.

3. En un estudio estadístico sobre la temperatura máxima registrada en una ciudad durante los 30 días del mes de Noviembre, se ha obtenido que la frecuencia relativa del suceso 2°C es 0,2 y que la frecuencia acumulativa absoluta del mismo suceso es 8. Indica el significado de estas frecuencias. Determina cuántos días ha hecho una temperatura máxima de 2°C y cuántos ha hecho más de esa temperatura.
4. Suponiendo una población de 10 alumnos, inventa unos datos que den como resultado la media de 5,7 y un rango de 5. Analiza el tipo de variable que estás estudiando.
5. Inma tiene una media de 7,5 en sus primeros cuatro exámenes. En el quinto examen ha obtenido un 9. ¿Cuál será su nota media final?
6. Para el caso de una población de 5 alumnos, inventa unos datos cuya mediana esté por encima de la media y viceversa. Inventa datos para que coincidan media, mediana y moda, y el rango sea 4.
7. Para determinar a qué altura colocar el espejo del servicio de alumnos de un colegio se ha hecho una estadística midiendo la altura de los niños. Indica cuál es el problema, la variable que se estudia, y su tipo. Indica qué medida sería adecuada obtener de los datos y cómo la utilizarías para determinar a qué altura colocar el espejo.
8. El diagrama siguiente muestra los resultados en un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B. La puntuación media del Grupo A es 62,0 y la media del Grupo B es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más. Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo B fue mejor que el Grupo A.



Los alumnos del Grupo A no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo B no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen. Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del Grupo A.

9. Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO_2 en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático. El diagrama siguiente muestra los niveles de emisión de CO_2 en 1990 (las barras claras) de varios países (o regiones), los niveles de emisión en 1998 (las barras oscuras), y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y 1998 (las flechas con porcentajes).

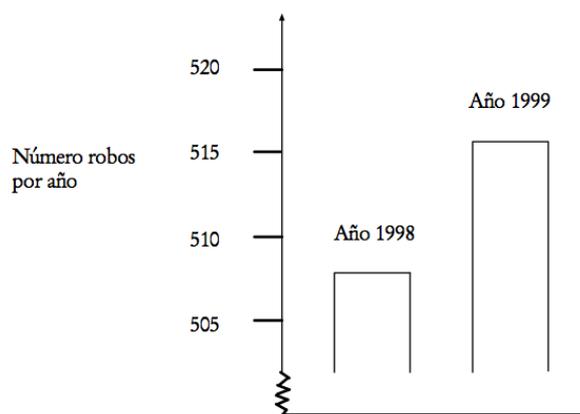


- En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO₂ en Estados Unidos entre 1990 y 1998 fue del 11%. Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene este 11%.
 - Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea (total de la UE, 4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea". ¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.
 - Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO₂. Cada uno llega a conclusiones diferentes basándose en el diagrama. Da dos posibles respuestas "correctas" a esta pregunta y explica cómo se puede obtener cada una de estas respuestas.
 - Localiza en algún medio de comunicación una noticia en la que se expresen algunos datos porcentuales. Describe la situación que refleja la noticia, la información que se representa con porcentajes e inventa un problema con algunos de los datos incluidos en la noticia dirigida a escolares de tercer ciclo de Educación Primaria.
10. Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente desecha:

Tipos de Basura	Tiempos de descomposición
<i>Piel de plátano</i>	1-3 años
<i>Piel de naranja</i>	1-3 años
<i>Cajas de cartón</i>	0,5 años
<i>Chicles</i>	20-25 años
<i>Periódicos</i>	Unos pocos días
<i>Vasos de plástico</i>	Más de 100 años

Un estudiante piensa en cómo representar los resultados mediante un diagrama de barras. Da una razón de por qué no resulta adecuado un diagrama de barras para representar estos datos. Realiza un balance de los gráficos que se podrían emplear.

11. Un presentador de TV mostró este gráfico y dijo: "El gráfico muestra que hay un enorme aumento del número de robos comparando 1998 con 1999".



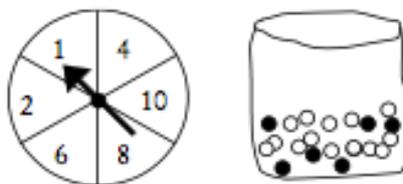
¿Consideras que la afirmación del presentador es una interpretación razonable del gráfico? Da una explicación que fundamente tu respuesta. Trata de localizar en los medios de comunicación otro ejemplo de uso inapropiado de datos estadísticos.

12. En Zedlandia, se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo al Presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en toda la nación. Los resultados de los sondeos de los cuatro periódicos se muestran a continuación:
- ◆ Periódico 1: 36,5% (sondeo realizado el 6 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).
 - ◆ Periódico 2: 41,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).
 - ◆ Periódico 3: 39,0% (sondeo realizado el 20 de enero, con una muestra de 1.000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto).
 - ◆ Periódico 4: 44,5% (sondeo realizado el 20 de enero, con 1.000 lectores que llamaron por teléfono para votar).

Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos sería la mejor predicción del nivel de apoyo al presidente? Da dos razones que justifiquen tu respuesta.

13. Al lanzar tres monedas, María gana 1 euro si se obtiene ninguna o 1 cara. Juan gana un euro si se obtienen 2 o 3 caras. María dice que el juego es justo porque solo hay 4 posibilidades y cada uno de ellos tiene ventajas con dos. Juan no está de acuerdo. ¿Quién tiene razón? ¿Qué argumentos pueden emplearse para aclarar la situación?

14. En un juego de una feria, se utiliza en primer lugar una ruleta. Si la ruleta se para en un número par, el jugador puede entonces sacar sin mirar una canica de una bolsa. Sólo cuando se saca una canica negra se gana un premio.



Si Daniela juega una partida, explica porqué cada una de las siguientes expresiones refleja mejor o peor la posibilidad de que Daniela gane un premio:

- Es imposible.
 - No es muy probable.
 - Tiene aproximadamente un 50% de probabilidad.
 - Es muy probable.
 - Es seguro.
15. Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que éstos ocurren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos. Un geólogo dijo: En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres. ¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?
- $2/3 \times 20 = 13,3$, por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed.
 - 23 es más que 12, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.
 - La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.
 - No se puede decir lo que sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

Referencias

- Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 591-619). Madrid: Síntesis.
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). Estocástica para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 333-377). Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2005). *PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de resolución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Pérez, P. (1995). Actividades de probabilidad para la enseñanza primaria. *UNO*, 5, 113-122.
- Sáenz, C. (1999). *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades*. Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.
- Serrano, L. (2011). Estadística. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 401-425). Madrid: Ediciones Pirámide.

Seminarios del Tema 7

PRÁCTICA 9. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

En muchas ocasiones, los estudios estadísticos manejan grandes cantidades de datos y eso hace que resulte prácticamente imposible manejarlos y analizarlos manualmente. En esos casos, el uso de recursos informáticos resulta crucial y la finalidad de esta práctica es utilizar uno de esas herramientas, la hoja de cálculo, para llevar a cabo un estudio sobre los resultados de un entrenamiento deportivo. La hoja de cálculo (como Excel³⁹, por ejemplo), tiene múltiples aplicaciones y entre ellas está la posibilidad de organizar, representar, comparar y analizar datos estadísticos. Este tipo de actividades suelen denominarse *análisis exploratorio de datos*.

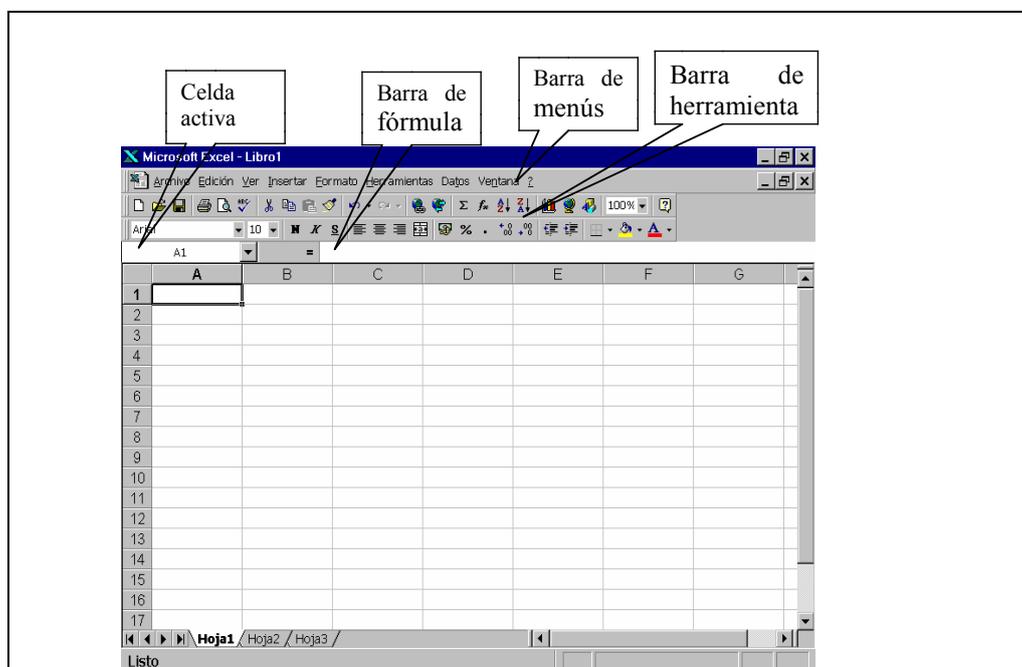
Objetivos

Esta práctica pretende contribuir a que seas capaz de:

- ◆ Conocer algunas de las utilidades de una hoja de cálculo.
- ◆ Usar la hoja de cálculo para realizar un análisis exploratorio de datos.
- ◆ Interpretar los gráficos estadísticos elementales y aplicarlos a un proyecto de análisis de datos.
- ◆ Aplicar e interpretar conceptos estadísticos, como los de frecuencia, media, o desviación típica.

Actividades

En primer lugar, realizaremos una breve introducción al manejo de la hoja de cálculo. Los elementos esenciales de una hoja de cálculo son los que tienes en la figura adjunta:



³⁹ En esta práctica introduciremos algunos comandos y funcionalidades de Excel. Si deseas conocer algo más sobre esta hoja de cálculo, puedes consultar el curso básico ofrecido en la página Web <http://www.deseoaprender.com/CursoExcel/Lecc2Excel.htm>.



1. Consulta la ayuda de Excel (icono ? del menú de opciones) y realiza las siguientes acciones:
 - a) Observa como localizar en la ventana de trabajo los siguientes elementos: la celda activa; las columnas C, E, F, J, EF, IT; las filas 7, 21 y 352; las celdas A4, C8 y EF740; la barra de fórmulas.
 - b) Selecciona con el puntero (ratón) la celda A3 y la celda C6, la fila 4, la columna E y el rango de celdas B2:F6 ¿Qué forma tiene este último?
 - c) Escribe un número en una celda, y distingue entre las acciones de seleccionar, mover y copiar. Observa cómo el puntero cambia de forma si lo colocas dentro de la celda (cruz blanca gruesa, para seleccionar), en el borde de la celda (flecha, para mover) y en la esquina inferior derecha (cruz negra delgada, para copiar)
 - d) Selecciona la hoja 1 del libro 1. (Pestaña de la parte inferior de la pantalla: **hoja 1**). Pulsa el botón derecho del ratón sobre ella y cambia de nombre a esta hoja, escribiendo **Estadística**.
2. Introduce en esa hoja los datos de la tabla siguiente y guarda el archivo con el nombre “gastos”.

