LA MODELACIÓN MATEMÁTICA: UN PROCESO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE RELACIONES LINEALES ENTRE DOS VARIABLES

SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO
LINA MARÍA MUÑOZ MESA

ASESORES:

Dr. Carlos Mario Jaramillo López
Mg. Jhony Alexander Villa Ochoa
Grupo De Investigación En Educación Matemática e Historia (Udea-Eafit)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
Medellín, febrero del 2011

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA: UN PROCESO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE RELACIONES LINEALES ENTRE DOS VARIABLES

SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO
LINA MARÍA MUÑOZ MESA

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación.
Línea en Educación Matemática.

ASESORES:

Dr. Carlos Mario Jaramillo López
Mg. Jhony Alexander Villa Ochoa
Grupo De Investigación En Educación Matemática e Historia (Udea-Eafit)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SEXTA COHORTE
2011

DEDICATORIA

A Nuestras familias

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestros agradecimientos a:

Dios por ser nuestro refugio de paz y esperanza en los momentos de crisis.

Nuestras familias por su acompañamiento y preocupación durante la maestría.

Nuestros asesores: Carlos Mario Jaramillo, persona incondicional que con su experiencia aportó a nuestro fortalecimiento y formación académica; y Jhony Alexander Villa, quien con su paciencia, humanidad, conocimiento y optimismo, se convirtió en nuestra guía en los momentos cruciales del proceso de investigación.

Nuestros profesores y compañeros del grupo de investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) EDUMATH, con quienes compartimos conocimientos, experiencias y sentimientos, haciendo de esta maestría una experiencia inolvidable.

Julián David Medina por ser nuestro amigo y apoyo en momentos de confusión y cansancio, a lo largo del proceso de investigación.

A nuestra Institución Educativa Finca La Mesa, en especial, a la coordinadora Grisel Álvarez y el rector César Augusto Rodríguez por brindarnos los espacios y el apoyo en el desarrollo de la investigación.

A nuestros participantes por su disposición, aportes y por ser la razón de ser del proceso de investigación desde nuestra formación personal y mejoramiento profesional.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores Carlos Mario Jaramillo López y Jhony Alexander Villa Ochoa (Presidentes del jurado), Jorge Alberto Bedoya Beltrán y Luis Cornelio Recalde Caicedo, en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación: "*La Modelación Matemática: Un proceso para la Construcción de Relaciones Lineales entre dos Variables*" presentada por las estudiantes **SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO Y LINA MARÍA MUÑOZ MESA**, de la Sexta Cohorte de la Maestría en Educación, línea Educación Matemática, quienes hicieron una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de **APROBADO,** por unanimidad, luego la profesora María Alexandra Rendón, jefa del Departamento de Educación Avanzada, dio a conocer el resultado.

Al trabajo de investigación que mereciere ser destacado, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Meritorio:
Sobresaliente: X

Medellín, 25 de mayo de 2011

CARLOS MARIO JARAMILLO L. **Presidente del Jurado**	**JHONY ALEXANDER VILLA O.** **Presidente del Jurado**
JORGE ALBERTO BEDOYA B. **Jurado**	**LUIS CORNELIO RECALDE C.** **Jurado**

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La presente investigación de corte cualitativo aborda como objeto de estudio el "proceso de construcción de relaciones entre dos variables mediante situaciones de modelación desde la perspectiva realística", con la cual buscamos contribuir a las discusiones teóricas del dominio de investigación a cerca de la *Modelación matemática y aplicaciones* en (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). Aunque este dominio de investigación tiene un alto grado de consolidación a nivel internacional, en Colombia sus desarrollos aún se encuentran en ciernes (Villa-Ochoa J. A., Bustamante, Berrío, Osorio y Ocampo, 2009a). Por tal motivo, pretendemos aportar elementos para la retroalimentación de los procesos en el aula de clase y el desarrollo de análisis en el ámbito colombiano.

Teniendo en cuenta las continuas demandas tecnológicas en nuestras sociedades, es pertinente realizar y apoyarnos en diversas investigaciones educativas orientadas a las necesidades de nuestros contextos escolares. Además, la Educación Matemática requiere que los estudiantes adquieran un rol competitivo y crítico que responda a las demandas actuales en los campos sociales, científicos y tecnológicos. En consecuencia, pretendemos otorgar un papel protagónico a los estudiantes en su proceso escolar, por medio de espacios de participación e intervención en situaciones relacionadas con las problemáticas inherentes a sus contextos.

La educación colombiana soporta las múltiples dificultades escolares a causa de la desarticulación entre los conocimientos escolares y su aplicabilidad en situaciones de la vida cotidiana. Es por esto que, esta investigación desarrollada mediante un estudio de casos pretende caracterizar un proceso de modelación con estudiantes del grado once, en la cual se usan situaciones en un contexto particular para articularlas con las matemáticas, en nuestro caso con relaciones lineales entre dos variables.

Para la presentación de nuestro trabajo de investigación, consideramos 6 capítulos, el primero de ellos se ocupa de presentar algunos antecedentes relacionados con nuestro estudio. Es así como comenzamos a describir los principales elementos que desde la literatura y nuestra experiencia, son relevantes en la discusión sobre los procesos de modelación matemática en los contextos educativos actuales. Con base en estos elementos, delimitamos nuestro problema de investigación con la pregunta: "¿*De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes del grado once, construir relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contexto reales*?"

En el segundo capítulo, nos dedicamos a desarrollar algunos elementos teóricos argumentados desde dos temáticas: el proceso de modelación matemática y la relación entre variables. La primera aborda algunas consideraciones y reflexiones teóricas sobre los siguientes ejes: modelación, modelo y contextos reales, teniendo en cuenta el contexto educativo de la escuela. La segunda, presenta algunas posturas sobre aspectos fundamentales para la conceptualización de la relación entre dos variables.

El tercer capítulo está destinado a presentar el diseño metodológico utilizado en la investigación. Justificamos el paradigma cualitativo y el estudio de caso desde nuestra pregunta de investigación, la forma de relacionarnos con los participantes y sus contextos. Hacemos explícito la planeación e implementación de los métodos e instrumentos de recolección de datos. Y por último, describimos el camino utilizado en el análisis de datos y la exposición de los resultados obtenidos con un grupo de estudiantes del grado once.

Los resultados de la investigación son descritos en los capítulos cuatro y cinco, en cada uno de ellos se analizan diferentes episodios y se interpretan diversos temas desde nuestro objeto de estudio, diferenciando dos focos de análisis; el proceso de modelación y las relaciones lineales entre dos variables.

Finalmente, las conclusiones y recomendaciones de esta investigación se describen en el capítulo seis, principalmente la síntesis de los resultados obtenidos en la implementación con los estudiantes en discusión con los referentes teóricos y la literatura.

Como producto de este estudio, proponemos nuevos elementos para la discusión y reflexión sobre todos aquellos asuntos relacionados con el proceso de modelación en una perspectiva realística. Además, dejamos abierta la discusión en lo referente a sus contribuciones en el aula de clase de matemáticas y a las formas de interacción emergentes en el plano actitudinal y conceptual.

Capítulo 1

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, presentamos el problema que dio origen a nuestra investigación y justificamos su pertinencia desde la revisión de la literatura, nuestra experiencia docente y algunos aspectos matemáticos, partiendo de una problemática que atiende a la descontextualización del concepto matemático con la realidad del estudiante.

1.1 Revisión de la literatura

Algunos conceptos asociados a la linealidad (proporción, función, ecuación y sistemas de ecuaciones, entre otros) han llamado la atención de diversos investigadores en Educación Matemática, en parte, porque son conceptos que conjugan elementos asociados a la variación, la representación y la modelación, los cuales son de importancia para el desarrollo del pensamiento matemático en Colombia (Posada y Villa-Ochoa, 2006a, 2006b).

En el estudio de conceptos matemáticos desde el punto de vista de la modelación, tanto Posada y Villa-Ochoa (2006a) como Vasco (2006) llaman la atención en el reconocimiento relaciones entre cantidades de magnitud, las cuales, a nuestro modo de ver, se convierten en un acercamiento al estudio de la noción de variable; fue así que consideramos de vital importancia iniciar una revisión de la literatura que se ocupe del estudio de las relaciones lineales entre variables.

Para abordar la relación entre variables nos dimos a la tarea de realizar una búsqueda bibliográfica y, a partir de allí, identificamos algunas tendencias que marcaron ciertos lineamientos para el trabajo de investigación que queremos desarrollar.

Para esta revisión bibliográfica se hizo una búsqueda exhaustiva de varias fuentes como:

- Bases de Datos: Science Direct, Springer, Scielo, Dialnet, Redalyc.
- Actas de eventos académicos: PME, CLEME, CIEMAC, CLAME, ALME.

- Recursos web: Google académicos, tesis de maestría y doctorado publicadas en sitios web por universidades.

En el análisis de la bibliografía encontrada, pudimos determinar algunas tendencias y elementos comunes en nociones como por ejemplo: *las expresiones algebraicas, la transición de lo aritmético a lo algebraico y las ecuaciones*; a partir de ellas, pudimos clasificar la información para poder presentarla en una primera categoría a la que denominamos *"Algunas tendencias en investigación sobre el álgebra y la resolución de problemas"*. Dos categorías adicionales emergieron de esta revisión de la literatura las cuales tuvieron como centro de atención las relaciones entre variables y el papel de la modelación en temas asociados al álgebra escolar, Ellas son: *"Aportes de algunas investigaciones sobre la relación entre variables" y "Aportes de algunas investigaciones sobre Modelación Matemática en el álgebra escolar"*. A continuación, nos dedicaremos a desarrollar cada una de estas categorías:

1.1.1 Algunas tendencias en investigación sobre el álgebra y la resolución de problemas

Dada la cantidad de información que se ha producido en el campo del álgebra escolar, y la diversidad de énfasis que se presentan en ellas, hemos agrupado la información en dos subcategorías, a saber: (1) Las dificultades presentadas en la resolución de problemas con planteamientos algebraicos y, (2) las diversas formas de concebir las expresiones algebraicas y la ecuación lineal en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje.

1.1.1.1 Dificultades presentadas en la resolución de problemas con planteamientos algebraicos

En esta subcategoría, agrupamos las investigaciones que abordan la relación entre el lenguaje natural y el algebraico en la resolución de problemas. En ella, la comprensión de un problema matemático está dirigida por ciertos procesos de identificación y elaboración consciente de estrategias que dan cuenta de los elementos relacionados entre las expresiones matemáticas ajustadas a la situación planteada. En este sentido, Filloy, Rojano y Solares (2004) abordan procesos cognoscitivos que se presentan al solucionar problemas con enunciados, haciendo énfasis en la transición de lo aritmético a lo algebraico, desde el abordaje que realiza el estudiante cuando enfrenta problemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Estos procesos exigen del estudiante un pensamiento orientado a la re – elaboración de la noción y representación algebraica de lo desconocido o incógnita y la noción de igualdad matemática.

La variable observada como componente algebraico en la ecuación, resulta ser muy abstracta cuando se aísla del contexto o de una situación en particular. La variable x, como se aborda en los diferentes textos, tiene una connotación que depende del significado de su representación, el cual es determinado por el contenido; es decir la x puede representar el número de animales, también la edad de una persona, o la cantidad de dinero que se encuentra en una cuenta de ahorros. La descripción que se haga del problema tiene crucial importancia en la comprensión, solución de la ecuación y de su interpretación dentro de un contenido relatado en el lenguaje natural, articulado con una representación algebraica que se haga del mismo. En la misma línea de transición entre lo aritmético y lo algebraico, Filloy, Rojano y Puig (2008) trabajan sobre manera cómo, la teoría de modelos locales, en una aproximación al estudio de la adquisición del lenguaje algebraico, incorpora el elemento semiótico de los *Sistemas Matemáticos de Signos*, lo cual permite el análisis de las interrelaciones entre la aritmética, el álgebra y lengua materna como sistema de signos. Este acercamiento teórico encierra un análisis de la relación entre las estructuras de los signos y la construcción propia que hacen los sujetos de éstas. Aspectos que son cruciales en la resolución de problemas que describen contextos particulares de situaciones reales.

Los dos estudios antes mencionados resaltan la importancia de diferentes aspectos del lenguaje como son: el nivel conceptual, representacional y las relaciones de comprensión entre el enunciado y su traducción algebraica en la resolución de problemas, elementos que presentan dificultades para los estudiantes cuando enfrentan problemas de planteamientos algebraicos. En el aprendizaje del álgebra escolar influyen muchos aspectos que preocupan a la comunidad académica, entre los cuales está el desarrollo del proceso numérico y algebraico. Al respecto Filloy y sus colaboradores, expresan que:

> Un buen número de investigaciones realizadas a partir de los años 1980 dan cuenta de las maneras en que el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras permea la interpretación y uso de las letras y de las expresiones algebraicas en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra (Filloy et al. 2008, p. 327).

En esta cita, los autores dan importancia al pensamiento numérico, a los significados que se construyen de los términos o palabras involucradas en el lenguaje matemático y, por último, a las explicaciones e interiorizaciones que construyen los estudiantes durante los procesos algebraicos, temas que por su influencia en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, requieren especial atención y ser abordados desde esta investigación desarrollada en el ámbito de la Educación Matemática.

La dificultad de incorporar las expresiones algebraicas en las soluciones de problemas es una situación que se evidencia en el proceso razonamiento de los enunciados que representan cantidades desconocidas; y que, además, se relacionan por medio de operaciones e igualdades que tienen una correspondencia con el contexto que describe. Filloy et al. (2004) mencionan en el análisis de su investigación, que la solución de problemas de edades, para sus entrevistados, representó dificultades por su complejidad sintáctica, que no sólo exige una alta habilidad en la traducción, sino también del uso de una expresión desconocida determinada, en términos de otro factor desconocido. En este sentido, podemos confirmar la importancia que tiene en la solución de un problema en contexto (edades, comercio, industria, entre otros), las relaciones entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, representadas en la respuesta acertada y coherente a la realidad descrita por en el enunciado y las variables que intervienen en él.

Otros investigadores como Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés (2007) centraron también su interés en establecer posibles dificultades presentadas por los estudiantes al solucionar problemas de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas. En este estudio se empleó, como marco teórico, el aprendizaje por transferencia. El éxito de este método se alcanza cuando los sujetos aprenden a construir isomorfismos entre el problema ejemplo y el problema a resolver, en cuanto a las traducciones del lenguaje natural al matemático, además de conocer los modos matemáticos necesarios para llegar al resultado correcto.

La investigación de Sanjosé et al. (2007) retomó, como orientación en el proceso de resolución de un problema, los tres niveles expuestos por Hegarty y sus colaboradores (1995). Estos son:

a) La comprensión descrita en el enunciado, que implica la construcción del Modelo de la Situación (MS).

b) Traducción de esa situación del lenguaje natural al lenguaje matemático, es decir, pasar de un modelo mental a una representación abstracta, Modelo del Problema (MP).

c) El manejo de herramientas matemáticas necesarias para llegar al resultado. El estudio se focalizó en el análisis del aspecto procedimental del cálculo y resolución de sistemas de ecuaciones (herramientas matemáticas).

Los autores de la anterior investigación concluyeron que las dificultades a la hora de resolver problemas relacionados con ecuaciones de dos incógnitas, no provienen del conocimiento inadecuado ni tampoco del uso de herramientas matemáticas involucradas, sino que por el contrario,

> […] estas dificultades deben proceder de los procesos de construcción de las representaciones de los problemas: de la falta de comprensión profunda de la situación descrita en el enunciado (construcción del MS), o del proceso de traducción entre el lenguaje natural del enunciado y el lenguaje matemático (construcción del MP) (Sanjosé et al. 2007, p. 553).

Así mismo, los estudiantes que intervinieron en la investigación presentaron un alto nivel de fracaso en la interpretación de los resultados matemáticos para responder las preguntas conceptuales. Del anterior estudio, observamos que, a pesar de que los estudiantes pueden resolver de manera satisfactoria un sistema de ecuaciones procedimentalmente, ello no garantiza que las ecuaciones construidas, ni las interpretaciones de los resultados correspondan a la descripción y solución coherente de la situación. Esto nos hace suponer que la dificultad de la comprensión de un problema, radica en la articulación que debe hacerse y no se hace, entre los procedimientos matemáticos y la situación a resolver; así como del planteamiento algebraico con su proceso de solución y argumentación. En este sentido, los autores aseveran que: "Saber calcular no implica saber resolver problemas […], pero es evidente que no se puede tener éxito en la resolución si no se dominan también los procedimientos de cálculo y resolución, asociados con el álgebra en este caso" (Sanjosé et al. 2007, p. 543). Las relaciones entre los símbolos y el planteamiento del problema, se convierten en punto de partida para efectuar los procesos de solución, que satisfaga las necesidades que se colocan de manifiesto en el proceso de solución de cualquier problema, que involucra una traducción entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, en ambas direcciones.

Sanjosé y sus colaboradores, en su investigación, concluyen que los participantes manifiestan problemas de comprensión de los problemas con enunciado algebraico, resaltando que si los resultados fueran generales, se debería hacer énfasis en la comprensión de los elementos y entidades que se interrelacionan con otros elementos para facilitar la construcción del Modelo de la Situación o las relaciones con lo el lenguaje semántico y los saberes previos, y éste a su vez, sería la base para construir el Modelo del Problema o las representaciones del problema en el lenguaje específico de la matemática. La relación estrecha entre la comprensión del enunciado en su lenguaje natural y las representaciones que describen el enunciado en términos matemáticos, en este caso algebraicos, constituye una necesidad al momento de plantear estrategias en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.

Filloy et al. (2004), expresan que en la transición de lo verbal a lo simbólico (cuando los estudiantes tienen que ocuparse por primera vez de problemas y de sistemas de ecuaciones que implican dos incógnitas), aumentar nociones más abstractas, implica interpretaciones de la noción de desconocido en un nivel más concreto. En este sentido, podemos reiterar que en la traducción del lenguaje natural al algebraico, la significación de la noción de incógnita y variable, debe ser incorporada por los estudiantes durante el proceso escolar de algebrización en términos de abstracción y de argumentación de razonamientos, partiendo de las bases aritméticas que se adquieren en los niveles de la educación elemental.

Otras dificultades presentadas por los estudiantes, se focaliza cuando enfrentan problemas con ecuaciones y su articulación con el contexto o el contenido del problema. Es decir, la influencia que tiene para la resolución de problemas la temática que aborda, además del dominio en la interpretación de nociones y elementos abstractos que se incluyen en la situación planteada. Con respecto a estas dificultades, Galagovsky y Cittadini (2008) presentan una propuesta didáctica que lleva a los estudiantes a la formalización de conceptos matemáticos abstractos a partir de la correspondencia con la lógica específica de un contexto de aplicación, y más concretamente con la ecuación matemática lineal, enmarcada en el ámbito de la economía. La evaluación de este estudio arrojó indicadores cualitativos como: interés de los estudiantes, capacidad de superar errores y la toma de confianza a partir de la comprensión bidireccional, es decir que, comprender conceptos aporta a la solución de problemas de mayor complejidad Galagovsky y Cittadini (2008). Resaltamos la importancia de abordar los conceptos matemáticos dentro de una interdisciplinariedad (ciencias naturales, ciencias sociales, economía, astronomía, entre otras) esto es que, para la comprensión o aplicación de contenidos matemáticos, se hace necesario articular diversas áreas del conocimiento, para que el estudiante pueda demostrar su potencial y sus competencias en la solución de problemas y fenómenos reales.

A lo largo del nivel de Educación Básica Secundaria, los estudiantes se enfrentan a textos de álgebra que enfocan la resolución de problemas en la utilización del Método Cartesiano, el cual es definido por Filloy et al. (2004) como la representación de las relaciones entre lo que se sabe y los elementos desconocidos empleando un sistema de muestra (álgebra), en este se formula el problema, permitiendo transformar estas relaciones en uno o varios textos matemáticos, volviendo a la solución del sistema original de la muestra. En esta perspectiva Cartesiana, la enseñanza del álgebra ha tomado como método de aprendizaje, la repetición de una cantidad de problemas que describen similitudes en su desarrollo, aspecto que ha privilegiado a los contextos propios de la matemática, aislando los escenarios propios de los estudiantes de los problemas algebraicos. Galagovsky y Cittadini (2008), en la implementación de su propuesta didáctica, detectaron que los estudiantes no presentaban comprensión conceptual sobre los parámetros matemáticos relacionados con las ecuaciones lineales, tales como la confusión entre variables dependientes e independientes y la falta de claridad en los significados de pendiente positiva, negativa o nula, entre otros. Al aplicar una prueba final, los estudiantes obtuvieron un desempeño exitoso; los autores resaltan en su informe, algunos aspectos en la formación de los estudiantes como por ejemplo; el trabajo en equipo, la autoconfianza que posibilita la comprensión del tema y los errores como una oportunidad que no desvaloriza al sujeto en el proceso de aprendizaje.

Por último Galagovsky y Cittadini dejan abierta la posibilidad de aplicar las actividades en la secundaria como una alternativa que puede generar la inclusión de contextos que sean interesantes para los estudiantes y al mismo tiempo apunte a desarrollar un tema particular de matemáticas o a la re-conceptualización de nociones que se aprendieron en el transcurso de la Educación Básica.

1.1.1.2 Diversas formas de concebir las expresiones algebraicas y ecuaciones lineales en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje

Algunas de las investigaciones centradas en el análisis de procesos de la enseñanza y del aprendizaje de la ecuación lineal, han sido reportadas por Pirie y Lyndon (1997), Panizza, Sadovsky y Sessa (1999), Chazana, Yerushalmyb y Leikinb (2008), Kieran (1995). En cada una de ellas podemos reconocer diferentes formas de concebir conceptualmente los elementos y nociones que intervienen en la construcción de la ecuación lineal. Estas conceptualizaciones posibilitaron la discusión en lo relacionado con su enseñanza o aprendizaje.

Kieran (1995) aborda el estudio de la ecuación lineal, desde una mirada histórica y conceptual del álgebra, analizando diferentes perspectivas desde la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones lineales, no en términos aritméticos sino como estructura algebraica. Además, propone la solución de problemas como una alternativa a la pérdida del significado cuando se trabaja en forma general con los simbolismos algebraicos.

Pirie y Lyndon (1997) al igual que Chazana, Yerushalmyb y Leikinb (2008) centraron sus investigaciones en las concepciones de los profesores en el proceso de la enseñanza de la ecuación lineal. En la primera investigación, se usa la teoría para el crecimiento de la comprensión de Pirie y Kieren, para discutir el concepto como un *todo* (una entidad en conjunto) y no como una suma de partes (acumulación de elementos), puesto que requiere de una comprensión “completa”, más que de operaciones y pasos aislados en su proceso de resolución. Esta propuesta se basa en una enseñanza de las ecuaciones, que tiene en cuenta los procesos de compresión que pueda construir el profesor con sus estudiantes cuando resuelven ecuaciones que involucren la incógnita en ambos lados de la igualdad. En este estudio, la enseñanza se aborda sin relación a situaciones de la vida real, aspecto que actualmente en la educación secundaria posibilitaría la construcción de modelos algebraicos contextualizados a las experiencias de los estudiantes.

En otra investigación, Chazana y sus colaboradores indagan sobre las transformaciones en las concepciones curriculares de los profesores partiendo de una propuesta de enseñanza de cambio curricular basada en el concepto de ecuación como una clase particular de comparación entre dos funciones. Se argumenta que las expresiones variables no son representaciones de números solamente, sino representantes funcionales, para la cual el tratamiento en cada lado de la ecuación se comporta como cambios de una función, concebida como la expresión base del álgebra.

Según nuestro análisis, podríamos pensar que, saber resolver una ecuación lineal, no significa comprender su concepto; es decir, utilizar procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones, no implica que el estudiante comprenda e identifique nociones como variabilidad, constante, dependencia, independencia, razón de cambio, a partir de un problema simulado o real. En este sentido, diversas investigaciones han abordado el concepto de ecuación lineal, desde la superación de lo aritmético para darle paso a lo algebraico. Por lo tanto, la idea de trabajar este concepto desde lo procedimental o lo algorítmico, debe ser algo que va más allá de buscar el valor de una incógnita, para analizar los elementos que constituyen lo invariante de la ecuación, en procesos de planteamiento, solución e interpretación de ecuaciones. Por ejemplo, Panizza et al. (1999) han concebido la ecuación con dos variables desde el reconocimiento de la unicidad o el infinito para su solución. En esta investigación se analizaron elementos como:

- Las soluciones de las ecuaciones lineales dependen del número de ecuaciones y variables.

- El significado del signo igual desde la relación de equivalencia y no como la expresión de un resultado.

- La ecuación lineal con dos variables, como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números.

Tradicionalmente en la escuela se trabajan los sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones es igual al número de las incógnitas, pero cuando se le pregunta a los estudiantes por la solución de una ecuación con dos variables, se presentan dificultades para comprender que tiene un conjunto de infinitos pares de números (lo cual está en amplia relación con el concepto de función). En este estudio, el paso de una concepción aritmética a una algebraica, parece ocurrir cuando se comprende la letra no sólo como incógnita sino como variable. Al respecto Panizza y sus colaboradores (1999) señalan que:

> La noción de incógnita, en cambio, no resultaría eficaz para interpretar el rol de las letras en una ecuación con dos variables, objeto éste que debería ser comprendido si los sistemas lineales fueran concebidos como un conjunto de condiciones independientes que deben cumplirse simultáneamente. (p. 459)

De lo anterior, se puede inferir que, para determinar la unicidad o la infinidad de soluciones de la ecuación con dos variables, es necesario analizarla dentro de un sistema o en forma independiente, además de las diversas asignaciones de significados que adquiere la letra en el proceso de solución de una ecuación con una o dos incógnitas o la interpretación en otros conceptos matemáticos, como lo es la noción de función.

La noción de ecuación ha sido abordada desde el estudio de ejemplos de ecuaciones, sistemas de ecuaciones, problemas relacionados con la economía, entre otros. De las anteriores miradas, sobre la ecuación lineal, se derivan las concepciones de la ecuación en general; categorizadas así:

- Una concepción funcional: la ecuación como comparación de dos funciones
- Una concepción aritmética: la ecuación como una igualdad, una operación para encontrar el valor de algo desconocido utilizando algoritmos.
- Una concepción algebraica: la ecuación como una relación entre cantidades conocidas y desconocidas.
- Una concepción estructural: la ecuación como una entidad en estado de equilibrio, no como la acumulación de elementos sino como un conjunto. La ecuación como un objeto operable sobre sus expresiones algebraicas, no sobre números o números generalizados.

Desde una concepción funcional de la ecuación, las representaciones antes y después del igual corresponden a funciones. Como por ejemplo:

- En la ecuación $2^x = x + 2$, el significado de la letra *x* está asociado a la idea de variable, para la cual es importante tener en cuenta los dominios de la funciones.

Desde una concepción algebraica de la ecuación se entiende comúnmente como una igualdad que generaliza una expresión aritmética. Sin embargo, la ecuación podría entenderse como una organización para relacionar una cantidad desconocida en forma equivalente, por tanto su representación algebraica se establece en ambos lados de la igualdad. Por ejemplo:

- En el caso de la ecuación $2x + 3 = 5x + 8$, el valor de la *x* es igual antes y después del igual. Se le atribuye a la *x* la idea de incógnita.
- En el caso de la ecuación $2a+3b=4$ *y* $3a+b=2$ se tratan dos incógnitas diferentes bajo dos condiciones de equivalencia.

Desde una concepción estructural, la letra está integrada al conjunto de la expresión algebraica, no podría ser asumida en forma independiente. Por ejemplo, en la ecuación $x + y=5$, sus infinitas soluciones podrían implicar una abstracción desde su representación gráfica o un análisis con respecto al significado variable de las letras y su dominio numérico correspondiente. Además, esta ecuación podría llevar a caracterizar una misma clase de ecuaciones.

Las investigaciones de Kieran (1995), Panizza et al. (1999) y Chazana et al. (2008) apuntan a concebir la construcción del concepto de ecuación de manera más significativa, cuando se trabajan las letras o los elementos literales de las ecuaciones en ambas lados de la igualdad. Estos estudios también se han enfocado con mayor prioridad a la solución de la ecuación lineal, más que a la significación en su planteamiento. Además, la extensión del concepto de ecuación lineal al concepto de función ha sido validada en estas investigaciones, con el fin de cualificar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, desde la perspectiva analítica y estructural de la ecuación.

Una mirada del concepto de ecuación lineal, desde una perspectiva estructural, posibilita pensar en la resolución de problemas, que trascienda de los procedimientos mecánicos y de los algoritmos realizados paso a paso, a los procesos enfocados a (re)significar las relaciones de los elementos con la estructura del concepto, la cual representa un problema determinado. Parte de la construcción de este concepto se promueve cuando, tales procesos permiten evolucionar desde ecuaciones contextualizadas en problemas particulares, hacia la formación de parámetros generales que describan la estructura de la ecuación. Kieran (1995) expresa que:

> Ya se han discutido brevemente las adaptaciones que los estudiantes deben hacer cuando comienzan el estudio de las expresiones algebraicas y de ecuaciones: no pueden seguir interpretando estas entidades como operaciones aritméticas sobre algún número sino que más bien deben aprender muy rápidamente a verlas como objetos en sí mismos, sobre los cuales se realizan procesos de cierto nivel (es decir, operaciones). (p. 3)

En esta construcción del concepto de ecuación, también interfiere la forma como los docentes de álgebra en la escuela conciben la ecuación y es reflejada al momento de trabajar el concepto con sus estudiantes en el aula. Por ejemplo, el significado del signo igual, puede interpretarse como una relación de equivalencia, como la simbolización de una expresión algebraica en dos formas diferentes, o simplemente como un separador entre dos expresiones, estas interpretaciones están en correspondencia con alguna de las actividades realizadas sobre la ecuación lineal y por tanto, con su forma de concebirla. Al respecto Chazana et al. (2008), en una de sus conclusiones hacen alusión a que la concepción o articulación de diversos planes de estudios para la misma área de las matemáticas de la escuela, pueden diferenciar en su acercamiento a esas mismas matemáticas. Además, afirman que las distintas formas de abordar una misma temática, desde la innovación del plan de área, implica que el docente establezca nuevas maneras de enseñar, influenciadas por preguntas con las cuales luche y genere cambios en su entendimiento y que a su vez se conviertan en un componente importante de su trabajo en el aula, donde los profesores tengan que "volver a aprender" algunos aspectos de los que ya sabía.

Las múltiples concepciones que se tienen sobre la ecuación lineal son de vital importancia para la creación de situaciones contextualizadas, además influenciarán en gran medida la construcción de otros modelos; "[…] los estudiantes tienen mayor éxito con la aproximación procedimental (la cual requiere un algoritmo para obtener una cantidad) que con la estructural (que requiere una relación de igualdad entre variables)." (Kieran, 1995, p. 4). La ecuación lineal, como expresión algebraica, implica ser visualizada por los estudiantes desde la concepción de "objeto" y no como "procedimiento", estableciendo el cambio entre lo aritmético (cantidades numéricas) y lo algebraico (expresiones relacionadas y estructurales).

1.1.2 Aportes de algunas investigaciones sobre el uso de las letras

El álgebra se ha convertido en uno de los ejes fundamentales de las clases de matemáticas en la secundaria evolucionando en su concepción y definición retomando los procesos de enseñanza y aprendizaje. "El desarrollo histórico del álgebra sugiere que actualmente ésta se concibe como la rama de las matemáticas que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas así como de la operación sobre esas estructuras" (Kieran, 1995, p. 2). La incorporación de las *letras* y símbolos diferentes al aritmético, en el proceso escolar básico, sugiere en el estudiante un cambio conceptual, procedimental y de significación en la solución de problemas de aplicación enfocados desde fuera o dentro de la matemática.

En la construcción de conceptos como ecuación y función es necesario incorporar la noción y el papel que juega la asignación de la letra en una expresión matemática, que cambia totalmente el sentido a las relaciones entre cantidades, contextos y contenidos. Palarea (1999) define, en su reporte de investigación sobre la adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años, como uno de sus objetivos, el abordaje de las nociones de variable, la cual definen como *"letra con sentido algebraico"*, las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales, en una propuesta que integra el lenguaje numérico y geométrico, haciendo un acercamiento semiótico y un análisis a nivel psicológico (cognitivo) del lenguaje algebraico. En este reporte de investigación, la autora asume el signo algebraico como una herramienta de modelización de sistemas no algebraicos (numérico, geométrico, entre otros), además de ser un signo en sí mismo, es decir como un instrumento específico de la actividad.

Asumir el álgebra como un instrumento de modelización, supone que los estudiantes adquieran un significado y le asignen un sentido a la *letra o signo algebraico,* como lo enuncia Palarea (1999), haciendo la diferenciación con el símbolo numérico y su respectivo papel en la resolución de una situación que describa un determinado modelo matemático. En este sentido la autora afirma que:

> Para que el método algebraico se pueda incorporar como algo natural, es necesario que, además de cambiar los símbolos, se produzca un cambio en su significado, es decir, que no se haga solamente una sustitución de los números por letras, sino que se realice el paso de números a variables y para ello hay que realzar un cambio, tanto de símbolos como de significado. (Palarea, 1999, p. 8)

En el contexto colombiano, Rojas, Rodríquez, Romero, Castillo y Mora (2002) presentan una investigación desarrollada con estudiantes de octavo grado, cuyo objeto de estudio se centró en la transición entre lo aritmético y lo algebraico; los autores concluyen que:

> Puede observarse que la mayoría de estudiantes (cerca de un 70%) están en los niveles más bajos de interpretación de letra (evaluada, no usada o como objeto) y solo un reducido número de ellos (15%) en los niveles superiores (como incógnita, número generalizado o variable). El porcentaje faltante (cerca del 15%), corresponde a estudiantes que por sus respuestas no pudieron ser clasificados respecto a sus interpretaciones de la letra. (p. 48)

En las anteriores investigaciones podemos concluir que, la literatura presenta dificultades comunes sobre la interpretación de la noción de la *letra* que se enseña y que se aprende desde acercamientos aritméticos hasta las formalizaciones que se pretenden establecer en los últimos grados de escolaridad.