	A	B	C	D	E
1					
2		Descripción	Enero	Febrero	Marzo
3		Aparcamiento	150	160	123
4		Alimentación	225,45	300	456
5		Alojamiento	345,65	200	12,34
6		Teléfono	12	15	0
7		Total	=C3+C4+C5+C6	=suma(D3:D6)	=suma(E3:E6)

- a) Cambia algunos datos de las celdas anteriores, y observa el efecto producido en la fila 7 (Total). ¿Qué ocurre?
 - b) Selecciona las celdas que tienen texto y cambia el tamaño y tipo de letra, (con negrita, subrayado, etc.). Selecciona las columnas B, C, D y E y centra su contenido.
 - c) Selecciona el rango de celdas C1:E1. Pulsa el botón “combinar y centrar” para repartir el contenido de ambas celdas en una sola. Escribe la frase “Estado de cuentas para el primer trimestre”, como título y céntrala en la celdilla. Guarda los cambios.
3. Vamos a utilizar la hoja Excel para analizar los datos correspondientes a un proyecto sobre “Eficacia de un entrenamiento deportivo”.

Un profesor de Educación Física prepara a un grupo de 60 alumnos de 12 años para participar en una competición. Transcurridos 3 meses del entrenamiento (Septiembre a Diciembre) quiere comprobar si el entrenamiento ha sido efectivo. Para ello quiere comparar el tiempo en segundos que los alumnos tardan en recorrer 25 metros en Septiembre y en Diciembre, y también quiere conocer si hay diferencias entre los chicos y las chicas. Los datos se presentan en la Tabla 1.

Género	Tiempo en Septiembre	Tiempo en Diciembre	Género	Tiempo en Septiembre	Tiempo en Diciembre
CHICA	3,3	5,4	CHICA	5,9	2,9

Género	Tiempo en Septiembre	Tiempo en Diciembre	Género	Tiempo en Septiembre	Tiempo en Diciembre
CHICA	4,7	3,0	CHICA	5,9	4,2
CHICA	4,7	3,9	CHICA	5,9	5,0
CHICA	4,7	6,0	CHICA	6	3,2
CHICA	4,8	4,5	CHICA	6	3,6
CHICA	4,8	4,7	CHICA	6,5	4,4
CHICA	4,9	4,4	CHICA	6,5	4,9
CHICA	4,9	4,8	CHICA	9,9	4,4
CHICA	5	3,0	CHICA	9,9	6,6
CHICA	5	4,1	CHICO	4	6,9
CHICA	5	4,5	CHICO	4,5	2,9
CHICA	5	5,2	CHICO	4,5	3,8
CHICA	5,1	3,5	CHICO	4,5	4,2
CHICA	5,1	5,6	CHICO	4,7	3,6
CHICA	5,2	3,8	CHICO	4,8	3,9
CHICA	5,2	4,0	CHICO	4,9	3,8
CHICA	5,2	4,3	CHICO	5	2,6
CHICA	5,2	5,6	CHICO	5	3,7
CHICA	5,3	4,1	CHICO	5	4,2
CHICA	5,4	5,0	CHICO	5,2	3,1
CHICA	5,5	4,8	CHICO	5,2	4,9
CHICA	5,5	6,1	CHICO	5,2	5,3
CHICA	5,6	2,7	CHICO	5,4	4,5
CHICA	5,6	3,9	CHICO	5,5	3,6
CHICA	5,7	3,4	CHICO	5,6	4,2
CHICA	5,7	4,0	CHICO	6	2,4
CHICA	5,7	6,4	CHICO	6	4,4
CHICA	5,8	3,0	CHICO	6	4,9
CHICA	5,8	4,6	CHICO	6,3	3,9
CHICA	5,8	5,6	CHICO	6,3	4,9

- a) Copiad en tres columnas sucesivas de la hoja Excel los valores de las tres variables consideradas, para los chicos y las chicas, respectivamente (usar las herramientas de “copiar” y “pegar” del procesador de textos):

Género	Tiempo en septiembre	Tiempo en diciembre
CHICA	3,3	5,4
....

- b) Preparad dos versiones de esta última tabla con los datos ordenados en orden creciente de valores de los tiempos en Septiembre y Diciembre, respectivamente.
4. Trabajando en equipo, estudiad los resúmenes estadísticos (tablas, gráficos, y estadísticos) que permiten responder a la siguiente cuestión, ¿ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?

Seminarios del Tema 7

TRABAJO EN GRUPO. CÁLCULOS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS CON EXCEL

En esta fase de trabajo en equipo pedimos que comparéis los trabajos individuales realizados sobre el proyecto, “Eficacia de un entrenamiento deportivo”, y lleguéis a conclusiones compartidas. También pedimos profundizar en el análisis de los datos respondiendo a cuestiones complementarias.

Descargad el archivo Word de esta práctica de la sección de archivos de la plataforma. Responded en dicho archivo a las cuestiones planteadas, incorporando además las tablas, cálculos y gráficos estadísticos elaborados.

Cuestiones Sobre la “Eficacia del Entrenamiento Deportivo”

Responder razonadamente a las cuestiones 1 a 5, incluyendo los cálculos y gráficos que consideréis pertinentes:

1. ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?
2. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 30 metros inicialmente en Septiembre?
3. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 30 metros después del entrenamiento en Diciembre?
4. ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?
5. ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como “atípico” en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)? ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

Vamos a considerar como atípico un valor cuando está fuera del intervalo: media \pm dos veces la desviación típica ($M \pm 2 \times DT$).

Interpretación de los Gráficos de Cajas

Las figuras siguientes incluyen representaciones del llamado “gráfico de cajas” de las distribuciones de frecuencias de las variables estudiadas en el proyecto sobre “Eficacia del entrenamiento deportivo”. Un gráfico de cajas incluye los siguientes datos:

Media aritmética (punto negro central); *mediana* (segmento central); *cuartiles superior e inferior* (lados superior e inferior de los rectángulos o cajas); *valores atípicos* (puntos aislados marcados por encima y por debajo de la caja, cuanto existen). El largo de la caja (distancia entre los cuartiles) es una medida de dispersión de la distribución conocida como “*recorrido intercuartilico*”). A medida que la caja es más larga la dispersión es mayor, y si la raya intermedia (mediana) está centrada entonces la distribución es simétrica.

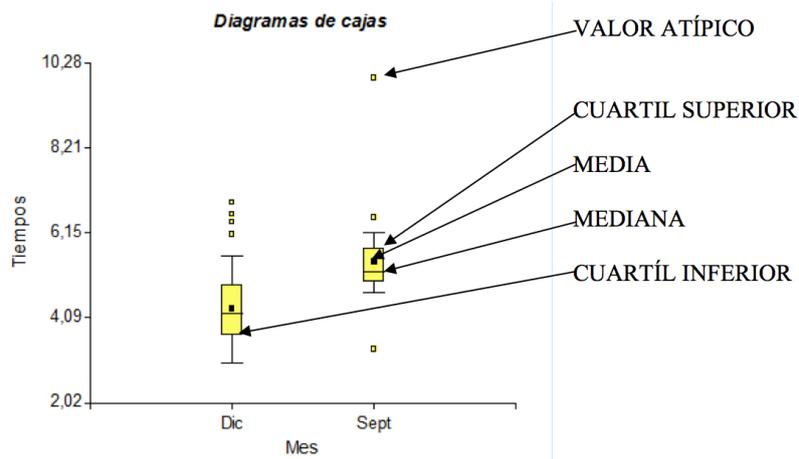


Figura 1. Gráficos de las distribuciones de los tiempos en diciembre y septiembre

1. Usad la información dada en la Figura 1, para explicar en qué medida el entrenamiento ha sido efectivo para el conjunto de la clase.
2. Usad la información dada en la Figura 2, para explicar en qué medida el entrenamiento ha sido más o menos efectivo para los chicos (M) y las chicas (F).

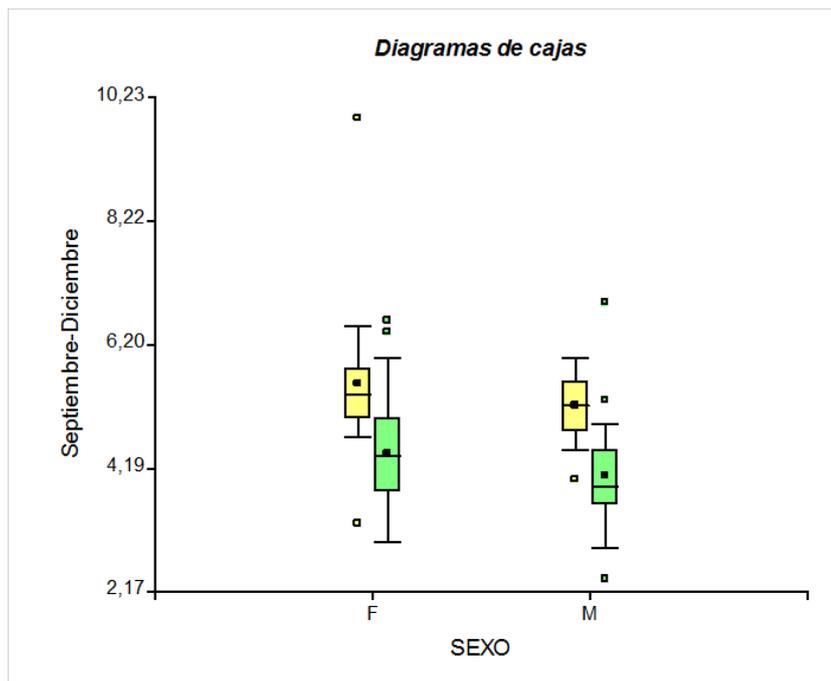


Figura 2. Gráficos de las distribuciones de los tiempos para chicas (F) y chicos (M)

SEGUNDA PARTE

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Aprendizaje de los Profesores de Matemáticas de Primaria en Formación Inicial

El proyecto de investigación que presento se enmarca en el perfil investigador acotado para la plaza a la que concurso. Se trata de una propuesta para analizar el aprendizaje que desarrollan futuros profesores de Educación Primaria que cursan el modelo formativo que he presentado en el proyecto docente previo. Es decir, me sitúo en el Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada y mi finalidad es llevar a cabo un estudio acerca de los resultados de la formación que reciben los futuros maestros con motivo de las tres materias obligatorias que conforman el módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas”.

Para presentar este proyecto, en primer lugar lo contextualizo y lo fundamento usando la revisión de la literatura y el posicionamiento teórico descrito en el capítulo 2. A continuación, describo los antecedentes en los que me baso y que se concretan en tres proyectos de investigación sobre formación de profesores en los que he participado y la tesis doctoral que realicé, que me suministra un modelo de análisis válido para esta nueva propuesta. La experiencia acumulada en esas actividades previas me permiten acotar la pregunta y los objetivos de investigación que propongo abordar. Después de enunciarlo, caracterizo metodológicamente el proyecto, mediante la concreción del tipo de estudio, los informantes y las fuentes de información. También introduzco el método de análisis de esos datos y propongo un cronograma orientativo de actividades. Finalizo la presentación del proyecto con una descripción de los beneficios esperados de su realización. El capítulo se cierra con una descripción de otras actividades de investigación en la que me hallo inmerso en la actualidad.