El estudiante debe abstraer de la letra una significación o concepto, en el contexto del álgebra, por lo tanto, se debe tener en cuenta la introducción que el docente hace de ésta en las diferentes actividades generadas desde el aula de clase, y que son en gran medida el camino o vía en el que se ubica al estudiante en el proceso de aprendizaje del álgebra escolar. Panizza, Sadovsky y Sessa (1996) expresan en unos de sus diagnósticos que "Las letras aparecen asociadas a la dificultad, al punto donde el trabajo en la clase de matemática se torna incomprensible y ajeno" (p. 2). Así mismo Rojas et al. (2002) sostienen que hay una doble dificultad en el contexto del aula de clase, por un lado el desarrollo de unos contenidos que poco o nada son asimilados por los estudiantes y, por otro, la incapacidad que muestra el docente para buscar alternativas de explicación. Es claro entonces, que la problemática presentada en el aula de clase es mediada por la ausencia de estrategias de enseñanza y la poca memorización de algunas nociones que se graban los estudiantes, para permanecer en las clases de matemáticas.

Otros aspectos que surgieron se centraron en: el significado que le atribuyeron los estudiantes al signo haciendo una comparación del "igual" en el contexto de la aritmética y de álgebra; la desarticulación entre el concepto de ecuación y su conjunto solución, y finalmente, en el diagnóstico resaltan la falta de recursos que tienen los estudiantes frente a las tareas para las cuales los procedimientos que aprendieron no se aplican o no resultan ser adecuados para un determinado ejercicio. Panizza et al. (1996), en el estudio exploratorio de diagnóstico realizado, señalan que:

> […] gran parte de los chicos no disponen del recurso algebraico como herramienta útil en la resolución de problemas (tanto externos como internos a la Matemática) y que no hay avances notorios respecto a ésto a lo largo de la distintos años de la escuela media.(p. 3)

En este aspecto, podemos destacar que la ausencia de un conjunto de sistemas algebraicos obstaculiza en los estudiantes la identificación de relaciones que existen entre las situaciones presentes en la vida cotidiana o simuladas y la creación de un modelo matemático, puede constituirse en una vía para encontrar la solución, el análisis y las conclusiones generadas a partir de la validación del modelo creado.

Otra de las conclusiones que expresan los autores con respecto al álgebra escolar, visualizada como *"instrumento"* y analizada desde *"objeto"*, radica en sustentar que la ausencia de sentido se encuentra en los primeros aprendizajes y la debilidad como herramienta y confusión como objeto se remonta en la inmersión a lo operatorio. En consecuencia, las dificultades con las cuales se encuentran los estudiantes en los grados superiores, cuando se hace necesario el uso de álgebra (*instrumento y objeto*), tienen origen en los primeros acercamientos y construcciones que se tengan del álgebra en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La incorporación de simbología nueva para los estudiantes supone entonces, una conceptualización y significación por parte del docente, para desarrollar actividades que se encaminen a la utilización y uso del álgebra. Rojas et al. (2002) señalan que el profesor no se detiene a pensar en las formulaciones en torno a la especificidad de la simbología matemática empleada en un momento determinado, ni a lo que ésta puede significar, menos aún, se preguntan por lo que significa para los estudiantes. Además, existe poca atención a la estructura y las bases lógicas que el discurso supone para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en el contexto de los estudiantes de secundaria, además del entrenamiento de la memorización, la cual constituye la única salida para sobrevivir temporalmente al mundo de las matemáticas. Desde esta crítica, hay autores como Chevallard (1984, citado en Panizza et al. 1996) quien sustenta que un elemento importante en la ruptura entre la aritmética y el álgebra, pareciera ser el funcionamiento del álgebra como memoria que permite conservar la traza de las operaciones efectuadas y que en ese sentido estaría ligado a la necesidad (o posibilidad) de comunicación de los procedimientos de resolución.

El álgebra escolar, como parte del pensamiento variacional, tiene la tarea de ayudar a los estudiantes en la creación de modelos que describen los fenómenos que los rodean mirados desde un mundo cambiante y circunstancial. Desde esta perspectiva, las situaciones que desde la escuela, presentamos a los estudiantes, deben estar inmersas en los componentes sociales, económicos, políticos y otros, que hacen parte de las experiencias cotidianas de las personas, de lo contrario, estaríamos acentuando una matemática, como lo expresa Blum (1993), presentada desde la manipulación mecánica de símbolos sin sentido, señalando a la modelación matemática como una posible alternativa que contribuye a la significación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Desarrollar las nociones algebraicas desde los procesos variacionales, supone entonces de una buena construcción de los elementos aritméticos en la transición a lo algebraico. En esta transición, los estudiantes tienden a manifestar diferentes formas de describir las leyes, fórmulas o generalizaciones enseñadas por el profesor por medio de ejemplos, asumiendo que contienen en sí, la ideas de poderse cumplir para otros casos, sin considerar la opción de emplear símbolos o letras para su formulación, al respecto Panizza (1996) expresa: “En tanto, la ley general puede expresarse a través de ejemplos, estos ejemplos representan la ley y dejan sin sentido la necesidad de apelar a las letras para representar "un número cualquiera"” (p. 6). En este sentido, crear la posibilidad de reflexión en el estudiante sobre la incorporación de las letras o variables en muchos de los procesos que requiere de ellas, es una tarea que demanda del conocimiento y preparación por parte del docente y de la selección de una metodología que posibilite en el aula de clase una participación activa en los procesos de aprendizaje.

Cuando los estudiantes se enfrentan a lo algebraico, generalmente comienzan con la identificación de las ecuaciones como punto clave para la transición entre lo aritmético y lo algebraico, desde esta transición, la ecuación se convierte en el tema clásico para identificar el trabajo con el álgebra. Algunos autores, en el contexto de la ecuación, abordan la *letra* desde la etiqueta de incógnita, expresando:

- Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido (Küchemann, 1978 citado en Rojas et al. 2002).

- Cuyo valor puede determinarse con exactitud, considerando las restricciones propias del problema (Florencia e Ibarra, 2008).

En el estudio de las ecuaciones, los estudiantes se estancan en la construcción de los diversos significados que ha adoptado la letra según su utilización (evaluada, no usada, objeto, número generalizado, variable, entre otras connotaciones), es por esto que la noción de variable en un sistema algebraico, no es identificado con facilidad, ya que el estudiante asume que la letra siempre se comportará como datos específicos para hallar mediante procedimientos. Al respecto Panizza et al. (1996) puntualiza que: “C. Kieran (1989) reseña un estudio de Küchemann, quien encontró que la mayoría de los estudiantes trataban las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables”. (p. 8)

Panizza et al. (1999), en su investigación sobre la ecuación lineal con dos variables, plantean claramente la gran dificultad que enfrentamos con los estudiantes al efectuarse las incorporaciones correspondientes a la incógnita y a la variable desde sus respectivos contextos. Al respecto concluyen que:

> Al avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de incógnita y el de la noción de variable parece ineludible para desentrañarla la compleja y desafiante relación entre la aritmética y el álgebra. (p. 460)

Estos autores, nos dejan preguntas y discusiones muy claras al respecto, tales como*: Los conceptos, incógnita y variable, ¿podrían nutrirse uno al otro si se construyeran simultáneamente? ¿Habría un espacio de problemas que los abarcara de manera fructífera? ¿Es necesaria la noción de incógnita para arribar a la noción de variable?* (p. 460).

Desde estas investigaciones, podemos concluir que la noción de variable, desde el álgebra escolar parece ser incorporada de una manera restringida, ya que la parte de ecuaciones queda restringida a la búsqueda de un valor y la parte variacional queda relegada a ser estudiada en grados superiores como parte esencial de las funciones, temática obligada en la matemática escolar, pero con grandes obstáculos al ser contextualizada desde diferentes escenarios. Al respecto Castro, y otros (2010) en el VI

Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC), afirman que:

> Reconociendo que es un concepto complejo debido a que se expresa en una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados, el aprendizaje del tema función es uno de los principales objetivos en la enseñanza del Análisis Matemático o Cálculo y su importancia se debe a que es indispensable para la comprensión de conceptos tales como continuidad, límite o derivada de funciones entre otros. (p. 1)

En este estudio, los autores evalúan los niveles de enseñanza y aprendizaje que presentan algunos docentes en el tema de las funciones, y concluyen con algunas afirmaciones como:

> […] la resolución de problemas es central en el proceso de enseñanza–aprendizaje. (p. 5)
>
> En las respuestas obtenidas analizamos fundamentalmente las concepciones predominantes sobre la definición de función a las que se hace referencia: relación entre dos variables, relación entre dos conjuntos arbitrarios, relación entre dos conjuntos numéricos, relación entre dos o más cantidades, relación entre dos magnitudes. (p. 5)
>
> […] el 97% de los docentes proponen a sus alumnos actividades que les permitan pasar de una representación a otra del concepto de función y articular estos diferentes registros. Mientras que solo un 3% de los docentes no las utilizan. (p. 7)
>
> Es necesario proponer un conjunto de situaciones de aprendizaje que permitan el abordaje de aspectos relevantes del concepto de función, teniendo en cuenta que la formación de un concepto matemático, no se logra de una clase para otra, sino que es un proceso que se consolida paulatinamente. (p. 9)

Asumiendo la función como elemento unificador, generalizador y de naturaleza modelizadora (Castro et al. 2010) debemos comenzar a establecer la importancia que toma la relación entre variables, como una de las características esenciales al abordar relaciones funcionales. Desde esta perspectiva, las variables se deben asociar a diferentes contextos que permitan observar los cambios y considerar espacios de análisis para la producción de diferentes representaciones. En este sentido, "En el proceso de simulación y de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, los cuales a su vez impulsa la construcción de otros registros de representación" (Planchart, 2005, p. 2).

Planchart, resalta que la función vista desde la modelación, lleva a establecer e identificar de la realidad: las variables, los participantes, la recolección de los datos que se generan a partir de las situaciones reales o simuladas. Desde esta mirada, los cambios y el establecimiento de variables y sus relaciones tendrán una estrecha relación con las circunstancias que permean al contexto realístico.

Algunas investigaciones publicadas en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, en diversos años, dedican algunos reportes de investigación y estudios sobre la variación desde la perspectiva educativa. Reséndiz (2005) presenta algunas conclusiones sobre las maneras en que algunos docentes introducen la noción de variación en la enseñanza superior. Desde este estudio, la autora hace un análisis del discurso y de la interacción social que se forjan en el aula de clase. La variación da la idea de movimiento, elemento que se destaca en la representación gráfica de la función, frente a esta representación la autora expresa que:

> Consideramos que la estrategia de mover un punto de referencia (el vértice, el origen o la asíntota) fue de gran importancia para que los profesores construyeran sus explicaciones en torno al movimiento de la grafica y, de ahí, enfatizaran el papel de la noción de variación. (p. 621)

Catalán y Dolores (2000) exponen en el estudio que […] la interiorización del contenido del lenguaje variacional subyacente en la ecuación de la recta (fórmula de la función lineal) es aún incipiente […] (p. 41). Haciendo una relación entre la ecuación (forma estática) y la función (forma dinámica), podemos resaltar que aún se encuentra una gran distancia al momento de re-significar la ecuación en términos de lo variacional o funcional, aspectos que se problematizan desde los deficientes niveles de partida o elementos previos, además del poco compromiso y responsabilidad de los estudiantes con sus tareas independientes y resolución de problemas, como lo resaltan estos dos autores en su investigación.

La ecuación y la función desde la idea de álgebra escolar son nociones que dan la presentación a la variación como fundamento de otros contenidos del cálculo y de análisis matemático en niveles superiores de la educación. Es por esto que, se hace necesario reflexionar sobre las diversas formas en las que estamos acercando a estos estudiantes a las nociones matemáticas, para que podamos generar desde nuestros discursos e interacciones con los estudiantes y el contenido, una mayor conexión y significación.

Es sabido entonces que, la variación y la función están enmarcadas en la idea de movimiento, medición y cambio, por lo que es una experiencia humana suscitada desde la cotidianidad y que implica establecer un vínculo entre lo real y lo matemático, Catalán y Dolores (2000) expresa que:

> Los fenómenos de la naturaleza están relacionados de alguna manera; las variables que son abstracciones obtenidas de la variación concreta, también lo están. En la búsqueda de las leyes generales que rigen el movimiento de los cuerpos de la naturaleza cobraron una importancia vital el estas relaciones. Lo esencial de ellas radica en que algunas variables quedan completamente determinadas por los valores que adquieren las demás, un tipo particular de relación de correspondencia dio origen a las funciones. Las funciones poseen dos aspectos esenciales, son relaciones especiales de correspondencia entre variables y sus expresiones simbólicas. (p. 90)

En general, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar está sujeta a múltiples nociones que colocan en juego la idea de lo estático y lo dinámico dentro de un conjunto de situaciones propiciadas desde diferentes espacios y estrategias desarrolladas a la luz de un currículo que más que contenidos enumerados, debe ser una construcción permanente, según las necesidades y a las exigencias del entorno social, económico y político al que se encuentra enfrentado el niño o joven de hoy.

1.1.3 Aportes de algunas investigaciones sobre Modelación Matemática en el álgebra escolar

Desde los Lineamientos Curriculares, se puede constatar la importancia de incorporar en el álgebra escolar procesos de variación, además de la contextualización de modelos en situaciones representativas para los estudiantes, empleando la modelación como un eje del pensamiento variacional. Al respecto, en los referentes curriculares, los Lineamientos de Matemáticas plantean:

> Respecto al álgebra, se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento Variacional (MEN, 1998, p. 17).

A través de los diferentes niveles escolares en la Educación Básica, los estudiantes se enfrentan al aprendizaje de los números y sus aplicaciones (aritmética) que son reemplazadas de un momento a otro por letras (álgebra). Siguiendo este proceso de aprendizaje, los profesores generalmente plantean problemas simulados o contextualizados a una situación determinada combinando letras y números, intentando dar significados al lenguaje algebraico con referencia al lenguaje natural y cotidiano.

Existen diversas investigaciones que centran su objeto de estudio en el análisis del álgebra y la relación con los procesos generados en la enseñanza y el aprendizaje. Al introducir el álgebra en las clases de matemáticas, se hacen evidentes las diversas dificultades que experimenta el estudiante en la comprensión de una situación contextualizada y la elaboración de soluciones relacionadas con los problemas que se le plantean. Al respecto, Olazabal y Camarena (2004) desarrollan una investigación sobre la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico; en ella, plantean que una de las causas por las cuales a los estudiantes se les dificulta llegar a la metodología de contextualización, es la presentada al hacer la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico y con mayor razón, la obtención de un modelo matemático que represente el problema planteado. Entendiendo por lenguaje natural, aquel en el cual está expresado el problema dentro de una disciplina determinada o de actividades relacionadas con la vida cotidiana.

El aprendizaje del álgebra en general, se ha presentado de una forma repetitiva, sin un contexto determinado y familiar para el estudiante. La mezcla de símbolos y operaciones, que traducen un enunciado con un significado determinado, se convierten, hoy en día, en uno de los principales conflictos y uno de los retos más importantes en la enseñanza del álgebra en la educación básica. Las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con símbolos para obtener un resultado, provienen en gran medida del tipo de instrucción tradicional que le damos a los objetos matemáticos, los cuales son tratados de manera formal, mediante símbolos escritos, carentes de un contexto que puedan dar un significado propio y establezcan las operaciones que presiden estos símbolos (Rivero, 2000).

En la misma línea, la investigación de Ruano, Socas y Palarea (2008) sugieren que el estudio de los errores cometidos por los estudiantes, proporciona información sobre las ventajas y dificultades de emplear una u otra manera de introducir el álgebra en el ambiente escolar. En este sentido, realizan un estudio con el objetivo de analizar y clasificar los errores, en los cuales incurren un grupo de estudiantes de secundaria en los procesos de sustitución, formalización, generalización y modelación.

Dicha investigación concluye que, una de las principales necesidades presentadas por los estudiantes, es la de particularizar, y afirman, que esto se debe a la ausencia de sentido como consecuencia de las características propias del lenguaje algebraico. Con respecto a lo anterior, expresan que “A pesar de que los alumnos reconocen el modelo, no encuentran significado al uso de las letras y necesitan retroceder a lo numérico para poder resolver el problema” (Ruano et al. 2008, p.71). Podemos entonces observar lo importante que es para la construcción de un modelo matemático, la necesidad de dotar de sentido los símbolos y representaciones que describen la situación planteada en el proceso de modelación, aspecto que tiene como base el manejo de los elementos aritméticos. Otras de las conclusiones que presentan es que, para proporcionar sentido a un objeto matemático, no es suficiente con mostrar un contraejemplo, se hace necesario recurrir a otras situaciones que muestren esquemas apoyados en distintos sistemas de representación y no solamente argumentos formales.

Otras investigaciones abordan la relación entre el método de enseñanza y el aprendizaje. El profesor de matemáticas debe adoptar diversos modelos en la enseñanza, que generen procesos de elaboración de conceptos y aplicaciones sobre el álgebra para favorecer el aprendizaje. Con respecto a lo anterior Rivero (2000, p. 2) afirma: "El uso de un modelo en donde el estudiante pueda comparar las acciones sobre los símbolos, con acciones en el modelo parece ser mecanismo de apoyo muy claro a los procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje en matemáticas […]". Es indiscutible que la forma de enseñar influye notablemente en los resultados del aprendizaje de nuestros estudiantes y específicamente en la posibilidad de usar los símbolos matemáticos en un contexto determinado.

En la búsqueda de nuevas estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la modelación ha sido defendida como el método que permite al estudiante aprender las matemáticas de una manera aplicada, además de mejorar la capacidad para leer, formular, interpretar y solucionar diferentes situaciones problemas (Biembengut y Hein, 2004). En general, la gran preocupación de los profesores está orientada al planteamiento y ejecución de alternativas que generen, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, un sentido, es decir, una correspondencia entre lo teórico y la vida cotidiana.

Biembengut y Hein en su investigación, además de plantear la importancia de la modelación como método de enseñanza, rescatan la investigación como una estrategia para que los estudiantes elaboren modelos matemáticos. Desde esta perspectiva, la contextualización de los saberes matemáticos y la interpretación de los diferentes contextos por parte de los estudiantes resulta una tarea difícil. Al respecto expresan: "[…] cuando un alumno es colocado frente a un texto o un contexto, presenta serias dificultades para leer, entender e interpretar, es decir, para hacer una lectura." (p. 122). Con base en la anterior afirmación, podemos concluir que la implementación de acciones en el aula que partan de un contexto, puede ser uno de los ejes centrales en las clases, logrando así una familiarización del estudiante con ambientes educativos que favorezcan el aprendizaje y la construcción de saberes significativos.

Biembengut y Hein (2004) también expresan que, unido a la dificultad de interpretar el contexto, el estudiante presenta otras dificultades al enfrentarse con procesos de modelación en el aula de clase, tales como: disponibilidad para investigar dentro y fuera de la institución, elección de un tema de interés evitando que sea tan sencillo que no genere ningún conocimiento matemático o tan complejo que conduzca a la pérdida de la motivación, trabajo en equipo que no garantiza que el tema elegido sea de interés para todos y la falta de compromiso que se despierta en algunos de los integrantes.

Sin embargo, la implementación de la modelación en las aulas de clase, no sólo concentra dificultades para los estudiantes sino para el docente y el mismo currículo. En esta investigación se describen algunos inconvenientes que se presentan para el profesor, como: la lectura, interpretación, formulación y explicación de un contexto, la poca preparación de los profesionales sobre la modelación como método de enseñanza, la escasa bibliografía existente sobre la modelación y la enseñanza, la falta de orientación de un experto en modelación que esté presente en la implementación del método en el aula, la ausencia de una planificación de las situaciones a modelar, la poca disponibilidad para aprender y orientar a los estudiantes en diferentes equipos de clase en procesos propios de modelación, la falta de apoyo que recibe el docente de la comunidad educativa en ciertas ocasiones y la reformulación de la manera de evaluar, no como resultado, sino como proceso.

El proceso de modelación, debe ir acompañado de construcciones significativas realizadas por los estudiantes desde la creación de una situación contextualizada hasta la validación del modelo en otros contextos. Para desarrollar este tipo de construcciones los estudiantes, deben contemplar la necesidad de emplear el álgebra para la solución de las diversas situaciones a las que se enfrentan, al respecto Novembre (2005) en el informe realizado en Argentina sobre las nociones de letras, ecuaciones y funciones en las evaluaciones nacionales, analiza que:

> Desde el punto de vista didáctico, la enseñanza de la traducción entre el lenguaje coloquial y el simbólico plantea un problema. Se enseña antes de que los alumnos tengan la oportunidad de necesitarlo. Como

> consecuencia, se les dificulta reconocer las ocasiones de uso de esta herramienta. (p. 6)

Es por esto que, la modelación desde contextos auténticos para los estudiantes puede ser una posibilidad de crear necesidades en la utilización del álgebra en el diseño de modelos que responden a las exigencias de la situación particular.

Al enfrentarnos al proceso de investigación, constatamos que muchos estudios confluyen en la presentación de dificultades, estrategias, evaluaciones, metodologías, recuentos históricos, entre otros aspectos, que nos abren las opciones de continuar con la reflexión sobre la labor de la enseñanza y el aprendizaje como elementos constitutivos de los procesos escolares. La incorporación de la matemática como una de las áreas que promueve procesos de pensamientos presentes en muchas de nuestras acciones cotidianas, debe ser presentada a los estudiantes desde diferentes perspectivas y debe ser reevaluada desde nuestros cuestionamientos y retos educativos.

A continuación, establecemos algunos de los argumentos que surgen desde nuestra experiencia en la docencia, aspectos que como a muchos investigadores, los lleva a indagar y a proponer diferentes puntos de vista que de una u otra forma aportan a la discusión sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde nuestras aulas escolares. Reconocemos que nuestro estudio no es la solución inmediata a las problemática que desde hace muchos años presenta la educación matemática, pero es una alternativa y un punto de vista que aporta tanto a la discusión colectiva como a la reflexión individual.

1.2 Antecedentes de la investigación. Una mirada a nuestra experiencia docente

Nuestra experiencia docente nos ha permitido observar que las actividades involucradas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, revelan una desarticulación entre las matemáticas escolares y los contextos socioculturales de los estudiantes. En el caso de los procesos algebraicos, es problemático la manipulación sin sentido sobre las expresiones simbólicas. Es común que identifiquemos dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar que comprometen un modo espontáneo en la utilización de pasos algebraicos aislados de una significación conceptual y contextual de la variable. Por lo que la forma de enseñar algunos conceptos, en especial el concepto de función, tradicionalmente se ha abordado en forma “mecánica”, es decir, centrado en tareas en las cuales los estudiantes tienen como objetivo, sólo operacionalizar expresiones algebraicas. Al respecto Hoyles, Skovsmose, Kilpatrick, in collaboration with Valero (2005) afirman que no hay duda que una característica de las matemáticas ha sido el desarrollo de los cálculos que permitan la manipulación de símbolos "sin sentido".

El aprendizaje del álgebra, en el caso particular de la función, se ha reducido a las actividades mecánicas y operativas, independientes de prácticas escolares que incluyan situaciones para favorecer una construcción de los conceptos matemáticos en los estudiantes, esto evidencia un problema de desarticulación en el proceso de aprendizaje. Las matemáticas aprendidas como herramienta mecánica y facilitadora de procesos simulados, ahonda aún más la apatía y poca recepción de los estudiantes en las clases.

Desde nuestras aulas de clase, hemos detectado la falta de apropiación que presentan los estudiantes de las situaciones y problemas matemáticos, ya que ocasiones estos problemas no posibilitan una conexión con las concepciones, experiencias y prácticas de los estudiantes. Desde esta carencia, los procesos de enseñanza se complejizan al surgir con mayor frecuencia un alto grado de pérdida del área y un excesivo desinterés por parte de los estudiantes al enfrentarse con actividades en la clase de matemáticas.

Los procesos de aprendizaje en matemáticas requieren de significados construidos por los mismos estudiantes, los cuales no son sólo proporcionados por los educadores o por los libros. En ese sentido, encontramos necesario concebir una construcción de los conceptos asociados al álgebra escolar basada en significados generados por procesos de modelación ya que, según el MEN (1998), este proceso posibilita la reflexión, discusión, y en general la construcción de conceptos matemáticos en forma significativa. Por tanto, parte de nuestra preocupación se enmarca en estudiar el papel que juega la modelación en la producción de diferentes nociones y relaciones asociadas a los conceptos matemáticos, en especial a las nociones de variación y relaciones que desde los contextos reales se puedan establecer, dotando de significado la construcción de elementos teóricos, pero a la luz de la situación construida desde espacios de cotidianidad.

Al igual que los estudiantes, los docentes también tenemos algunas dificultades que fortalecen la desarticulación y reproducción de temáticas sin sentido. Desde esta mirada, pensamos que algunos docentes de matemáticas, actualmente, no hemos comprendido a nivel epistemológico e histórico muchas de las nociones que estamos abordando en el aula de clase, aspecto que es preocupante y aunque no es objeto de estudio en nuestra investigación, es un factor que desfavorece los procesos de enseñanza y, por ende, los de aprendizaje.

Asociado a los factores que se centran en los estudiantes y educadores, pensamos que existe un tercer problema que no permite una aproximación de las matemáticas escolares con el contexto. Esta problemática reside en la implementación de los Estándares Curriculares no como una guía que puede orientar y articularse a las diferentes instituciones, sino como una exigencia para todos, bajo las mismas condiciones, aspecto que consideramos fatal porque se aleja de lo que vivimos en la realidad: estudiantes con necesidades particulares, instituciones con problemáticas diversas, espacios físicos con condiciones diferentes a otros, y así como éstas, existen múltiples aspectos que son decisivos en el desarrollo de la vida escolar y que desde los reglamentos establecidos por el sistema educativo no se tienen en cuenta.

No hay que dejar de reconocer que por tener diversidad de comunidades, intereses, locaciones, culturas y sobre todo diversidad de pensamiento, la problemática se extiende en muchos otros niveles (económico, político, social, familiar), pero que nuestra intención es re-pensar nuestra labor para que, desde nuestro pequeño espacio, el aula de clase, podamos transformar algunas prácticas educativas, resaltando que las matemáticas surgieron de necesidades dadas desde las circunstancia y que por este motivo, también deben ser enseñadas y significadas hoy en día como una forma crítica de pensar y solucionar conflictos en los diferentes ámbitos de la vida.

Las metodologías tradicionales y los contenidos plasmados en los libros de texto en el campo del álgebra escolar parecen ser los ejes dominantes en los procesos de clase, asumiendo que las matemáticas ya están hechas y no hay necesidad de repensarlas al momento de ser enseñadas. Es común que, las tareas en el aula de clase estén direccionadas a la reproducción de procedimientos y trasmisión de definiciones con algunas aplicaciones intra-matemáticas. Con lo cual, nos preocupa la desarticulación de los conceptos algebraicos con el entorno del estudiante, en tanto son escasos estos esfuerzos para el uso y la construcción de conceptos en contextos que motiven el estudiante al estudio de fenómenos de variación en el marco social, cultural y cotidiano. Al respecto, Sierpinska (1992) sustenta que los estudiantes deberían estar interesados en la variación y búsqueda de relaciones antes de ser expuestos a las definiciones y ejemplos.

El tecnicismo curricular y la presentación de contenidos de manera secuencial, particionada y como objetos externos al ser humano, han conllevado a una despersonalización del estudiante en su relación con el conocimiento matemático escolar. En algunos casos, sí se trabaja en el aula de clase proyectos de investigación, estos se reducen a realizar largas y estéticas consultas, pero con una mínima producción del estudiante. Además, es común observar el tablero y la tiza como los mediadores de comunicación, privilegiados entre el profesor y el estudiante, minimizándose así los espacios de discusión y de empoderamiento del propio proceso de aprendizaje. De acuerdo con Alan J. Bishop (1999) los estudiantes deberán ser los protagonistas del currículo escolar en la medida en que interaccionan y participan con los representantes de la cultura, mediante proyectos basados en problemáticas de la realidad, con el fin de desarrollar una conciencia crítica.

En resumen, precisamos las siguientes problemáticas a partir de nuestra mirada como docentes investigadores:

- Las definiciones formales y la manipulación de símbolos sin sentido predominan las actividades escolares en matemáticas.

- Las expresiones algebraicas lineales predomina un abordaje estático y sin relación a un contexto de interés para el estudiante.
- La forma de llevar al aula algunos problemas simulados o artificiales despersonalizan la actividad del estudiante.
- Los conceptos algebraicos se presentan desarticulados con la vida fuera de la escuela.

Es por esto que incorporar y reflexionar sobre los procesos de modelación, implica una concepción de la enseñanza y aprendizaje cuyo centro no son los contenidos temáticos, sino las situaciones que potencian la construcción de conceptos en contextos particulares. En este sentido, proponer procesos escolares para que los estudiantes logren articular las matemáticas en diversos contextos sociales, escolares o familiares, supone diversas formas de modelar, de construir y de producir diferentes representaciones para un mismo concepto. Pero son estas prácticas, las que podrían contribuir con una de las funciones sociales de la Educación Matemática en Colombia, la cual se orienta hacia en la formación de estudiantes críticos y partícipes en los diferentes modos de interpretar y pensar el mundo.

1.3 Formulación del problema

Tanto desde la literatura producida en el campo del álgebra escolar como desde nuestra experiencia docente, queremos desarrollar una propuesta que considere, en la construcción de nociones matemáticas, diferentes contextos que permitan establecer conexiones entre las matemáticas escolares, otras disciplinas y la misma cotidianidad. En ese sentido, la literatura ha mostrado que es la modelación matemática uno de los caminos más apropiados para cumplir con este fin.

Como una manera de aproximarse al concepto de función y de ecuación, encontramos importante observar de qué manera los estudiantes identifican y construyen regularidades, diferencias, asociaciones, entre otros aspectos respecto a las diferentes cantidades que intervienen en determinada situación. Fue así como tomamos la decisión de centrar nuestra atención en la manera como los estudiantes establecen relaciones entre las cantidades de magnitud que intervienen en situaciones contextualizadas en el entorno de los estudiantes. Por lo tanto, formulamos la siguiente pregunta abordada en nuestra investigación:

> ¿*De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes del grado once, construir relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contexto reales*?

De esta pregunta de investigación, focalizamos la atención en el siguiente propósito y eje de estudio.

1.4 Objetivo

> *Caracterizar un proceso de construcción de relaciones entre variables mediante situaciones de modelación matemática con estudiantes del grado once.*

Objeto de investigación:

> *Un proceso de construcción de relaciones entre dos variables mediante situaciones de modelación en contextos reales.*

Capítulo 2

2 MARCO TEÓRICO

Conforme mencionamos anteriormente, la modelación matemática y las aplicaciones se han consolidado como un dominio de investigación al interior de la Educación Matemática. Sin embargo, como plantean Kaiser y Sriraman (2006) no existe una comprensión homogénea sobre lo que significa la modelación matemática, ni de las maneras como puede implementarse y desarrollarse. Estos autores y posteriormente Kaiser y Schwarz (2010) han presentado una diversidad de perspectivas frente a la modelación matemática, la cuales tienen su fundamento en perspectivas más amplias de la Educación Matemática (i.e, perspectiva realística de la Educación Matemática). Bajo este panorama, encontramos necesario presentar y discutir, de manera explícita, algunas maneras de concebir de modelación matemática y de otros términos asociadas a ellas. A continuación, presentamos algunas nociones de modelación, de tal manera, que nos permitan rescatar los elementos propios de la literatura para soportar nuestras consideraciones.

Las siguientes consideraciones teóricas sobre la modelación matemática se presentan en el marco de las prácticas escolares, y por tanto de su función educativa. De esta manera, las nociones de modelo matemático y contextos reales son discutidas al margen de la literatura y de una concepción de la modelación matemática como proceso.

2.1 Modelación Matemática: un proceso en el aula de clase

La modelación matemática se ha constituido, desde hace más 20 años, en un dominio de investigación en Educación Matemática, considerándose, entre otras posibilidades, como una alternativa que permite la construcción de modelos matemáticos relacionándolos con situaciones del mundo real.

Los procesos educativos que relacionan el "mundo real" y las matemáticas, podrían promover el desarrollo de conceptos matemáticos en el estudiante, por lo que, algunos de los intereses en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, están siendo generados desde el proceso de modelación y su inclusión en el currículo escolar.

La modelación juega un papel que le otorga importancia al desarrollo de competencias en los estudiantes dentro del proceso de construcción de modelos, su interpretación, argumentación y validación con las respectivas situaciones reales, como lo sustentan Blum et al. (2007).

Uno de los elementos importantes del proceso de modelación, como parte de la educación escolar, es que, permite en los estudiantes la adquisición de competencias con el objetivo de analizar, indagar, sustentar y establecer modelos matemáticos fuera del aula de clase. Al respecto, Blomhøj (2004) afirma:

> En el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas, las competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos son de crucial importancia. Este es el caso tanto desde una perspectiva individual en relación a las oportunidades y desafíos educativos y en el mundo laboral, como desde una perspectiva social en relación a las necesidades de una fuerza laboral adecuadamente educada (p.32).

Otro de los argumentos que defiende la implementación de la modelación en el aula de clase es el reconocimiento y el valor de las experiencias de los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos, entendida de este modo, la modelación en palabras de Blomhøj (2004):

> […] tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática. Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria (p.32).

El objetivo escolar de enseñar matemáticas, para que luego los estudiantes las puedan utilizar en otras disciplinas o en situaciones de su vida, debe avanzar hacia la noción de escuela que incluya éstas situaciones como punto de partida para la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, Blum et al. (2007) afirman que abordar las matemáticas escolares teóricamente no implica una *transferencia automática* para matematizar situaciones en contexto extra-escolares.

Optar por la modelación, como proceso para un aprendizaje, no sólo teórico sino práctico, permitiría relacionar las situaciones de la "realidad" con modelos matemáticos que la describen. En consecuencia, el desarrollo del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas reales, no se obtendría trasladando situaciones cotidianas de forma mecánica o simulada, sino creando ambientes de resolución de "problemas auténticos" (Kaiser y Schwarz, 2010) de interés para el estudiante, lo cual va mucho más allá de considerarlas como situaciones basadas en realidades inventadas, falseadas, inusuales, caducadas, lejanas y ocultas presentadas y discutidas por Alsina (2007).

Diversos autores vienen defendiendo el papel que desempeñan las múltiples situaciones y contextos reales que, al ser llevadas al aula, posibilitan la relación de la matemática con otras ciencias del saber y con situaciones de la cotidianidad, por ocuparse de diversos vínculos que se pueden establecer entre los contenidos matemáticos y las diferentes situaciones del mundo real. Por ejemplo Giménez, Diez Palomar y Civil (2007) puntualizan que es importante

> […] no renunciar nunca a que nadie pueda aprender las matemáticas escolares, y establecer todos los puentes posibles para que los y las estudiantes doten de sentido a las ideas matemáticas abstractas, a través de la conexión con sus experiencias cotidianas. (p. 26)

La reflexión sobre el papel de los contextos sociales y las experiencias cotidianas en el aula de clase imponen nuevos cuestionamientos sobre la manera en que éstas deben materializarse en el currículo escolar. En el caso de Colombia, estos se vienen planteando desde la publicación de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) donde se sugiere la incorporación de estos elementos a partir de la implementación de cinco procesos, entre ellos, la modelación matemática y la resolución de problemas.

En nuestro estudio, consideramos que la modelación supone la actividad matemática desde el "hacer" a través de la resolución de problemas relacionados con la vida diaria, los contextos de los estudiantes y los procesos matemáticos, planteados en actividades tales como:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Formular y visualizar un problema de diferentes formas.

- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido (Lange, 1987, citado en MEN, 1998).

Estas actividades constituyen procesos básicos de la modelación, suponiendo una dinámica entre el mundo real y las matemáticas. El identificar, visualizar, formular y transferir, exige al estudiante una forma de expresión coherente con el lenguaje matemático y su comprensión de la realidad.

A pesar de que los Lineamientos Curriculares consideran la importancia de incorporar la modelación en las aulas de clase, se han reportado ciertas críticas sobre la coherencia que hay entre sus fundamentos teóricos y las ejemplificaciones que se brinda a los docentes como guías en la actividad matemática. En el siguiente aparte, esto se expresa así:

> […] las situaciones que presenta el MEN (1998, pp.99-100) para ejemplificar la modelación, están más cercanas a la noción de resolución de problemas, que a la modelación, presentando así una ligera contradicción entre lo expuesto teóricamente y lo ilustrado para la práctica (Villa-Ochoa y Ruiz, 2009, p. 18).

Es claro que, si en los lineamientos no se observan diferenciación alguna entre resolución de problemas y modelación, este hecho puede repercutir en la práctica docente y por tanto en la implementación del proceso de la modelación en las aulas de clase.

La modelación matemática es un asunto de discusión a nivel mundial desde las políticas educativas en relación con las prácticas escolares, convirtiéndose en un reto para que investigadores y docentes la articulen en los currículos, como una estrategia alternativa para darle sentido a la matemática en el contexto escolar. Al respecto, Blum y sus colaboradores (2007), fundamentan que la modelación debe estar en forma explícita en los planes de estudio, pues esta es una forma de vincular a los estudiantes desmotivados a la actividad matemática. Además, las situaciones extra-matemáticas que se pueden utilizar, son las responsables de la creación de significado para los objetos matemáticos inmersos en la modelación.

En general, la modelación puede pensarse como un proceso en el cual se construyen modelos para describir situaciones de contextos reales. Desde los Lineamientos Curriculares el MEN (1998) plantea que: “La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y la matemáticas es la modelación” (p. 97). Desde esta perspectiva, la modelación se puede considerar como todas aquellas relaciones establecidas entre el mundo real y las matemáticas, que influyen en un proceso de matematización para la creación de modelos que describan una situación, y a su vez será punto de partida para la toma de decisiones frente a un determinado problema.

A continuación, describimos algunas consideraciones de modelación abordadas por varios autores, con el fin de conceptualizar diferentes acepciones.

- Treffers y Goffree hacen referencia a la modelación como “una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas”. (Citado en MEN, 1998, p. 98)
- La *modelación matemática* es un proceso que conduce de una situación problema a un modelo matemático. Sin embargo, también se ha vuelto común usar esta noción para el proceso completo consistente en la estructuración, matematización, trabajando matemáticamente e interpretando/validando (varias veces alrededor del ciclo) según lo descrito. (Blum et al. 2007)
- La modelación consiste en el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos y resolverlos interpretando sus soluciones en un lenguaje del mundo real. (Bazzanezi, 2002, p. 16)
- La matematización o modelación puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente. (MEN, 2006, p. 53)
- La modelización matemática, sin embargo, puede ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el

centro de la enseñanza y el aprendizaje, y esto es relevante para cualquier nivel de enseñanza. (Blomhøj, 2004)

- La modelación como una actividad que va más allá de la generalizada idea de construir modelos, para ubicarse en la noción de práctica implicada en la solución de problemas reales mediante la construcción, (re)elaboración e interpretación de modelos. (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo, 2009b, p. 1445; Villa-Ochoa y Jaramillo, 2011)

Teniendo en cuenta que, esta investigación pretende indagar por la manera cómo los estudiantes establecen relaciones lineales entre variables involucradas en situaciones propias de sus contextos, quisimos presentar una de las interpretaciones que sobre modelación matemática, ha sido construida en el seno del Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Por lo tanto, asumimos la modelación matemática escolar como:

> […] el proceso de estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una compresión del fenómeno y resolver el problema (Villa-Ochoa J. A., 2010).

Esta interpretación del proceso de modelación parece escapar a las discusiones presentadas en otras interpretaciones que hacen uso de términos como “realidad” o “representación” para describir dicho proceso (Araújo, 2007, 2009).

Con base en las anteriores consideraciones, resaltamos que, la modelación matemática, integra diversas relaciones dinámicas, las cuales se exteriorizan en prácticas, actividades y procesos intencionados para la estructuración de conceptos, de acuerdo con la necesidad que otorgan los contextos reales de ser interpretados y comprendidos.

Ahora bien, la implementación de la modelación en el aula de clase puede posibilitar la producción de modelos a través de la interpretación y matematización de problemas que surgen de contextos reales, lo que implica, el establecimiento de relaciones matemáticas a la luz de estos contextos. Así, la modelación, requiere de un proceso de construcción de conocimientos matemáticos representados en un modelo particular, el cual se valida cuando describe la situación real a la que pertenece.

En el sentido de Blum et al. (2007), el proceso de modelación parte de la relación del mundo extra-matemático hacia el mundo matemático. Esto quiere decir que, los objetos matemáticos son construidos en este proceso de transformación, en el cual interviene la matematización para la producción de modelos, explicitando desde el campo matemático, lo que se quiere comprender del fenómeno o situación real. Como lo argumenta Blum y sus colaboradores, un modelo real se *matematiza*, es decir que los objetos, datos, relaciones y condiciones que participan en él se traducen a las matemáticas y su resultado es un modelo matemático de la situación original. La construcción de modelos supone la matematización como un subproceso de traducción dentro de la modelación, que luego permite la interpretación de la situación real y la validación mirada desde la coherencia del modelo matemático con la necesidad planteada en la situación.

La modelación implica la producción de modelos matemáticos, que se logra estableciendo relaciones entre la situación real y las matemáticas. Sin embargo, no es posible realizar esa traducción cuando no se han construido correspondencias entre los elementos constitutivos de la situación real con los objetos matemáticos que se ajustan a esta situación.

En el proceso de modelación se presentan diferentes momentos en forma cíclica. Algunos autores lo consideran como un ciclo que, de acuerdo con Berry, J. y Davies, A., (1996, citado en Crouch y Haines, 2004, p. 198), se desarrolla mediante las siguientes etapas: *declaración del problema en el mundo real; formulación de un modelo; solución matemática; interpretación de los resultados; evaluación de la solución; refinamiento del modelo y [nuevamente] la declaración del problema en el mundo real.*

A partir de esto, es clara la necesidad de realizar una construcción de un modelo que represente el problema real en cuestión. No es el problema real el que se ajusta al modelo, es la construcción del modelo la que necesita ajustarse a ese problema y por tanto, debe evaluarse su formulación a la luz del problema en el mundo real. Sin embargo, con la formulación del modelo, la reflexión sobre el problema real es diferente, puesto que el modelo aporta la riqueza de los símbolos y su comprensión desde el mundo matemático.

En la misma línea, otros autores como Blum y Borromeo (2009) han representado el ciclo de la modelación como lo muestra la *ilustración 1*.

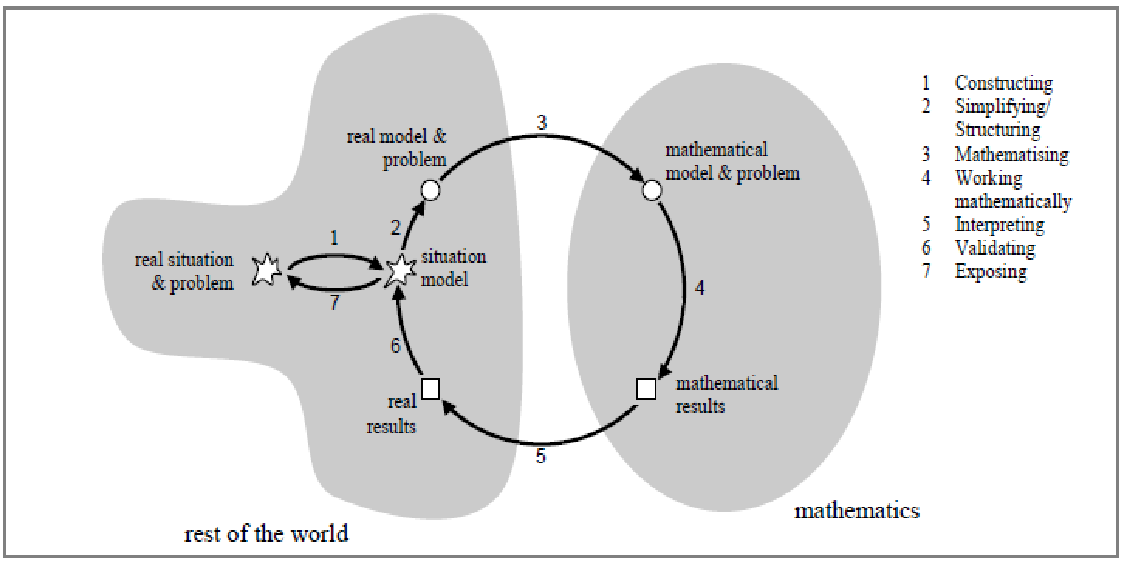


Ilustración 1. **Ciclo de la modelación presentado por Blum y Borromeo (2009, p.46)**

En los primeros momentos del ciclo se busca comprender la situación del mundo real, la cual se delimita, simplificándola y estructurándola en un problema real. Para estos momentos se requiere de una fase experimental de observación, recolección de datos e información y de proyección del tipo de modelo a construir. Luego, a partir de matematizar los elementos del dominio del mundo real se obtiene el modelo matemático. Con el modelo se realiza un trabajo matemático, en el cual se desarrollan métodos y procedimientos necesarios según el problema. Estos resultados matemáticos se interpretan desde la situación delimitada en el mundo real. Por último, se contrastan los resultados matemáticos en términos de la situación que le dio origen al problema, con el fin de garantizar su compatibilidad para la validación del modelo. En caso de que en la validación se presenten resultados que no satisfagan el problema real, se tendrá que obtener un nuevo modelo matemático. Si la validación arroja resultados favorables, se podrá comunicar y presentar los resultados de esa modelación.

2.2 Modelo matemático en el proceso de modelación

Una parte del proceso de modelación, se encuentra en la construcción de modelos matemáticos. Esta construcción se realiza partiendo de fenómenos o situaciones particulares de contextos como los mencionados en el apartado anterior. Blum et al. (2007) llaman al conjunto de estos contextos como “mundo extra-matemático” o “mundo real” que se encuentra en una esfera distinta a la de las matemáticas.

La noción de modelo matemático puede mirarse en la literatura desde dos categorías. Una de ellas enfoca el modelo matemático como producto, que describe la situación real en términos de relaciones numéricas y simbólicas. Y la otra, permite visualizar dicho modelo como un proceso para el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) conceptualiza el modelo matemático visto como producto, exponiéndolo de la siguiente manera:

> Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (MEN, 2006, p. 52).

Esta definición integra diferentes formas de representación del modelo matemático: como sistema, como estructura o artefacto. Uno de sus objetivos es el de acercar al estudiante al concepto mediante representaciones, esquemas e imágenes que evidencien tanto su interpretación como su construcción.

1. Algunas definiciones de modelo centradas en estructuras matemáticas son:
    - Se define como Modelo Matemático de un sistema prototipo S (físico, biológico, social, químico, etc.) a un completo y consistente sistema de

ecuaciones matemáticas Σ, que es formulado para expresar las leyes de S y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento. (Rutherford, 1978, p. 5)

- Un Modelo Matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representan, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. (Biembengut y Hein, 2004, p. 106)
- A un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación. (Villa-Ochoa J. A et al. 2009a)

A partir de estas definiciones consideramos que, un modelo constituye un conjunto de elementos relacionados, que cumplen una función de representar y describir mediante relaciones matemáticas algún aspecto de una situación o fenómeno que se está estudiando.

2. Algunas definiciones de modelo centradas en proceso de construcción, traducción o relación son:
   - Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones con una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. (Blomhøj, 2004, p. 21)
   - Se define un Modelo Matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del "mundo-real". Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. (Giordano, Weir y Fox, 1997, p. 34)
   - Un modelo es la traducción de un objeto o fenómeno del mundo real a un objeto o fenómeno del mundo matemático. En cualquier uso de las matemáticas un modelo matemático está implicado, explícitamente o implícito. (Blum et al. 2007)

Es evidente que estos procesos de traducción, construcción y relación no son inmediatos, todos ellos requieren de una búsqueda de conexiones, que permitan interrelacionar la situación real con los objetos matemáticos acordes a la necesidad del problema en contexto real. Estas construcciones y relaciones, pensadas desde un campo escolar, podrían llegar a variaciones particulares de modelos generales o estandarizados, pero en contextos específicos, sin dejar de iniciar procesos matemáticos de generalización y formalización.

En coherencia con nuestra anterior postura respecto a la modelación como proceso, asumiremos Modelo Matemático como “Un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas para explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”. (Villa-Ochoa et al. 2009a)

La razón de construir Modelos Matemáticos basados en relaciones simbólicas radica en que estos puedan ajustarse a una situación de un contexto real. Por lo tanto, los modelos de relaciones lineales entre dos variables se construyen desde una dinámica de modelación, cuyo eje inicial compromete a diversas situaciones en contextos de variación. De este modo, los modelos no son dados a priori por el profesor, éstos son construidos por el estudiante según su modo de relacionarse con la situación. Así, cobra relevancia el proceso como tal y no sólo el resultado matemático.

2.3 Contextos auténticos desde un enfoque realístico de Modelación Matemática

Como mencionamos anteriormente, algunas descripciones del proceso de modelación matemática hacen alusión a un proceso en el cual se relaciona dos mundos, el “mundo real” y el “mundo matemático”. Según Araújo (2007, 2009) este tipo de definiciones presentan una dicotomía bastante discutible, puesto que presenta a las matemáticas como una “abstracción” que no hace parte de la realidad. Es claro que este tipo de discusiones están basadas en principios filosóficos divergentes sobre la realidad y las matemáticas mismas.

Por su parte Villa-Ochoa, Bustamante y Berrío (2010) asumen como punto de partida para el proceso de modelación matemática “a un conjunto de situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela” (p. 1089), a las cuales denominan situaciones reales. Con esta denominación, estos autores solo delimitan el punto de partida del proceso de modelación basados en las funciones sociales de las matemáticas escolares, sin que ello agote la noción de realidad. En ese sentido, los autores puntualizan que una noción de realidad como “un sistema compuesto por fenómenos o hechos que pueden observarse desde múltiples dimensiones.” (p. 1089)

Si bien, en las situaciones reales no se encuentran explícitos los modelos matemáticos, es claro que algunas veces hay algo problemático que puede ser abordado y resuelto desde las matemáticas. Y es aquí, donde se colocan en juego todos aquellos procesos generados cuando se resuelven problemas, tales como, la interpretación, la reflexión, la búsqueda de patrones, la comunicación, la representación, entre otros, con miras a desarrollar conocimientos matemáticos desde la práctica.

Ahora bien, de la simplificación de una situación real pueden surgir diversos problemas que implican actividades matemáticas en sus procesos de solución. Blum et al. (2007) utilizan el término problema en un sentido amplio, el cual abarca no sólo los problemas prácticos, sino también problemas de carácter más intelectual cuyo objetivo es describir, explicar, comprender o incluso diseñar partes del mundo.

Las matemáticas abordadas en las aulas de clase, desde diferentes contextos, posibilitan la creación de alternativas que producen un acercamiento y una apropiación de conceptos matemáticos desde las vivencias y experiencias. Con respecto a lo anterior, el MEN (1998) expresa que:

> El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas. (p. 41)

Esta cita nos sugiere la idea de contextos reales incluidos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no como aplicación de los conceptos, sino como una plataforma permanente; generadora de conexiones, interpretaciones, intereses, necesidades, problemas afines a los conceptos matemáticos, además de la construcción de argumentos que validen los modelos con relación al contexto.

Según Blum et al. (2007) la expresión “mundo real” es concebida como todo lo que tiene que ver con naturaleza, sociedad, cultura, incluyendo la vida cotidiana, como también las asignaturas de la escuela y la universidad o las disciplinas científicas diferentes de las matemáticas. De manera particular, desde la modelación entendemos los contextos reales como:

> […] aquellos contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias; en los cuales los estudiantes se ven enfrentados a la identificación y manipulación de datos, y a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución. (Villa-Ochoa J. A. et al. 2009b)

Desde esta postura, los contextos no sólo son asumidos desde otras ciencias, sino que, incorporan, lo que comúnmente se podría excluir de las matemáticas, como lo son las prácticas de una comunidad que identifican una cultura propia. En estas prácticas hay de fondo elementos matemáticos, que deberían ser potenciales para la construcción de saberes y significados en las aulas de clase.

Consideramos los problemas matemáticos desde una realidad perteneciente al estudiante, y a su vez, relacionados con su ámbito social y cultural, enmarcados en un contexto real, lo cual indica, que abordaremos problemas pero situándonos en contextos con sentido para el estudiante. En términos de Niss (1992, citado en Kaiser y Schwarz, 2010) los problemas auténticos serán reconocidos por las mismas personas que pueden solucionarlos en su trabajo diario.

La modelación matemática vista como un proceso que relaciona la realidad con las matemáticas puede ser direccionada desde otras ciencias, desde los diferentes contextos que rodean los estudiantes, e incluso, se vienen gestando algunas perspectivas que pretenden incluir los contextos al interior de las matemáticas mismas (Bosch, Garcia, Gascón y Ruiz, 2006a; García, Gascón, Ruiz y Bosch, 2006). Dado que en esta investigación pretendemos acercarnos al estudiante por medio de sus experiencias y los contextos propios de su cotidianidad, encontramos en la *perspectiva realística* varios elementos de gran utilidad para tal propósito. Desde la perspectiva realística, se propone que la modelación debe ser entendida como una actividad para solucionar problemas auténticos y no como desarrollo de la teoría matemática (Kaiser y Sriraman, 2006).

Desde la perspectiva realística, los usos de la modelación matemática pueden ser retomados en las aulas de clase atendiendo a varias metas como son: pedagógicas, psicológicas, de contenido y relacionadas con la ciencia, comprendiendo estas como la posibilidad de desarrollar, en el estudiante, la capacidad de entender el mundo de una mejor manera, promover la motivación hacia la matemática, estructurar procesos de aprendizaje en la incorporación de nuevos conceptos matemáticos y comunicar una imagen realista de las matemáticas como ciencia, Kaiser (1995, citado en Kaiser y Sriraman, 2006).

Desde la historia de la matemática, se han establecido puentes entre las necesidades, las inquietudes, los conceptos y la teoría. El contexto en el cual se desarrolló el conocimiento matemático está asociado a la práctica y en consecuencia, se asume como parte de las raíces generadoras de nuevos conceptos. Kaiser y Schwarz (2006) afirman que los contextos del mundo real se utilizan para ilustrar los conceptos matemáticos, como es el caso de las deudas como introducción de los números negativos, además de la importancia de conseguir en los estudiantes la adquisición de capacidades que les permita solucionar problemas matemáticos auténticos, es decir de diversas áreas del mundo extra-matemático.

La modelación matemática, desde una perspectiva realística, nos permite acercar al estudiante a la reflexión y análisis de sus propias experiencias a la luz de los conceptos matemáticos. En el estudio que hace PISA, se enfatiza que una de las metas de la educación de las matemáticas es el desarrollo de la capacidad para emplear las matemáticas en su presente y en su futuro, es decir, que los estudiantes deben comprender la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana y para las ciencias (Kaiser y Schwarz, 2006).

La modelación matemática, como método de enseñanza, coloca al profesor en la tarea de seleccionar y estudiar los posibles problemas que se relacionen con las experiencias de los estudiantes. Y en esta búsqueda debemos evaluar la cercanía de las situaciones y las bases matemáticas con las que los estudiantes enfrentarán los problemas que se modelarán. Al respecto Kaiser y Schwarz (2006) señalan que uno de los criterios para seleccionar los problemas que serán modelados es la accesibilidad para los estudiantes, en otras palabras, deben ser comprensibles, sin demasiado trabajo adicional y que estén al alcance de las perspectivas matemáticas de los estudiantes. En este sentido, al contar con el equipamiento necesario, un modelo basado en la realidad puede ser desarrollado y sus soluciones matemáticas pueden ser reinterpretadas y validadas, además de la descripción amplia que se debe precisar del contexto extra-matemático que abarca el problema.

Con miras a construir la noción de relaciones lineales entre dos variables a partir de los problemas generados en el contexto propio de los estudiantes bajo la actividad de modelación matemática, precisamos a continuación algunos referentes teóricos sobre esta noción.

2.4 Algunas consideraciones sobre la variable y sus relaciones

Cuando consideramos modelo como "un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas para explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación" (Villa-Ochoa J. A et al. 2009a), estamos concibiendo la relación lineal entre dos variables en términos de modelo matemático construido a través del proceso de modelación. Así, en la producción de modelos particulares en los cuales se establezca una relación matemática, necesariamente las variables involucradas y su clase de relaciones están sujetas a la situación en contexto. Con lo cual, estos modelos particulares contienen significados amarrados al contexto y a su uso, más allá de su definición formal. En términos de Sierpinska (1992) entendemos que:

> El concepto está restringido a la estructura de la frase que lo define, a la relación de las componentes con otros conceptos matemáticos y teorías. Pero en el momento en que la noción es aplicada en un contexto matemático o matematizado, se está usando lenguaje informal y este lenguaje informal trae consigo significados que trasciende la mera lógica de la definición. (p. 6)

De este modo, la noción de relación lineal entre dos variables depende del contexto en el cual se usa y, por tanto, no está del todo dada por una definición simbólica formal. Si bien, esta noción se encuentra asociada a elementos teóricos como linealidad, interdependencia de magnitudes, correspondencias numéricas; en tanto se use en diferentes contextos intra-matemáticos y extra-matemáticos, encontramos que éstos elementos van significando la noción y por tanto, se van estableciendo redes conceptuales más estructuradas.

Dentro de los procesos matemáticos de la modelación, los estudiantes pueden utilizar representaciones simbólicas de las variables y sus relaciones, sin embargo, estas representaciones, por sí solas, no dicen lo que significa para el estudiante. Por tanto, es relevante permitir que los estudiantes expresen en forma discursiva sus ideas respecto a sus representaciones simbólicas para diferenciar así, la representación de la variable de su referente a nivel semántico.

En nuestro caso, la relación lineal de variables es abordada con los estudiantes de manera informal, pero al pretender identificar cambios, establecer correspondencias, dependencias y usar cantidades de variación por medio de modelos matemáticos, estamos transponiendo en un contexto particular algunos componentes teóricos de la noción.

Para la construcción de modelos que relacionen linealmente dos variables, consideramos contextos de variación articulados a fenómenos perceptibles por los estudiantes, los cuales juegan un papel importante en la forma de organizar esta construcción en el aula. El carácter de inclusión de estos contextos relacionados con la cotidianidad, con aspectos económicos y sociales del entorno del estudiante, los hacen responsables de la articulación con el conocimiento escolar.

A continuación, abordaremos algunos referentes teóricos con respecto a las siguientes dos temáticas: una distinción en el uso de la variable y la incógnita, y la variable como magnitud de cambio.

2.4.1 Una distinción en el uso de la variable

Bajo la perspectiva de García (2007), en la que el álgebra es instrumento de modelización, las expresiones lineales no podrán ser concebidas dentro de una aritmética generalizada, esto es, desde punto de vista estático, en el que las letras juegan el papel de incógnitas y no rompen la dependencia entre lo aritmético y lo algebraico. En consecuencia, la concepción funcional, en las expresiones algebraicas lineales las letras juegan el papel de variables, representando un rango de valores dentro de un conjunto numérico.

Desde este enfoque, una relación lineal entre dos variables considera una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes, que trascienda de los modelos ecuacionales del tipo $y= kx$ donde y e x se les trata como incógnitas, a modelos funcionales donde y e x se les trata como variables y a k como un parámetro. Así, los modelos lineales no se ven como una forma general de la aritmética, sino que jugarán un papel dentro de la modelación inicial de las funciones.

Al abordar una expresión simbólica de carácter lineal es necesario hacer la distinción con respecto al tratamiento de la letra. En el sentido de Sierpinska (1992); cuando hablamos de relacionar cuantitativamente cantidades desconocidas con cantidades conocidas, estamos conceptualizando a la ecuación y a la letra como incógnita, en cambio, si hablamos de una relación entre magnitudes variables, estamos hablando de la noción de función. La autora lo aclara de la siguiente manera:

> La ecuación no es más que una condición sobre lo desconocido que ayuda a extractar su valor. En el contexto de las funciones, éstas aparecen como el principio o la ley de acuerdo a la cual algunas variables cambian cuando algunas otras cambian. (p.17)

En nuestro contexto de modelación, se trasciende la idea de plantear un modelo con una sola incógnita para encontrar su valor a la idea de organizar un fenómeno familiar para el estudiante desde diferentes estrategias y actividades matemáticas como; reconocer y relacionar variables y constantes en relación a la situación, comparar y analizar cantidades asociadas a magnitudes bajo preguntas a resolver desde el contexto, propiciar espacios para la representación e interpretación tabular, gráfica y simbólica.

Con la idea de caracterizar las maneras de construir las relaciones entre variables, tendremos en cuenta la categorización que realizan Ursini y Trigueros (1998), las cuales plantean las siguientes conceptualizaciones:

Variable como número general, implica:

G1	Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias numéricas y en familias de problemas.
G2	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G3	Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas
G4	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica
G5	Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Variable como incógnita específica, implica:

11	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
12	Interpretar las variables simbólicas que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
13	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
14	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando las operaciones algebraicas y/o aritméticas.
15	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Al asumir la variable como número general y como incógnita, estamos refiriéndonos a la idea de reemplazar un valor específico, la cual es abordada bajo la manipulación operativa, de reglas, métodos e igualdades algebraicas. Es por esto que, pretendemos superar la idea de la implicación de la variable en términos de realización de cálculos y operaciones con letras, lo que conduce a lograr una comprensión o acercamiento a esta noción desde la capacidad de establecer de dónde provienen y a las diversas correlaciones que surgen desde el contexto.

2.4.2 La variable como magnitud de cambio

La noción de variable por estar a la base de conceptos fundamentales del álgebra y del análisis funcional ha conllevado a importantes cambios a nivel histórico y conceptual de las matemáticas. Y aunque, con una de sus definiciones no la podríamos conceptualizar en su totalidad, es necesario precisar algunas de características esenciales:

> Igual que el concepto de número real es la imagen abstracta del valor real de una magnitud arbitraria, así una «variable» es la imagen abstracta de una magnitud que varía, lo que supone distintos valores durante el proceso de consideración. Una variable matemática x es «algo» o., más exactamente, «cualquier cosa» que puede tomar distintos valores numéricos. (Aleksadrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros, 1976, p. 66)

La idea de "*algo"* que *varía* nos sugiere pensar también en la idea contrapuesta de constante, así su atributo de conservar un solo valor se distingue de "*algo"* que pueda representar más de un solo valor. Ahora bien, la tarea de identificar ese "*algo"* en un contexto de la vida cotidiana y analizar sus características se constituyen en una de las tareas auténticas dentro del proceso de modelación.

La necesidad de representar cuantitativamente los cambios en los fenómenos de la vida, les ha exigido a las matemáticas usar un lenguaje simbólico. Sin embargo, para estudiar qué cambia y cómo cambia una magnitud hace falta poner en juego diversas herramientas matemáticas. Es por esto que:

> Los estudiantes deben ser interesados en explicar cambios, encontrar regularidades respecto a los cambios; ellos deberían percibir cambios y relaciones entre ellos como un problema digno de una explicación científica. Ellos deberían tener las oportunidades para usar el conocimiento acerca de las funciones en la explicación de los fenómenos de su vida diaria, social y económica, o acerca de funciones encontradas en otras ciencias. (Sierpinska, 1992, p. 43)

El reto educativo lo focalizamos en abrir espacios en el aula de clase, en los cuales los estudiantes puedan observar, predecir, conjeturar, buscar y proponer sobre aquellos cambios que los motivaron, y así la estrategia de establecer relaciones entre ellos, lo cual les posibilitará ofrecer algunas respuestas.

Las tareas de observación, experimentación y estructuración, relacionadas en cómo determinar un cambio de una magnitud variable en relación a otra, cobran relevancia dentro de la modelación, puesto que contribuyen a la representación externa de un modelo funcional que capture ese tipo de variación. En términos de Posada y Villa-Ochoa (2006a) la variación

> […] implica apreciar que dos o más cantidades de magnitud covarían, de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las cantidades de magnitud están correlacionadas. (p. 64)

Desde esta postura, cuando hablamos de relacionar dos variables, estamos pretendiendo que estas sean correlacionadas, a través de la discusión y reflexión sobre la dependencia entre las dos cantidades de magnitud a la luz de los significados que aporta el contexto.

Bajo la noción funcional de variable como magnitud de cambio, la estamos considerando como una relación entre dos cantidades cuyos valores varían. A continuación, abordamos algunas conceptualizaciones propuestas por Ursini y Trigueros (1998):

Variable como relación funcional, implica:

F1	Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales o expresiones analíticas.
F2	Determinar los valores de la variable dependiente, dados lo valores de la independiente.
F3	Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F4	Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales o expresiones analíticas).
F5	Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6	Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

La idea de cambio en un contexto realístico, nos hace pensar sobre la noción de relaciones entre magnitudes, donde las variables son representadas por números cuyos valores oscilan en un rango que está ligado entre sí por las relaciones establecidas desde el contexto. Desde la modelación matemática, podemos establecer que los elementos matemáticos, en nuestro caso las relaciones entre variables y la noción de cambio están conectadas de manera particular al contexto. Morales y Díaz (2003) afirma que:

> Debido a que los símbolos para las variables son arbitrariamente intercambiables el contexto y el referente, juntos, aparte de cualquier símbolo particular, determinan un aspecto de las variables que es único en matemáticas. Esto es, el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable. (p. 112)

El tratamiento de las variables hace parte de un proceso enmarcado en la modelación matemática, en cuanto que en este proceso es necesaria la elección de las variables que controlan el fenómeno estudiado con miras a describir los hechos involucrados en la situación respectiva.

La búsqueda de relaciones entre dos variables, en particular de tipo lineal en situaciones de cambio involucra el análisis de un factor constante que permita conocer a una de las variables en términos de la otra, al respecto Obando y Botero (2006) definen la covariación lineal de la siguiente manera:

> En una situación, la covariación es lineal (y como se dijo en el párrafo anterior, positiva), cuando variaciones en un cierto factor en una de las variables, generan en la otra variable variaciones en el mismo sentido, y en el mismo factor. (p. 106)

Cuando se habla de factor, estamos involucrando la multiplicación en un proceso de generar la misma cantidad de cambio en la otra variable, y de esta manera la relación multiplicativa juega un papel funcional en el uso de la constante y las dos variables. De este modo, Obando y Botero (2006) definen que:

> La proporcionalidad simple directa se puede representar o modelar por una función lineal tal que:
>
> $$A \xrightarrow{f} B$$
> $$x \longrightarrow f(x)=k \cdot x$$
>
> Donde k es la llamada constante de proporcionalidad. (p. 108 y 109)

Aunque esta definición no se retoma en su sentido formal con los estudiantes dentro del proceso de modelación, constituye en un elemento conceptual fundamental para diferenciar las variaciones lineales de las no lineales.

Algunos de los elementos característicos de la linealidad se pueden reconocer en fenómenos de variación, esto es, en situaciones en las cuales los cambios se constituyen en un problema a enfrentar, una de las formas de hacerlo se vale de modelos que contienen un caso particular de covariación constante cuando se analiza que es el mismo factor el que cambia entre dos cantidades de magnitud. Es aquí, donde la identificación de la constante de una proporcionalidad directa simple y el carácter de multiplicidad uno facilita la escritura del modelo.

Cuando los estudiantes se encuentran en el proceso de comprensión de la situación en contexto, es posible que las variables no surjan en forma aislada sino de forma relacionada, puesto que aún se encuentran en la tarea de simplificar o restringir a factores que ellos puedan tratar, además los estudiantes utilizan inicialmente un lenguaje verbal antes que el simbólico para construir referentes aproximados a un fragmento de la realidad.