1. PLANTEAMIENTO Y CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La reforma del sistema universitario español, conocida como proceso de convergencia europea o Espacio Europeo de Educación Superior, que se ordena en el documento que establece la organización de la enseñanzas universitarias en España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007c), propone un marco de formación integral, comparable y compartido en el que la noción de competencia profesional vertebrada las finalidades formativas. Como he descrito en capítulos previos, en la Universidad de Granada existe una importante apuesta por la formación como docentes de matemáticas de los futuros maestros que cursan ese grado, dedicada a su desempeño profesional. El proyecto que presento se centra en el análisis de algunos de los resultados de esa formación.

Esta investigación se integra en un grupo de investigación, formado por especialistas del área de Didáctica de la Matemática. Su núcleo lo constituyen los miembros del grupo FQM193 “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”⁴⁰ de la Universidad de Granada. Los trabajos del grupo se han concretado en diferentes líneas y actividades investigadoras, llevadas a cabo en colaboración con investigadores de otras universidades, formados en el seno de este grupo o vinculados al mismo. Me sitúo en una de las líneas de investigación de este grupo, la formación de profesores de matemáticas. Más concretamente, me preocupa la formación inicial de maestros.

En el capítulo 1 he descrito la estructura, los contenidos y las competencias que delimitarán la titulación del Grado de Maestro en Educación Primaria en la Universidad de Granada. La hipótesis de partida de esa propuesta formativa sostiene que el modelo del análisis didáctico y los organizadores del currículo, descritos en el capítulo 2, responden a los requerimientos y expectativas de aprendizaje profesional que plantea el nuevo Grado de Maestro de Educación Primaria, en el contexto de la convergencia europea, de las finalidades del sistema educativo español y de los avances en la investigación en Didáctica de la Matemática.

2. ANTECEDENTES

Los antecedentes que enmarcan y justifican la investigación que propongo se concretan en proyectos de investigación finalizados y en la tesis doctoral que defendí en 2009. Dedicó este apartado a describir esos referentes previos.

Proyectos de Investigación

El proyecto que presento propone una actuación que se enmarca y da continuidad a tres proyectos de investigación previos de cuyos equipos he sido miembro y que han sido aprobados por la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva (ANEP) en convocatorias ministeriales oficiales⁴¹. Dichos proyectos son: *Indicadores de Calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (BSO2002-

⁴⁰ Grupo de Investigación del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía. En la página <http://fqm193.ugr.es> se puede consultar la estructura, la finalidad y la producción del grupo.

⁴¹ En la actualidad están siendo objeto de evaluación dos nuevo proyectos I+D+i. Los describo en el último epígrafe de este capítulo.

02799); *Competencias didácticas y formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria* (SEJ2005-07364); y *Competencias profesionales del maestro de primaria en el área de matemáticas en contextos de formación inicial* (EDU2009-09789).

En el primero de estos proyectos se analizó el modelo de formación de profesores de matemáticas de secundaria implementado en las universidades de Almería, Cantabria y Granada y se desarrolló un modelo de evaluación de su calidad a través de las dimensiones de relevancia, eficacia y eficiencia. Este análisis de calidad realizado sobre los planes existentes motivó el interés del equipo por temas de investigación que resultaron determinantes a la hora de fundamentar el diseño de planes estratégicos de mejora (Gómez et al., 2006 y 2007a; González et al., 2004 y 2006; Lupiáñez, 2005; Rico et al., 2003 y 2004).

El segundo proyecto permitió identificar y caracterizar las competencias didácticas del profesor de matemáticas de secundaria relativas a la tarea profesional de planificar actividades docentes (Gómez et al., 2007b; Rico et al., 2008). Estas competencias profesionales se caracterizan en un planteamiento funcional de las matemáticas escolares, lo que permite profundizar en su relación con las competencias matemáticas que promueven los actuales currículos de Educación Obligatoria (Lupiáñez y Rico, 2006; Rico y Lupiáñez, 2008a). Por otro lado, surge la preocupación por el aprendizaje del profesor en términos del desarrollo de competencias. Este tema fue investigado en el contexto de los planes de formación que los investigadores estaban implementando, cuyos diseños se apoyaban en el conocimiento anterior (Gómez y Lupiáñez, 2007; Gómez et al., 2007c; Gómez et al., 2008a y b; Lupiáñez, Molina, Flores y Segovia, 2007; Lupiáñez, Segovia y Flores, 2006; Molina et al., 2008; Ruiz et al., 2009; Segovia, Lupiáñez, y Flores, 2006).

El tercer proyecto se centró en identificar y caracterizar las competencias didácticas del profesor de Primaria. El equipo de investigadores analizó los currículos de matemáticas españoles de Educación Primaria (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011); organizó y caracterizó las competencias que debe desarrollar un profesor de matemáticas de ese nivel educativo (Lupiáñez, 2010); delimitó algunos criterios para el diseño y selección de tareas que promueven el desarrollo e la competencia matemática (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2011a; Rico y Lupiáñez, 2010; Lupiáñez, 2007a, b y c); y fundamentó las bases de las asignaturas de formación de maestros (Lupiáñez, 2011). A partir de estos resultados se han elaborado esquemas que promueven la apropiada formación inicial en el área de Matemáticas y su didáctica. En particular, se han producido e implementado diseños curriculares para asignaturas de Matemáticas en el Grado de Maestro en Educación Primaria (Segovia y Rico, 2011; Segovia y Lupiáñez, 2011; Lupiáñez y Flores, 2011; Lupiáñez et al., 2011).

La experiencia acumulada en estos tres proyectos, da fundamento al proyecto que aquí presento. En los proyectos mencionados se ha avanzado en la fundamentación y caracterización de las competencias y los conocimientos que debe desarrollar un profesor de matemáticas para el ejercicio de su labor docente en Educación Obligatoria. Una de las competencias principales es la que se centra en la planificación de las matemáticas escolares. También hemos desarrollado una propuesta para la formación inicial de profesores de Educación Primaria y Secundaria, como futuros profesores de matemáticas, basada en el modelo del análisis didáctico. En el caso de la formación inicial de maestros, la propuesta formativa desarrollada para este proyecto docente en los capítulos anteriores queda fundamentada desde la investigación actual, es acorde con los requerimientos curriculares del EEES, da respuesta a las necesidades

profesionales de los futuros docentes, y se caracteriza y justifica según un modelo de implementación basado en el análisis didáctico.

La línea de continuidad que propongo se centra en la evaluación de los resultados de esa propuesta formativa. Para acotar esta propuesta, describo la investigación que dio lugar a mi tesis doctoral y que emplearé como referencia.

Tesis Doctoral

Mi tesis doctoral se enmarca en la formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria (Lupiáñez, 2009)⁴². El contexto es el de una asignatura que, hasta el curso 2010-2011, se impartía en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada. La finalidad de esta asignatura era desarrollar la competencia de planificación de las matemáticas escolares como futuros profesores de los estudiantes que la cursaban, mediante el diseño de unidades didácticas. El modelo formativo está basado en el análisis didáctico, a cuya caracterización contribuyó esta tesis.

Parte del proceso de diseño de una unidad, consiste en establecer qué espera el profesor que aprendan sus escolares sobre el tema de matemáticas que está planificando, qué limitaciones pueden interferir ese proceso o cómo se puede favorecer que los escolares aprendan. Abordamos así la caracterización de un procedimiento que permita a los futuros profesores abordar la problemática del aprendizaje escolar de un tema de matemáticas desde un punto de vista curricular. Para ello, nos centramos en el diseño e implementación de un programa que incluya, de manera coherente y fundamentada, un procedimiento de planificación del aprendizaje escolar. También nos ocupamos del aprendizaje que realizan los profesores en formación sobre esa parte de la planificación docente, es decir, del conocimiento y las capacidades que finalmente desarrollan.

Por tanto, la primera pregunta de investigación que abordamos es la siguiente:

¿Cómo puede afrontar el profesor en formación el estudio y la planificación del aprendizaje de los escolares acerca de un tema matemático específico?

Para ello, hemos definido, caracterizado y fundamentado un procedimiento, denominado *análisis cognitivo*, sustentado en la noción de currículo y que aborda esa parte de la planificación docente según tres facetas: (a) enunciar y justificar las *expectativas* de aprendizaje que el profesor tiene para sus escolares acerca de un tema de matemáticas, los objetivos específicos y su contribución al desarrollo de la competencia matemática; (b) describir y organizar las *limitaciones* que pueden surgir en el proceso de logro de esas expectativas, en términos de errores y dificultades; y (c) diseñar y seleccionar las *oportunidades* de aprendizaje que el profesor brinda a los escolares para lograr esas expectativas y superar esas limitaciones, que se concretan en tareas. El procedimiento del análisis cognitivo, enmarcado dentro del análisis didáctico, permite al profesor planificar de manera estructurada y desde un punto de vista curricular, el aprendizaje de los escolares para cada tema de matemáticas.

Partiendo de este resultado, abordamos la segunda pregunta de investigación:

¿Es posible diseñar e implementar el análisis cognitivo en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria desde una perspectiva funcional?

⁴² Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/5489.

El diseño de la asignatura se sustenta en una visión funcional del aprendizaje de los futuros profesores. Los distintos componentes del análisis didáctico se estudian y trabajan como herramientas para dar respuesta a las necesidades técnicas y prácticas derivadas del diseño de unidades didácticas. Los futuros profesores trabajan en grupos de 4 o 5 miembros, se planifican sesiones y espacios para la actividad de los grupos y se llevan a cabo discusiones y debates conjuntos. En el curso 2008-2009, el análisis cognitivo ocupa un lugar primordial en el diseño: el trabajo de los futuros profesores se inicia con la problemática de la cognición escolar desde un punto de vista curricular y continua con los tres organizadores curriculares del análisis cognitivo, que tienen una notable presencia en las sesiones. Participaron diecinueve profesores en formación organizados en cuatro grupos de trabajo, cada uno de los cuales tenía asignado un tema de las matemáticas escolares sobre el que diseñaron una unidad didáctica a partir de la información proporcionada durante el curso sobre las herramientas mencionadas.

En ese curso llevamos a cabo el estudio empírico que propone nuestra tercera pregunta de investigación:

¿Cómo desarrollan su competencia de planificación para las matemáticas escolares los grupos de futuros profesores que cursan ese programa formativo?

La noción de la competencia de planificación la caracterizamos en torno a los conocimientos y capacidades que han de desarrollar los futuros profesores para abordar el proceso de diseño y justificación de unidades didácticas. En este caso nos centramos en observar y caracterizar la actividad de los profesores en formación en relación con el análisis cognitivo. La información surge de manera natural del programa y los documentos de la asignatura, de los diferentes trabajos y presentaciones realizados por los grupos, y de los debates realizados en clase. La estructura del análisis cognitivo, sobre la base de sus organizadores, permite elaborar un listado de variables de análisis de esas producciones. Los resultados generados evidencian una serie de momentos y etapas en el proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores en relación a cada una de las tres herramientas del análisis cognitivo manejadas, que muestran regularidades y singularidades notables y que dejan constancia de la complejidad de ese proceso de aprendizaje.

Esta investigación brinda un marco de análisis que propongo usar como punto de partida para el diseño metodológico de este proyecto, como nuestro más adelante.

3. PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El Espacio Europeo de Educación Superior ha brindado la oportunidad de revisar y renovar la formación que reciben los maestros de cara a su labor docente. Se ha hecho necesario proponer, desarrollar y evaluar modelos alternativos que promuevan de manera eficiente la apropiada formación inicial de los maestros de primaria sobre Matemáticas escolares y sobre Didáctica de la Matemática (Informe Español TEDS-M 2008⁴³).