Las relaciones lineales entre dos variables están en la base de conceptos como ecuación de primer grado y función lineal. Sin desconocer sus diferencias conceptuales, en el proceso de modelación matemática, ambas nociones podrán usarse en la producción de modelos. Sin embargo, en nuestro estudio, el surgimiento de las nociones matemáticas a utilizar no podrán estar forzados inicialmente, estas dependen del camino asumido por los estudiantes para resolver el problema.

Capítulo 3

3 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo nos dedicaremos a presentar los diferentes momentos desarrollados en el trabajo de campo y realizamos una descripción sobre las técnicas metodológicas utilizadas para su análisis, teniendo en cuenta los aportes del grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) respecto a los procesos metodológicos y al paradigma cualitativo en sus investigaciones orientadas a la construcción de conocimiento escolar matemático.

La orientación de este capítulo se centrará en el estudio de casos, el cual nos facilitó un análisis particular del objeto de estudio; un proceso de modelación matemática desde la perspectiva realística o en contextos auténticos para los estudiantes, explorando sus experiencias, ideas y argumentos como base de las observaciones y análisis del estudio (Hays, 2004). Presentamos a continuación el paradigma abordado en nuestro estudio, es decir, el tipo de estudio, el diseño metodológico, instrumentos y recolección de datos, entre otros.

3.1 El paradigma de investigación

Nuestra investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo, puesto que pretendimos caracterizar una manera de modelar relaciones lineales entre dos variables en el momento en que los estudiantes resuelven situaciones en contexto. Esta caracterización nos implicó procesos de descripción, observación, reflexión y análisis sobre las interacciones, experiencias, formas de expresión matemática y acciones grupales e individuales que influenciaron el proceso desarrollado por el grupo de participantes.

La investigación se desarrolló con nueve estudiantes del grado once, quienes construyeron con las investigadoras una relación basada en diálogos, compartir de experiencias, discusiones en los cuales los estudiantes participaban con confianza y apropiación. Aspectos que son relevantes dentro del proceso mismo de construcción de modelos en situaciones de la vida cotidiana. De acuerdo con Marshall Rossman (1999, citado en Gialdino, 2006):

> […] el proceso de investigación cualitativa supone: a) la inmersión en la vida cotidiana de la situación seleccionada para el estudio, b) la valoración y el intento por descubrir la perspectiva de los participantes sobre sus propios mundos, y c) la consideración de la investigación como un proceso interactivo entre el investigador y esos participantes, como descriptiva y analítica y que privilegia las palabras de las personas y su comportamiento observable como datos primarios. (p. 26)

Teniendo en cuenta que la investigación cualitativa estudia situaciones en contexto con dinámicas propias y las circunstancias cotidianas, con sus formas particulares de comunicación entre los participantes y sus experiencias individuales y colectivas. Nuestro estudio se centró en las interacciones generadas a través de las relaciones del estudiante con la actividad matemática, el contexto, con otros compañeros, y con las investigadoras. Estas maneras de relacionarse, las estudiamos en los momentos en que los estudiantes desarrollaron actividades de modelación pensadas dentro de diversos contextos auténticos.

Consideramos que el enfoque de estudio respecto a nuestra pregunta de investigación: ¿*De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes del grado once, construir relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contexto reales*?, se encuentra en la línea de investigación cualitativa, pues este fenómeno lo asumimos bajo una visión de realidad cambiante, subjetiva y compuesta de experiencias únicas, construidas dentro o fuera del aula por los estudiantes. Además, este fenómeno se constituyó en un proceso de caracterización no medible, puesto que fue un proceso de construcción entre los mismos participantes en relación a diversas actividades concebidas sobre un proceso de modelación matemática no predeterminado en su totalidad, sino de carácter abierto y flexible. Es por esto que, el proceso de investigación se observó desde las dinámicas y maneras de construir que emergieron en los diferentes momentos del trabajo de campo.

En coherencia con las anteriores posturas, analizamos los diferentes momentos abordados por los estudiantes bajo la premisa de ser únicos, irremplazables y no generalizables. Por lo que, la caracterización de éstos fue develada a partir de los desarrollos y experiencias dependientes de sus condiciones contextuales y sus herramientas matemáticas disponibles.

Nuestro papel como investigadoras, dentro del trabajo de campo, lo enfocamos a mediar las discusiones bajo argumentos matemáticos significativos dentro del contexto, éstas no fueron impuestas, ni estuvieron sujetas a procedimientos técnicos. Por el contrario, los diálogos tomaban el rumbo otorgado por los estudiantes, algunos fueron planteados de manera abierta y no absoluta, y en otros se lograron consensuar diferentes acuerdos, con miras a crear espacios de concientización, empoderamiento y fortalecimiento en las posturas críticas de los estudiantes. De igual manera, reconocemos en las voces de los estudiantes el sentido de las experiencias y las nociones que surgen en desarrollo de las actividades y discusiones generadas por las situaciones en contextos reales.

En una investigación sobre modelación matemática de corte cualitativo, los contextos juegan un papel relevante en la relación del todo con las partes, esto sugiere que, las nociones e ideas matemáticas usadas en las diferentes actividades, permiten la organización de los momentos del trabajo de campo en forma relacionada. Por tanto, las expresiones matemáticas generadas por los estudiantes no fueron vistas de forma aislada, sino que estos modelos se asociaron con todo su proceso de construcción.

3.2 Tipo de estudio

La investigación se desarrolló mediante un estudio de casos, puesto que pretendemos comprender a profundidad el fenómeno en un contexto propio. En este estudio, el fenómeno se enfoca en la manera cómo los estudiantes, de grado once, construyeron modelos relacionados con la noción de relación entre dos variables en los contextos del Metro de Medellín, la cuenta de los servicios públicos, los operadores celulares y las cadenas de correos electrónicos.

El estudio de casos abordado se fundamentó desde la perspectiva de Hays (2004), quien lo centra en examinar, buscar y explorar las nuevas experiencias e interacciones que no han sido comprendidas por las personas, desde una pregunta que focaliza el análisis del investigador. Además este tipo de estudio permite la producción de descripciones e interpretaciones en forma única y reflexiva en un corto período de tiempo. Desde esta mirada, focalizamos este estudio en la caracterización particular y no general, de diversas maneras de relacionar dos variables en el proceso de modelación. Desde la perspectiva de Hays, en la caracterización desarrollada en el estudio predomina su carácter único, por corresponder a procesos propios dependientes de los rasgos de un grupo específico y de los contextos a los que se enfrentaron.

Patricia Hays (2004) asume que el caso puede estar sobre un individuo, un grupo de personas, una escuela, un distrito escolar, decisiones sobre programas, un proceso de un programa, un cambio de organización u otros aspectos. Nosotras definimos nuestro caso en un grupo de nueve estudiantes, el cual constituyó nuestra unidad de análisis, ya que en el proceso de modelación asumido en nuestra investigación, cobra relevancia los procesos grupales, sin dejar de reconocer los aportes individuales en la construcción de modelos.

En concordancia con las ideas desarrolladas por Patricia A. Hays (2004), a continuación mostramos un cuadro que especifica algunas características asumidas desde el estudio de casos en nuestra investigación.

Estudio de casos cualitativo	
¿Qué?	Estudiamos en un grupo de estudiantes, un proceso de construcción de relaciones entre dos variables mediante situaciones de modelación en contextos reales.
¿Cómo?	Desde nuestra perspectiva como investigadoras establecimos un diálogo abierto, basado en la participación, (co)construcción, y (re)significación de nociones miradas en los subprocesos de modelación, utilizando algunas fuentes de datos como documentos, entrevistas y observaciones directa.
¿Para qué?	Reflexionar sobre las descripciones e interpretaciones que aportan a la respuesta de la pregunta de investigación. Develar las estrategias, interacciones, experiencias, formas particulares de los participantes relacionar dos variables. Aportar al conocimiento de la modelación matemática como proceso en el aula de clase. Reconocer la importancia de la diversidad de contextos auténticos en la construcción o acercamiento a las nociones matemáticas.

Ilustración 2. **Elementos constitutivos del estudio de casos según Hays (2004).**

3.3 Diseño

El diseño que guió el desarrollo del esta investigación tuvo en cuenta las orientaciones de Patricia Hays (2004) en cuanto a la unidad de análisis, los contextos, los participantes, las fuentes utilizadas para la recolección de los datos, los momentos del trabajo de campo, las estrategias de análisis, la validez del estudio y otros aspectos implicados durante la investigación.

3.3.1 Contexto y Participantes

El trabajo de campo se realizó en una Institución Educativa oficial del Municipio de Medellín ubicada en la comuna dos que atiende a estudiantes cuyas familias se ubican en los estratos uno y dos, además en su mayoría presentan una situación social de pobreza, violencia, desplazamiento, embarazo a temprana edad, familias sin núcleo familiar estable y numerosas (Tomado del PEI de la institución). La institución cuenta, actualmente, con cuatro sedes, una de ellas es la sede central de bachillerato, en la cual realizamos el trabajo de campo. Esta sede cuenta con 1500 estudiantes aproximadamente y cada grupo lo conforman cuarenta y cinco estudiantes.

Los integrantes del estudio de casos fueron estudiantes de once grado, con edades que oscilan entre dieciséis y diecisiete años, los cuales elegimos por sus habilidades comunicativas, gusto e interés por el área de matemáticas. Teniendo en cuenta el objeto de investigación, consideramos que estos criterios favorecieron la interpretación, argumentación matemática e interacción con las actividades de modelación; procesos fundamentales para enriquecer la caracterización planteada en el objetivo.

Al comenzar el estudio convocamos a siete estudiantes quienes habían manifestado motivación para participar en los diferentes encuentros realizados en horarios extra clase, ya que los estudiantes pertenecían a diferentes grupos escolares. Luego de seis sesiones, dos estudiantes manifestaron su interés para hacer parte de este grupo de investigación, al escuchar dentro de sus clases regulares, cómo otros compañeros discutían sobre algunos puntos controversiales que surgían en los encuentros del grupo. Atendiendo al interés manifestado por estos dos estudiantes, consultamos con los integrantes sobre su inclusión y ellos respondieron positivamente.

Las razones expresadas por estos dos estudiantes sobre su deseo de participación en el grupo de investigación, fueron, su motivación particular por conocer más sobre el contexto estudiado (Metro de Medellín) además, a su gusto e interés para aportar desde sus habilidades matemáticas a la investigación en curso.

Por principios éticos en este estudio de corte cualitativo, decidimos proteger las identidades de los participantes, por medio de seudónimos elegido por ellos mismos, además, contamos con el consentimiento por escrito[1] de los padres de familia ya que los estudiantes son menores de edad. Los seudónimos corresponden a los siguientes nombres: Nicole, Alex, Lindsay, Jean Jackobson, Wilhelm, Galvis, Andrey, Jhony y

[1] Ver anexo 4. Consentimiento de participación

Sandro, resaltamos que estos dos últimos estudiantes quienes se incorporaron en el transcurso de la investigación.

Nuestra participación en la investigación no sólo fue como investigadoras, sino también como docentes permanentes de la institución, posición que nos colocó en el rol de orientadoras del área de matemáticas y, a su vez, como observadoras participantes.

3.3.2 Fuentes de recolección de datos

La recolección de los datos fue realizada en diez sesiones o encuentros presenciales de discusión y desarrollo de las guías, durante un semestre. La información la recolectamos a través de tres fuentes: 10 observaciones directas (grupal), 3 entrevistas semi-estructuradas (grupal) y 5 documentos escritos (individual). Las fuentes que se emplearon para la obtención de la información, fueron:

- ***La observación directa***

La observación directa sustentada desde Hays (2004), señala que la interacción de los individuos no podrá ser entendida sin la observación. Además, con esta fuente accedimos con mayor riqueza a los datos relacionados con las formas de expresión verbales y escritas para analizar la forma cómo los estudiantes interactúan, resuelven y discuten las situaciones planteadas en cada una de las sesiones, teniendo en cuenta que fuimos observadoras participantes en el proceso.

La observación fue recolectada en audio, video y algunas notas tomadas por las investigadoras. Estas observaciones fueron transcritas y digitalizadas, convirtiéndose de esta manera en una fuente fundamental en el análisis de la información. Además, cumplen la función de mostrar "un proceso" más que un producto estático, objeto de nuestra investigación.

- ***Las elaboraciones escritas para la exteriorización del modelo***

Las elaboraciones escritas, asumidas como un documento producido por cada uno de los estudiantes, puede ser utilizada para corroborar los datos tomados de otras fuentes (Hays, 2004), nos permitieron, también, el análisis de los procesos y estrategias matemáticas en la construcción de modelos lineales entre dos variables, evidenciados en sus diversas formas de expresión para las situaciones contextualizadas.

Estos documentos son valiosos, por cuanto representan la simplificación de varios subprocesos derivados de las discusiones y el desarrollo de algunas actividades referidas en el proceso de modelación. Estos reflejaron, en gran parte, las producciones y avances a nivel grupal, pues varios de los acuerdos fueron liderados por un estudiante. Estos documentos fueron escaneados y archivados en forma digital. Además, fueron clasificados por sesiones y actividades.

- ***Entrevistas***

Hays (2004) sustenta que la entrevista es una de las fuentes más ricas de datos en un estudio de caso, puesto que proveen al investigador de una variedad de información y perspectivas. Usando este argumento, realizamos tres entrevistas (una inicial y dos al final del trabajo de campo) de carácter semi-estructurado como fuente de información verbal y escrita, que posibilitaron el reconocimiento de diversos argumentos y concepciones.

Desarrollamos la primera entrevista[2] con la intención de establecer una relación de confianza entre el entrevistador y el entrevistado para explorar algunas ideas sobre la noción de la *"letra"*. Otro de los propósitos consistió en obtener información previa a la elaboración de la primera guía, para esto, los estudiantes compartieron sus experiencias relacionadas con las clases de matemáticas y la apropiación de los temas, en particular con la ecuación lineal, como uno de los primeros acercamientos al álgebra escolar.

La segunda entrevista[3], realizada al final del trabajo de campo, tuvo como objetivo reconocer el punto de vista de los estudiantes sobre el proceso de modelación y las ideas asociadas a la noción de variable y constante, abordados en contextos diferentes. En esta entrevista participaron cinco estudiantes.

---

[2] Ver anexo 1. Protocolo de entrevista
[3] Ver anexo 2. Protocolo de entrevista

La tercera entrevista[4] efectuada, también al final, pretendía reconocer las diversas maneras en que los estudiantes relacionaban dos variables en un contexto diferente al Metro de Medellín. Además, buscamos analizar cómo estas maneras se asociaban mediante un modelo matemático. En la entrevista participaron tres estudiantes.

Las anteriores entrevistas fueron desarrolladas en grupo, ya que este tipo de entrevistas ofrecen más datos dependiendo del número de individuos en un menor tiempo (Hays, 2004). Por lo que, favoreció el análisis de algunos aspectos del proceso de modelación, objeto de estudio en nuestra investigación.

A continuación, presentamos una gráfica que ejemplifica la interrelación de las fuentes de datos propuestos en el estudio:

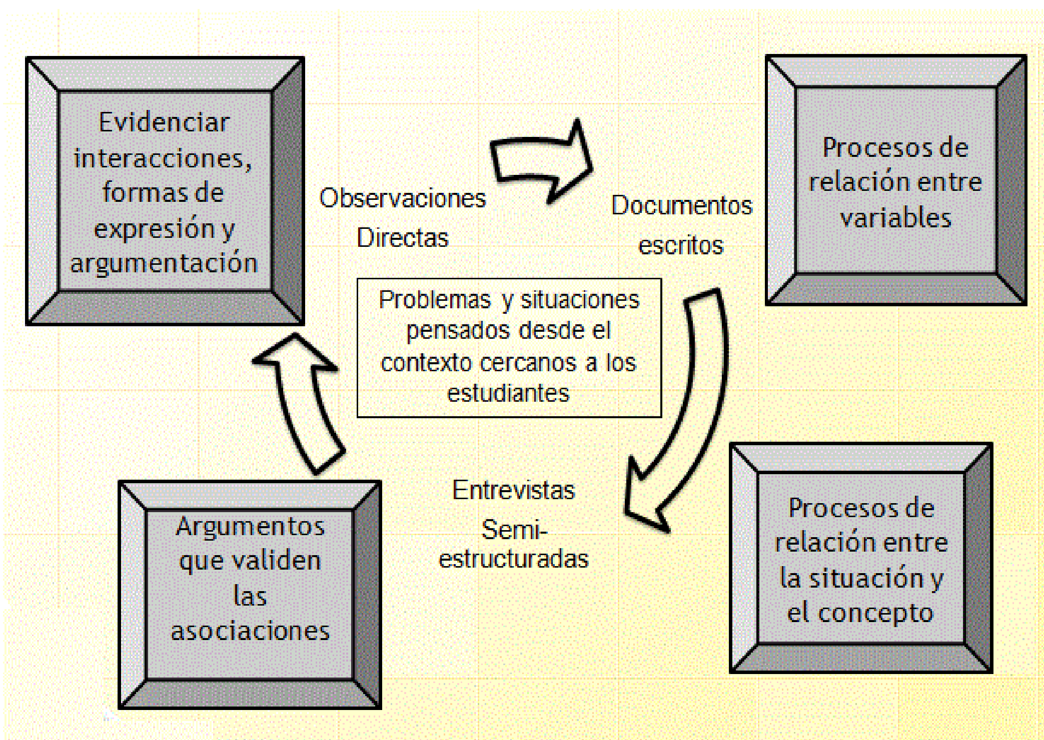


***Ilustración 3.* Relación de las fuentes de datos en el estudio.**

[4] Ver anexo 3. Protocolo de entrevista

3.3.3 Momentos del trabajo de campo

El trabajo de campo de esta investigación se desarrolló en seis momentos durante once sesiones que corresponden a diferentes actividades relacionadas con el proceso de modelación.

- ***Momento uno:***

La implementación de la guía uno[5] se desarrolló en dos sesiones de dos horas con la intención de acercar al estudiante al contexto del Metro de Medellín. En el desarrollo de éste momento, se involucró a los estudiantes en la situación, a través de preguntas que le permitieron tomar decisiones desde varios roles, hacer uso de saberes previos y experiencias cotidianas con el uso del Metro. Esto indica, que no es una situación ficticia o simulada, sino que, hace parte del contexto social y cultural de los estudiantes.

La lectura aborda aspectos generales que ampliaron la mirada e información de los estudiantes a nivel social, económico, político, cultural, ambiental, entre otros. Estos aspectos se integran en esta situación de tipo educativo, bajo la intención de formar, además de elementos matemáticos, ciudadanos capaces de intervenir de una manera crítica en el desarrollo de la ciudad.

Algunas preguntas generaron inquietudes sobre aspectos que ellos posiblemente no se habrían preguntado, como por ejemplo, la implementación de tiquetes integrados, la eliminación de los tiquetes dobles y lo que cuesta el Metro.

Otras preguntas, se direccionaron hacia el razonamiento matemático en un problema específico de cálculo de cantidades, bajo algunos datos establecidos, que permitieron la comparación y el análisis desde una posición del Metro y no de usuario.

La metodología utilizada en este momento, se basó en el trabajo inicialmente individual y luego una socialización con el grupo, con miras a reconocer en los estudiantes sus habilidades para comunicar las ideas, sus formas de argumentar e interpretar.

[5] Ver anexo 5. Guía Uno (momento uno).

- ***Momento dos:***

En este momento[6] decidimos evaluar las nociones previas sobre las formas de asumir las ecuaciones, funciones, representación de gráficas, tablas y otros elementos que se generaron de manera intencionada. Su duración fue de tres sesiones cada una de dos horas

Las preguntas planteadas estuvieron orientadas a desarrollar a partir de cantidades conocidas y desconocidas, las nociones de “variable”, “constante” y dependencia, es decir, se propusieron situaciones específicas de tipo aritmético que conllevaron a planteamientos de tipo algebraico.

Para cerrar este momento realizamos una reflexión sobre el proceso que se había desarrollado hasta el momento, con miras a establecer el punto de partida para la elaboración de la siguiente guía, la cual buscaba delimitar el problema a investigar.

- ***Momento Tres:***

Este momento fue desarrollado en tres sesiones de dos horas, el cual estuvo orientado por la guía dos[7], con esta guía se discutió el problema a investigar: *¿Por qué el sistema de transporte Metro es conveniente o no para ti como individuo que forma parte activa de la ciudad de Medellín?*, las estrategias para solucionarlo y las formas de recolección de datos, aspectos que hacen parte del proceso de modelación.

- ***Momento Cuatro:***

Este momento fue desarrollado en una sesión de cuatro horas, la focalizamos en la interpretación y utilización de los datos, para dar respuesta al problema propuesto a los estudiantes. Esta solución al problema se abordó mediante la actividad de responder un correo[8], en el cual se exponían tres situaciones diferentes que daban cuenta de los análisis y tratamiento dado por los estudiantes a los datos recolectados.

[6] Ver anexo 5. Guía Uno (momento dos)
[7] Ver anexo 6. Guía dos.
[8] Ver anexo 7. Guía tres.

- ***Momento Cinco:***

Este momento se desarrolló en una sesión de cuatro horas, el cual se buscó explicitar los modelos desde diferentes representaciones matemáticas y análisis de relaciones lineales. Lo orientamos mediante la guía cuatro,[9] pensada a manera de valla publicitaria.

- ***Momento Seis:***

Este último momento se desarrolló a través de una exposición[10] de dos horas, tuvo como objetivo recoger la experiencia y la producción de los estudiantes e investigadoras considerando la siguiente situación: "*En el Colegio Finca La Mesa hay varios estudiantes de otros lugares fuera de Medellín como Bogotá, el Cauca, Urabá y otros pueblos de Antioquia, ellos quisieran saber sobre las diferentes formas de movilización en la ciudad, costos, formas de ahorro y cuál de las opciones les conviene. Por esto motivo, requerimos de tu ayuda para dar respuesta a estas inquietudes".*

Esta exposición se preparó dos semanas antes en sus tiempos libres, se llevó a cabo en el auditorio de la Institución en presencia de estudiantes de otros grados pertenecientes a otros lugares fuera de Medellín, además del acompañamiento de las investigadoras y sus asesores.

Por último, se efectúo un conversatorio con los asesores e investigadoras con el fin de conocer los avances del proceso desarrollado durante el semestre.

3.4 Análisis e interpretación de los datos

En nuestro proceso de análisis e interpretación de los datos atendimos a las consideraciones de Hays (2004) sobre la importancia de realizar la búsqueda de relaciones y el hilo conductor de todo el proceso, proporcionando el sentido y significado entre los datos recolectados, sin que estos necesariamente se encuentren repetidos.

---

[9] Ver anexo 8. Guía cuatro.
[10] Ver anexo 9. Diapositivas de la exposición

Análisis paralelo

Apoyándonos en (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), la recolección y el análisis de los datos lo realizamos en forma paralela, es decir, de forma continua y comparada. El colectivo de investigación jugó un papel importante en el proceso de análisis de la información, ya que en reuniones periódicas el grupo se encontró para confrontar y sugerir caminos alternativos al desarrollo de la pesquisa. Estas confrontaciones se apoyaron en cada momento del estudio y los avances obtenidos según nuestra pregunta de investigación, con el fin de focalizar nuestro objeto de estudio en el desarrollo del trabajo de campo y su proceso de análisis.

Categorización emergente

Inicialmente, organizamos las transcripciones de las entrevistas en forma digital, luego los documentos escritos y digitalizados fueron clasificados por momentos y por último, utilizamos los videos para confrontar y profundizar las notas de observación. Luego, de haber organizado el material de análisis, comenzamos el proceso de codificación de los datos. Teniendo en cuenta que nuestra investigación es de corte cualitativo y pretendía caracterizar un proceso de modelación, lo realizamos mediante categorías emergentes.

En la codificación de las entrevistas, pruebas y la observación utilizamos como unidad de análisis el párrafo, de allí surgieron las categorías referidas en la

Ilustración 4. Tabla sobre la tematización del análisis de datos. con las cuales realizamos la búsqueda de sentidos y significados que nos permitieron caracterizar las maneras de construir modelos por el grupo de participantes.

Escritura del informe final

El informe final, lo presentamos atendiendo no solo a una descripción significativa sino también a un diálogo con la literatura y los referentes teóricos expuestos. Para responder la pregunta que motivó esta investigación: *¿De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes del grado once, construir* *relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contexto reales*? Presentamos los resultados a partir de los siguientes 5 temas:

TEMA 1: Contexto realístico: significante social y cultural	**TEMA 2:** Subproceso de experimentación y simplificación
Situación mirada desde la experiencia. Reconocimiento del contexto en lo cotidiano. Interés por investigar.	Estrategias auténticas. Simplificación. Recolección y organización de datos. Establecimiento de condiciones. Toma de decisiones y postura crítica.
TEMA 4: Relación entre dos variables	**TEMA 5:** Surgimiento del modelo
Del reconocimiento de las cantidades de magnitud a la noción de variable. Acercamiento a la idea de relaciones entre variables. Proceso de modelación y la relación entre variables.	Identificación de variables y constantes. Relación de variables y constantes por medio de un modelo matemático.

***Ilustración 4.* Tabla sobre la tematización del análisis de datos.**

Los temas 1,2 y 3 serán desarrollados en el capítulo 4 de este documento y los temas 4 y 5 en el capítulo 5. A partir de esta tematización, presentamos la interpretación de los datos a través de diferentes episodios, con los cuales develamos los significados, argumentaciones e interacciones que emergieron durante el proceso de modelación. A continuación, presentamos una red de relaciones general utilizada en los análisis y la presentación de resultados.

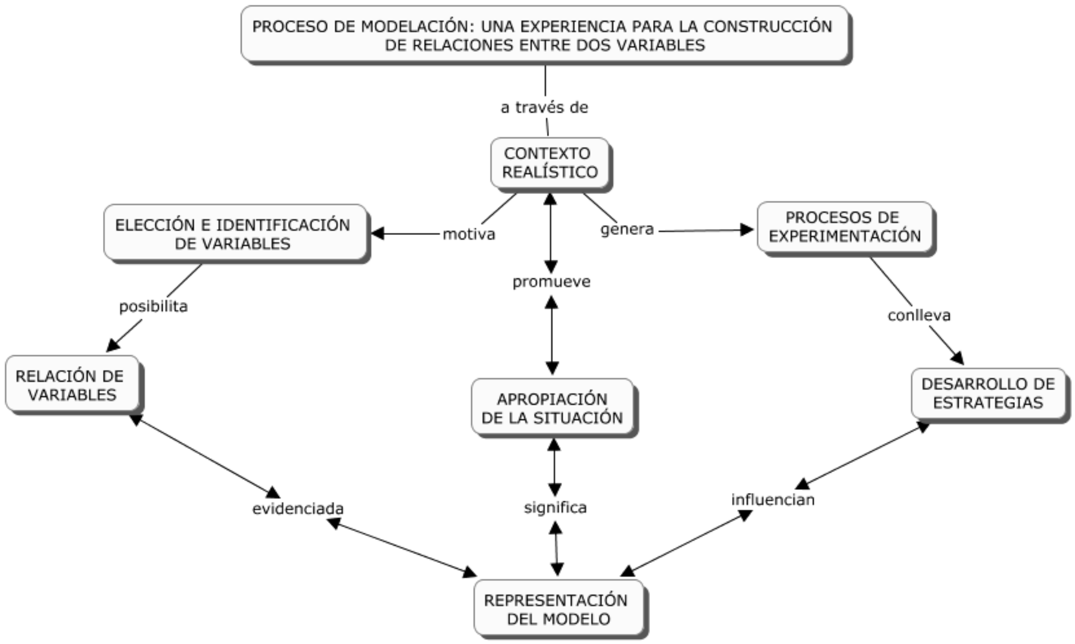


Ilustración 5. **Red de relaciones sobre el análisis de datos.**

3.5 Validez del estudio

La información recogida por las tres fuentes de datos antes mencionadas, fue validada mediante un proceso de triangulación. Para la realización de la triangulación, cruzamos los datos de las entrevistas con las observaciones y los documentos escritos utilizando un cuadro, en el cual, consignamos los códigos y categorías diferenciadas en los cinco temas citados en la Ilustración 4. Tabla sobre la tematización del análisis de datos. Luego, procedimos a identificar cuáles códigos y categorías se presentaban con mayor fuerza y regularidad en las tres fuentes. Debido a la cantidad de códigos establecimos tres colores diferentes para estos códigos, de modo que nos permitieran diferenciar su fuente de datos. Este procedimiento, obtenido a partir de tres registros diferentes de información (oral, escrito y visual), nos permitió validar la consistencia de los datos recolectados y ratificar las reflexiones que realizamos durante el trabajo de campo. Cabe anotar que las transcripciones de las entrevistas fueron socializadas con los participantes con el fin de corroborar la información obtenida.

Puesto que este estudio de casos, no pretende generalizar los resultados, ya que desde nuestra mirada el proceso de modelación está influenciado por los contextos reales y este, a su vez, de las múltiples condiciones de los estudiantes, sí aporta consideraciones relevantes (tratadas en los próximos capítulos), que pueden ser objeto de discusión por otros investigadores y pares académicos en el campo de la Educación y la Modelación Matemática. De igual modo, les puede ser útil a nuestros colegas docentes como punto de apoyo para la investigación en el aula, para próximos estudios y trabajos de campo relacionados con la modelación matemática.

Capítulo 4

4 LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL PROCESO DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESCOLAR: UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE ONCE GRADO

En este capítulo presentamos algunos análisis de resultados sobre el proceso de modelación matemática implementado con un grupo de nueve estudiantes a quienes designamos con los seudónimos de Lindsay, Jackobson, Wilhelm, Alex, Nicole, Jhony, Galvis, Sandro y Andrey. Conforme mencionamos el capítulo anterior, estos estudiantes abordaron una situación en contexto: *Sistema de transporte masivo: Metro de Medellín* en la cual se involucraron un conjunto de relaciones lineales entre algunas cantidades de magnitud. En el análisis de la información emergieron dos temáticas las cuales desarrollamos a continuación.

4.1 Contexto realístico: significante social y cultural.

4.2 Subproceso de simplificación y experimentación.

4.1 Contexto realístico: significante social y cultural

Las situaciones enmarcadas en el contexto cotidiano del Sistema de Transporte Masivo: Metro de Medellín se constituyeron en el punto de partida para que los estudiantes construyeran modelos matemáticos, reconociendo a la vez en sus experiencias sociales y en el andamiaje cultural, posibilidades de aproximarse a las matemáticas escolares.

El contexto del Metro de Medellín se convirtió en un escenario social y cultural del cual surgieron ciertas comprensiones del fenómeno de carácter político y crítico. El episodio que presentamos a continuación surge de un diálogo entre las investigadoras y los estudiantes en torno a las consultas realizadas por los estudiantes frente a los dineros de financiación y deuda del Metro[11].

01	Investigadora:	*¿Qué opinan con lo que acaban de ver?*
02	Jackobson:	*No, que hay mucho dinero ahí, en la deuda como en los ingresos. Vea en el 2009, 148.600 millones de dólares.*
03	Alex:	*Se ve mucho el desarrollo y todo el beneficio que ha traído. Además de ser un transporte sino como el entorno.*
04	Jackobson:	*Ahí* [refiriéndose al video] *nos dieron un dato muy importante que el 90% de las personas que entran al Metro son de estrato uno y dos.*
05	Investigadora:	*¿Qué lectura podemos hacer de ese dato?*
06	Jackobson:	*Que nosotros estamos pagando la deuda del Metro*
07	Galvis:	*Beneficia a los estratos uno y dos porque es más favorable.*
08	Wilhelm:	*Inicialmente lo hicieron para las personas pobres porque se supone que son las personas ricas no lo necesitaban.*
09	Investigadora:	*Jackobson, ¿qué iba a decir con respecto a eso?*
10	Jackobson:	*A mí no me parece.*
11	Wilhelm:	*Yo creo que algo tiene que estar aportando las personas ricas.*
12	Nicole:	*Sí, porque ahí mostraron que no sólo es un transporte sino que es un lugar turístico para los turistas, que hasta en eso ha avanzado, entonces no sólo se puede decir que sólo para los pobres.*
13	Wilhelm:	*Eso lo hicieron para todos, para todos eh, que las personas de bajos recursos sean los que más lo utilizan, además es público y si es público no importa el dinero ahí lo único que tiene que hacer es pagar el pasaje.*
14	Jackobson:	*Eso de que lo hicieron para las personas de bajos recursos es cierto, pero quienes son los que pagan la construcción de eso?*
15	Andrey:	*Los mismos beneficiados.*
16	Wilhelm:	*Yo creo que los pagan el Metro son los que montan ahí porque una persona que no tenga los $1550 del pasaje pues esa persona no está aportando para pagar.*
17	Jackobson:	*Pues yo pensaría que en los servicios cobran también eso.*
18	Andrey:	*Por medio de las bebidas alcohólicas y el cigarrillo también se pagan las deudas.*
19	Jackobson:	*Vea acá también dicen que la Empresa de Tabaco de Antioquia y ¿cuál es la otra?… ¿y quiénes* son los que compran tabaco? los ciudadanos mismos.*
20	Nicole:	*Y aquí también dice que los socios de la empresa aportan el 60% de esa deuda, asumen el 60% entonces tampoco somos sólo nosotros.*
21	Investigadora:	*¿Qué otros aspectos resaltan de la lectura y el video?*

[11] Ver anexo 5: Lectura y video de la guía uno.

22	Nicole:	*que se había atrasado tanto la construcción, se planteó para cinco años y se demoraron doce. Eso fue lo que también hizo que quedara el Metro con tanta deuda después de ser construido.*
23	Jackobson:	*Casi el 70%. Dice 1256 millones de dólares pero el total cuánto fue?*
24	Investigadora:	*O sea que el retraso, ¿causó qué?*
25	Andrey:	*El aumento de la deuda.*
26	Jackobson:	*El precio acordado es de 1256 millones de dólares pero el precio que van a pagar en total 2.174 millones, que un aumento del 80%, no la mitad, casi el doble, el doble de 1200 es 2400, 82% más o menos, casi el doble.*

En el diálogo puede observarse cómo los estudiantes generan sus opiniones frente a los recursos económicos invertidos en la Construcción de Metro y sus actuales fuentes de financiamiento. Particularmente en el cuarto segmento (04) del diálogo anterior, Jackobson presenta un dato extraído del video, el cual generó en los otros estudiantes, diferentes opiniones e interpretaciones. Con respecto a la actual manera de financiación de la deuda del Metro, Jackobson cree que son los ciudadanos de estratos bajos quienes se encargan de dicha financiación y que, a pesar de tener otras fuentes de financiación, dichas fuentes también son derivadas de los mismos ciudadanos (segmento 19). Las afirmaciones de Jackobson indican como él se ve y cuál es su papel en la situación de la deuda del Metro, su mirada crítica le permite reconocerse como sujeto partícipe que pertenece a un colectivo ciudadano con una función específica, la de pagar el Metro. Otros estudiantes pudieron reconocer la participación de otros estamentos en el pago de dicha deuda; por ejemplo, Galvis resaltó el beneficio y la economía, Nicole reconoce a los socios de la empresa como otros responsables, Wilhelm lo reflexiona distinguiendo a pobres y ricos pero luego resuelve esta distinción con el hecho justo de pagar el pasaje y Andrey desde la información de otras aportes como el del tabaco y el licor. Estas posturas desencadenaron algunas reflexiones en los compañeros y les permitieron una comprensión de la situación de un modo amplio y problemático. Además, configuraron un espacio para que los estudiantes interactúen con diferentes opiniones y argumentos, dejando abierta la discusión.

En la socialización se determinó sobre los problemas de retraso en relación al aumento de la deuda, entendiendo ese aumento de cantidades en una aproximación cuantitativa de duplo y porcentaje. El participante Jackobson comienza a utilizar un razonamiento de comparación de cantidades y el cálculo aproximado de un porcentaje para darle credibilidad a la idea del aumento de la deuda, asumida como grandes cantidades.

De acuerdo con Blum et al. 2007 y Blum y Borromeo (2009), el proceso de modelación matemática puede desarrollarse mediante los siguientes momentos cíclicos: *1) Comprensión de la situación 2) Simplificación y estructuración 3) Matematización 4) Trabajo matemático 5) Interpretación 6) Validación 7) Exposición.* Por lo que, en el anterior episodio observamos un primer momento de comprensión de la situación, ya que, los estudiantes buscaron apropiarse de la situación del Metro desde sus interacciones con el otro, su entorno, sus experiencias cotidianas y su capacidad de discusión sobre lo que conocen.

Observamos en los estudiantes, que el hecho de plantear hipótesis, estimaciones y predicciones, motiva la discusión y genera la necesidad de darle respuesta usando sus ideas iniciales que van evolucionando hacia modos cada vez más elaborados y analíticos producto de la reflexión. De ese modo, los estudiantes fueron transformando las ideas empíricas referidas a todos aquellos aspectos que reconocen del contexto, hacia análisis de relaciones con estrategias matemáticas. Así mismo, en el proceso de apropiación del contexto se crea en los estudiantes diferentes intereses y cuestionamientos generados por ellos mismos, que les exige buscar en el campo de las matemáticas aquello que les ayude a legitimar sus ideas, soluciones o hipótesis, aspectos evidenciados en la hipótesis del segmento 6 y acercamiento matemático en los segmentos 23 y 26 del anterior episodio.

Motivados con las preguntas de la guía uno[12], los estudiantes continúan expresando en forma grupal los siguientes aspectos de cambio y desarrollo de la ciudad con el Metro: comodidad, cultura, movilidad, preservación del ambiente, embellecimiento del entorno, la promoción de cultura ciudadana, la implementación del turismo, las bibliotecas, los juegos y el deporte influencian el comercio y la economía, el

[12] Ver anexo 5: Guía uno

proyecto del tranvía y el descuento por el SISBEN[13] en el pasaje del Metro. Luego, continuaron proponiendo estrategias en beneficio del Metro como por ejemplo; utilizar la tarjeta cívica para pagar los buses, investigar los sistemas masivos de transporte de otros países para tener en cuenta otras estrategias en el Metro de Medellín, el bici-Metro, colocar algo para obtener ingresos en las zonas cerca del Metro o colocar libros. En este momento los estudiantes tuvieron la posibilidad de expresar sus ideas, teniendo en cuenta su conocimiento común. La posibilidad de aportar desde lo que conocían los llevó a proponer, a complementar las ideas del otro y a expresarlas en un clima de fluidez y confianza. Con lo cual, la situación del Metro fue observada inicialmente por los estudiantes de manera global, identificando diferentes aspectos de impacto social, económico y ciudadano.

Comenzar a discutir sobre la situación del Metro en forma global generó en los estudiantes un interés por preguntarse cuestiones un poco más específicas y por dar posibles soluciones a estas preguntas. El siguiente episodio se convierte en evidencia de este hecho:

Wilhelm al ver la lista de tarifas (ver anexo 2), reflexiona y dice que*: "¿existe alguna relación entre todos estos precios?, podemos avanzar en esa pregunta, yo veo como una relación entre todos esos precios para poner la cosa como mucho más fácil, ¿no?",* luego propone que vendan la tiquetera a largo plazo y pregunta a sus compañeros: *"¡verdad!, otra pregunta ¿por qué quitaron los tiquetes dobles que eran más baratos? 2.500 valía",* la investigadora retorna la pregunta a sus estudiantes: ¿por qué creen que quitaron este tiquete?, al respecto Wilhelm afirman que: *"lo más seguro es que le estaba generando pérdida".* Luego Jackobson conjetura: *"sí, porque yo pensaría que esos precios se sacan es a partir de los kilómetros recorridos, de las distancias, como a Barbosa es más lejos entonces más caro, por eso estaba dando pérdidas".* La investigadora vuelve a preguntar: *"es la micro o el Metro el que iría hasta Barbosa[14]",* para lo cual Andrey afirma que: *"la micro"* y luego Wilhelm continua argumentando: *"la persona va hasta Barbosa coge el Metro, el [tiquete] integrado, el Metro no llega hasta Barbosa y el sistema se puede decir, bueno llega la micro, como es un sistema*

[13] El Sistema de Selección de Beneficiarios Para Programas Sociales (SISBEN) es una herramienta, conformada por un conjunto de reglas, normas y procedimientos para obtener información socioeconómica confiable y actualizada de grupos específicos en todos los departamentos, distritos y municipios del país. Lo que se busca con la información que arroja el SlSBEN es focalizar el gasto público para de esta manera garantizar que el gasto social sea asignado a los grupos de población más pobres y vulnerables. Tomado de: *http://condoto-choco.gov.co/sitio.shtml?apc=tsxx-1-&m=b*

[14] Barbosa es uno de los municipios ubicado al norte del Área Metropolitana de Medellín.

llega hasta Barbosa" Andrey apoya a Wilhelm diciendo: *"el sistema consiste en dos partes, primero el Metro y después la micro".*

Es interesante observar cómo la afirmación de un estudiante motiva en sus compañeros nuevos elementos de discusión, y de este modo, la discusión grupal constituye una dinámica propia de los estudiantes para establecer consensos. Nos llama la atención, cómo los estudiantes hacen uso de sus conocimientos empíricos acerca del sistema de transporte Metro para comprender aspectos particulares del fenómeno estudiado. Por ejemplo, en el momento en que Wilhelm explica su idea del Metro como sistema con la ruta de Barbosa. Además, observamos un interés por encontrarle un sentido a un hecho desde una lógica enmarcada en el mismo contexto, específicamente cuando Wilhelm manifiesta su deseo de encontrar una estrategia que le permita relacionar los precios y luego su compañero Jackobson propone una manera de relacionarlos.

Es así como los contextos pueden verse como un puente entre lo que tiene un sentido práctico, real y perceptible a las experiencias con lo abstracto y las representaciones simbólicas matemáticas. Este puente, se constituiría en una de las necesidades del estudiante fuera del aula de clase. En consecuencia, el trabajo con estos problemas en contexto real, se abordaron no como aplicaciones sino como necesidades de los estudiantes.

En las clases de matemáticas, los participantes estaban acostumbrados a utilizar problemas que correspondían al campo mismo de las matemáticas con el objetivo de aplicar una definición o una propiedad. Partir desde problemas relacionados con los contextos cotidianos puede verse como una manera diferente y llamativa en la construcción de nociones matemáticas. En este sentido, las situaciones y problemas utilizados presentan un papel fundamental en la actividad matemática a desarrollar. Casi podríamos decir que, según el tipo de problema y de situación que se proponga correspondería con una forma de hacer matemáticas.

En el primer episodio los estudiantes asociaron en forma cualitativa, el tiempo de retraso en la construcción del Metro con el incremento en la deuda del Metro. Al respecto Nicole afirma: "*la construcción de la línea A, B, C, pero también hubo sobrecostos ya que hubo siete años de retraso en la construcción"*. En el segundo episodio, relacionaron el precio de los tiquetes sobre los microbuses en relación a la distancia o destino del usuario, estableciendo una correlación directa. Al respecto, Jackobson conjetura de forma argumentativa que: "*esos precios se sacan es a partir de los kilómetros recorridos, de las distancias, como a Barbosa es más lejos entonces más caro, por eso estaba dando pérdidas*". Esta correlación la utilizó en la búsqueda de un argumento que le fuera lógico sobre la suposición de que los tiquetes dobles los quitaron debido a la pérdida económica que generaron. Con esto, podemos analizar que los estudiantes usaron una comparación directa entre dos cantidades para comprender algo de su interés, en este caso sobre los precios o tarifas del Metro.

Usar argumentos matemáticos, presentados en forma discursiva para abordar preguntas sobre los precios o la deuda del Metro, sugiere que los estudiantes utilizan las matemáticas para pensar en una situación como esta, con la cual tienen contacto cotidiano. Este aspecto corresponde con una de las tareas que procuran procesos de modelación matemática en el aula de clase. Al respecto, Burkhardt (2006) sustenta que, en los planes de estudio, es importante considerar el uso de las matemáticas para modelar situaciones prácticas, no rutinarias y no sólo aprenderlas en sí mismas.

(Re) conociendo el contexto

La naturaleza práctica de la situación de transporte del Metro llama la atención en los estudiantes puesto que es una situación que, según ellos, no habían abordado antes en sus clases de matemáticas. Veamos, en cuanto les preguntamos: ¿cuánto dinero ingresa al Metro y cuánto para el sistema de microbuses de Santa Rita?[15], ellos comenzaron a conjeturar y a problematizar sobre "lo que hay detrás" de los integrados. Sin embargo, la diversidad de puntos de vista les genera la necesidad de buscar datos e información que satisfagan sus intereses. El siguiente episodio se convierte en evidencia de la construcción de un problema particular sobre los integrados dinamizada por la discusión:

[15] Santa Rita es un barrio de la zona nororiental de Medellín.

01.	Jackobson:	*¿Cuál es el valor que tiene un tiquete individual?*
02.	Andrey:	*$1550.*
03.	Jackobson:	*¿Cuánto para el sistema de microbuses de Santa Rita? 350 pesos.*
04.	Galvis:	*Eso no debería ser así porque es que 1500 eso debería ser más o menos como $800 para cada uno. Normalmente es como 1900*
05.	Wilhelm:	*¿Cuánto vale el* [tiquete] *integrado a Santa Rita?*
06.	Nicole:	*1900*
07.	Jackobson:	*Y el pasaje normal en Metro 1550*
08.	Wilhelm:	*Están cobrando…*
09.	Jackobson:	*350*
10. .	Wilhelm:	*Es una estrategia, mire la distancia de aquí a la estación más cercana, ellos como quien dice dividen el precio que cobrarían un bus de aquí al Centro, 1500, entonces ellos si no lo dejan allí en* [la estación] *Madera me imagino que en* [la estación] *Acevedo*
11.	Alex:	*No es viable, le toca dar una vuelta ahí por toda esa vía, pero los da Andalucía cobran 800 para ir allí por esta bajadita, entonces ahí está la diferencia, usted se monta acá al Metro por $800, en cambio con el integrado le cobran la mitad de 800, 400.*
12. .	Wilhelm:	*O sea que, ese recorrido vale $350*
13.	Jackobson:	*Usted compra el integrado, el bus no interesa, lo que interesa es el Metro como tal. Que va llevar a que usted compre el integrado, que va montar en Metro. Yo no creo que se divida en 800 y 800, 1500 pa' el Metro y 400 pa' el bus.*
14.	Nicole:	*Cuando dice que va para el Metro si son 1900, pero cuando sólo es el bus son 800.*
15. .	Wilhelm:	*Ellos que es lo que están haciendo están trayendo gente de otras partes para que utilicen eso*
16.	Jackobson:	*Usted compra el integrado, solamente lo puede comprar en la estación.*
17.	Wilhelm:	*No, si uno se monta en un bus le venden el tiquete y si se monta en el Metro le venden el tiquete para el bus.*
18.	Nicole:	*El bus, como dice usted de Barbosa, le va a vender no más el tiquetico, el bus, usted tiene que ir a la estación por el otro. A usted no le entregan junto.*
19.	Andrey:	*No, a usted le dan el tiquete para el Metro.*
20.	Jackobson:	*Y ¿el del bus también?*

21.	Andrey:	*¡Claro! Usted llega a la estación y ya tiene también el tiquete.*
22.	Jackobson:	*Bueno, entonces porque cobran $800 a la estación solamente?, si saben que van para la estación deben comprar el integrado.*
23.	Nicole:	*Porque a veces uno;..., yo he utilizado sólo el bus.*
24.	Nicole:	*Lo que ellos nos quieren mostrar es comodidad para nosotros.*
25.	Wilhelm:	*Cuando no existían los integrados se puede decir que había muy poca gente.*
26.	Jackobson:	*¿Usted cómo lo distribuiría?, ¿usted cree que mitad y mitad o…?*
27.	Nicole:	*La mitad eso no puede ser así, el Metro gana un porcentaje más que la buseta, debe ser como dice usted que sacan el precio real del Metro 1550.*
28.	Wilhelm:	*Con 350 pesos pa' pagar gasolina y los trabajadores, ellos lo único que necesitan con esos 350 pesos sostener esos buses, ¿para qué?, para que le lleven esa gente allá, lo único que necesitan es que esa gente este allá montada en ese Metro.*
29.	Jackobson:	*Entonces si la dividimos así, 1550 y 350, porque es que vea con la Cívica*[16] *sale $100 más barato, entonces podría ser $1450 para el Metro y $450 para los buses.*
30.	Wilhelm:	*Yo creo que de los buses no esperan ganancia, ellos esperan ganancia desde el Metro.*
31.	Jackobson:	*Es que obvio.*
32.	Nicole:	*Yo hago una pregunta entonces, ¿por qué si la gasolina sube, suben las tarifas de los buses, entonces ¿por qué sube el tiquete del Metro sino utiliza gasolina?*
33.	Jackobson:	*Es que no solamente son los buses no es los precios los que suben sino la moneda la que se devalúa.*
34.	Alex:	*La moneda depende mucho del dólar y del petróleo.*

[16] Es una tarjeta inteligente sin contacto (TISC), que tiene la posibilidad de almacenar dinero para realizar el pago de las tarifas de transporte, y otros servicios que actualmente se ofrecen en el mercado. Esta tarjeta actualmente se utiliza para el ingreso al Metro y se trabaja para que en el mediano plazo se extienda a los demás sistemas de transporte público, como es el caso de Metroplús y el sistema integrado. Así mismo servirá para el ingreso a centros recreativos, culturales y deportivos. Tomado de: *http://www.metrodemedellin.org.co/index.php?option=com_content&view=article&id=99&lang=es*

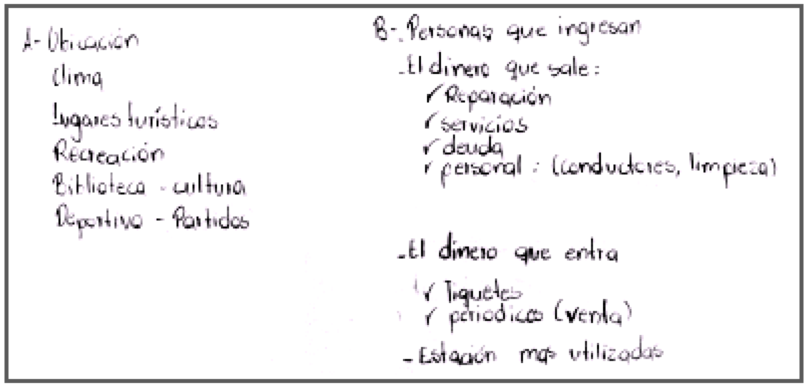
En este episodio podemos leer un proceso de discusión moderado por los mismos estudiantes, en el cual emergen diferentes posturas frente a la pregunta con respecto a los tiquetes integrados. Los análisis de Wilhelm se muestran desde los intereses del Metro, Nicole asume una posición como usuario, Galvis expresa su idea para ser debatida y Andrey aporta desde su experiencia al comprar un tiquete. En esta dinámica de discusión se evidencia una posición de responsabilidad y apropiación frente a la situación. De manera que, el trabajo en grupo se hace valioso por cuanto permite la diversidad de miradas, generando, en ocasiones, la necesidad de consensuar y de reflexionar sobre las ideas del otro bajo argumentos válidos desde lo que les significa para ellos el contexto. Desde la perspectiva de Burkhardt (2006), este tipo de discusiones se denomina analítica, en el sentido que aporta al proceso de aprender a modelar por los acercamientos alternativos a un problema, y la reflexión que se genera en los procesos implicados.

Analizamos cómo los estudiantes comienzan a identificar la distancia como uno de los factores que se involucran en los de los precios (ver segmentos 10 y 11). Alex utiliza la estrategia de comparación de los precios según las rutas, de ahí que Wilhelm ratifica la idea de asociar el recorrido de acuerdo al precio del viaje. En estos momentos iniciales del proceso de modelación, los estudiantes se valen de relaciones entre magnitudes de tipo cualitativo amarradas a las especificaciones de la situación para significar el contexto estudiado. Es necesario que los estudiantes reconozcan el contexto en forma auténtica y problematicen sobre él, de esta manera les posibilita conectarse a él desde sus análisis y experiencias cotidianas. Acorde con Blomhøj (2004) la modelación posibilita la creación de puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática. La idea de puente, no sólo se refiere a establecer conexiones, sino que también puede ser entendida como un punto de partida para el estudio de la noción matemática de relación entre variables, por tanto esta noción adquirirá sentido en tanto sea pensada para resolver cuestiones del contexto.

Así mismo, cuando Jackobson muestra un interés por consensuar a nivel cuantitativo cuanto corresponde al Metro y cuánto a los buses, interpretamos una necesidad de predecir valores en relación al funcionamiento de los microbuses dentro de toda una concepción del Metro como Sistema Integrado de Transporte. Sin embargo, no se limitaron a expresar valores cualesquiera, sino a proponer desde un enfoque administrativo, algunas razones del por qué de esa tarifa. Como lo indica Wilhelm cuando sustenta que: "*con 350 pesos pa' pagar gasolina y los trabajadores, ellos lo único que necesitan con esos $350 sostener esos buses, ¿para qué?, para que le lleven esa gente allá".*

Comprar un tiquete individual o un tiquete integrado podría parecer algo sencillo para un estudiante, pero cuando este se encuentra en la posición de entender cómo funciona, pone en juego su capacidad de usar lo que le sirve desde el plano escolar, cultural y social, para pensar sobre esa situación específica con la cual está relacionado. De este modo, la situación en contexto no la miramos en forma independiente al estudiante, por el contrario, la situación es abordada en forma natural y auténtica por los estudiantes.

Como vemos a continuación en la siguiente ilustración, los estudiantes identificaron a partir de sus experiencias algunos factores que afectan los ingresos en la estación Acevedo e identificaron las personas que ingresan, las personas más frecuentes por medio de la cívica, el dinero que sale, el dinero que entra, los estudiantes y las estaciones más utilizadas como aspectos que ellos pueden cuantificar. En el literal A, reconocen aspectos del contexto de tipo externo a la estación, mientras que en el literal B reconocen aspectos de tipo interno al funcionamiento del transporte Metro, con lo cual comienzan a delimitar el contexto. El hecho de establecer un conjunto de aspectos que justifican la variable ingresos y egresos, nos indica la necesidad de los estudiantes de entender sus respuestas en la misma forma que funciona el contexto del Metro. También resaltamos, que los estudiantes establecen correspondencias, por ejemplo del dinero que sale con el pago de los empleados, la deuda, los servicios y las reformas que en algunas estaciones se están adelantando, y del dinero que entra con los tiquetes y la venta de periódicos.



A- Ubicación
Clima
lugares turísticos
Recreación
Biblioteca - cultura
Deportivo - Partidos

B-. Personas que ingresan
-El dinero que sale:
✓Reparación
✓servicios
✓deuda
✓personal: (conductores, limpieza)

-El dinero que entra
✓Tiquetes
✓periódicos (venta)
-Estación mas utilizadas

***Ilustración 6.* Identificación de ingresos y egresos. Alex**

El proceso de apropiación de la situación del Metro se convierte para los estudiantes en un problema cotidiano, en el cual se puede observar, experimentar, recolectar datos e información, estimar cantidades y predecir posibles relaciones matemáticas. De acuerdo con Villa-Ochoa et al. (2009b) el contexto en el proceso de modelación permite que los estudiantes se vean enfrentados a identificar, manipular datos, simplificar cantidades y variables con miras a la construcción del modelo.

El contexto del Metro funciona dentro del proceso de modelación matemática como un argumento de motivación, de empoderamiento y de significación para el grupo de estudiantes de once grado. Precisamente, porque proporciona una riqueza en cuanto a su contenido cultural y social, de interés para que ellos vinculen sus experiencias de uso con diferentes interrogantes y necesidades a resolver. El discutir aspectos del Metro desencadenó múltiples ideas, críticas y cuestionamientos, conllevando a empoderar a los estudiantes de la situación con el propósito de generar procesos de simplificación y construcción del modelo referente a la relaciones lineales entre dos variables. Al respecto, Lindsay señala:

Lo que más me gustó fueron las polémicas que se formaron en diferentes clases por la diversidad de opiniones, también me gustó escuchar opiniones y puntos de vista de los demás alumnos. Además entendí cual era mi capacidad de análisis frente a la realidad (Lindsay)

Los contextos de modelación permiten ver la realidad más a fondo, con toda su complejidad. En coherencia con idea, el modo de relación de los sujetos con una realidad no estática, tiene que ver con un proceso de construcción humana que se materializa en actividades concretas de aula, en las cuales se reflexiona intencionalmente sobre lo problemático de una realidad particular.

Las situaciones en contexto real, bajo una perspectiva de modelación matemática en el aula requieren que estén al alcance de la visión del mundo construida hasta ese momento de los estudiantes. Es decir, que haga parte de su forma de vida, para que de este modo les permita comprenderla, transformarla y ampliarla.

Al comenzar con una situación en contexto se posibilitó en algunos estudiantes una motivación para participar del grupo de investigación

Se observó en esta investigación que las situaciones de naturaleza *realística* motivaron un interés por investigar, bajo la premisa que la situación investigada no es algo que ya está hecho y que además, es el estudiante el protagonista de este proceso. Como lo expresa Sandro quien ingresó al grupo en medio del proceso y Alex quien participó desde el inicio.

> *Bueno pues mi ingreso al grupo fue algo que yo mismo busqué pues al ver a unos compañeros de mi salón hablando sobre este proyecto y sobre el tema al cual se dirigía la investigación, esto me llamó mucho la atención sobre un medio de transporte masivo como es el Metro de la ciudad de Medellín y pues busqué el modo de hablar con las profesoras encargadas y me dieron la oportunidad de participar en este. (Sandro)*
>
> *Cuando entramos al grupo pensamos que iba a ser una cosa aburrida: que ecuaciones, que copien esto, que esto se puede hacer así, pues y vimos que no era así, pues a partir de las ideas de la vida diaria que teníamos utilizando el transporte, nos enfocamos en eso y como que utilizamos esa lluvia de ideas, las recogíamos todas y llegábamos a una buena idea principal, todo eso lo enfocamos también hacia la matemática. (Alex)*

Tanto el grupo como la situación del Metro de Medellín le llamaron la atención a Sandro para tomar la iniciativa de participar en el proyecto. Esto nos sugiere que, las situaciones contextualizadas en la vida cotidiana del estudiante pueden jugar un papel importante en la motivación, en algunos de ellos, para realizar actividades de modelación. De acuerdo con Blum et al. (2007), Avarena, Caamaño y Giménez (2008) consideramos la importancia de usar en la modelación situaciones interesantes para motivar y enganchar a la actividad matemática.

A continuación presentaremos un cuadro de síntesis de algunos resultados generales respecto al tema el contexto realístico: significante social y cultural

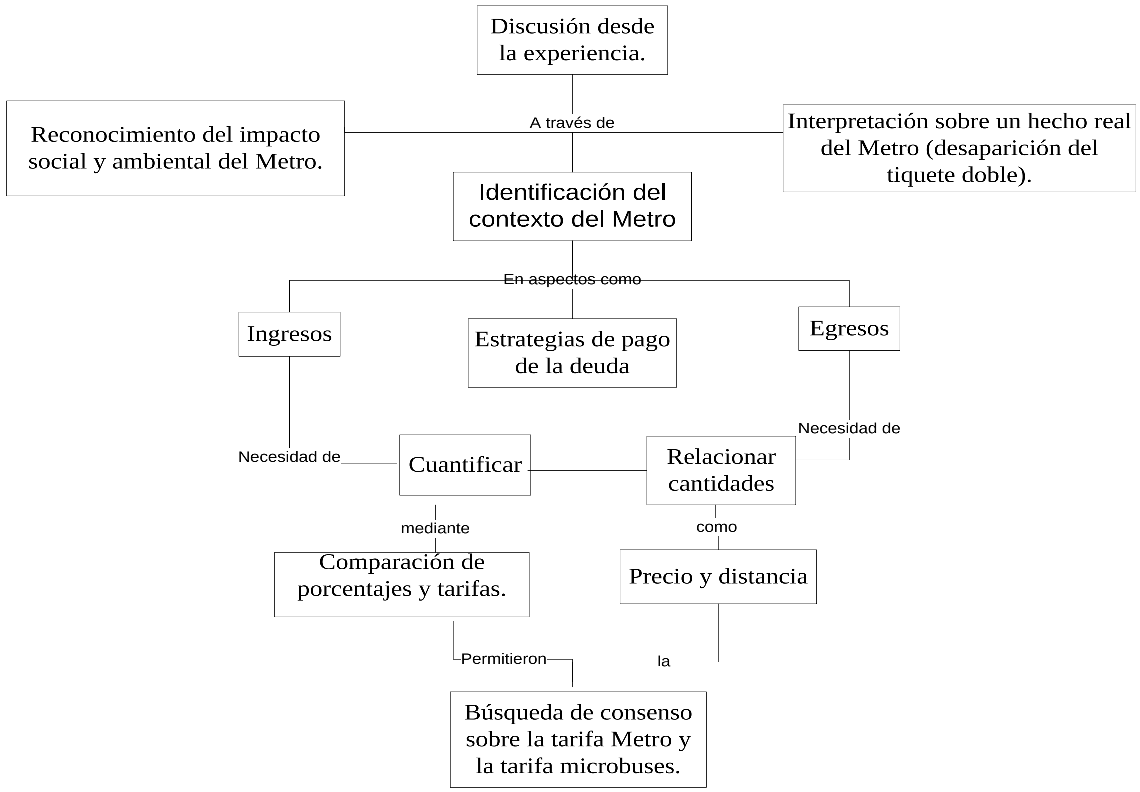


Ilustración 7. **El contexto realístico: significante social y cultural.**

Podríamos pensar que los resultados dependen según la situación en contexto y cómo los estudiantes se relacionen con ésta. Es claro que, la diversidad de contextos implica diferentes resultados; sin embargo, cuando los estudiantes se vieron enfrentados a otro contexto diferente del Metro de Medellín, de algún modo la manera de abordarlo, dan cuenta de sus anteriores experiencias que los estudiantes vivenciaron bajo el contexto de investigación del Metro se usan en un modo de abordar nuevas situaciones. Como lo evidenciamos en el siguiente episodio:

01.	Investigadora:	*Bueno, si pensáramos en otro contexto, digamos en otra problemática por ejemplo con los servicios públicos de EPM, analizar lo que está alrededor de eso, ustedes como empezarían la investigación y qué harían bajo ese contexto cuentas de servicio.*
02.	Alex:	*A mí me gustaría averiguar, no tanto de la cuenta, sino como hacen para sacar la energía, investigar*

		el origen de todo eso y a lo último sería ya la prestación del servicio.
03.	Galvis:	*¿Qué costos tienen para sacarla?.*
04.	Investigadora:	*O sea el proceso de generación de energía, el agua.*
05.	Galvis:	*Pues de los servicios*
06.	Alex:	*Pues cuáles son los proyectos que, pues si se les dificulta sacar eso entonces tiene que ver con el cobro.*
07.	Andrey:	*También cómo hacen para calcular que tanta energía uno gasta, qué tanta agua.*
08.	Lindsay:	*Buscar también cómo hacen ellos para que esta cantidad vale tanto.*
09.	Alex:	*En la cuenta se especifica Metro* [cúbico] *por, por ejemplo el Metro puede valer tanto y multiplican eso pues.*
10. .	Lindsay:	*Pero, ¿de dónde sacan los precios?*
11.	Alex:	*Pues un Metro cúbico vale tanto. Pues que regla hay rígida para establecer ese precio.*
12. .	Alex:	*Para buscar que un ahorro en los hogares.*
13.	Investigadora:	*Te gustaría averiguar sobre un ahorro.*
14.	Alex:	*Un ahorro.*
15. .	Alex:	*No sólo investigar sobre la empresa, sino investigar sobre los electrodomésticos, cosas que usamos en la casa comúnmente, que también nos ayuda a consumir el agua, la energía, pues averiguar sobre el computador, el televisor, cuánto consume, todo eso, como miradas alternativas.*

Indagar en una situación específica como la cuenta de servicios genera en Galvis, Andrey, Alex y en Linsay, diferentes interrogantes que surgen por la misma reflexión de la situación, convirtiéndose naturalmente en necesidades a resolver, en tanto no son impuestos, sino orientados en medio de la conversación (ver segmentos 02, 03, 08 y 10). El interés por realizarse preguntas para investigar, al mismo tiempo genera necesidad de plantear hipótesis y de establecer posibles soluciones sin alejarse de la situación (ver segmento 11).

Observamos capacidades para reconocer el contexto de servicios públicos como parte de un contexto global, al momento de querer investigar sobre el origen de la energía y luego de la prestación del servicio. También lo reconoce desde la cotidianidad de un hogar, por ejemplo cuando identifica la influencia del uso de los electrodomésticos sobre el ahorro.

En el momento en que Linsay se pregunta *"cómo hacen ellos para que esta cantidad vale tanto*" (segmento 08), se evidencia un interés matemático por conocer el proceso de correspondencia entre dos cantidades diferentes. Por lo que, la tarea de relacionar la magnitud cantidad en términos de la magnitud precio emerge como un reto dentro de la delimitación y exploración del problema a investigar.

Retomando la conexión de las representaciones que pueden hacer los estudiantes desde diferentes contextos resaltamos en la entrevista final la siguiente conclusión al establecer ¿Cuál de los operadores es más económico? Al respecto Sandro concluye:

Nosotros ya pusimos la condición, que esto va a ser para una persona común, una persona común busca la economía, ¿cierto? Claro, entonces siendo así, es más conveniente el Tigo. Pero si esa persona está buscando en vez de economía, está buscando número de minutos, entonces, sería de movistar…

De ambas situaciones las relaciones que se establecieron se basaron en los argumentos influenciados por las necesidades y las posibles condiciones que permean la conexión entre cantidades que varían, en este sentido, vuelve y se coloca en evidencia la tendencia a establecer variables y relaciones entre ellas, de una forma particular, retórica, única y que responde sólo al contexto que la contiene, si se colocan estas relaciones bajo otros criterios u otro contexto ya no funcionaría de la misma forma.

En consecuencia, la puesta en juego de diferentes escenarios auténticos y cercanos a los estudiantes, nos proporcionó en el estudio una mayor aserción sobre la importancia de la construcción de relaciones entre dos variables en espacios de modelación matemática que los estudiantes pueden abordar en contextos propios y la relevancia para ellos y su entorno inmediato, en cuanto a la mirada que siguen atribuyendo a los diversos lugares y circunstancias analizadas dentro de las actividades desarrolladas en el transcurso de la investigación.

Vista la modelación matemática desde estas experiencias, podemos analizar que su contribución apunta a potenciar en los estudiantes un interés por intervenir directamente en su entorno inmediato. Por ende, la apuesta por una matemática encaminada a la solución de problemas y situaciones del transcurrir día a día, funciona como una estrategia alternativa para la formación de ciudadanos responsables de sus propias problemáticas sociales y culturales.

4.2 Subprocesos de simplificación y experimentación

En esta temática presentaremos algunos resultados obtenidos de los participantes, con respecto a dos procesos inmersos dentro del proceso de modelación desarrollado; estos son: la simplificación y la experimentación. Y luego abordaremos algunas reflexiones sobre la modelación como un proceso diferente para la búsqueda de modelos.