⁴³ Documento en prensa. En breve estará disponible en la página <http://www.educacion.gob.es/evaluacion/publicaciones/estudios-ie.html>.

La finalidad de este proyecto es evaluar el impacto de esa formación sobre una de las finalidades que persigue, que tiene que ver con la planificación de las matemáticas escolares y que se ve reflejada explícitamente en una de las competencias que destaca la materia de tercer curso “Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas de Educación Primaria” (§1.6):

- ◆ Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.

De esta manera, la pregunta de investigación que pretendo abordar con este proyecto es la siguiente:

¿En qué medida desarrollan su competencia de planificación de las matemáticas escolares los maestros en formación que cursen el Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada?

La materia de tercer curso se centra en el conocimiento y la aplicación de criterios para la fundamentación, el diseño y la implementación de unidades didácticas de matemáticas para Educación Primaria. Como tarea final, los estudiantes, trabajando en grupo, han de elaborar y defender una unidad didáctica sobre un tema de matemáticas de primaria. El fundamento y la información para ese diseño de unidad proviene de la puesta en juego de los conocimientos, las capacidades, las herramientas, las actitudes desarrolladas y las habilidades alcanzadas en las materias anteriores (§1.4 y §1.5). La pregunta anterior, por tanto, delimita el estudio que quiero afrontar al analizar cómo ponen en juego sus conocimientos matemáticos y didácticos para la enseñanza (§2.3) los futuros maestros, para realizar el análisis didáctico de un tema específico de matemáticas de primaria y para ponerlo en práctica en el diseño y fundamentación de una unidad didáctica sobre ese tema (§2.4). Para dar respuesta a la pregunta planteada, centraré la investigación en el estudio y seguimiento de un grupo de futuros maestros.

De esta manera, puedo acotar los objetivos de la investigación:

1. Identificar, describir y caracterizar el conocimiento matemático y didáctico que han desarrollado los integrantes de un grupo de maestros en formación para llevar a cabo el análisis didáctico de un tema de las matemáticas escolares.
2. Interpretar y explicar el modo en que aplican el análisis didáctico para el diseño de una unidad didáctica.
3. Emplear la información anterior para evaluar el nivel de desarrollo de la competencia de planificación de esos futuros maestros.

4. METODOLOGÍA Y PLAN DE TRABAJO

Para dar respuesta a los objetivos anteriores, propongo una metodología observacional de tipo confirmatoria (Evertson y Green, 1989), en la que es necesario concretar el contexto en que se sitúa el estudio, definir los informantes, los instrumentos de recogida de información y la propuesta de análisis de esa información. A esos aspectos dedico este apartado y, finalmente, esbozo un cronograma aproximado de actividades.

Contexto e Informantes

Como ya he introducido, el contexto del estudio es el de un grupo de estudiantes que cursan la materia “Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas de Educación

Primaria” de tercer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada. De esta manera, la investigación se llevará a cabo desde una perspectiva *naturalista*, en la que los sujetos de la investigación serán esos estudiantes y en donde la información empleada para la investigación surge de manera natural en el contexto de su implementación (Erlandson, Harris, Skipper y Allen, 1993; Lupiáñez, 2009).

El grupo de futuros maestros se escogerá aleatoriamente entre los participantes y se requerirá su consentimiento. Se dará prioridad a aquellos grupos de futuros maestros que hayan cursado juntos las materias anteriores del módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas”.

Instrumentos de Recogida y Análisis de Información

El diseño metodológico impone que la información surja de la propia materia, por lo que esta provendrá de las producciones y las presentaciones del grupo seleccionado a lo largo del curso. Las sesiones de clase se grabarán en audio. Adicionalmente, me propongo realizar una serie de entrevistas con el grupo a lo largo del curso y le propondré a sus integrantes que graben en audio las reuniones que tengan para preparar sus trabajos. Por tanto, los instrumentos de recogida de información son los siguientes:

- ◆ Producciones del grupo de futuros maestros (trabajos y presentaciones).
- ◆ Audio de las sesiones de clase.
- ◆ Entrevistas con el grupo.
- ◆ Audio de las reuniones internas del grupo.

Para llevar a cabo el análisis de la información, emplearé un sistema de categorías de estudio de las producciones y las grabaciones adaptado de los estudios de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009). Estas categorías permiten caracterizar el aprendizaje desarrollado por un grupos de profesores en formación inicial a través de los trabajos que realizan en el programa formativo que hayan seguido.

Para caracterizar el desarrollo de la competencia de planificación de los futuros maestros, revisaré y adaptaré el sistema de indicadores que desarrollé para mi tesis doctoral (Lupiáñez, 2009, pp. 162-163). Este sistema de indicadores permite evaluar el desarrollo de esa competencia a partir de las producciones de los futuros maestros durante la materia. La propuesta original de indicadores, para el caso del análisis cognitivo⁴⁴, es la siguiente:

1. Describir y analizar principios y expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo.
2. Delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico.
3. Conocer la noción de competencia matemática básica y su papel en el currículo.
4. Delimitar y distinguir las nociones de error y dificultad y la relación entre ambas.
5. Reconocer y expresar el papel del error en la educación matemática.
6. Conocer y ejemplificar errores y dificultades según diferentes clasificaciones.

⁴⁴ Como describí en el capítulo 2, en el análisis cognitivo el profesor describe y organiza las expectativas de aprendizaje de los escolares sobre un tema de matemáticas (en términos de objetivos específicos y competencias), explora y categoriza las posibles limitaciones que pueden ralentizar ese aprendizaje (según posibles errores y dificultades) y justifica las oportunidades que brinda a los escolares para lograrlo (en términos de tareas).

7. Seleccionar las principales prioridades de aprendizaje o focos de contenido de un tema de las matemáticas escolares.
8. Enunciar objetivos específicos y organizarlos según prioridades o focos.
9. Describir y justificar la contribución de esos objetivos a la competencia matemática.
10. Ejemplificar tareas que contribuyan al desarrollo de objetivos específicos.
11. Analizar el desarrollo esperado de la competencia matemática y revisar el proceso.
12. Enunciar errores y dificultades según diferentes fuentes (incluyendo referentes teóricos).
13. Vincular posibles errores y dificultades con el desarrollo de determinados objetivos específicos.
14. Ejemplificar tareas para detectar y corregir errores y dificultades.
15. Usar la descripción de objetivos específicos y su vínculo con la competencia matemática para diseñar y seleccionar tareas.
16. Aplicar la selección de errores y dificultades en el diseño y selección de tareas.
17. Emplear la información del análisis cognitivo para la secuenciación de las sesiones de la unidad didáctica.
18. Aplicar el enunciado de los objetivos y su relación con la competencia matemática en el diseño de las tareas de evaluación.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

Los primeros indicadores expresan un conocimiento teórico sobre los tres organizadores que estructuran el análisis cognitivo. Los indicadores del 7 al 14 indican un conocimiento técnico de esos organizadores que permite analizar un tema cualquiera de las matemáticas escolares desde un punto de vista cognitivo. Los cinco restantes expresan un conocimiento práctico para el diseño de una unidad didáctica.

Cronograma de Actividades

En la Tabla 5.1 recojo una aproximación temporal de las diferentes actividades que conforman este proyecto.

Tabla 5.1

Cronograma aproximado de actividades

Periodo	Actividades
Sep. 2012 – Ene. 2013	Planificación final de la materia. Caracterización de los descriptores que permiten valorar el desarrollo de la competencia de planificación.
Ene. – Jun. 2013	Desarrollo de la materia. Recolección y organización paulatina de la información. Realización de entrevistas periódicas con el grupo de estudio.
Jun. – Oct. 2013	Análisis de resultados

Tabla 5.1
Cronograma aproximado de actividades

Periodo	Actividades
Oct. – Dic 2013	Conclusiones: Caracterización del conocimiento desarrollado por los maestros en formación estudiados y de su competencia de planificación. Elaboración de un informe final del estudio.
Desde enero 2014	Difusión de resultados en publicaciones y reuniones científicas.

5. BENEFICIOS DEL PROYECTO

Con este estudio pretendo contribuir a la formación de profesores de matemáticas en diversos aspectos que reseño a continuación.

Contribuciones Teóricas

El desarrollo de modelos para caracterizar los procesos de aprendizaje de los profesores que participan en planes de formación estructurados en torno al desarrollo de competencias profesionales, es una contribución teórica relevante para la comunidad de investigación en educación matemática que se interesa por la formación de profesores de matemáticas.

Contribuciones Prácticas

Este estudio surge de la preocupación del grupo del que formo parte, como formadores e investigadores de profesores de matemáticas. Los estudios previos que hemos realizado permiten sostener que la mejora en el diseño y el desarrollo de planes de formación de profesores requiere de la comprensión detallada de los procesos de aprendizaje de los profesores que participan en esos planes. En este sentido, los resultados de la experimentación que pretendo llevar a cabo, contribuirán al conocimiento de estos procesos de aprendizaje y, eventualmente, beneficiarán a aquellos formadores interesados en mejorar el diseño y el desarrollo de planes de formación inicial de profesores de matemáticas.

Plan de Difusión y de Implementación de los Resultados

Como resultado de este proyecto, pretendo producir y publicar documentos relacionados con:

- 1) El desarrollo de un modelo formativo de maestros, en el área de Didáctica de la Matemática, acorde con las competencias profesionales que deben desarrollar y con las directrices del EEES.
- 2) La caracterización del aprendizaje de profesores que siguen ese programa formativo.
- 3) La comprensión del significado que los profesores asignan al análisis didáctico como herramienta para fundamentar y diseñar tareas de enseñanza sobre un contenido específico.

Pretendo publicar estos documentos en artículos y libros, así como difundirlos en foros científicos y profesionales, nacionales e internacionales.

6. OTRAS ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN

Además de la propuesta anterior, en la actualidad estoy inmerso en otras actividades de investigación: un proyecto en curso y la codirección de dos tesis doctorales. También he participado recientemente en la solicitud de dos nuevos Proyectos I+D+i dentro de la convocatoria para 2012 del Ministerio de Economía y Competitividad. Sintetizo estas actividades a continuación.

Proyecto de Investigación en Curso

Se trata de un proyecto que está dirigido desde la Universidad Pedagógica Nacional (México), de la que proceden cuatro investigadores. Mi participación es como investigador internacional junto a la Dra. Climent de la Universidad de Huelva. Los datos generales del proyecto son los siguientes:

- ◆ **Título.** “Prácticas de enseñanza de las matemáticas en la educación primaria con mediación de las tecnologías digitales: Relación entre las competencias tecnológica, conceptual y didáctico-pedagógica" (#145753)
- ◆ **Entidad financiadora.** Secretaría de Educación Pública de México
- ◆ **Tipo de convocatoria.** Proyectos en la Modalidad de Investigación Educativa y/o Científica Básica (SE) de la SEP/SEB-CONACYT 2009
- ◆ **Entidades participantes.** Universidad Pedagógica Nacional (México), Universidad de Huelva y Universidad de Granada
- ◆ **Fecha inicial, final y número de meses.** Febrero 2011 – Febrero 2013; 24 meses
- ◆ **Investigadora principal.** Dra. Ivonne T. Sandoval Cáceres
- ◆ **Número de investigadores participantes.** 6
- ◆ **Importe total concedido.** 16657,55 €.