4.2.1 Subproceso de simplificación

Una de las estrategias auténticas utilizadas por los estudiantes consistió en una auto-formulación preguntas delante de sus compañeros en forma verbal, conllevando a que fueran también asumidas por sus compañeros. Esta acción característica de un investigador(a), les exigió plantear reflexiones a base de las circunstancias, hechos y experiencias conocidas por ellos, con la idea de analizar las variantes sobre partes de realidades, para luego consensuar posibles respuestas o soluciones. Esta manera de relacionarse con el contexto, les permitió otorgarle movimiento a las discusiones y marcar un camino inicial para la construcción de modelos. Como lo evidenciamos en los anteriores episodios, en las discusiones sobre los servicios públicos y el contexto del Metro, emergen ideas que se van transformando y afinando por la interacción con el otro.

Una de los problemas que se fueron perfilando a partir de las reflexiones realizadas con los estudiantes en los momentos iniciales del trabajo de campo sobre la comprensión de la situación del transporte del Metro, consistió en preguntarles a los participantes: *¿Por qué el Sistema de Transporte Metro es conveniente o no para tí como individuo que forma parte activa de la ciudad de Medellín?,* con este planteamiento los participantes comenzaron diversas tareas para responder esta pregunta como por ejemplo: definir cómo hacerlo, proponer estrategias para abordar la pregunta, establecer parámetros y condiciones y decidir cómo recolectar, organizar e interpretar los datos. Así, la situación del Metro la observaron los estudiantes en comparación con el transporte en bus y en taxi, creando la necesidad de evaluar los beneficios de estos transportes, y estableciendo los siguientes parámetros: *la distancia, el tiempo, la capacidad y los costos,* como lo expresa a continuación Alex:

> *Nos basamos en un medio de transporte que es muy llamativo en Medellín, el Metro. El objetivo de nuestro plan de estudio, no sólo mirar el Metro, enfocarnos en otros transportes. Cuáles eran las falencias y cuáles eran los beneficios. Mirar cuál era el más favorable en qué nos favorecía, en qué no. Podemos ver desde el principio, intuimos que el Metro como era el más favorable, nos traía muchos beneficios, aparte de que nos transporta, como que también crea un buen aspecto en la sociedad como de parque, un buen aspecto en la estación pues. Pudimos evaluar entre los beneficios pudimos evaluar la distancia, el tiempo, la capacidad y el principal de todos los costos. (Alex)*

Al igual que Alex, los demás participantes centran la atención en el factor de los costos para evaluar la conveniencia del transporte Metro, asumiendo la pregunta ¿cuál es el más favorable? como uno de los criterios para determinar esta conveniencia, bajo la estrategia de comparación con otros transportes.

Por otra parte, al establecer la hipótesis de que el Metro es el más favorable iniciando el proceso, los estudiantes se incorporan a la dinámica de demostrarlo con argumentos matemáticas y de evaluarlo desde lo que le hace falta o lo que aporta, en los términos de Alex desde las falencias y los beneficios.

También, es claro en este apartado una visión global sobre el problema, la cual les facilita apropiarse de las actividades específicas que necesitan realizar durante el camino de investigación. Entender un problema y saber explicarlo hace parte de habilidades potenciadas en los participantes a raíz de la exploración del contexto.

En el marco de una perspectiva de modelación matemática para el aula, cuando las situaciones se encuentren en un contexto significativo para el estudiante, de algún modo no necesitan forzarse, puesto que estas llaman la atención en el estudiante a nivel social, político, geográfico de manera integral con las matemáticas. Por tanto, con miras a delimitar y precisar el problema del Metro, les preguntamos a los estudiantes ¿qué aspectos podrían sustentar matemáticamente qué tan conveniente es el sistema de transporte Metro para tí y para la ciudad?, ellos respondieron de forma verbal de la siguiente manera:

01.	Nicole:	*Si mensualmente uso el bus a donde vaya mensualmente me voy a gastar más que si uso el Metro.*
02.	Wilhelm:	*O sea el pasaje depende del número de veces que viaje. La otra sería la capacidad que tiene el Metro. Uno que utilice el Metro, otro el bus y otro el taxi y en el mismo tiempo y en la misma distancia.*
03.	Andrey:	*El que tiene su propio transporte debe de gastar más, gasolina, las pastas de freno, el aceite.*
04.	Wilhelm:	*A ver cuál nos lleva más rápido, más económico.*
05.	Wilhelm:	*En algunas ocasiones sale más caro el Metro que el bus, todo depende del sitio.*
06.	Jackobson:	*Yo propongo comparar distancia, precio para tres usuarios diferentes.*
07.	Nicole:	*También hay que pensar en la carga, porque que en el Metro no dejan montar carga grande.*
08.	Galvis:	*Analizar la velocidad y el número de paradas.*
09.	Wilhelm:	*El precio, la distancia y el tiempo.*
10. .	Nicole:	*Por ejemplo que capacidad tiene para los pasajeros, el dinero es lo más importante, el tiempo disponible y el tiempo adecuado de utilizar el transporte porque si tengo mucho afán no me voy a ir en… por ejemplo a las 4 de la mañana en la estación Andalucía.*

Es el proceso de confrontación grupal y toma de decisiones que les permite a los participantes concentrar el problema sobre las variables y factores más relevantes en la situación analizada. Con lo cual, dentro de la dinámica de modelación el conocimiento empírico utilizado para la comprensión de la situación problemática, funciona como un motor desencadenador de nuevas ideas para la búsqueda de respuestas aceptadas dentro del grupo.

Es evidente que el proceso de simplificación no es inmediato, por el contrario éste requiere de tiempo para analizar varios casos, de los cuales extraen los factores con los que se resolverá el problema. De igual forma, es clave dentro de la discusión, la convicción con cual se expongan las ideas, para permitir el convencimiento en el otro y por tanto, el establecimiento de acuerdos. Por ejemplo, Nicole en el segmento 10, expone un contraejemplo con un argumento lógico a partir de una circunstancia real. Otros factores no adquirieron la fuerza necesaria para ser incluidos dentro de la solución al problema, como por ejemplo, la velocidad, la carga, el número de paradas, la gasolina.

Algunas de las estrategias utilizadas por los estudiantes para la solución a la pregunta, se centró en comparar qué otros medios de transporte iban a evaluar el Metro. Presentándose propuestas como la de incluir el carro particular, el bus, taxi, junto con otras estrategias de solución. Como lo observamos en las siguientes ilustraciones:

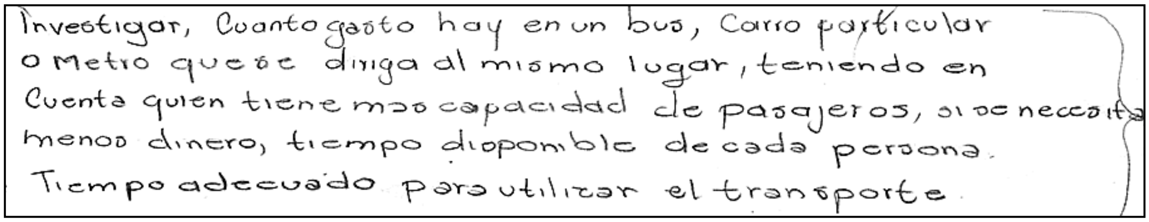
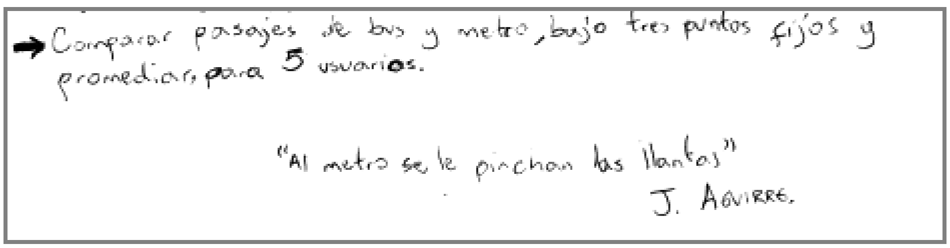
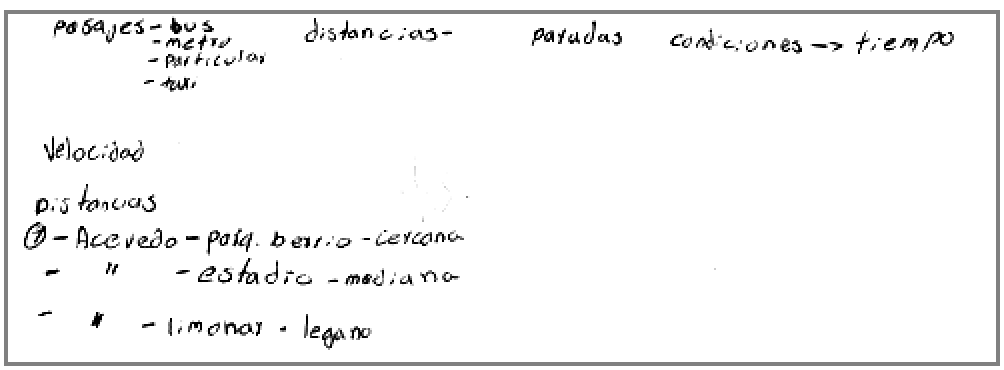

Investigar, Cuanto gasto hay en un bus, Carro particular o Metro que se diriga al mismo lugar, teniendo en Cuenta quien tiene mas capacidad de pasajeros, si se necesita menos dinero, tiempo disponible de cada persona. Tiempo adecuado para utilizar el transporte.

Ilustración 8. **Estrategia de solución al problema. Nicole.**


➔ Comparar pasajes de bus y metro, bajo tres puntos fijos y promediar, para 5 usuarios.

"Al metro se le pinchan las llantas"
J. AGUIRRE.

Ilustración 9. **Estrategia de solución al problema. Jackobson.**


pasajes - bus
- metro
- particular
- taxi
distancias -
paradas
condiciones -> tiempo

Velocidad

Distancias
① - Acevedo - parq. berrio - cercana
- " - estadio - mediano
- " - limonar - legano

Ilustración 10. **Establecimiento de condiciones. Galvis.**

Luego de todas las propuestas los estudiantes definen el precio, el tiempo, la distancia y la capacidad, indicándonos que estos factores son importantes a la hora de elegir un transporte y que les aporta al problema de cuál transporte le sería más conveniente. Como lo evidenciamos en el siguiente apartado:

Decidimos cuáles iban a ser los factores que iban a decir cuál es el transporte más favorable, el Metro, el bus o el taxi. Escogimos entonces cuatro factores: la capacidad, la distancia, el tiempo y el precio. Y escogimos tres lugares distintos para hacer este sondeo de datos. La primera ruta es de Acevedo a estadio, la segunda es de Acevedo a Itagüí y la tercera de [la estación] *Acevedo a la* [estación] *Universidad. Y aquí como pueden ver, fueron los primeros datos que recolectamos y luego llenamos la tabla y estos datos son contundentes para decir que el Metro es el más favorable de los otros dos medios de transporte. (Jackobson)*

Ahora bien, cuando los estudiantes comienzan a pensar en estos cuatro factores, les exige establecer unas condiciones para los tres transportes de bus, Metro y taxi. Considerando que bajo las mismas condiciones ellos pueden realizar una comparación adecuada, como lo observamos en el siguiente episodio:

01.	Sandro:	*Debemos de tener en cuenta que tomamos de punto de referencia la estación Acevedo y que damos tres casos que son estación Acevedo-Universidad*
02.	Alex:	*Necesitamos un punto de referencia y para tener igual condiciones*
03.	Sandro:	*Y también porque cuando íbamos a investigar los tiempos*
04.	Nicole:	*Por esa misma razón fue que decidimos que los pasajeros debían estar sentados*
05.	Wilhelm:	*Cuando se hace una investigación no se puede tener en cuenta un sólo tipo de datos*
06.	Nicole:	*También de que una fuera muy cerca*

Las tres rutas elegidas hacen parte del contexto al cual pertenecen y conocen los participantes (ver segmento 03). Con lo cual, se continua potenciándose una actitud de investigadores en tanto se percibe un dominio de los datos, un poder de elección, una capacidad para analizar el problema.

El establecimiento de condiciones se convierte para los estudiantes en uno de los aspectos relevantes para que sus actividades estén consideradas en la línea de hacer una investigación. Podemos interpretar un interés por validar los datos cuando los participantes deciden garantizar igualdad de condiciones con respecto a las rutas o distancias cercanas, mediadas y lejanas desde la estación Acevedo, al número de pasajeros sentados y al no considerar las horas pico, dentro de un proceso serio y cualificado de simplificación.

Es en este proceso de simplificación en el que los estudiantes comienzan a aislar múltiples factores relacionados con las circunstancias cotidianas, de algún modo los análisis se esgrimen a un plano más analítico, es decir, en relación con factores correspondientes a cantidades cuantificables dentro del campo matemático. Al respecto, Posada y Villa-Ochoa (2006a) apoyados en Bassanezi (2002) puntualizan que:

> Simplificación: los fenómenos que se presentan para el estudio matemático son en general excesivamente complejos si los consideramos en todos sus detalles. Se requiere por tanto restringir y aislar el campo de estudio apropiadamente y de tal modo que el problema sea tratable y al mismo tiempo mantenga su relevancia. (Posada y Villa-Ochoa, 2006a, p. 76)

En este camino de focalización de aspectos que les puedan ayudar a resolver el problema a resolver, es en el que se dan a la tarea de identificación de los cambios y una categorización implícita de lo variable y lo constante. En síntesis, algunos aspectos que influyeron la elección de las cantidades dentro de un proceso de simplificación fueron:

La auto-formulación de preguntas	La comprensión y explicación del problema a investigar
El análisis de diferentes casos según la situación	La toma de decisiones para el establecimiento de parámetros
Establecimiento de hipótesis sobre la solución al problema	Comparación del Metro con otros transportes
Exclusión y aislamiento de factores	La búsqueda de acuerdos y consensos para determinar igualdad de condiciones y puntos de referencia

Ilustración 11. **Aspectos influyentes en el proceso de simplificación.**

4.2.2 Subproceso de experimentación

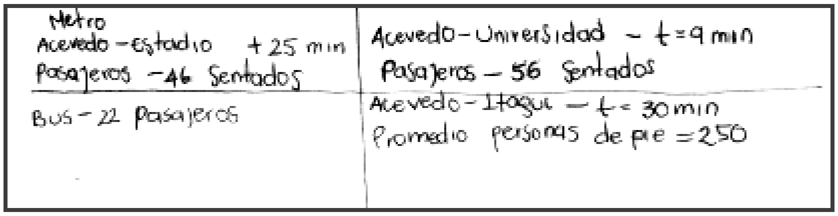
El proceso de modelación no es un proceso en abstracto, por el contrario es un proceso dinámico de investigación que se puede materializar en tareas específicas, como por ejemplo la recolección de datos. En el siguiente episodio podemos rescatar como ésta tarea se instituye en una responsabilidad por los mismos estudiantes, al contrario de otro tipo de actividades con problemas donde es el profesor el que proporciona los datos.

01.	Whilhem	*Realiza la tabla en el tablero y sus compañeros le indican que es una tabla de 5 x 4.*
02.	Whilhem:	*Esto ¿si es exacto? se aproxima.*
03.	Alex:	*Eso fue un cálculo que hicimos con las tablas*
04.	Andrey:	*La distancia a Itagüí, según la distancia de cada estación.*
05.	Whilhem:	*¿Se suman los tiempos o?*
06.	Jackobson:	*Claro.*
07.	Whilhem:	*Yo creo que se tienen que sumar.*
08.	Whilhem:	*Entonces 23 minutos de aquí al centro y 46 de San Antonio al parque. Y eso que sin contar el tiempo que me demoré buscando el bus.*
09.	Jackobson:	*Bus que vaya de la estación Acevedo y que pase por la estación estadio no hay. El que más cerca llega a allá es el que pasa por Colombia y hay que caminar para la estación estadio como 15 minutos.*
10. .	Sandro:	*No, pero sabe que otro bus queda cerquita a la estación estadio el 023 de Santa Cruz que lo deja a uno ahí.*
11.	Wilhem:	*¿No es 041?*
12. .	Sandro:	*La ruta 023 más cerquita a* [La estación] *Estadio.*
13.	Wilhem:	*Claro que por ahí pasan buses que van por el estadio.*
14.	Jackobson:	*El de Zamora*[17]*, por eso.*

Es evidente que los datos tienen todo que ver con las experiencias de uso con respecto a los transportes y sus conocimientos adquiridos desde la práctica en el contexto. Sin embargo, estos aspectos son modificables mediante las interacciones grupales y el compartir de estas experiencias.

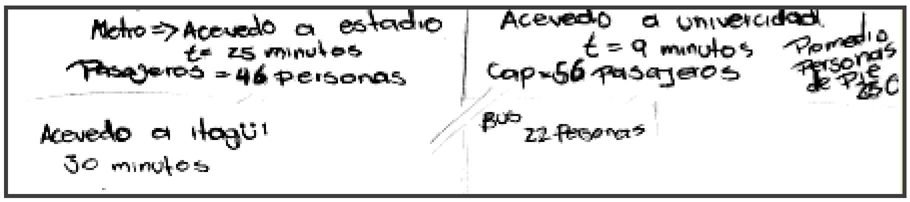
La recolección de los datos les implicó a los estudiantes un proceso de reflexión sobre qué aspectos necesitan información y cómo estos les permiten medir y valorar una parte del fenómeno en cuestión.

[17] Barrio ubicado en la zona nororiental de Medellín



Metro Acevedo – estadio + 25 min Pasajeros – 46 Sentados	Acevedo – Universidad – t = 9 min Pasajeros – 56 sentados
Bus – 22 pasajeros	Acevedo – Itagui – t = 30 min Promedio personas de pie = 250

Ilustración 12. **Toma de datos. Lindsay.**

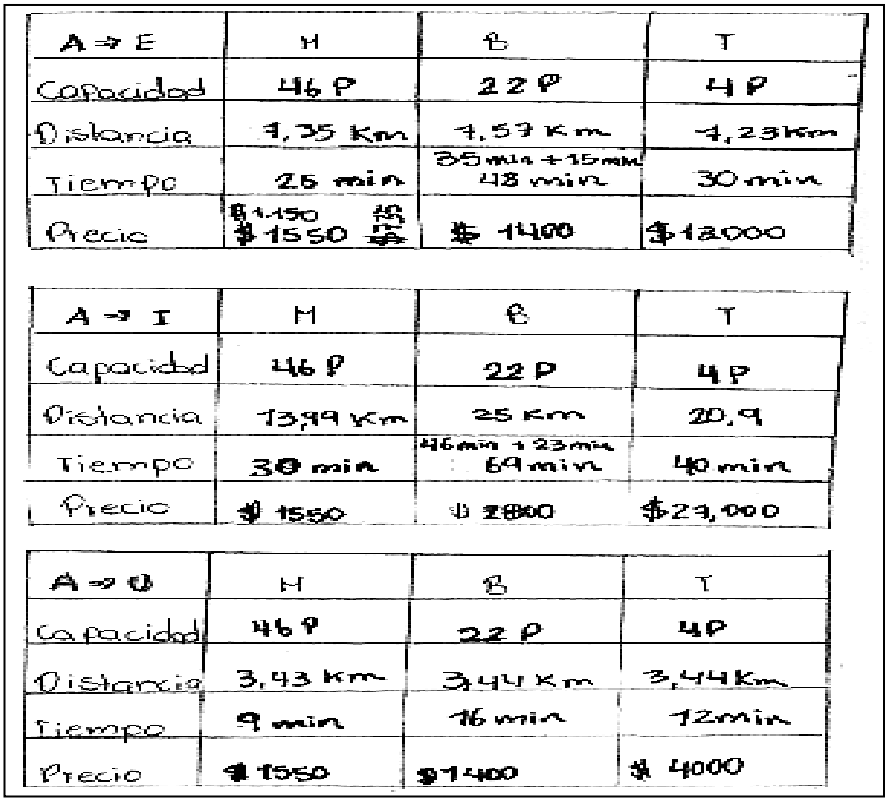


Metro => Acevedo a estadio t = 25 minutos Pasajeros = 46 personas	Acevedo a univercidad t = 9 minutos Cap = 56 pasajeros	Promedio personas de pie 250
Acevedo a itagüi 30 minutos	Bus 22 personas	

Ilustración 13. **Toma de datos. Andrey.**

Los estudiantes se están enfrentando a los cambios dentro de la situación de variación de la conveniencia del Metro cuando analizan cuántas personas puede transportar el bus y el Metro, las distancias que recorren para ir de un lugar a otro. Además, ellos simplifican la recolección de datos puesto que deciden tomar los datos en el Metro sólo de las personas que estarían sentadas al igual que en el bus.

Para la organización de los datos, los estudiantes construyeron la siguiente tabla discriminada según la ruta, el tipo de transporte y los cuatro factores condicionantes para la recolección de los datos.



A → E	H	B	T
Capacidad	46 P	22 P	4 P
Distancia	1,35 Km	1,57 Km	1,23 Km
Tiempo	25 min	35 min + 15 min 48 min	30 min
Precio	$1150 $1550	$1400	$12000

A → I	H	B	T
Capacidad	46 P	22 P	4 P
Distancia	13,99 Km	25 Km	20,9
Tiempo	30 min	46 min + 23 min 69 min	40 min
Precio	$1550	$2800	$29,000

A → O	H	B	T
Capacidad	46 P	22 P	4 P
Distancia	3,43 Km	3,44 Km	3,44 Km
Tiempo	9 min	16 min	12 min
Precio	$1550	$1400	$4000

Ilustración 14. **Organización de datos. Alex.**

Esta producción realizada en forma grupal constituye una estrategia original de los participantes para la observación de los datos de forma comparada y diferenciada. Este tratamiento inicial de los datos permite considerar las cantidades constantes pero asociadas a diferentes magnitudes. Por ejemplo el factor capacidad, podría entenderse bajo la noción de volumen si no se mirara en contexto. Pero, para esta situación los estudiantes le atribuyen el significado del número de personas que puede transportar el Metro, el bus o el taxi. Además, detrás de cada dato está el sentido y sus diferentes formas de obtención. Así lo presentaron los estudiantes en su exposición:

01.	Jhony:	*Nos tomamos nuestro tiempo para tomar cada uno de estos datos, podemos ver que el tiempo de* [la estación] *Acevedo a* [la estación] *Estadio es de 25 minutos en bus son 48 minutos, donde dice 33+15 son 33 minutos en bus y los 15 caminando.*
02.	Sandro:	*Los datos de estas tablas fueron como lo más interesante de la investigación porque estos datos*

		no los investigamos, ni los consultamos, estos datos los encontramos nosotros, pues haciendo esos recorridos en cada uno de los medios. Excepto en el taxi, en el taxi averiguamos pues con un señor y él nos dijo exactamente las distancias y los tiempos que tenía ese medio de transporte, pero en el Metro y en bus valga la redundancia lo investigamos nosotros.
03.	Jhony:	*En el caso del Metro damos una capacidad de 46 personas, estas personas solamente contamos el número de asientos, sin contar pues que en las horas pico en cada uno de sus vagones tiene aproximadamente 200 personas. Al igual que en el bus, su número de asientos máximo es de 22 personas y en las horas pico ese número incrementa demasiado.*

El hecho de que los datos fueran recolectamos por los mismos estudiantes, marca una pauta diferente a los procesos tradicionales de solución de problemas, en los cuales los datos ya se encuentran dados desde el inicio, que de cierta forma frena los procesos de experimentación. Así, en el subproceso de experimentación, la recolección de los datos y su interpretación se encuentran a la luz del contexto. Al respecto Bassanezi y Biembengut (1997) expresan:

> La recogida de los datos también puede realizarse por medio de una experimentación directa o de investigaciones estadísticas. Conviene destacar que muchas veces los datos obtenidos son de naturaleza esencialmente etnomatemática, proveniente de costumbres de una comunidad que los utiliza sin preocuparse del carácter científico de su origen. (p.16)

Las estrategias utilizadas fueron diferentes, debido a sus posibilidades, por ejemplo en la del taxi decidieron preguntar, pero en la del bus y el Metro varios estudiantes realizaron el viaje y tomaron los datos. En este sentido, la recolección de los datos viabiliza procesos de experimentación, pues éste:

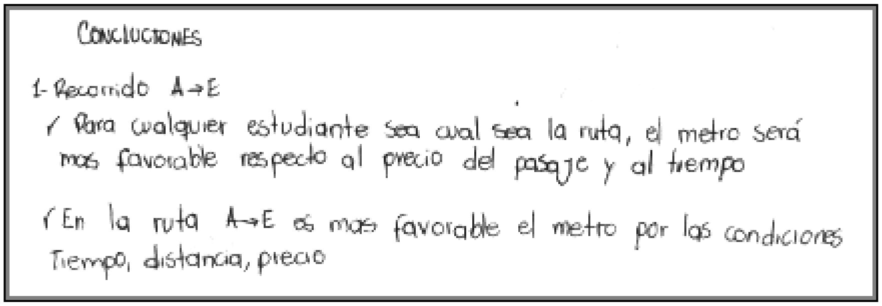
- Fue llevado a cabo por los mismos estudiantes.

- Los datos recogidos se constituyen en sus insumos para responder la pregunta a investigar.
- Los datos son organizados a través de condiciones específicas y tablas.
- En el proceso de organización de los datos ponen estrategias de simplificación.

Esta parte del proceso de modelación fue desarrollada desde un enfoque de actividades experimentales, entendidas estas como actividades que involucran las experiencias que los estudiantes estaban teniendo con el uso del Metro y otras experiencias pensadas por ellos mismos para la creación de estrategias de simplificación, recolección y organización de los datos que aportan a la solución al problema, por ejemplo contabilizar el tiempo de viaje, determinar la capacidad de viajeros sentados, investigar las distancias y los precios para cada situación. En este sentido, el subproceso de experimentación desarrollado implicó:

- Observar y elegir los factores involucrados en una situación del contexto cotidiano con miras a simplificarla.
- Establecer hipótesis, comparaciones y relaciones entre los factores.
- Organizar los datos e interpretarlos para obtener respuestas al problema estudiado.

Estableciendo relaciones surgidas del análisis de la tabla anterior de datos obtenida por diversas estrategias como la de elegir factores, elegir rutas y obtener la información real correspondiente y respondiendo a la pregunta que replantearon los estudiantes de la siguiente forma "*Si comparas el Metro, con el microbús, y con el taxi para tu movilización diaria, económicamente ¿cuál te favorece más?*", ellos pudieron obtener conclusiones con respecto a la economía del tiempo y del dinero de la siguiente manera:


CONCLUCIONES

1- Recorrido A→E

✓ Para cualquier estudiante sea cual sea la ruta, el metro será mas favorable respecto al precio del pasaje y al tiempo

✓ En la ruta A→E es mas favorable el metro por las condiciones Tiempo, distancia, precio

***Ilustración 15.* Interpretación de los datos. Alex.**

> *Por ejemplo una situación, ahorita tenemos en cuenta la situación de los estudiantes y de las tres rutas. Una persona que tenga que trabajar y que su tiempo le cueste bastante dinero le sería conveniente el taxi, en caso de que este cogido de la tarde, entonces en ese caso sería más conveniente el taxi para que no pierda mucho dinero. Este es una función o una relación entre los precios del bus y del Metro dado que si la distancia es muy larga, el Metro será mucho más barato que el bus. Si la distancia es muy corta, será mucho más barato el bus, es decir, para la ruta* [entre las estaciones] *Acevedo-Universidad va a ser mucho más conveniente de que el estudiante, con la condición de que obtenga la Cívica, coja un bus porque..., y que se inscriba a eso del tiquete estudiantil, ¿por qué? porque le saldrá más barato. (*Wilhelm)

Observamos la manera en que los estudiantes establecen una relación cualitativa entre la cantidad de dinero gastado y la distancia recorrida, en esta relación entre dos magnitudes de cantidad los estudiantes establecen una correspondencia inversa, si aumenta la distancia disminuye el precio con respecto al Metro, para el bus asocian el aumento de la distancia en relación al aumento del pasaje[18]. Así, el establecimiento de relaciones desde el lenguaje verbal, les permite a los estudiantes construir un modo natural de relacionarse con la situación.

El estudio de situaciones significativas para los estudiantes posibilita la variedad de posiciones y conclusiones, sujetas a los múltiples cambios que se producen en lo cotidiano, desde esta perspectiva, los estudiantes también analizaron el taxi como medio de transporte que no favorece económicamente a un estudiante, produciéndose un argumento que posiciona al taxi en desventaja con respecto al Metro y al bus, al respecto Wilhelm argumenta que:

[18] Estas relaciones directas e inversas marcaron el inicio de la construcción de modelos matemáticos, el cual será desarrollado en el siguiente capítulo.

*Si un estudiante para la ruta Acevedo-Itaguí le saldría más barato que… A ver la primera conclusión es más favorable el Metro de acuerdo con la distancia, entonces dice que entre más lejos más favorable es el Metro y entre más cerca más favorable es el bus. Eh… el bus no sirve a distancias largas porque al estudiante le tocaría coger dos buses, mientras que con el Metro con un solo pasaje le basta. La segunda conclusión es: es absolutamente conveniente desarrollar estrategias como esta para calcular ahorros. Yo creo que eso fue, esa conclusión nos lleva a la conclusión de la modelación la cual dice: que la modelación matemática es definitivamente conveniente a la hora de plasmar situaciones de la vida matemáticamente en hojas. La siguiente conclusión que con respecto al taxi se descarta en el caso de los estudiantes. (*Wilhelm)

Es evidente que las decisiones de los estudiantes son dependientes de razones sustentadas desde el contexto, como por ejemplo, el hecho de abordar dos buses es una situación del contexto que les permite descartar esa opción, por motivos de tipo económico. De igual modo, estas decisiones fueron discriminadas según el tipo de usuario, ya que es diferente si es un empresario en comparación si es un estudiante. Con lo cual, es claro que para los estudiantes estas conclusiones no son absolutas, son relativas y están sujetas a múltiples condiciones.

En las anteriores conclusiones los participantes, especifican algunas relaciones entre variables, haciendo análisis de comparación entre lo económico y las distancias. En este sentido, los estudiantes exploraron los datos y dieron una solución con referente a las variables seleccionadas y a las relaciones de proporcionalidad directa, que surgieron entre ellas. De igual manera destacamos la verificación que se hace de la hipótesis[19] que con anterioridad Jackobson había expuesto sobre la relación entre las distancias, los costos y el medio de transporte que se utilice para movilizarse.

En general, los estudiantes presentaron un proceso de selección y de llevar cantidades cualitativas en términos cuantitativos (datos numéricos), como medio para probar la conveniencia o no de emplear el Metro como medio de transporte económico para el desplazamiento diario, expresan tres conclusiones con respecto a los tres

[19] *Jackobson dice: Yo creo que la deducción lógica es que desde que sea mayor distancia va a ser más favorable el Metro, va a ser más conveniente, pero pongamos un ejemplo, si es antes de la estación hospital va a ser más conveniente el bus, entonces la distancia es la que va a influir ahí.*

transportes, haciendo referencia a las relaciones entre dos variables que favorecen o no a cada transportes, según el caso que analizan. En la exposición final puntualizan que:

1. *Según los datos obtenidos a través de esta investigación podemos decir que el Metro es el medio de transporte más favorable, porque sin importar la distancia que deseemos recorrer el tiempo será mínimo y el precio único.*

2. *Respecto al taxi, podemos decir que se descarta en el aspecto económico, solo nos puede servir en caso de que estemos cortos de tiempo y no importe la suma de dinero que se gastaría.*

3. *Referente al bus, podemos decir que nos brinda economía en caso de que las distancias sean cortas.*

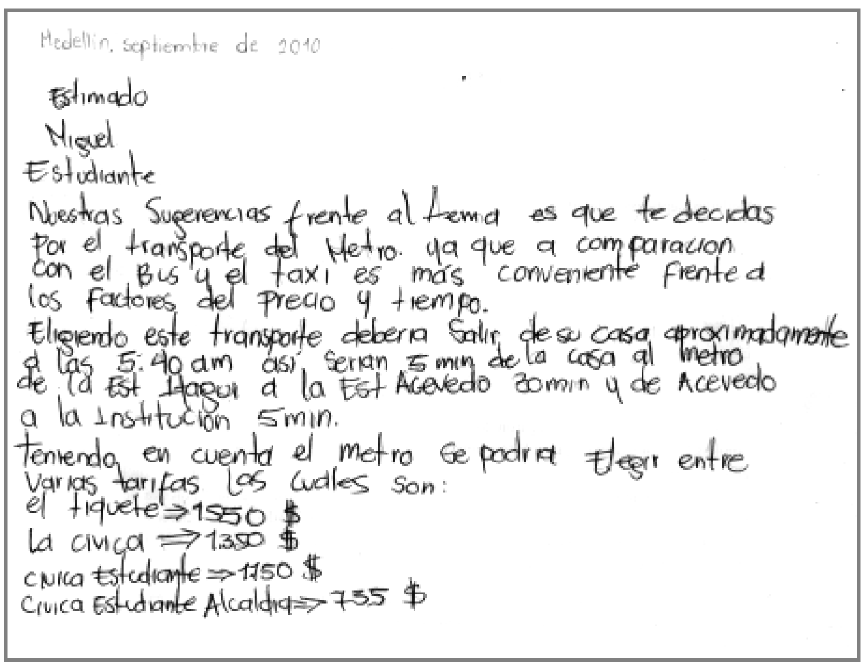
Aunque no es nuestro objeto de estudio, la modelación matemática conceptualizada como un proceso de investigación, posibilitó un acercamiento a este proceso con relación a los supuestos y conclusiones empíricas que se producen a partir de los análisis de las circunstancias a nivel retórico. Luego con los datos y relaciones establecidas a nivel numérico o matemático se pudo constatar la veracidad de sus conjeturas e hipótesis, como evidencia de esto, Nicole concluye, entre otras cosas, que:

> *En realidad me interesó el grupo por lo de investigación porque una cosa es saber que en todo se puede mezclar la matemática pero otra cosa es descubrir uno mismo las estrategias, los puntos de vista, los comentarios, las dudas, para llegar uno a esas soluciones matemáticas sin necesidad de que si un profesor este explicando o diciendo si se hace así o así, sino que nosotros mismos en cada clase buscamos la manera de relacionar eso como que el tiquete vale entonces relaciónemelo con esto, hacíamos una suma que lo dividimos, o sea todo fue muy chévere y nos sirvió para unirnos mucho, porque como se han dado cuenta somos de grupos diferentes y nos hemos entendido muy bien, nos hemos entendido.* (Nicole)

Kaiser y Schwarz (2010) sustentan que una razón central para utilizar un acercamiento desde problemas auténticos, es la convicción que los estudiantes necesitan experimentar en la actividad del modelado matemático para la comprensión y la solución de las preguntas verdaderas significativas para mucha gente que se convencerán de la utilidad de las matemáticas y del modelado matemático para su vida real. Con la intención de tratar una situación práctica de los datos, les planteamos a los estudiantes un correo a manera de carta con la siguiente situación:

Al colegio Finca La Mesa llegaron tres estudiantes de Bogotá, el Cauca y Urabá. Sus familias les han solicitado un informe sobre sus gastos para poderles girar dinero. Uno de ellos, Cristian vive en la estación estadio, Marcela vive cerca al Parque Explora y Miguel vive a cinco minutos de la estación Itagüí. Ellos necesitan una forma rápida y práctica de calcular sus gastos con respecto al transporte. ¿Qué le sugerirías? Además, ellos necesitan calcular los tiempos que requieren para salir de sus casas y llegar a tiempo a las 6:20 a.m. ¿Qué deben tener en cuenta para calcular los tiempos? Escríbeles tus sugerencias.

Para la cual, los estudiantes escribieron en forma grupal las siguientes cartas:

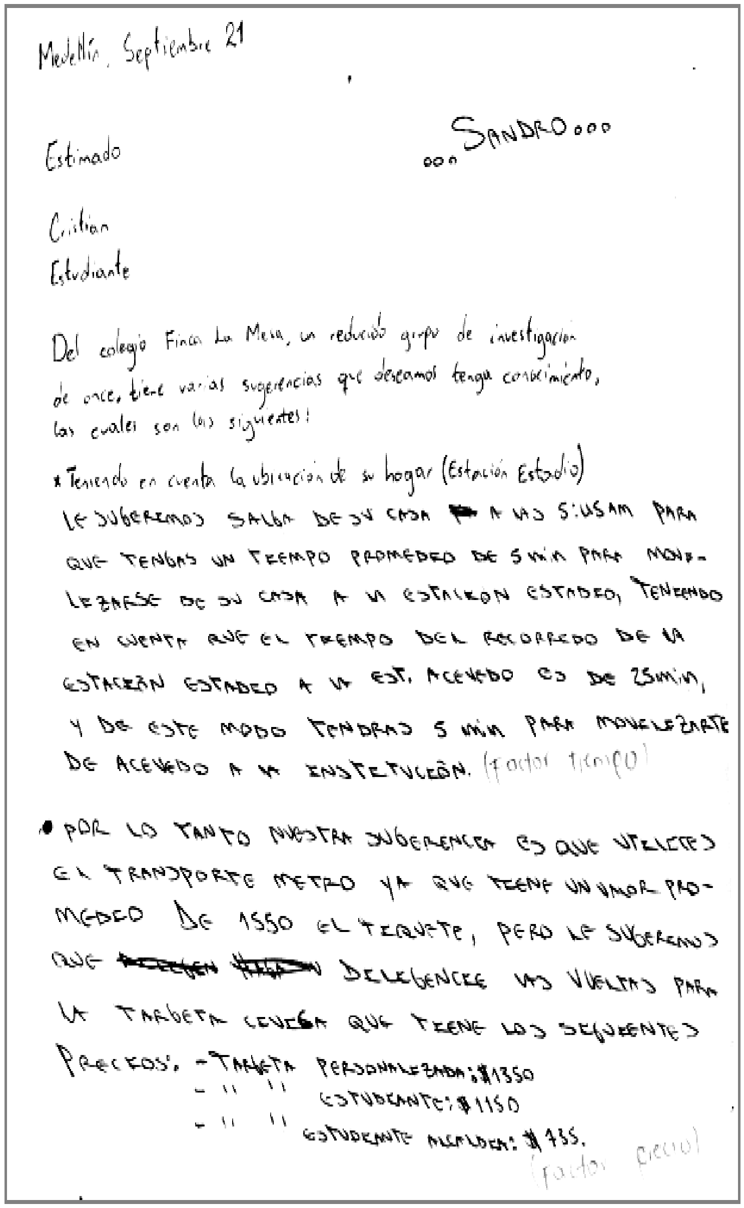


Medellín, septiembre de 2010

Estimado
Miguel
Estudiante

Nuestras Sugerencias frente al tema es que te decidas por el transporte del Metro. ya que a comparacion con el Bus y el taxi es más conveniente frente a los factores del precio y tiempo.
Eligiendo este transporte deberia Salir de su casa aproximadamente a las 5:40 am así serian 5 min de la casa al metro de la Est Itagui a la Est Acevedo 30 min y de Acevedo a la Institución 5 min.
teniendo en cuenta el metro se podria Elegir entre Varias tarifas las Cuales Son:
el tiquete ⇒ 1550 $
la civica ⇒ 1350 $
civica estudiante ⇒ 1150 $
Civica Estudiante Alcaldia ⇒ 735 $

Ilustración 16. **Toma de decisiones. Lindsay.**



Medellín, Septiembre 21

...SANDRO...

Estimado

Cristian

Estudiante

Del colegio Finca La Mesa, un reducido grupo de investigación de once, tiene varias sugerencias que deseamos tenga conocimiento, las cuales son las siguientes:

* Teniendo en cuenta la ubicación de su hogar (Estación Estadio) LE SUGERIMOS SALGA DE SU CASA A LAS 5:45AM PARA QUE TENGAS UN TIEMPO PROMEDIO DE 5 MIN PARA MOVILIZARSE DE SU CASA A LA ESTACION ESTADIO, TENIENDO EN CUENTA QUE EL TIEMPO DEL RECORRIDO DE LA ESTACIÓN ESTADIO A LA EST. ACEVEDO ES DE 25MIN, Y DE ESTE MODO TENDRAS 5 MIN PARA MOVILIZARTE DE ACEVEDO A LA INSTITUCIÓN. (factor tiempo)

* POR LO TANTO NUESTRA SUGERENCIA ES QUE UTILICES EL TRANSPORTE METRO YA QUE TIENE UN VALOR PROMEDIO DE 1550 EL TIQUETE, PERO LE SUGERIMOS QUE DILIGENCIE LAS VUELTAS PARA LA TARJETA CIVICA QUE TIENE LOS SIGUIENTES PRECIOS: - TARJETA PERSONALIZADA: $1350
- " " ESTUDIANTE: $1150
- " " ESTUDIANTE ALCALDIA: $735.
(factor precio)

Ilustración 17. **Toma de decisiones. Sandro y Jackobson.**

En la manera en que los estudiantes abordan este tipo de situaciones está presente sus habilidades para tomar decisiones con respecto a cuál transporte elegir. Pero, está habilidad viene sustentada en todo un proceso de conocimiento en profundidad de la situación en su contexto real. Por ejemplo, el sugerir diferentes tarjetas y modalidades para los precios, el proyectar el comportamiento de los tiempos de desplazamiento tanto de la persona como del transporte. En estas actividades particulares los estudiantes no recurrieron a soluciones generales, sino a respuestas particulares y relativas asociadas al contexto y a sus decisiones prácticas para transportarse.

Estas actividades de construcción y aplicación implican prácticas como la observación, la simplificación realizada por los estudiantes, con miras a la construcción de modelos que permitan describir y comprender una situación real con otros elementos matemáticos. Así que, el proceso de modelación es práctico en la medida que incorpora situaciones reales de esta naturaleza. Por otro lado, los resultados obtenidos con este tipo de actividades no se encuentran restringidos sólo al lenguaje simbólico, sino también al lenguaje verbal, con el cual es posible reconocer los significados, las relaciones y las formas de pensar las situaciones. Además, estos resultados tienen que ver en una línea de modelación matemática, en la cual para solucionar el problema, no se hace necesario "desnudar" el problema, es decir, quitarle lo que lo acompaña el texto, sino por el contrario, es necesario interpretar la situación en su contexto real.

4.2.3 La modelación matemática: un proceso diferente para la búsqueda modelos

Por otra parte, el proceso de modelación implementado en forma grupal tiene un sentido diferente si hubiera sido individual, ya que los estudiantes valoraron la diversidad de miradas y la necesidad de llegar a un acuerdo. Así mismo, el problema a modelar se convierte en una razón para unir un grupo bajo un mismo propósito. Los contrastes, la discusión permite profundizar en los argumentos matemáticos y en la comprensión de la situación para poder llegar a un acuerdo, tomar una decisión o legitimar una idea.

El hecho que este proceso de modelación tenga su génesis en las experiencias de la vida diaria de los estudiantes genera en ellos una actitud diferente, no pasiva sino de participación conjunta. Este proceso realizado a través de las discusiones del grupo permitió llegar a acuerdos o ideas principales, estableciendo una red de significados compartidos enfocados en las matemáticas. Al respecto, Alex afirma:

Esta fue una experiencia buena, ya que pudimos expresarnos de una manera que nos permitiera interactuar con mucha más comodidad entre nosotros los jóvenes, siempre teniendo en cuenta la matemática y teniendo un punto de vista crítico. Respecto a los temas, estos fueron divertidos porque siempre encontrábamos incidencias del tema con nuestro vivir diario, también se presentaban diversidad de ideas, las cuales me acercaban cada vez más a una conclusión más ajustable al tema presente. Para mí fue esto como algo que sirvió para mostrarnos o enseñarnos la forma de analizar las cosas desde diferentes puntos y como hallar soluciones adecuadas frente a las situaciones establecidas. (Alex)

La implementación de actividades relacionadas con la modelación significó una experiencia nueva para los estudiantes. Una experiencia que influenció su forma de ver situaciones cotidianas fuera de la escuela. En este sentido, la modelación como estrategia educativa constituye en una forma diferente de construir la matemática.

En el proceso de modelación emergen diferentes puntos de vista de los estudiantes, puesto que cada uno ha tenido su propia experiencia, con lo cual cada estudiante hace un aporte desde un su intuición, sus vivencias y sus razonamientos. Sin embargo sienten la necesidad de unificar las ideas, por tanto llegar a acuerdos y tomar decisiones.

Los procesos de modelación en el aula, indiscutiblemente generan espacios de discusión, reflexión y de desarrollo del pensamiento crítico en el estudiante, en la medida en que la situación hay que construirla. En el sentido de Wilhelm:

*Yo simplemente quiero darles a conocer una o la mejor experiencia que tuve a partir de esta investigación y está basada en la modelación, la cual es: uno en la vida modela pero sin saber que lo está haciendo, uno en la vida tiene, se ve ante situaciones en las cuales intuitivamente saca las propias conclusiones. Pero a partir de esto me pude dar cuenta que estas situaciones cotidianas pueden ser representadas, pueden ser plasmadas en una hoja de papel. Algunas pueden llegar a ser un principio. Yo creo que lo que nosotros logramos a partir de esta investigación fue un principio con base a los medios de transporte. Yo creo que eso fue el aprendizaje más significativo a partir de esto quiero seguir modelando. (*Wilhelm*)*

Usar situaciones propias de los estudiantes hace que estas no sean ajenas al estudiante, sino por el contrario le pertenecen. Esto les genera una apropiación y una responsabilidad en cuanto a su papel sobre ellas. Además, las situaciones hacen que despierten en los estudiantes actitudes de liderazgo, argumentación y reflexión frente a lo problemático de la situación. A los estudiantes participes de procesos de modelación, les posibilita proyectarse desde su forma de ser hacia el futuro, para comenzar a configurar una manera de pensar matemáticamente.

Es importante retomar en las aulas de clase de matemática un papel auténtico en el estudiante considerando las dinámicas de modelación, en tanto sean ellos quienes busquen las estrategias. Modelar implica escudriñar lo que está detrás de algo cotidiano como por ejemplo el transporte del Metro. Por tanto, el papel del docente no está enfocado en las soluciones a los problemas sino en la orientación para que los estudiantes la construyan. Como lo observamos a continuación:

01.	Investigadora:	*¿Cómo evalúas el proceso, qué experiencias te quedan, que aprendiste de los compañeros?, como te sentiste?*
02.	Alex:	*Si que no solo aplicar, memorizar que esto tiene una regla, que esto tiene la otra que memorícela, sino que miremos así la forma de actuar de las personas que desde esa parte podemos encontrar expresiones matemáticas.*
03.	Investigadora:	*Alguno de ustedes tenía una visión diferente de las matemáticas antes y después del proyecto.*
04.	Galvis:	*Después del proyecto es como mas didáctico, uno confía más en la matemática por decirlo así, para hacer cuentas con los gastos que tenemos, uno no pensaba en eso.*
05.	Investigadora:	*Confías más en la matemática.*
06.	Investigadora:	*Desconfiabas*
07.	Galvis:	*Un montón de números ahí.*

Comenzar a abordar un concepto matemático desde una situación familiar para el estudiante permite un acercamiento diferente para el estudiante si se comenzara con la definición de un concepto matemático. Por ejemplo la idea de constante y de variable fue abordada por los estudiantes desde el contexto Metro asociadas a las cantidades de magnitud que en el intervienen; por ejemplo, el uso de las tarifas del Metro. Así, los estudiantes utilizan la idea de que los precios se mantienen por un año para comenzar a significar la idea de constante. La idea de variable es abordada inicialmente en forma particular con el número de pasajeros, el número de viajes, el dinero que ingresa al Metro o el dinero que puede ahorrar un estudiante. En consecuencia, desde nuestro enfoque realístico y educativo el punto de partida lo constituye el contexto del Metro y no las definiciones matemáticas. De acuerdo con Villa-Ochoa et al. (2009a) "[…] la comprensión de los conceptos matemáticos y por tanto, los modelos matemáticos, ocurren en términos de los contextos en los que se desenvuelve el estudiante en el aula de clase, en este caso, apoyamos la idea que adicionalmente sean contextos de índole social y cultural." (p. 1094)

Ahora bien, vincular los conceptos matemáticos a los contextos y otras áreas, hace que su uso se encuentre a merced de diferentes contextos. Así, la contextualización de las matemáticas presentaría un carácter constructivo e inacabado. Por lo cual, lo que nos interesa, tiene que ver con todo el proceso de construcción realizado por los sujetos en relación al contexto y a la noción matemática involucrada.

La respuesta a la pregunta planteada inicialmente con respecto a la conveniencia del Metro, nos dio la posibilidad de continuar con el proceso de modelación, proporcionando a los estudiantes otras formas de emplear los resultados que hallaron y de proponer un modelo matemático que describiera el ahorro desde una publicidad que presenta el Metro a los usuarios en la divulgación del tiquete estudiantil, como estrategia para el ahorro de los estudiantes del Municipio[20]. Con esta actividad los estudiantes pudieron establecer conexiones entre las expresiones que representan y re-significan el contexto particular, involucrando diversos escenarios que favorecen la construcción de nociones, el desarrollo de capacidades de análisis para la toma de decisiones, que en definitiva hace parte de lo que debe propiciar nuestros procesos educativos. Swafford y Langrall (2000) destacan la importancia de las relaciones entre las representaciones que los estudiantes proponen en el contexto del problema y las conexiones que establecen entre unas representaciones y otras.

Bajo esta mirada, calcular el ahorro presentado al utilizar un tarifa normal con respecto a usar el tiquete estudiantil se convirtió en una de las actividades de modelación que les implicó a los estudiantes la determinación de variables como gastos, ahorro y valor del pasaje y su relación en términos de modelo, al respecto, Jackobson expone:

[20] Ver anexo 8. Guía Cuatro.

Empezamos a graficar lo que se ahorra el bus con tiquete estudiantil. Este es el ahorro en pesos y el ahorro respecto al número de viajes. La función que nos representa esto es: f(t) es igual al valor del pasaje normal menos el valor del pasaje con tiquete estudiantil por el número de viajes y nos da una función lineal que es igual el ahorro es igual a 700 pesos por el número de viajes. El porcentaje, podemos ver como sale la fórmula es: valor del pasaje menos valor del pasaje estudiantil por 100 divido el valor del pasaje normal, nos da una constante que es el 50% de ahorro para el estudiante. Ahora comparamos con el Metro el ahorro que tiene con tiquete estudiantil, la función es la misma sino que cambia el valor del pasaje normal que es $1550 y el ahorro sería menor, que es de 765. El ahorro sería de 47,5 %. (Jackobson)

La búsqueda del modelo puede ser valiosa en tanto es mirada como un proceso dinámico entre el contexto y las matemáticas y no como una resultante inmediata. De acuerdo con Blum (1993) su punto de partida es una situación en el "mundo real" y ésta tiene que ser simplificada y estructurada para su traducción a un modelo válido. En este proceso, se hace necesario varios momentos concretos para construir bajo un contexto propio de los estudiantes una relación matemática. Estos pueden verse como saltos cualitativos, experimentados mediante la discusión y a manera de retos desde el mismo contexto y no mediante procedimientos determinados a seguir. En este sentido, el proceso de modelación es abierto, puesto que las tareas no estaban predeterminadas. Sin embargo, el proceso si fue dinamizado por las investigadoras mediante preguntas que los llevarán a pensar más allá de lo observable. Es decir, preguntas en las cuales utilizaran sus conocimientos sobre el contexto con el fin de caracterizar maneras respecto a la noción de variable, constante y sus relaciones.

La búsqueda de modelos mediante el tratamiento matemático sugiere que detrás de un modelo matemático hay un conjunto de ideas y análisis que lo hacen una producción particular a los sujetos, significado por el reconocimiento de lo variacional en el contexto en cuestión. En este sentido, un modelo representado simbólicamente les implicará a los estudiantes establecer relaciones que han sido pensadas inicialmente en forma descriptiva y discursiva, como se expondrá en el próximo capítulo.

Capítulo 5

5 RELACIONES LINEALES ENTRE DOS VARIABLES A PARTIR DE CONTEXTOS AUTÉNTICOS

En este capítulo expondremos los análisis de los resultados con respecto a las relaciones lineales entre dos variables y el surgimiento del modelo en contextos particulares, aclarando que los análisis no tienen una secuencia o linealidad con respecto a las actividades desarrolladas en el trabajo de campo, es decir, en el transcurso del capítulo retomamos diferentes contextos (Metro de Medellín, cuenta de servicios públicos, planes de celulares y cadenas de correos electrónicos), indistintamente de acuerdo a las características abordadas en cada subapartado a nivel teórico y no al contenido en extenso de las actividades.

En el desarrollo del estudio de casos se evidenciaron varias nociones matemáticas que emergieron de la investigación a través de la modelación de situaciones cotidianas para los estudiantes. Algunos de estos aspectos fueron base para la construcción de modelos particulares que describen situaciones específicas en diversos contextos.

5.1 Las relaciones lineales entre dos variables

Presentamos en este apartado, algunos episodios con los cuales pretendemos ilustrar algunos elementos teóricos, en particular, la identificación de las variables y asociaciones matemáticas entre ellas, como elementos constitutivos en la construcción de nociones como ecuación y función, en el marco del pensamiento variacional.

En el análisis del contexto de esta investigación pudimos visualizar algunas maneras en cómo los estudiantes establecían las relaciones entre las cantidades de magnitud que se involucraban en dicho contexto. De este análisis emergieron tres grandes subcategorías:

- Del reconocimiento de las cantidades de magnitud a la noción de variable.

- Acercamiento a la idea de relaciones entre variables.
- El surgimiento de las relaciones entre variables en la delimitación del contexto

El proceso de modelación observado desde las matemáticas escolares posibilitó un diálogo permanente entre los estudiantes, los contextos y las nociones matemáticas, lo cual es coherente con los planteamientos de Olfos (2004) quien además agrega que la modelación es un medio que propicia que a los estudiantes tomen conciencia de los procesos mentales que en dicho medio se implican. En este proceso hay elementos que son esenciales al momento representar matemáticamente la diversidad de relaciones que pueden encontrarse en el contexto o problema abordado.

Conforme presentamos en el capítulo anterior, los estudiantes que participaron de esta investigación evidenciaron diversas maneras de aproximarse al reconocimiento del contexto y sus relaciones. Estas relaciones fueron propiciadas por el diálogo, la búsqueda de "acuerdos", la recolección de datos y las condiciones implícitas de los elementos inmersos en la situación. Esto a su vez, es coherente con los momentos de simplificación, estructuración y matematización en un proceso de modelación (Blum et al. 2007). En este sentido, el reconocimiento, discusión, análisis y reflexión sobre las cantidades de magnitud (variables) que intervienen en la situación fueron la base para una aproximación a la construcción de un modelo de la situación, tomando como uno de sus pasos, el establecimiento de relaciones entre variables. Dicha aproximación se realiza inicialmente por medio de descripciones verbales que dan cuenta de la identificación de una correlación (directa o inversa) asociada directamente al contexto del problema.

Las discusiones sobre la descripción de dependencia o no de variables cualitativas son muestra de la riqueza de ideas y correlaciones que surgen de una situación que no fue simulada, sino construida desde los espacios de convivencia cotidiana. Es por esto que le propusimos a los estudiantes reflexionar sobre la pregunta: *¿Cuáles son las condiciones y factores que afectan los ingresos en una determinada Estación del Metro (por ejemplo Estación Acevedo)?* En este sentido, destacamos la manera como los estudiantes hacen comentarios que surgen de aspectos evidenciados en circunstancias propias del contexto, mencionan aspectos como:

Factores influyentes	Verbalización de los estudiantes
Ubicación, los sitios turísticos cercanos y los medios para llegar a la estación	*Por ejemplo en el Centro, va a haber lógicamente más fluido de gente, porque es la parte a donde casi todo el mundo va a llegar, trabajo, estudio y la estación Acevedo está influenciada por el Metro Cable, baja mucha gente y los buses. (Alex)*
La población cercana	*La población, porque en un lugar puede haber más gente que en otro lugar y en este lugar puede que haya más gente que tome el Metro y en otros que no lo utilizan tanto. (Alex)*
Los factores climáticos	*Cuando hay mucha lluvia o sol, las personas abordan un taxi, por ejemplo. (Galvis)*

Ilustración 18. **Factores que influyen en el contexto auténtico.**

En los anteriores argumentos, sobre los aspectos influyentes en la cantidad de personas que ingresan o no al Metro, podemos evidenciar que la mayoría de las descripciones sobre los ingresos están relacionadas con situaciones contextualizadas y circunstanciales, sucesos que varían con respecto a otros y, que a su vez, cambian con el tiempo, el lugar o el entorno que los permea. García et al. (2006) expresan que una manera de contrarrestar el lema: "[…] los estudiantes aprenden lo que explica el profesor claramente, podría ser la investigación de la variación en una situación verdadera específica" (p. 228). En este sentido, las respuestas anteriores nos muestran cómo los estudiantes se sumergen en los contextos y las relaciones que establecen se limitan a las percepciones que tienen con base en los conocimientos previos y a los acontecimientos que rodean la situación.

En este proceso de exploración del Sistema de Transporte Masivo: Metro de Medellín, los estudiantes infirieron cierta relación de "dependencia" (correlación) entre las cantidades, además describieron cómo dependían, para ello, propusieron algunas relaciones entre las cantidades de magnitud y las modelaron a través de variables cualitativas que, a su vez, proporcionaron ciertas ideas en la toma decisiones y funcionamiento del Sistema Metro como una empresa (lectura y video)[21.] Ante los diferentes análisis y diálogos realizados con base en la lectura y el video sobre el Metro, sustentan algunas relaciones como: […] *el tiquete doble lo quitaron porque generaba pérdidas* […] o […] *los lugares turísticos, ayudan a que haya más gente* […] o […] *el retraso* [en la construcción del Metro] *influyó en el aumento de la deuda* […]. En las discusiones sobre el contexto, los estudiantes comenzaron a reconocer intuitivamente variables y las relacionaron, en este caso, como causa y efecto. Al abordar la temática sobre las ganancias, pérdidas, gastos, planes para los ingresos, los estudiantes concluyen, entre otras cosas que "[…] *las tarifas se sacan de los kilómetros que hay de recorrido y que dependen de las distancias* […]" Con respecto a la velocidad del Metro dicen: […] *Yo creo que depende de la cantidad de personas, si está muy congestionado como que disminuye la rapidez o si tiene más vagones, o en las horas pico* […]. Además […] *Yo creo que varía un poco, porque no va a tener la misma fuerza siempre con tanta gente que con poca* […]. En consecuencia, al terminar el primer acercamiento al contexto del Metro, los estudiantes comienzan a establecer argumentos sobre la dependencia entre algunas variables que influyen en el funcionamiento y sostenimiento de este sistema de transporte masivo, colocando en escena los saberes previos, aspectos que fueron presentados en el capítulo anterior.

El acercamiento, que presentan algunos estudiantes al establecimiento de relaciones mediante la comparación de cifras (aritméticamente) y sucesos que son consecuencia de otros, nos permite reconocer en ellos, algunos elementos importantes en la transición de los argumentos aritméticos a los algebraicos, aunque inicialmente de una manera incipiente. Además, la aproximación de las cifras que sugiere Jackobson, es una característica importante en el proceso pre-algebraico desarrollado en el transcurso de los niveles de Educación Básica y Media académica y que, a través de la historia, se han identificado. Al respecto, Swafford y Langrall (2000), resaltan que:

> […] cada tarea representa una etapa en el desarrollo histórico del álgebra: calcular para casos específicos (pre-álgebra), describir relaciones (álgebra retórica), representar simbólicamente (álgebra sincopada/simbólica), usar ecuaciones (álgebra simbólica) […]. (p.213)

[21] Ver anexo 5. Guía Uno.

A pesar que esta investigación se desarrolló con estudiantes de once grado, no observamos una correspondencia directa entre el surgimiento de las representaciones algebraicas y el nivel escolar de los estudiantes, es decir, dichas representaciones requirieron del desarrollo de diversas actividades en donde las conclusiones a nivel algebraico no surgen de forma instantánea, al contrario los estudiantes recurren a la retórica y al establecimiento de relaciones verbales y circunstanciales. A continuación, relataremos algunos elementos de influencia, en cuanto a relaciones entre variables y constantes, desde la simplificación de la situación contextualizada y los aportes propuestos en el proceso inicial a la modelación.

5.1.1 Del reconocimiento de las cantidades de magnitud a la noción de variable

Para acercarnos a las nociones de variable y constante a través de las condiciones de funcionamiento del Metro de Medellín, pedimos a los estudiantes que enumeraran lo que se puede cuantificar en dicho Sistema. A partir de allí, los estudiantes comenzaron a establecer ciertos atributos que se podían cuantificar (cantidades de magnitud), para luego establecer la variación o no, además de algunas asociaciones entre éstos. A continuación se muestran algunos apartes de las producciones escritas:

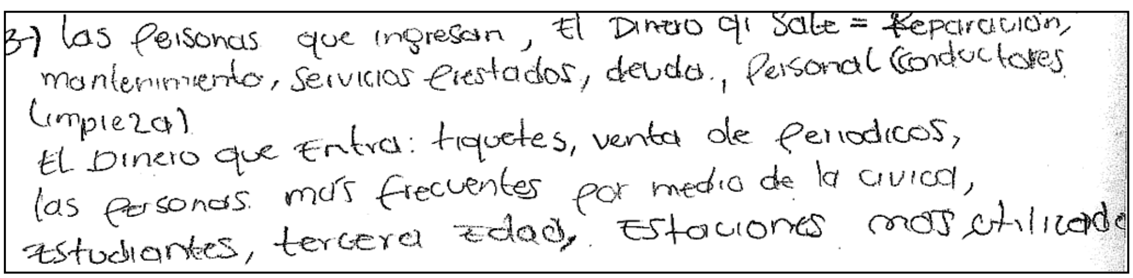

3-) las Personas que ingresan, El Dinero q1 Sale = Reparación, mantenimiento, servicios prestados, deuda., Personal (Conductores limpieza)
El Dinero que Entra: tiquetes, venta de periodicos,
las personas más frecuentes por medio de la civica,
estudiantes, tercera edad, Estaciones más utilizad

Ilustración 19. **Producción escrita de Lindsay.**

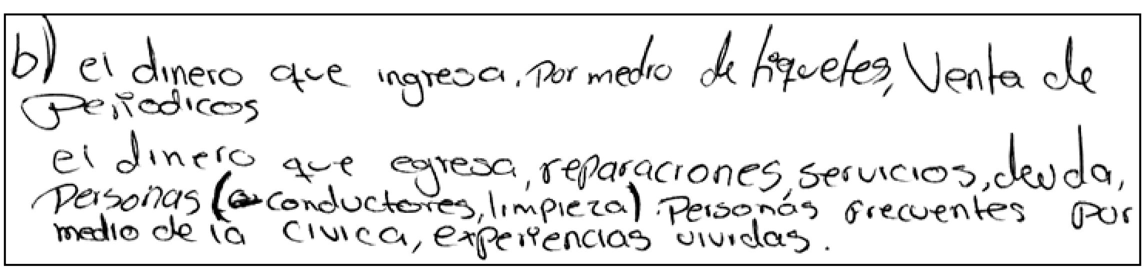

b) el dinero que ingresa, por medio de tiquetes, Venta de Periodicos
el dinero que egresa, reparaciones, servicios, deuda, Personas (conductores, limpieza) Personas frecuentes por medio de la civica, experiencias vividas.

Ilustración 20. **Producción escrita de Andrey.**

En la gran mayoría de las respuestas se evidencia aspectos comunes como los dineros que ingresan y salen, personas (empleados o usuarios) y algunos elementos característicos de este tipo de transporte (tiquete de ingreso). Entre todas las cantidades mencionadas, se comenzó a establecer aquellos que cambian o no cambian; con ello, los estudiantes tuvieron un primer acercamiento a las nociones que tienen ellos sobre los términos de variable y constante (re-significación de estos términos a la luz de la situación contextualizada). En el siguiente episodio se muestra una discusión sobre la orientación dada en la guía: *"Teniendo en cuenta el listado anterior, clasifícalas en cantidades que cambian y las que no cambian"*. A partir de este enunciado, los estudiantes dieron algunas aproximaciones desde sus saberes previos y algunos análisis que surgían de la situación específica abordada.

01.	Galvis:	*¿Cambian y no cambian?...*
02.	Alex:	*Que cambian, yo creo que casi todas cambian, todas…*
01.	Investigadora:	*Todas cambian… ¿Algunas de estas no cambian?*
02.	Galvis:	*Mantenimiento*
03.	Lindsay:	*Tal vez la que no cambiaría, pues sería el dinero que sale. Por ejemplo: la reparación, el mantenimiento, los servicios prestados, deuda…*
04.	Investigadora:	*¿Por qué no cambian Lindsay?*
05.	Lindsay:	*No, yo no digo que no cambian, pueden que no cambien…*
06.	Alex:	*Mantienen una tendencia*
07.	Lindsay:	*Porque tienen que estar pagando algo equitativo, cada mes*
08.	Galvis:	*A los empleados hay que pagarle*
09.	Lindsay:	*A un empleado se le paga un sueldo fijo. Seguro que a los servicios, los buses que prestan ese servicio también les pagan su parte y las deudas, supongo que tienen un total de dinero establecido para poder pagar y así acabar la deuda, el dinero que sale podrían no estar cambiando.*

		Mientras que el dinero que entra por los tiquetes y que entra tal vez si, no todos los días no siempre entra la misma persona, no es el mismo número de persona.
10.	Alex:	*Pero el dinero que sale, haber… por ejemplo de un momento a otro, bueno no va a ser de un momento a otro van a tener planeado, vamos a hacer un Metro Cable en cierta parte, eso va a influir en el dinero que va a salir.*
11.	Lindsay:	*Por eso digo, puede que no varíe, yo no estoy diciendo que NO*
12.	Galvis:	*Tampoco va a ir la misma gente todos los días*
13.	Alex:	*Si*

Los diálogos que se establecieron dieron pautas para la descripción de lo que consideraban "*variable*" y "*constante*" y su posterior representación matemática.

En el episodio anterior destacamos la idea de *"mantiene una tendencia"* tratando de evitar una idea absolutista al "*no cambia*", es decir, los elementos que se catalogaron como "no cambian", están sujetos modificaciones según las circunstancias de la situación específica y de los elementos que la influencian en determinado momento. Aspecto que a nivel intra-matemático no se daría, ya que el modelo producto de un problema, no tendría las condiciones de lo cotidiano ni lo circunstancial que lo modifique o lo convierta en particular a la situación. Bajo la mirada de lo contextual (cotidiano y auténtico para el estudiantes), Blum et al. (2007) proponen una de las formas de concebir el modelo matemático como una particularización el cuales ilustra los usos que son inútiles fuera del campo de la actividad particular del cual surgió. En este sentido, la idea de modelar bajo contextos específicos de los estudiantes, requiere de construir modelos que no se generalizan a otras situaciones, al contrario, se establecen bajo condiciones y especificaciones propias en un momento y lugar determinado, aspectos que los estudiantes establecen de manera natural, en este caso, su cercanía al Metro los ayuda a tejer argumentos, factores y condiciones únicas para la solución (matemática o cualitativa) de la situación.

En los términos de las relaciones entre variables, la idea de *"constante"*, cuando nos referimos a situaciones que no son simuladas, está sujeta paradójicamente a la idea de cambio, aunque este cambio sucede en intervalos de tiempo establecidos o influenciados por lo social, comercial, empresarial, y otros aspectos temporales o causales que rodeen la situación particular. Por lo cual no podemos hablar, en este caso particular del Sistema Metro, de condiciones o factores que permanecerán "constantes absolutas" sino mas bien, de "constantes relativas", abandonando de alguna forma, la noción de *"constante"* desde la idea "no cambia" definida desde las expresión con tratamiento algebraico sin un contexto (Ejemplo: Establecer las variables y constantes en la expresión $2x + 3 = y$), enfatizando que se le llama constante a los términos numéricos (coeficientes de la expresión) y variables a las letras que asumen uno o diversos valores según sus relaciones.