La finalidad de este proyecto es caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza de la matemática de profesores en ejercicio cuando llevan a cabo su práctica docente con la mediación de tecnología. También nos proponemos abordar el conocimiento profesional del maestro desde la perspectiva de su competencia profesional. A este respecto, los investigadores participantes en el estudio aportan su experiencia previa en la investigación sobre enseñanza de la matemática en entornos tecnológicos (Lozano, Sandoval y Trigueros, 2006; Sacristán, Sandoval y Gil, 2007; Sandoval y Lozano, 2008; Trigueros et al., 2006), sobre la noción de competencia y las competencias del profesor (Lupiáñez, 2009 y 2010; Rico y Lupiáñez, 2008a y b) y sobre el conocimiento profesional del profesor (Climent, 2002; Climent y Carrillo, 2003 y 2007).

Partimos de la base de que integrar tecnologías requiere una transformación cultural del aula y, para ello, el docente necesita desarrollar competencias en tres dimensiones: tecnológica, didáctico-pedagógica y conceptual (lo que en el marco del proyecto denominamos TDC). Las dimensiones aquí denominadas didáctico-pedagógica y conceptual se relacionarían con las referidas, respectivamente, al conocimiento didáctico del contenido y del contenido del MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008). En este caso, nos interesa diferenciar una tercera componente tecnológica, dado el foco del estudio en la enseñanza en entornos digitales. A fin de potenciar la integración de las tecnologías digitales en las clases de matemáticas, con este proyecto pretendemos profundizar en la realidad educativa, a través del análisis de las prácticas de enseñanza

de los profesores de Educación Primaria, tomando como eje sus competencias en estas tres dimensiones TDC. Retomamos las herramientas teóricas de Ball y sus colaboradores (§2.3); y en relación con la integración de las tecnologías, nos basamos en la noción de *instrumentación* a partir de los planteamientos de Drivjers y Trouche (2008) y Rabardel (1999).

Las preguntas que guían la investigación son:

- ◆ ¿Qué tipo de conocimiento matemático para la enseñanza y qué prácticas docentes emergen cuando hay una mediación instrumental con tecnologías digitales, para enseñar matemáticas en primaria?
- ◆ ¿Qué otras herramientas y nociones teóricas son pertinentes para el estudio de las competencias TDC a las que recurren los profesores en sus prácticas de enseñanza?
- ◆ ¿Cómo vincular las competencias TDC de los profesores con programas de formación continua?

Para captar la pluralidad que conforma el sistema de Educación Primaria de México, se tomarán como informantes a profesores de diferentes contextos y tipos (urbana, rural, indígena; de organización completa, multigrado; con distintos niveles de logro educativo en matemáticas). De este modo, los datos de la investigación pretenden recoger las prácticas pedagógicas, culturales y sociales que en la clase de matemática realizan docentes de cuatro estados de la república (Distrito Federal, Estado de México, Oaxaca y San Luis Potosí). Dada la enorme oferta de tecnología en las escuelas, utilizaremos inicialmente un cuestionario para identificar aquellas cuyos usos son más significativos para nuestro estudio en términos de los conocimientos matemáticos para la enseñanza y las competencias TDC que movilizan los profesores. Para profundizar en el fenómeno, se realizarán observaciones no participantes y con estos resultados, se seleccionarán estudios de caso y se realizarán entrevistas.

El objetivo general de esta investigación es categorizar en las dimensiones tecnológica, conceptual y didáctico-pedagógica (TDC) las competencias de docentes de educación primaria que incorporan tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas en primaria. De esta manera, se espera comprender mejor este fenómeno y generar líneas de desarrollo que permitan construir futuras propuestas de formación y desarrollo profesional para docentes del país.

Los objetivos específicos son los siguientes:

- ◆ Identificar el *conocimiento matemático para la enseñanza* y las prácticas docentes en educación primaria, que emergen cuando hay una *mediación instrumental* con tecnologías digitales.
- ◆ Analizar la influencia de las competencias TDC de los docentes de educación primaria en la incorporación de las tecnologías en ambientes de aprendizaje de contenidos específicos de matemáticas.
- ◆ Proponer herramientas teóricas y metodológicas útiles que permitan comprender la adquisición de competencias en las dimensiones TDC en las prácticas de enseñanza de las matemáticas y sus limitaciones.
- ◆ Identificar posibles líneas de desarrollo que permitan construir futuras propuestas de formación y desarrollo profesional para docentes.

El diseño metodológico es de corte cualitativo y los principales instrumentos de recogida de información serán cuestionarios, notas de observación, videograbaciones de clases y entrevistas con los maestros.

Los informantes serán, en una primera fase, 25 maestros de cada Estado (con experiencia en el uso de tecnología en la enseñanza de la matemática), a los que se aplicará un cuestionario. Posteriormente se seleccionará a dos profesores por Estado, de acuerdo a que aporten información relevante, a los que se observará en clase y con los que se realizará el estudio en mayor profundidad.

Esta investigación se encuentra en su fase teórica inicial y el diseño de los cuestionarios al grupo inicial de profesores. Consideramos que puede aportar resultados relevantes, tanto a nivel teórico, al estudiar el conocimiento profesional del profesor en entornos tecnológicos, como para la posterior formación permanente de los profesores del contexto donde se desarrolla.

Dirección de Tesis Doctorales

En la actualidad estoy codirigiendo dos tesis doctorales dentro del programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La primera de ellas, la realiza Rosa Marta Caraballo Caraballo y la codirijo junto al Dr. Luis Rico. La segunda, la está desarrollando José García Suárez y la codirijo junto al Dr. Isidoro Segovia. A continuación describo ambas investigaciones.

Diseño de Pruebas Para la Evaluación de Diagnóstico en Matemáticas. Un Estudio con Profesores de Secundaria (Tesis doctoral de Rosa Marta Caraballo Caraballo)

Esta investigación tiene como antecedente el trabajo de fin de máster que presentó la investigadora en el curso 2009-2010 (Caraballo, 2010), centrado en el análisis y caracterización de los ítems para la evaluación de diagnóstico de la competencia matemática de los estudiantes de 2º de ESO, elaborados por las Comunidades Autónomas españolas en el curso académico 2008-2009. También analizó la adecuación de los ítems al modelo de competencias establecido por el estudio PISA de la OECD y por el Ministerio de Educación y Ciencia en España (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2011a).

El inicio del trabajo de tesis doctoral se centró en desarrollar y definir criterios válidos para el diseño y selección de tareas que permitan promover y evaluar el desarrollo de la competencia matemática (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2011b). La tesis constituye un estudio sobre el desarrollo de la competencia de planificación de los profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, para el diseño de ese tipo de tareas y la pregunta de investigación que persigue es la siguiente: ¿Cómo aplican los profesores su conocimiento sobre las matemáticas para diseñar tareas y secuencias de tareas orientadas al desarrollo de la competencia matemática de PISA, cuyo contenido y enfoque sean adecuados para las evaluaciones de diagnóstico?

Esta pregunta permite definir el objetivo general de la investigación: Planificar, implementar y evaluar un programa de formación dirigido a promover y desarrollar la competencia profesional de los profesores de matemáticas en el diseño y selección de tareas para la evaluación diagnóstica de los escolares de educación secundaria.

Los objetivos específicos que concretan este objetivo general son los siguientes:

1. Caracterizar tareas que evalúen la competencia matemática básica escolar, a partir de las variables de tarea establecidas en el Proyecto PISA y de los requerimientos para la selección de tareas de evaluación de diagnóstico establecidos por la LOE y sus desarrollos normativos.
2. Diseñar, fundamentar e implementar un programa formativo para profesores de matemáticas en ejercicio, centrado en el diseño y selección de tareas para

- promover el desarrollo y la evaluación de la competencia matemáticas de los escolares.
3. Identificar conocimientos y capacidades profesionales en los profesores adecuados para el diseño y selección de tareas de evaluación de la competencia matemática básica de los escolares.
 4. Describir y caracterizar las estrategias y modos con que los profesores usan y aplican las variables de tarea y las directrices de las pruebas en el diseño y selección de tareas y propuestas para la evaluación diagnóstica.
 5. Evaluar la pertinencia y eficacia del programa de formación implementado para el desarrollo de la competencia profesional de los profesores, atendiendo a la evaluación de los escolares de educación secundaria en matemática.

Ya hemos diseñado e implementado el programa formativo y actualmente el trabajo de la doctoranda se centra en el análisis de los datos. Esta parte de la investigación tiene una orientación cualitativa; se trata un estudio de tipo exploratorio-descriptivo basado en la observación y recogida de datos con enfoque evaluativo. La población del estudio son los profesores de matemáticas de nivel secundario en Granada y la muestra que se analizó fue intencional (deliberada o por conveniencia). Los sujetos fueron seleccionados de manera propositiva identificando informantes claves que cumplan con los siguientes criterios: interés personal en el programa de formación, deseo de desarrollar sus competencias profesionales, no menos de cinco ni más de quince años de experiencia en el aula. El programa formativo se realizó entre noviembre y diciembre de 2011 y en él participaron ocho profesores con las características anteriores. Las unidades de información para el estudio son las actuaciones, intervenciones, producciones y aportaciones de los profesores durante el desarrollo del programa.

Un resultado previo de este análisis se presentará en el próximo ICME 12 en Seúl.

Errores y Dificultades de Estudiantes de Primer Curso Universitario en la Resolución de Tareas Algebraicas (Tesis doctoral de José García Suárez)

El planteamiento de la tesis doctoral surge con motivo del trabajo previo de investigación tutelada del doctorando (García, 2010). Este trabajo exploratorio puso de manifiesto que estudiantes de primer curso del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara (México), presentaron un rendimiento bastante deficiente en la resolución de tareas algebraicas relativamente sencillas y propias de cursos no universitarios. Los alumnos mostraron una amplia gama de errores en la resolución de las tareas cuyo origen podría ser orientador para llegar a establecer propuestas curriculares que promuevan la superación de esas limitaciones. El estudio y la categorización de los errores fue el producto final de este trabajo (García, Segovia y Lupiáñez, 2011).

Partiendo de este estudio previo y con el interés en profundizar en el análisis de las posibles fuentes de los errores, se inicio el planteamiento de la tesis doctoral. En una primera fase, el doctorando ha llevado a cabo una revisión de la literatura acerca de los diferentes acercamientos y enfoques sobre el álgebra escolar. Este estudio es clave ya que nos ha permitido organizar las diferentes habilidades y los distintos contenidos relacionados con el álgebra, consiguiendo así delimitar cuál es el aprendizaje que deben desarrollar los escolares al término de la Educación Obligatoria. Los cuatro enfoques delimitados establecen las prioridades de la enseñanza del álgebra: Generalización de la aritmética, Método para la resolución de problemas, Herramienta para el estudio de las funciones y Herramienta para el estudio de expresiones algebraicas (García, Segovia y Lupiáñez, 2012).

Este resultado nos ha llevado a inferir la necesidad del diseño y fundamentación de un instrumento de evaluación que nos permita explorar los conocimientos de álgebra adquiridos por los alumnos y su puesta en juego en la resolución de tareas que responden a los enfoques mencionados. Al mismo tiempo, nos interesa que esas tareas puedan explicitar las posibles dificultades de los estudiantes por medio de errores.

La revisión de literatura realizada en este punto de la investigación, nos ha permitido identificar diversos trabajos que clasifican errores de acuerdo a sus causas, pero sin tener especificidad en el contenido algebraico. Un estudio más profundo nos ha permitido identificar dos trabajos clave. Uno de ellos es el de Booth (1984), que cita los estudios realizados en el proyecto SESM: Strategies and Errors in Secondary Mathematics (Social Science Research Council, 1973) y la realizada por Matz (1980), quien sostiene que los errores que se presentan en la resolución de tareas algebraicas, pueden ser resultado razonable de los intentos por parte de los estudiantes de adaptar sus conocimientos previos a las nuevas situaciones que se les presentan. A partir de estas últimas referencias, analizamos a detalle el instrumento de evaluación utilizado en el proyecto SESM y lo consideramos adecuado para su aplicación en nuestro trabajo de investigación. Actualmente nos encontramos en la etapa de aplicación de una prueba piloto para ratificar su pertinencia y adecuación a los objetivos de nuestra investigación.

Proyectos de Investigación en Evaluación

El primero de ellos, se ha desarrollado y propuesto dentro del mismo equipo que los tres proyectos que sintetice anteriormente. Se denomina “Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación” y la investigadora principal es la Dra. María José González, de la Universidad de Cantabria. El segundo proyecto en evaluación, involucra investigadores de cuatro universidades españolas y de tres áreas diferentes. Yo fui invitado como especialista en Didáctica de la Matemática. Se denomina “Estudio contextual de las dificultades del profesorado para la enseñanza orientada al desarrollo de competencias” y el investigador principal es el Dr. Onofre Contreras, de la Universidad de Castilla-La Mancha. A continuación describo ambas propuestas.

Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación

El estudio del aprendizaje del profesor en formación es especialmente pertinente en el contexto actual, tanto desde un punto de vista investigador como desde un punto de vista institucional. Las investigaciones internacionales sobre el tema son una constante desde hace más de 20 años y gozan de interés creciente, como muestra la recopilación realizada por Sánchez (2011), donde se establece que las actuales temáticas preferentes en la formación de profesores de matemáticas son la identificación de las creencias del profesor, la caracterización de la práctica profesional, el conocimiento y habilidades del profesor, las relaciones entre teoría y práctica y la práctica reflexiva; en particular, se identifica como cuestión emergente la caracterización de las tareas que los profesores realizan en sus planes de formación. Desde el punto de vista institucional, la puesta en marcha del Espacio Europeo de Educación Superior junto con la preocupación internacional por el rendimiento de los estudiantes en matemáticas (OECD, 2009) y la relación entre dicho rendimiento y la preparación de los profesores (Tatto et al, 2008; Rico et al, 2009; Cecilia, Flores et al., 2007), hacen necesario mejorar los esquemas actuales de formación de profesores de matemáticas. La hipótesis de partida del proyecto sostiene que el esquema del análisis didáctico y los organizadores del currículo constituye un marco de referencia válido para la formación de profesores y que al profundizar en el modo en que se produce el aprendizaje del profesor bajo este esquema, mejora los planes y, en consecuencia, la eficacia de la formación.

En este proyecto pretendemos estudiar los procesos de aprendizaje de profesores de matemáticas cuando siguen planes de formación, inicial o permanente, según modelos basados en el análisis didáctico (Gómez, 2007; Lupiáñez y Rico, 2008). Estos modelos se sostienen en el estudio y conocimiento de nociones didácticas que llamamos organizadores del currículo y en las capacidades que de ellos se derivan (Rico, 97; Ortiz, Rico y Castro, 2007). Pretendemos analizar el aprendizaje de los profesores en estos planes de formación desde tres puntos de vista. En primer lugar, nos proponemos fundamentar una propuesta para el desarrollo de las competencias profesionales del profesor de matemáticas. En segundo lugar, nos proponemos averiguar cómo se produce el aprendizaje de los organizadores del currículo en el propio contexto de los planes de formación. En tercer lugar, considerando el fuerte vínculo de estos planes de formación con la práctica docente, pretendemos analizar el efecto del aprendizaje del profesor sobre dicha práctica. Por último, la finalidad global de este planteamiento es contribuir a mejorar los planes de formación de profesores de matemáticas, por lo que esperamos obtener diseños eficaces de formación de profesores de matemáticas.

Los objetivos concretos propuestos son los siguientes:

1. Caracterizar las expectativas sobre el aprendizaje profesional de los profesores de matemáticas que siguen un plan de formación basado en el modelo del análisis didáctico.
2. Elaborar y evaluar un modelo de aprendizaje para profesores de matemáticas que siguen planes de formación basados en el análisis didáctico.
3. Diseñar tareas escolares para el aprendizaje de los contenidos de matemática avanzada y el desarrollo de las competencias matemáticas específicas.
4. Caracterizar los procesos de selección y diseño de tareas matemáticas escolares que realizan los profesores en formación según el análisis didáctico.
5. Identificar las creencias de los profesores en formación sobre las matemáticas y evaluar su influencia en el aprendizaje en planes de formación basados en el análisis didáctico.
6. Establecer implicaciones para el diseño y desarrollo de planes de formación de profesores de matemáticas.

Estudio Contextual de las Dificultades del Profesorado para la Enseñanza Orientada al Desarrollo de Competencias

Este otro proyecto de investigación trata de estudiar uno de los aspectos claves de la última reforma educativa realizada en España, como es la enseñanza orientada al desarrollo de las competencias del alumnado. El giro a este tipo de metodología trata de conseguir un alumnado con mejor rendimiento académico, pero sobre todo, un alumnado que sea capaz de movilizar los conocimientos adquiridos y aplicarlos en su experiencia cotidiana. En este sentido, los nuevos currículos pueden tener unos planteamientos muy atractivos y correctamente orientados, pero si el profesor y el contexto que ha de permitirle llevar a buen puerto los nuevos objetivos curriculares no son los pertinentes, la reforma está abocada una vez más a no conseguir las metas deseadas. Es por ello que con este proyecto nos planteamos como objetivo conocer las dificultades del profesorado español de Educación Primaria y Secundaria en las áreas de Matemáticas, CC. Experimentales y Educación Física, para adaptarse y llevarse a cabo la nueva metodología de enseñanza basada en el desarrollo de competencias. No trataremos sólo de descubrir los problemas que perciben los profesores, divididos estos principalmente en las tareas de programación, enseñanza y evaluación. También intentaremos dar un paso más allá, e indagaremos en las condiciones que se crean en el

proceso de cambio que llevan a cabo las Comunidades Autónomas, desde la transmisión de planteamientos realizada por administradores educativos e inspectores de educación del tema en cuestión, hasta la propuesta de formación permanente que se hace de la misma.

Así trataremos de analizar, en relación a las áreas de Matemáticas, Ciencias Experimentales y Educación Física, los condicionantes que afectan a su trabajo diario, entre los cuales abordaremos el tratamiento dado por las diferentes CC.AA. al problema de la enseñanza por competencias, la percepción del profesorado respecto al proceso de reforma, la formación que están recibiendo, y las diferentes dificultades que están teniendo de diverso orden (conceptual, procedimental y actitudinal) al poner en práctica la enseñanza por competencias. En el primer nivel, el de la política autonómica, pretendemos estudiar el trabajo llevado a cabo por los gestores responsables en las CC.AA., así como por los inspectores educativos. En un segundo nivel, se profundizará en las diferentes fases de la interacción didáctica, es decir, en la fase preactiva o de programación, en la fase interactiva o de contacto con el alumno, y en la fase de evaluación del alumnado.

A pesar de que se está haciendo un gran esfuerzo en hacer un seguimiento permanente de los resultados en la consecución o no de las competencias por parte de los alumnos, no tenemos suficiente información de cómo está siendo el proceso que permite llevar a dichos resultados. Este es el objetivo general que nos planteamos con este proyecto de investigación, que se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar el tratamiento dado por las diferentes CC.AA. al problema de la enseñanza por competencias, y para ello conocer la visión que los administradores públicos tienen de la enseñanza por competencias.
2. Conocer las percepciones de los inspectores educativos españoles sobre el cambio a una enseñanza por competencias.
3. Conocer la formación que se está facilitando con el fin de actualizar al profesorado desde las diferentes administraciones públicas en relación a la enseñanza y evaluación por competencias.
4. Conocer la percepción del profesorado respecto al proceso de reforma del currículum en Educación Primaria y Educación Secundaria, en las áreas de Matemáticas, Ciencias Experimentales y Educación Física.
5. Comparar lo propuesto en los objetivos 1, 2 y 3 por las CC.AA. con la percepción del profesorado con el fin de conocer las deficiencias de los procesos de implantación y de formación, así como las expectativas acertadas y erróneas del profesorado.
6. Estudiar y profundizar en las diferentes dificultades que están teniendo los profesores de Educación Primaria y Educación Secundaria que imparten clase en España en las áreas de Matemáticas, Ciencias Experimentales y Educación Física al poner en práctica la enseñanza por competencias en las diferentes fases del proceso de enseñanza y aprendizaje:
 - ◆ Programación.
 - ◆ Interacción con el alumnado.
 - ◆ Evaluación.

Para conseguir los fines del proyecto, pondremos en marcha una metodología de investigación en la que se utilizarán tanto instrumentos cuantitativos como cualitativos. Esto se hace con el fin de, por una parte, conseguir resultados generalizables a todo el

Estado Español, pero por otra parte, también poder profundizar en las creencias y percepciones de los sujetos de nuestro estudio.

Referencias

- Abbott, I. y Huddleston, P. (2000). Standards, Competence and Knowledge: Initial Teacher Training and Business. *International Journal of Value-Based Management*, 13, 215–227.
- Achtenhagen, F., Oser F. y Renold, U. (2006). *Epilogue*. En F. Oser, F. Achtenhagen y U. Renold. (Eds.), *Competence Oriented Teacher Training*. (pp. 297-304). Rotterdam: Sense Publisher.
- Adler, J. y Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 195-221). Rotterdam: Sense Publishers.
- Alsina, C. (2011). *Mapas del metro y redes neuronales: la teoría de grafos*. Madrid: RBA.
- Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.
- Álvarez, P. (2002). *La función tutorial en la universidad: una apuesta por la mejora de la calidad de la enseñanza*. Madrid: EOS.
- Amorim, S. (2004). Improving student teachers' attitudes to mathematics. En M. J. Hoines (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. Vol II, 25-32). Bergen: Bergen University College.
- ANECA (2005a). *Libro blanco. Título de Grado en Magisterio (volumen 1)*. Descargado el 26/3/2008, de http://www.aneca.es/activin/docs/libroblanco_jun05_magisterio1.pdf

- ANECA (2005b). *Libro blanco. Título de Grado en Magisterio (volumen 2)*. Descargado el 26/3/2008, de http://www.aneca.es/activin/docs/libroblanco_jun05_magisterio2.pdf/
- Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 591-619). Madrid: Síntesis.
- Baethge, M., Achtenhagen, F., Arends, L., Babic, E., Baethge-Kinsky, V. y Weber, S. (2006). *PISA-VET: A Feasibility-Study*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.
- Bajo, M. T., Maldonado, A., Moreno, S., Moya, M. y Tudela, P. (2003). *Las competencias en el nuevo paradigma educativo para Europa*. Granada: Universidad de Granada.
- Ball, D. L., Bass, H. y Hill, H. C. (2004). *Knowing and using mathematical knowledge in teaching: Learning what matters*. Trabajo presentado en Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology, Cape Town.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). Estocástica para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 333-377). Universidad de Granada.
- Beck, C., Hart, D. y Kosnik, C. (2002). The teaching standards movement and current teaching practices. *Canadian Journal of Education*, 27(2&3), 175-194.
- Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M. M., Siufi, G. y Wagenaar, R. (Eds.). (2007). *Reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina. Informe final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007*. Bilbao: Universidad de Deusto, Universidad de Groningen.
- Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CSS.
- Bjuland, R. (1999). Problem solving processes in geometry. Teacher students' cooperation in small groups: a dialogical approach. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128). Columbia, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Boero, P. y Guala, E. (2008). Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 223-244). Rotterdam: Sense Publishers.
- Borba, M. C. y Gadanidis, G. (2008). Virtual communities and networks of practicing mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 181-206). Rotterdam: Sense Publishers.
- Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER Nelson.
- Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). *Las actitudes y emociones ante las matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura*. Trabajo presentado en Grupo de Trabajo "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor" de la SEIEM, La Laguna.
- Cañadas, M. C. y Ruiz, F. (2011). Geometría elemental del plano. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 245-274). Madrid: Ediciones Pirámide.

- Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 75-98). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Cañizares, M. J. (2001). Elementos geométricos y formas espaciales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 401-426). Madrid: Síntesis.
- Cañizares, M. J. y Serrano, L. (2001). Introducción a la geometría. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 369-377). Madrid: Síntesis.
- Caraballo, R., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2011a). Análisis de los ítems de las evaluaciones autonómicas de diagnóstico en España: 2008-2009. *Unión*, 26, 27-40.
- Caraballo, R., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2011b). Análisis y caracterización de tareas matemáticas. Universidad de Granada. Documento no publicado.
- Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2001). Transformaciones geométricas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 427-447). Madrid: Síntesis.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.
- Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.
- Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 315-345). Madrid: Síntesis.
- Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
- Castro, E. y Castro, E. (2001). Primeros conceptos numéricos. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 123-149). Madrid: Síntesis.
- Castro, E. y Flores, P. (2008). *Spanish report on teacher education at primary level*. Documento no publicado.
- Castro, E. y Molina, M. (2011). Números naturales y sistemas de numeración. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 47-74). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Castro, E. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 99-121). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 285-314). Madrid: Síntesis.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.
- Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.
- Chamorro, C. (Coord.) (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

- Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.
- Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 5-162). Universidad de Granada.
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática: Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva.
- Climent, N. (2011). *Proyecto docente e investigador*. Universidad de Huelva.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 387-403.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2005). Proyecto “METE” (Mathematics Education Traditions of Europe): polígonos en primaria. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 139-144). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Coll, C. (2002). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comp.), *Desarrollo Psicológico y Educación. 2. Psicología de la Educación Escolar* (pp. 157-186). Madrid: Alianza.
- Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teachers*. Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
- Consejo Andaluz de Universidades (2008). *Acuerdos adoptados por el Consejo Andaluz de Universidades en relación con la implantación de Enseñanzas Oficiales conforme al Espacio Europeo de Educación Superior*. Descargado el 01/06/2012, de <http://www.uco.es/organizacion/ees/documentos/nuevastitulaciones/reguladas/Acuerdos%20CAU%20Implantacion%20Titulaciones.pdf>.
- Coriat, M. (1989). *Nudos y nexos: redes en la escuela*. Madrid: Síntesis.
- Coriat, M. (2011). Geometría del espacio. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 275-300). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Coriat, M. y Sanz, R. (Eds.) (2005). *Orientación y tutoría en la Universidad de Granada*. Editorial Universidad de Granada.
- Davidson, D. (2003). *Subjetivo, intersubjetivo, objetivo*. Madrid: Ediciones Cátedra.
- Delgado, J. A. (Coord.) (2005). *Líneas básicas de intervención en tutoría universitaria*. Granada: Método Ediciones.
- Delors, J. (Coord.) (1996). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI*. Madrid: Santillana.
- Department of Education and Training. (2004). *Competency framework for teachers*. East Perth: Autor.
- Dickson, L. Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor.

- Dienes, Z. P. (1978). *Cómo utilizar los bloques multibase*. Barcelona: Teide.
- Drivjers, P. y Trouche, L. (2008). A theoretical framework behind the orchestra metaphor. En M. K. Heid y G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the Teaching and the Learning of mathematics, Vol 2. Cases and Perspectives* (pp. 363-391).
- Einem, C., Schmit, G., Ade, J., Totomanova, A. M., Zeman, E., Vestager, M. et al. (1999). *El espacio europeo de la enseñanza superior. Declaración conjunta de los ministros europeos de educación reunidos en Bolonia el 19 de junio de 1999*. Descargado el 17/4/2009, de http://www.eees.es/pdf/Bolonia_ES.pdf
- Elffers, J. (1992). *El Tangram: juego de formas chino*. Barcelona: Labor.
- English, L. (2009). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York: Routledge.
- Equipo Docente del Plan de Estudios del Grado de Maestro en Educación Primaria (2010). *Plan de Estudios del Grado de Maestro en Educación Primaria*. Descargado el 16/4/2010, de: http://grados.ugr.es/ed_primaria/pages/titulacion/objetivos.
- Erlanson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. y Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry. A guide to methods*. Thousand Oaks: Sage.
- Evertson, C. M. y Green, J. L. (1989). La observación como indagación y como método. En M. C. Wittrock (comp.), *La investigación en la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación* (pp. 304-421). Barcelona: Paidós.
- Fernández, A. (2006). Metodologías activas para la formación de competencias. *Educatio siglo XXI*, 24, 35-56.
- Fernández, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.
- Fernández, F. D. (2007). *La tutoría entre compañeros en la Universidad*. Universidad de Granada.
- Fernández de Haro, E. (2011). *Bases para la elaboración del proyecto docente. Contextualización institucional y profesional*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Fernández, F. y Segovia, I. (2011). Proporcionalidad entre magnitudes. Medidas indirectas. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 375-400). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.
- Flores, P. (1998). *Proyecto docente*. Universidad de Granada.
- Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Granada: Arial.
- Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 189-218). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Fosnot, C. T. y Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth: Heinemann.

- Frías, A., Gil F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 477-502). Madrid: Síntesis.
- García, F. (2012). *Viaje por la matemática discreta: De números, grafos y laberintos*. Madrid: Creaciones Copyright.
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.
- García, J. y Bertrán, C. (1987). *Geometría y experiencias*. Madrid: Alhambra.
- García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 145-155). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2012). *Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas*. Trabajo presentado en Seminario de Investigación de los Grupos de Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática, Valencia.
- García, M^a del M. y Romero, I. (En prensa). Uso del análisis didáctico en una investigación acción en secundaria: Un avance sobre el análisis de actuación. En *Análisis didáctico en educación matemática: componentes, usos e interpretaciones*.
- Gete, J. y del Barrio, V. (1988). *Medida y realidad*. Madrid: Alhambra.
- Giménez, J. y Gironde, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.
- Godino, J. D. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2004). Geometría para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 181-285). Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2004). Medida de magnitudes para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 287-331). Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C. Y Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 33-46). Ciudad Real: SEIEM.
- Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Gómez, P. y González, M. J. (2008). *Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training*. Trabajo presentado en ICME

11 (Topic Study Group 27), Monterrey.

- Gómez, P. y González, M. J. (2009). Analyzing and selecting tasks for mathematics teaching: A heuristic. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: Studies inspired by John Mason* (pp. 179-188). Rotterdam: Sense Publishers.
- Gómez, P., González, M. J., Gil, F., Lupiáñez, J. L., Moreno, F., Rico, L. y Romero, I. (2007a). Assessing the relevance of higher education courses. *Evaluation and Program Planning*, 30(2), 149-160.
- Gómez, P., González, M. J., Rico, L., Gil, F., Lupiáñez, J. L., Marín, A., Moreno, M. F. y Romero, I. (2008a). *Future Secondary Mathematics Teachers Training From a Functional Perspective*. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 29, Monterrey.
- Gómez, P., González, M. J., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008b). Learning the notion of learning goal in an initial functional training program. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME 32) and North American Chapter (PME-NA XXX)* Vol. 3, 81-88. Morelia: Cinvestav-UMSNH.
- Gómez, P., González-López, M. J. y Lupiáñez, J. L. (2007b). Adapting the hypothetical learning trajectory notion to secondary preservice teacher training. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1876-1885). Chipre: University of Cyprus.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.
- Gómez, P., Lupiáñez, J. L., González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Rico, L. y Romero, I. (2006). Caracterización y evaluación de diseños de planes de formación inicial de profesores de matemáticas en el marco del espacio europeo de educación superior. En J. L. Benítez y A. B. García (Eds.), *La universidad ante el reto del espacio europeo de educación superior: Investigaciones recientes*, 257-278. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L. y Marín, A. (2007c). *Capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en III Congreso Internacional de Formación del Profesorado, Granada.
- González, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 257-283). Madrid: Síntesis.
- González, J. y Wagenaar, R. (Eds.). (2003). *Tuning educational structures in Europe. Informe final. Fase uno*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- González, J. y Wagenaar, R. (Eds.). (2006). *Tuning educational structures in Europe. Informe final. Fase dos*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- González, M. J., Gil, F., Moreno, M. F., Romero, I., Gómez, P., Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2004). *Generic and specific competences as a framework to evaluate the relevance of prospective Mathematics teachers training syllabuses*. Trabajo

- presentado en Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen.
- González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 351-373). Madrid: Ediciones Pirámide.
- González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L. y Romero, I. (2006). Relevancia de planes de formación inicial de profesores de matemáticas. *PNA*, 1(1), 3-20.
- Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Ifrah, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.
- Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa Calpe.
- Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2005). *PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de resolución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 335-361). Rotterdam: Sense Publishers.
- Jaworski, B. y Wood, T. (Eds.) (2008). *The mathematics teacher educator as a developing professional*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Junta de Andalucía (2003). LEY 15/2003, de 22 de diciembre, Andaluza de Universidades.. *BOJA*, 251, 27452-27474.
- Junta de Andalucía (2007). Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. *BOJA*, 252, 5-36.
- Junta de Andalucía (2011). LEY 12/2011, de 16 de diciembre, de modificación de la Ley Andaluza de Universidades. *BOJA*, 251, 7-20.
- Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética*. Barcelona: Aprendizaje-Visor.
- Krainer, K. (2003). Teams, communities and networks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 93-105.
- Krainer, K. (2008). Individuals, teams, communities and networks: participants and ways of participation in mathematics teacher education. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 1-10). Rotterdam: Sense Publishers.
- Krainer, K. y Wood, T. (Eds.) (2008). *Participants in mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

- Krause, E. (1991). *Mathematics for elementary teachers. A balanced approach*. Toronto: D. C. Heath.
- Kulm, G. (2008). Teachers' mathematics knowledge. *School, Science and Mathematics*, 108(1), 2-3.
- Leikin, R. (2008). Teams of prospective teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 63-88). Rotterdam: Sense Publishers.
- Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F. L. Lin y T. J. Coney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Dordrecht: Kluwer Academia Publishers.
- Lerman, S. y Zehetmeier, S. (2008). Face-to-face communities and networks of practising mathematics teachers: Studies on their professional growth. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 133-153). Rotterdam: Sense Publishers.
- Lin, F. L. y Ponte, J. P. (2008). Face-to-face learning communities of prospective mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 111-129). Rotterdam: Sense Publishers.
- Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 151-175). Madrid: Síntesis.
- Llinares, S. y Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 155-179). Rotterdam: Sense Publishers.
- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones: la relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.
- Lozano, M., Sandoval, I. y Trigueros, M. (2006). Investigating mathematics learning with the use of computer programmes in primary schools. *Proceedings of the 30th PME*. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátka y N. Stehliková (Eds.). *Proceedings of the 30th PME International Conference*, Vol. 4, (pp. 89-96). Praga.
- Luengo, J., Luzón, A. y Torres, M. (2008). El enfoque por competencias en el desarrollo de políticas de formación del profesorado. Entrevista a Claude Lessard. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*, 12(3), 1-16.
- Lupiáñez, J. L. (2005). *Objetivos y fines de la educación matemática. Capacidades y competencias matemáticas*. En Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Lupiáñez, J. L. (2007a). *Diseño y selección de tareas para el desarrollo de competencias matemáticas. El papel de los materiales y recursos*. Conferencia impartida en Jornadas Provinciales sobre Competencias Básicas en Lengua y Matemáticas, Fuengirola.
- Lupiáñez, J. L. (2007b). *Competencias y Capacidades Matemáticas*. Conferencia impartida en Jornadas de la Red Andaluza de Formación (XX Aniversario), Sevilla.
- Lupiáñez, J. L. (2007c). *¿Soy competente en matemáticas?*. Conferencia impartida en Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas: Competencias Matemáticas, Granada.

- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. (2010). *Competencias del profesor de Educación Primaria*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. (2011). *La resolución de problemas en el desarrollo de la competencia matemática*. Conferencia impartida en VII Congreso internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, Cartago, Costa Rica.
- Lupiáñez, J. L., Cañadas, M. C., Molina, M., Ruiz, J. F. y García, M. (2011). *Medida de magnitudes con GeoGebra en la formación de maestros*. Trabajo presentado en II Jornadas sobre GeoGebra en Andalucía, Huelva.
- Lupiáñez, J. L. y Flores, P. (2011). Sentido espacial. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 329-349). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Lupiáñez, J. L., Molina, M., Flores, P. y Segovia I. (2007). Mathematics primary teacher training in the context of the European Higher Education Area. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences* 2(4), 223-232.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 225-236). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Lupiáñez, J. L. Segovia, I. y Flores, P. (2006). Formación Inicial de Profesores de Primaria en Matemáticas en el Marco del Espacio Europeo de Educación Superior: Implicaciones para el Aprendizaje de los Escolares. En J. I. Navarro y M. Aguilar (Eds.), *Learning maths in childhood. Proceedings of the International Symposium on Early Mathematics*, (pp. 307-328). Cádiz: Departamento de Psicología de la Universidad de Cádiz.
- Martínez, A. M. y Rivaya, F. J. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Martínez, J. (1991). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid: Editorial Escuela Española.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*, 3(1), 93-166.
- Maz, A. y Bracho, R. (2011). Números enteros. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 167-188). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Madrid: Síntesis.
- Maza, C. (1991). *Multipliación y división. A través de la resolución de problemas*. Madrid: Visor.
- Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 177-202). Madrid: Síntesis.
- McDougal, M. y Nason, R. (2005). Growth of teacher knowledge within an on-line collaborative learning environment. En P. Clarkson et al. (Eds.), *Building*

- connections: Theory, research and practice: proceedings of the annual conference (MERGA 28)* (Vol. 2, pp. 529-536). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Mesa, C., García, E., González, C., González, Y., Peñalver, M., Iniesta, M. A. et al. (2007) *II Jornadas de trabajo sobre experiencias piloto EEES en las universidades andaluzas*. Granada: Comisión EEES de Universidades Andaluzas.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE*, 106, 17158-17207.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *BOE*, 312, 53747-53750.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, 173, 31487-31566.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007c). Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. *BOE*, 260, 44037- 44048.
- Molina, M. y Castro, E. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 123-146). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Molina, M., Lupiáñez, J. L., Segovia, I., Flores, P. y Ruiz, F. (2008). *Mathematics for prospective primary teachers. A pilot experience for adapting to the european higher education area*. Trabajo presentado en 11th International Congress On Mathematical Education (ICME-11), Monterrey.
- Moreno, M. F., Gil, F. y Frías, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 503-532). Madrid: Síntesis.
- Moreno, S., Bajo, M. T., Moya, M., Maldonado A. y Tudela, P. (2007). *Las competencias en el nuevo paradigma educativo para Europa*. Granada: Vicerrectorado de Planificación, Calidad y Evaluación Docente de la Universidad de Granada.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Universidad de Huelva.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.) *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*. (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. (2004a). NCTM Research Catalyst Conference. Trabajo presentado en NCTM Research Catalyst Conference, Reston, VA.

- Niss, M. (2004b). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Niss, M. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. En *Praktika, 23º Panellenio Synedrio Matematikis Paideias*, (pp. 39-47). Patras, Greece: Elleniki Mathematiki Etaireia.
- Nortes, A. (1995). *Matemáticas y su didáctica*. Madrid: Lerco Print.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.
- Oliveira, H. y Hannula, M. S. (2008). Individual prospective mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 13-34). Rotterdam: Sense Publishers.
- Olmo, A., Moreno, F. y Gil, F. (1988). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis.
- Oser, F., Achtenhagen, F. y Renold, U. (Eds.) (2006). *Competence oriented teacher training*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Pérez, P. (1995). Actividades de probabilidad para la enseñanza primaria. *UNO*, 5, 113-122.
- Perks, P. y Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 265-280). Rotterdam: Sense Publishers.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Pujadas, M. y Eguiluz, L. (2004). Fracciones ¿un quebradero de cabeza? México D.F.: Ediciones Novedades Educativas.
- Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 203-213). Houlgate: IUFM de Caen.
- Recio, T. (2004). Seminario: Itinerario educativo de la Licenciatura de Matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 7(1), 33-36.
- Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Madrid: Paidós-MEC.
- Rico, L. (1992). *Proyecto docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas de Secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rico, L. y Díez, A. (2011). Las matemáticas y el maestro de primaria. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 23-45). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2010. *EDUCATIO SIGLO XXI*, 29(2), 139-172.
- Rico, L., Castro, E. y Castro, E. (1985). *Sistemas de numeración. El sistema decimal: evolución histórica*. Granada: Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada.
- Rico, L., Gil, F., Gómez, P., González, M. J., Lupiáñez, J. L., Moreno, M. F. y Romero, I. (2004). Quality in mathematics teachers training syllabuses. En M. J. Hoines (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference oh the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol I* (p. 341). Bergen University College.
- Rico, L., Gómez, P., Moreno, M., Romero, I., Lupiáñez, J. L., Gil, F. y González-López, M. J. (2003). Indicadores de calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en educación matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 289-297). Universidad de Granada.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (En prensa). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363.
- Rico, L. y Gutiérrez, J. (Eds.) (1994). *Formación científico-didáctica del profesor de matemáticas de secundaria*. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008a). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. (2008b). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2011). Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales. *UNO*, 54, 14-30.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 231-255). Madrid: Síntesis.
- Rojas, N., Flores, P. y Ramos, E. (En prensa). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En *Análisis didáctico en educación matemática: componentes, usos e interpretaciones*.

- Ruiz-Hidalgo, J. F. y Castro, E. (2011). Decimales. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 219-244). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Ruiz, F. (2000). *La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Universidad de Granada.
- Ruiz, F. (2001). Números y formas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 449-475). Madrid: Síntesis.
- Ruiz, F., Molina, M., Lupiáñez, J. L., Segovia, I. y Flores, P. (2009). Mathematics primary teacher training at the University of Granada: an adaptation to the EHEA. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17, 425-454.
- Ruiz, F. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2011). Movimientos geométricos en el plano. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 301-327). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Sacristán, A., Sandoval, I y Gil, N. (2007). Incorporating digital technologies to the mathematics classroom: in-service teachers reflect on the changes in their practice. En *Proceedings of the 29th Annual International Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)*, Lake Tahoe, Nevada.
- Sáenz, C. (1999). *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades*. Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Sandoval, I. y Lozano, D. (2008). Enciclomedia: Una herramienta tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria. En R. Pantoja, E. Añorve, J. Cortés y L. Osornio (Eds.), *Investigaciones y propuestas sobre el uso de tecnología en Educación Matemática*. Vol. 1. México: Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.
- Segovia, I. (1997). *Proyecto Docente*. Universidad de Granada.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2011). Cálculo y estimación. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 147-166). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Segovia, I. y Rico, L. (Coord.) (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Serrano, A., Moreno, E., Santoyo, S., Hernández, Y., Gutiérrez, Y. y Lupiáñez, J. L. (2012). Ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. En Gómez, P. (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 142-199). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Serrano, L. (2001). Elementos geométricos y formas planas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 379-399). Madrid: Síntesis.
- Serrano, L. (2011). Estadística. En I. Segovia y L. Rico (Coord.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 401-425). Madrid: Ediciones Pirámide.

- Sfard, A., Hashimoto, Y., Knijnik, G., Robert, A. y Skovsmose, O. (2004). *The relation between research and practice in mathematics education*. Trabajo presentado en 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen.
- Sierra, M. (2010). *Proyecto docente e investigador*. Universidad de Salamanca.
- Sierra, M., González, M. T., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis.
- Skemp, R. (1980). *Psicología para el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
- Social Science Research Council (1973). *CSMS: Concepts in Secondary Mathematics and Science. Research proposal submitted to the Social Science Research Council*. Nueva York: Autor.
- Sotelo, I. (2009). *Cara y cruz del proceso de Bolonia*. Descargado el 22/4/2009, de http://www.elpais.com/articulo/opinion/Cara/cruz/proceso/Bolonia/elpepiopi/20090416elpepiopi_4/Tes/
- Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1–51). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematics education and development of teachers. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook on research on mathematics teaching and learning Vol. 1*, (pp. 157-224). Charlotte: Information Age Publishing y National Council of Teachers of Mathematics.
- Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L. Rowley, G., Peck, R. et al (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: IEA.
- Tirosh, D. y Wood, T. (2008). *Tools and processes in mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Topping, K. J. (2005). Trends in peer learning. *Educational Psychology*, 25(6), 631-645.
- Trigueros, M., Lozano, M., Sandoval, I., Lage, A., Jinich, E., García, H. y Tovilla, E. (2006). Developing resources for teaching and learning mathematics with digital technologies in Enciclomedia, a national project. En L. H. Son, N. Sinclair, J.B. Lagrange and C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the ICMI 17 Study Conference: background papers for the ICMI 17 Study* (pp. 556-563). Hanoi: University of Technology.
- Tsamir, P. (2008). Using theories as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 211-234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Udina, F. (1989). *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis.
- Universidad de Granada (2012). Resolución de 27 de febrero de 2012, de la Universidad de Granada, por la que se convoca concurso de acceso a plazas de cuerpos docentes universitarios. *BOE*, 65, 24133-24187.

- Van De Walle, J. A. (2009). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. New York: Longman
- Villa, A. y Poblete, M. (2007). *Aprendizaje basado en competencias*. Bilbao: Universidad de Deusto y Editorial Mensajero.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practices. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University.
- Zabalza, M. A. (2002). *La enseñanza universitaria. El escenario y sus protagonistas*. Madrid: Narcea.
- Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En T. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 93-114). Rotterdam: Sense Publishers.
- Zazkis, R. (2008). Examples as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 135-156). Rotterdam: Sense Publishers.

ÍNDICE DE DOCUMENTOS ANEXOS

1. Plan de Estudios del Grado de Maestro en Educación Primaria (2010)
2. Guías docentes de las materias del módulo “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas”
3. Guía Didáctica de la materia “Bases matemáticas para la Educación Primaria”
4. Guiones de los temas de la materia para los estudiantes
5. Guiones de prácticas de la materia para los estudiantes