Los estudiantes comienzan a describir la concepción de constante desde la situación que están analizando, empleando en su discurso el término *"constante"* como algo que *tiende al equilibrio;* a continuación Alex, Lidsay, Andrey y Galvis en su discusión, expresan:

01.	Investigadora:	*Los conductores ¿cambian o no cambian?*
02.	Alex:	*De pronto si hacen una estación de allí a otra parte, de pronto se necesitan más*
03.	Investigadora:	*Y si no hacen ninguna estación en cinco años, entonces ¿qué pasa?*
04.	Alex:	*Yo creo que se va a mantener la tendencia, porque si este no puede conducir, entonces contratemos otro, pero va a estar como la misma cantidad.*
05.	Investigadora:	*Podemos hablar de que cambian o hay una tendencia a cambiar*
06.	Galvis:	*Podrían cambiar*
07.	Investigadora:	*¿Cuál de las dos? ¿Una tendencia a cambiar?*

08.	Alex:	*A no, no una tendencia a cambiar no… que pueden cambiar…dependen de esos factores hablando pues del Metro que si contrata más…*
09.	Galvis:	*Más gente*
10.	Investigadora:	*Entonces una tendencia significaría que está atado…*
11.	Alex:	*Si, a cambiar, que siempre va a cambiar*
12.	Investigadora:	*Que ¿siempre? o que puede cambiar*
13.	Alex:	*Que va a mantener por ejemplo, en este año van a entrar dos, y el próximo año otros dos y así va a mantener la misma cantidad por cierto tiempo*
14.	Lindsay:	*Como que va a tener cierto equilibrio, pero no siempre va a ser la misma cantidad*
15.	Investigadora:	*Entonces, ¿qué es variable y qué es constante?*
16.	Galvis:	*Que varía, que cambia*
17.	Andrey:	*Que tiene cambios*
18.	Alex:	*Constante es como que mantiene una tendencia…*
19.	Andrey:	*En términos matemáticos, que mantiene su precio*
20.	Galvis:	*Como que sigue igual*

Como parte del trabajo de campo en el contexto del estudio, los estudiantes prepararon una exposición para dar a conocer a algunos miembros de la comunidad educativa y del grupo de investigación sus hallazgos, frente a la situación particular de conveniencia o no de utilizar el Sistema Metro como un medio de transporte usual. En esta exposición, Jackobson, manifestó la relevancia que tuvo para él la noción de *constante*, y expresa:

> *Yo quiero mencionar un aspecto importante, un problema que no tuvo solución hasta que llegó el complemento del grupo, que fue qué era constante, sabemos que todo cambia y se llegó a la conclusión que la constante en la realidad es la tendencia al equilibrio. (Jackobson)*

Dado nuestro interés en investigar un poco más y asegurarnos de que este estudio, a futuro, abre posibilidades para desarrollar otras investigaciones y aunque no fuera parte de nuestros objetivos propuestos, hicimos a una entrevista final, en la cual se planteó una situación de análisis con respecto al cobro de los servicios públicos, retomando las relaciones entre "*variables*" y "*constantes*" en un análisis específico. En esta entrevista, se retomó nuevamente la noción de *"constante"* como la tendencia al equilibrio, reiterando lo dicho en anteriores actividades orientadas por situaciones auténticas. En el siguiente episodio los estudiantes emplean dicha noción para establecer relaciones entre variables y constantes de forma retórica o discursiva.

01.	Investigadora:	*¿Cuáles en esas circunstancias serían variables y cuáles constantes, o no habría constantes?*
02.	Alex:	*El estrato sería constante*
03.	Investigadora:	*Dependiendo de la persona, o sea constante en ¿qué?*
04.	Investigadora:	*En esa zona.*
05.	Alex:	*En esa situación*
06.	Investigadora:	*Pero en el tiempo seria que*
07.	Galvis:	*Variable*
08.	Investigadora:	*Variable, año tras año como lo habíamos hablado. Y los otros*
09.	Investigadora:	*O sea que el consumo siempre va a ser variable*
10.	Alex:	*En ciertos casos, si se mantiene la misma cantidad de electrodomésticos, las mismas personas*
11.	Lindsay:	*No, casi siempre es más o menos. No es exacto, un cálculo más o menos de lo que va a llegar*
12.	Investigadora:	*Recordemos que es constante entonces para tí Hector*
13.	Lindsay:	*Una tendencia al equilibrio*
14.	Alex:	*Mantener constancia*
15.	Alex:	*Pero*
16.	Galvis:	*Que nunca cambia determinado largo tiempo*
17.	Investigadora:	*Eso sería constante, ¿cierto?*
18.	Investigadora:	*Entonces a nosotros nos llega una cantidad específica, esa cantidad depende de qué o no depende de nada*
19.	Galvis:	*Del estrato y del consumo*

El término “*constante”* fue una noción que se describió en varios momentos de la investigación desde el contexto del Metro de Medellín, y que por su relevancia en el discurso de la relación entre variables, se destaca en este estudio como elemento matemático re-significado desde un contexto no simulado y contextualizado a lo que enfrentan los estudiantes en su cotidianidad.

En general, en el episodio y en otros espacios los estudiantes observan la noción de “constante” desde una situación no simulada como una manera de simplificar un conjunto de comportamientos que aunque varían, no representan cambios significativos en las relaciones del modelo; al contrario la noción de *variable*, la cual es presentada bajo los términos clásicos e intuitivos de *“variar o cambiar”* notándose la ausencia de una significación desde lo algebraico. En este sentido, es relevante mencionar que el término *variable* en el álgebra escolar, se constituye en una de las nociones que más dificultades presenta a la hora de emplearla en diferentes contextos. Al respecto, Morales y Díaz (2003) escriben:

> El no reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable se torna frecuentemente un obstáculo que bloquea el aprendizaje de la matemática. En otras palabras, los estudiantes no sólo deben aprender a trabajar con muchos tipos de símbolos literales en un problema, sino que deben aprender que un símbolo literal puede asumir más de un papel dentro de un problema dado. (p. 110)

En el estudio de las relaciones entre cantidades de magnitud, el proceso de construcción de la noción de variable ha pasado por diversas concepciones, según sus usos y sus características en determinados contextos matemáticos y no matemáticos. En particular desde la situación planteada, las variables y sus respectivas representaciones simbólicas correspondían específicamente al Metro de Medellín, en otro contexto sus asignaciones y relaciones no tendrían significación. En este sentido, Rojas et al. (2002) puntualizan cuatro características asociadas a la variación:

- La variable pertenece siempre a un universo, y desde él debe ser interpretada.

- El significado de variar que se le adjudica a la variable, corresponde al hecho que ella es representación, indistinta y simultánea, de los distintos individuos que conforman su universo.

- Aparece siempre haciendo parte de una expresión, que da cuenta de la relación de dependencia que se desea destacar entre los individuos de un universo.

- El universo al que pertenece la variable, sin ser tiempo, está implícitamente connotado en éste. En otras palabras, el tiempo se imbrica al universo de la variable, ajustándose a su cardinalidad y a su estructura.

Teniendo en cuenta las anteriores características, podemos decir que la idea que tienen los estudiantes de *variable y las relaciones que puedan establecer entre ellas*, están asociadas a la noción de cambio, enmarcado en el tiempo y en la idea de dependencia; bajo estos criterios, es claro cuando en el último episodio mencionado, los estudiantes establecen que el cobro de los servicios públicos depende del *consumo y del estrato*, de igual manera aseguraron que los ingresos dependían de la *tarifa y del número de personas*, aspecto que se analiza más adelante.

Desde los análisis de la noción de *"variable"* dentro de una relación verbal y matemática, exponemos a continuación cómo se evidenciaron estas nociones en el transcurso de trabajo con los estudiantes:

1. La variable y la constante surgieron como una matematización de las cantidades de magnitud involucradas en una situación en contexto.

2. Establecimiento y diferenciación de las cantidades de magnitudes cambiantes y no cambiantes.

3. Identificación y asignación de las variables en las relaciones establecidas entre la situación real y algunas relaciones matemáticas de proporcionalidad (necesidad de representarlas de manera verbal y cualitativa, con el empleo de algunos cálculos aritméticos.

4. Utilización de símbolos convencionales como una forma de representar la "generalidad" de las cantidades de magnitud.

5. Realización de reflexiones sobre el dominio de la variable.

En estos cinco momentos se evidencia la conformación de un posible proceso por el que transcurre la noción de variable y co-existe con otros subprocesos, mientras se desarrolla el proceso de modelación. Este proceso es evidenciado nuevamente por los estudiantes en la última entrevista[22] cuando se enfrentan con un contexto diferente al Metro de Medellín, los planes de celulares, al solicitar a los estudiantes que tomaran la elección por el plan más económico. Los estudiantes comenzaron, igual que en las otras actividades, a establecer relaciones entre variables de manera cualitativa, aspecto que evidenciaremos en el siguiente episodio:

01.	Jackobson:	*Yo empezaría buscando los operadores, es decir, bueno yo ya conozco mis necesidades, ya sé qué necesito, entonces buscar operadores a ver cuál me sirve más. Y obviamente yo pongo las condiciones a partir de ahí.*
02.	Wilhelm:	*El promedio de los minutos que gasta al mes o que cree que va a gastar*
03.	Investigadora:	*Escuche la pregunta: Necesitamos seleccionar un plan postpago que sea el más económico y que más nos favorezca. ¿Qué aspectos tendríamos que tener en cuenta para evaluar o elegir el plan?*
04.	Sandro:	*Las necesidades que tiene la persona que lo quiere adquirir ¿no? Puede necesitar más mensajes de texto o puede necesitar más minutos o los dos.*

En consecuencia con los resultados de los estudiantes en diferentes situaciones (Metro de Medellín, cuenta de servicios públicos, plan de celulares) recurren inicialmente a la descripción de relaciones cualitativamente, haciendo énfasis en las necesidades y factores que influencian cada situación, no hay una conexión directa con una expresión matemática que calcule la cantidad ahorrada, es decir, comienzan con un

[22] Ver anexo 3. Protocolo de entrevista final.

análisis de la situación y de otras condiciones que las afectan o la influencian al momento de determinar la posible solución a la situación planteada.

De forma similar que en el contexto del Metro, los estudiantes en la entrevista final, evidenciaron la selección de variables y constantes, como elementos de análisis al momento de proponer un posible modelo que describa la conveniencia de un operador u otro. En el episodio podemos constatar lo expresado anteriormente:

01.	Sandro:	*En el de* [operador] *Tigo los precios van a ser iguales, sea para el mismo operador u otros operadores, pero va a ser menos minutos, en cambio acá tendríamos que buscar dos valores, esto con los otros operadores y con el mismo operador. O sea que para calcular más o menos, tendríamos que gastar todos esos minutos en el mismo operador o en otro operador.*
02.	Investigadora:	*No da la opción de repartir, es decir, matemáticamente ¿cómo lo estableceríamos?*
03.	Sandro:	*¿Para repartirlo?*
04.	Wilhelm:	*Hay que tener lo que usted dijo, las variables y las constantes. Las variables son los precios.*
05.	Jackobson:	*Y los minutos*
06.	Wilhelm:	*Los minutos también son variables. ¿Cuáles son las constantes?*
07.	Jackobson:	*Los precios, los precios de los minutos, $249 no sube*
08.	Wilhelm:	*Por ejemplo para Tigo las constantes serían los precios y las variables serían la cantidad de minutos, porque ya variaría.*
09.	Sandro:	*En movistar, la constante sería la carga inicial, porque no la vamos a cambiar*
10.	Investigadora:	*Y el valor de los minutos ¿no sería constante aquí también? ¿Por qué cambiaría aquí?*
11.	Wilhelm:	*Estos precios son constantes…*
12.	Investigadora:	*Para todos… ¿para los tres operadores?*
13.	Wilhelm:	*Bueno para cada operador es constante, obviamente no son equivalentes*
14.	Investigadora:	*Entre ellos tres…*
15.	Wilhelm:	*Pero son constantes*
16.	Investigadora:	*En sí, son constantes*

17.	Wilhelm:	*A menos que los cambien, los suban o que los bajen*
18.	Sandro:	*En el plan de Movistar, no va a ver una constante entre estos dos*
19.	Investigadora:	*Pero, si yo voy a llamar a un operador, ¿va a ser diferente cada vez que llame a este operador?*
20.	Sandro:	*A no, va a ser una constante…*
21.	Investigadora:	*Cuando vaya a llamar a un fijo o Movistar ¿va a ser constante o variable?*
22.	Sandro:	*Va a ser el mismo, pero yo estoy hablando es de que si vamos a buscar que sean constantes estos dos, eso no puede ser.*

En general, con el propósito de establecer condiciones, características y factores en la construcción de una respuesta argumentada para tomar la mejor decisión con respecto a un contexto auténtico, el espacio escolar se convirtió en un ambiente académico de discusión donde objetivo fundamental era establecer variables, constante y relaciones intuitivas basadas en las situaciones reales y escenarios vividos desde lo cotidiano. Tales aspectos influenciaron las nociones matemáticas que los estudiantes ya habían interiorizado en otros cursos de la básica secundaria, mediante sus acercamientos numéricos y más adelante algebraicos. Aspectos que se evidencian en el anterior episodio, en las líneas de la 02 a la 15, donde los estudiantes establecen las relaciones existentes en el contexto auténtico y hacen las correspondencias de una manera significativa y con sentido al retomar las nociones matemáticas.

5.1.2 Acercamiento a la idea de relaciones entre variables

Luego del reconocimiento de lo “variable” y lo “constante” de manera cualitativa o retórica los estudiantes evidenciaron haber percibido cierta “dependencia o correlación” entre las variables; por ejemplo, “*el dinero* [que ingresa al Metro] *es variable porque depende de los pasajeros*”. Con el ánimo de comenzar a describir esa “correlación o dependencia”, los estudiantes recurrieron a un acercamiento numérico, mediante un análisis de cuáles de las condiciones y factores que se pueden cuantificar, cambian o no, y cómo lo hacen, la primera aproximación que pudimos encontrar en los estudiantes fueron de tipo verbal, expresando algunos comportamientos de tipo proporcional y ejemplificaron con algunos datos numéricos.

Con la intención de cuantificar estas relaciones pedimos a los estudiantes que completaran una tabla[23], siguiendo algunas orientaciones. A continuación presentamos una de las tablas elaboradas por los estudiantes (la de Alex), donde procedimentalmente encuentran los ingresos, teniendo en cuenta algunos elementos que intervienen como el número de pasajeros y las tarifas de cada opción de transporte.

Número de viajeros	Tarifa: Bus $ 1400	Tarifa: Sencillo $ 1550	Tarifa: Eventual $ 1500
	Ingreso I	Ingreso II	Ingreso III
1	1400	1550	1500
2	2800	3100	3000
3	4200	4650	4500
4	5600	6200	6000
5	7000	7750	7500

Ilustración 21. **Tabla presentada por Alex para registrar las diferencias en los ingresos del Metro con diferentes tarifas.**

Desde el análisis de la tabla, los estudiantes establecieron los factores que varían o no varían, Alex responde:

✓ Varían	✓ No varían
Ingresos	Tarifa
Número de personas	

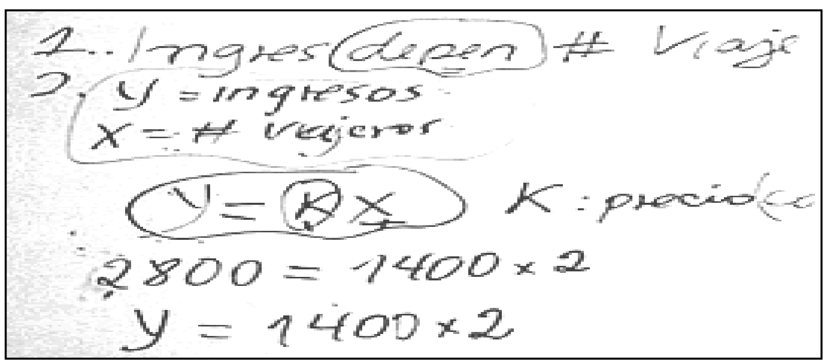
Ilustración 22. **Clasificación de cantidades variables y constantes por parte de Alex**

El episodio anterior, nos lleva a analizar algunos de los procedimientos que siguieron los estudiantes al determinar las relaciones generadas por los datos de la tabla. Hubo quienes enunciaron correlaciones cualitativas, para posteriormente establecer regularidades a través de un conjunto numérico de datos obtenidos y partir de allí, enunciar ciertas relaciones cualitativas entre ellas; por el contrario, otro estudiante, usó un patrón lineal ($y = mx$) y, a partir de ello, usó los datos de la situación para identificar el valor del parámetro m o la constante. En el siguiente episodio se evidencia

[23] Ver anexo 5. Guía Uno (momento dos)

el proceso para el establecimiento de relaciones de dependencia entre los ingresos, el número de viajeros y el precio de un tiquete, mediante una ecuación lineal[24].

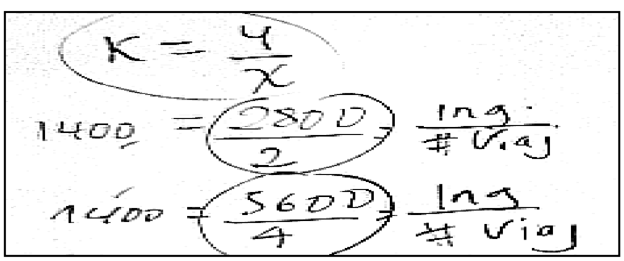
01.	Investigadora:	*¿Qué relación establecen entre las variables y las constantes que se establecieron desde la tabla (Variables: Número de pasajeros e ingresos – Constantes: Tarifas)?*
02.	Alex:	*Los ingresos dependen del número de viajeros.*
03.	Investigadora:	*¿Qué significa la palabra dependencia?*
04.	Alex:	*Que están sujetos…*
05.	Jackobson:	*Sería aplicado a la matemática, "y" serían los ingresos y "x" el número de viajeros.*
06.	Investigadora:	*¿Cómo relacionas las dos variables? entendiéndolo como que son dependientes, es decir las que tu nombras "x" e" y". O ya está dicha la relación con sólo nombrar a "x" y a "y", ya que usted la quiere expresar matemáticamente.*
07.	Jackobson:	$y = k$, *que es la constante por x, k siendo el precio o la constante*



08.	Investigadora:	*Ustedes están de acuerdo con esa relación, ¿cómo me podrían demostrar que eso es verdad?*
09.	Lindsay:	*Poniendo valores…*
10.	Investigadora:	*¿Cómo cuales?*
11.	Jackobson:	*2800 es igual a 1400 por 2*
12.	Investigadora:	*Ese es el único ejemplo…*

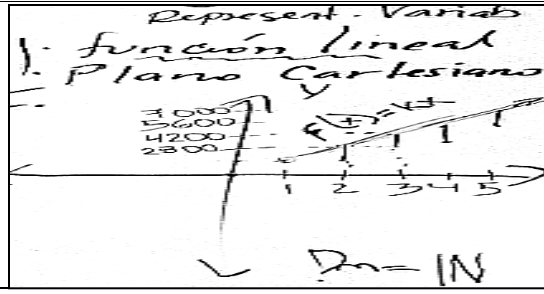
[24] Las imágenes del episodio, son tomadas de los registros fotográficos del tablero, como producto del proceso de diálogo y socialización de aspectos generales, hechos algunas veces por las investigadoras y en otras por los estudiantes.

13.	Andrey	*O “y” es igual a 1400 por dos*
14.	Investigadora:	*Lo resuelvo y me ¿daría? 2800*
15.	Andrey:	*¿Sería el único ejemplo o habrá más?*
16.	Jackobson:	*Si “x” es una variable, es porque “x” va a variar*
17.	Investigadora:	*¿Qué otras relaciones podríamos establecer allí entre variables y constantes?*
18.	Jackobson:	*Podríamos despejar*
19.	Investigadora:	*¿Qué despejaría usted?*
20.	Jackobson:	*La constante*
21.	Investigadora:	*“y” es igual a “y” sobre “x”*
22.	Jackobson:	*Díganme un ejemplo*
23.	Jackobson:	*2800 dividido 2*
24.	Investigadora:	*Eso me da… otro ejemplo*
25.	Jackobson:	*5600 dividido 4*
26.	Investigadora:	*Eso me va a dar también 1400…que es la constante*
27.	Investigadora:	*Hablemos en términos del ejemplo, los ingresos…*
28.	Alex	*Los ingresos dividido el número de viajeros…*
29.	Investigadora:	*Da 1400 que sería*
30.	Alex:	*La constante*



31.	Investigadora:	*... Entonces es una relación matemática. ¿Por qué?*
32.	Alex:	*Porque se expresa por medio de valores y operaciones*

33.	Investigadora:	*Si aumenta una necesariamente ¿tendría que aumentar la otra? O una puede aumentar y la otra disminuir*
34.	Alex:	*Para mantener el equilibrio…la misma constante*
35.	Investigadora:	*O sea que para mantener esa constante, qué pasa con los ingresos y el número de viajeros*
36.	Jackobson:	*Tienen que ser directamente proporcionales*
37.	Investigadora:	*¿Qué significa que sea directamente proporcional?*
38.	Jackobson:	*Si "y" avanza es porque "x" aumenta, si "x" aumenta es porque "y" aumenta*
39.	Investigadora:	*Esa es la única condición para que sean directamente proporcionales, si una aumenta la otra también…*
40.	Jackobson:	*Y si la una disminuye la otra también tiene que disminuir*
41.	Investigadora:	*O sea que si yo arriba 10.000 y abajo 4, en la otra pongo 20.000 y en la de abajo 6, así cumple… Las dos están aumentando*
42.	Jackobson:	*No, no cumple*
43.	Investigadora:	*¿Por qué?*
44.	Lindsay:	*Porque la constante no sería la misma*
45.	Investigadora:	*Entonces, ¿qué condición tendría que cumplir la proporcionalidad?*
46.	Jackobson:	*Que se mantenga la constante*
47.	Investigadora:	*¿Y cómo se mantiene la constante?*
48.	Alex:	*Que las dos variables si sean dependiente, que una dependa de la otra.*
49.	Investigadora:	*¿Cómo representarías estas variables?*
50.	Jackobson:	*Con una función lineal… en el plano cartesiano*



Jackobson al establecer el dominio de lo que él denominó una función, especificó que debían ser los Naturales, porque este sistema numérico es el apropiado para expresar los valores discretos como el número de personas, precios e ingresos (contexto auténtico). Se descartó desde el contexto que estábamos abordando los números Reales, ya que no es posible expresar media persona o raíz de 1400 como el valor del tiquete. Algunos de estos análisis se ven en el siguiente diálogo.

01.	Jackobson:	*Primero hay que decir que el dominio, son los reales positivos.*
02.	Investigadora:	*O sea que ahí puede estar raíz de tres, puede estar un medio o puede estar 3,89453* [Jackobson, cambia el dominio y le coloca el conjunto de los números Naturales]
03.	Investigadora:	*¿Por qué lo cambiaste Jackobson?*
04.	Jackobson:	*A los naturales…*
05.	Investigadora:	*¿Por qué?*
06.	Jackobson:	*Porque no hay medias personas y así…*
07.	Investigadora:	*Pero, matemáticamente si no estuviéramos hablando del contexto del Metro, si podríamos colocar este dominio (reales)*
08.	Alex:	*Si, depende de lo que se esté hablando.*

El trabajo matemático que se evidencia en los anteriores episodios, son una muestra de las diversas formas de darle sentido, desde lo cotidiano, a algunas relaciones matemáticas que se establecen en un proceso verbal y circunstancial, para luego incorporar nociones que intervienen en la construcción de conceptos, en nuestro caso, los términos de variables y constante dentro de unas relaciones de dependencia. Particularmente, la modelación matemática, desde el contexto educativo, ha evidenciado un cambio reciente en cuanto a sus usos, acentuándose la tendencia hacia los procesos de traducción y no sólo el trabajo con los modelos confeccionados, dando prioridad a las construcciones que posibilitan el acercamiento a las nociones que se abordan en la escuela secundaria.

Estas maneras de establecer las relaciones entre las cantidades “variables” y “constantes” dieron origen a dos subcategorías en este estudio, a saber: *Relaciones de generalización* y *Relaciones funcionales*, de las cuales presentaremos a continuación.

5.1.2.1 Relaciones entre variables a través del proceso de Generalización

Describimos esta categoría con base a lo inductivo, comienza con casos particulares y luego evidencian algunos niveles de generalización, es decir, hay procedimientos que sólo se emplean en una situación particular, pero no se utilizan en otra, de igual forma. En ocasiones se establece una relación aritmética sólo de manera retórica y luego se establece una ecuación que generaliza los valores o cantidades de magnitud aritméticas, en la cual las variables son herramientas que facilitan ésta descripción en términos algebraicos.

Este nuestro caso de análisis de relación entre cantidades variables y constantes, se evidencia cómo Andrey establece relaciones aritméticas para acercarse a la estimación del ahorro en determinado número de viajes teniendo en cuenta la siguiente orientación[25]:

Unos estudiantes averiguan que el tiquete estudiantil les permite a los jóvenes del Sisben y de estratos 1, 2 y 3 movilizarse hacia sus instituciones educativas y que con el tiquete estudiantil el valor del pasaje en el bus es de $700 y en el Metro es de $ 735. Y realizan los siguientes gráficos. ¿En cuál de las dos modalidades un estudiante podría ahorrar más dinero?

En la Ilustración 23, Andrey muestra las operaciones y resultados que deduce a partir de las gráficas, pero no expone la respuesta a la actividad, se limita a comprobar los datos que aparecen en las gráficas, sin realizar un análisis de las diferencias en los valores y en la forma cómo se pueden relacionar.

[25] Ver anexo 8. Guía Cuatro. (Actividad y las gráficas de análisis).

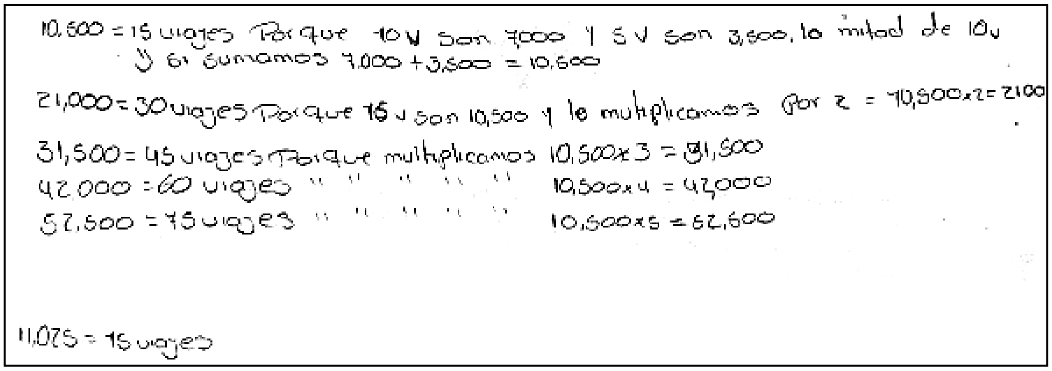

10.500 = 15 viajes Porque 10 V son 7000 y 5 V son 3,500, la mitad de 10v
y si sumamos 7.000 + 3,500 = 10,500
21,000 = 30 viajes Porque 15 v son 10,500 y le multiplicamos por 2 = 10,500x2 = 2100
31,500 = 45 viajes Porque multiplicamos 10,500x3 = 31,500
42 000 = 60 viajes " " " " " 10,500x4 = 42,000
52,500 = 75 viajes " " " " " 10,500x5 = 52,500
11,075 = 15 viajes

Ilustración 23. **Andrey establece procedimientos aritméticos según los datos de la gráfica proporcionada**

En estos procedimientos los estudiantes evidencian el tanteo y la utilización de la aritmética para llegar a establecer un dato o una respuesta contextualizada. Debemos observar que el proceso se desarrolla a niveles aditivos y multiplicativos, no se recurre a ninguna ecuación para llegar de forma simplificada a la respuesta. En términos de Kieran (1995) se hablaría de una perspectiva procedimental, entendida como el conjunto de todas las operaciones aritméticas que se hacen sobre números para obtener como resultados números.

Además, es importante apuntar que los procesos algebraicos, tienen bases en la aritmética, y es por medio de ésta que los estudiantes van construyendo las formas en que se relacionan los elementos que intervienen en las situaciones que son analizadas, ya sea simuladas o desde contextos auténticos. Al respecto Kieran y Filloy (1989) puntualizan que:

> Los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. (p. 229)

Teniendo en cuenta estas palabras de Kieran y Filloy, resaltamos que los estudiantes que participaron en este estudio son de once grado y por tanto ya han abordado previamente el estudio del álgebra; sin embargo, consideramos que en algunos casos, los acercamientos algebraicos que han tenido no han sido suficientes para los estudiantes (con excepción de *Jackobson* y *Wilhelm*). En el siguiente diálogo, los estudiantes reconocen algunas relaciones establecidas desde lo aritmético y el análisis de datos desde la tabla que elaboraron:

01.	Andrey:	*Se gana más con el sencillo… hay una diferencia de $250 que si lo paga con el sencillo y la cívica eventual*
02.	Investigadora:	*Con una persona hay una diferencia de…*
03.	Andrey:	*$50*
04.	Investigadora:	*Con dos personas*
05.	Andrey:	*De $100*
06.	Investigadora:	*Con tres personas*
07.	Andrey:	*$150*
08.	Investigadora:	*¿Qué va pasando ahí?*
09.	Andrey:	*Se va aumentando de 50 en 50 pesos*
10.	Investigadora:	*¿Qué pasa ahí, entonces?*
11.	Galvis:	*Mientras más tiquetes sencillos vendan más sube el precio, o sea más ingresos para el Metro*
12.	Investigadora:	*¿De qué depende que el Metro elija una u otra tarifa para que le ingrese más dinero?*
13.	Alex:	*De la cantidad que más utilice ese tiquete*
14.	Investigadora:	*¿De la cantidad de persona?*
15.	Alex:	*Si*
16.	Investigadora:	*Por ejemplo si yo digo que esta vale $1550 y esta vale $1500, vale más la de $1550, no me interesa saber cuántas personas entren ¿si será posible que se pueda estimar así que se gana más dinero?*
17.	Alex:	*No porque pueden entrar más de las de $1500 y ganar más*
18.	Investigadora:	*O sea que ustedes creen que eso determina la ganancia*
19.	Alex:	*Si la cantidad de personas*

Las relaciones o correlaciones que se establecen inicialmente son de proporcionalidad directa, donde se describe en términos retóricos algunas características regulares, no hay una conexión con el parámetro matemático (pendiente) en la relación $y = m(x)$ de forma directa o simbólica, aspecto que se retoma en otras situaciones como la planteada en la última entrevista sobre la cuenta de los servicios públicos, donde identifican de forma similar la dependencia del cobro en términos de estrato y consumo, Galvis expresa:

01.	Investigadora:	*Entonces a nosotros nos llega una cantidad específica, esa cantidad depende de qué o no depende de nada.*
02.	Galvis:	*Si, del estrato y del consumo*

El álgebra como proceso de generalización presenta un nivel más avanzado, pues no se limita a desarrollar operaciones o relaciones a nivel discursivo, sino que determina la noción de variable como generalización de un patrón, donde los números y las variables son asumidas como *letras* para establecer relaciones útiles en la descripción del fenómeno o situación abordada. Swafford y Langrall (2000) dicen que:

> […] generalizar una situación problema es identificar los operadores y la secuencia de operaciones que son comunes a los casos particulares, y extender esto al caso general. La generalización de una situación problema se puede presentar verbal o simbólicamente utilizando variables. Cualquiera de estas dos se consideraría una representación de la situación problema. (p.206)

En general, los estudiantes procedieron de las dos formas, unos de forma retórica y un estudiante en especial, plantea procedimientos más elaborados a nivel de relaciones algebraicas. En el desarrollo del análisis de los ingresos que obtiene una determinada estación por concepto de tiquetes, pedimos a los estudiantes que resolvieran la siguiente situación idealizada, teniendo en cuenta la tabla citada anteriormente, esta dice: *Si en una hora, ingresan 612 viajeros en la estación Acevedo, ¿Cuáles serían los ingresos recaudados por el Metro, teniendo en cuenta las dos tarifas de la tabla? Escribe los procedimientos.*

En el siguiente esquema mostramos los procedimientos de Jackobson, quien presenta argumentos algebraicos para responder la situación, mientras los demás se acogen al esquema propuesto por él.

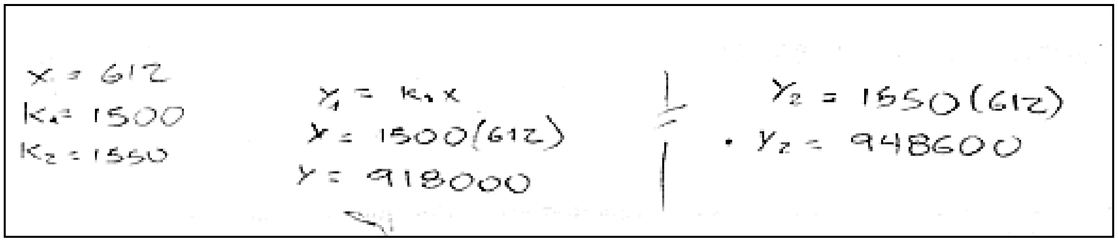


Ilustración 24. **Procedimientos algebraicos propuestos por Jackobson**

Es claro en este procedimiento que Jackobson se encuentra en un nivel diferente al retórico, sus argumentos no necesitan la elaboración de operaciones basadas sólo en la aritmética o relaciones verbales, él presenta una ecuación que representa un esquema lineal y realiza reemplazos numéricos para establecer una respuesta al enunciado. Bajo este esquema procedimental, "Las representaciones algebraicas se tratan como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas; es decir que se trabaja en términos procedimentales en donde los valores numéricos se sustituyen por expresiones algebraicas para obtener resultados específicos." (Kieran, 1995)

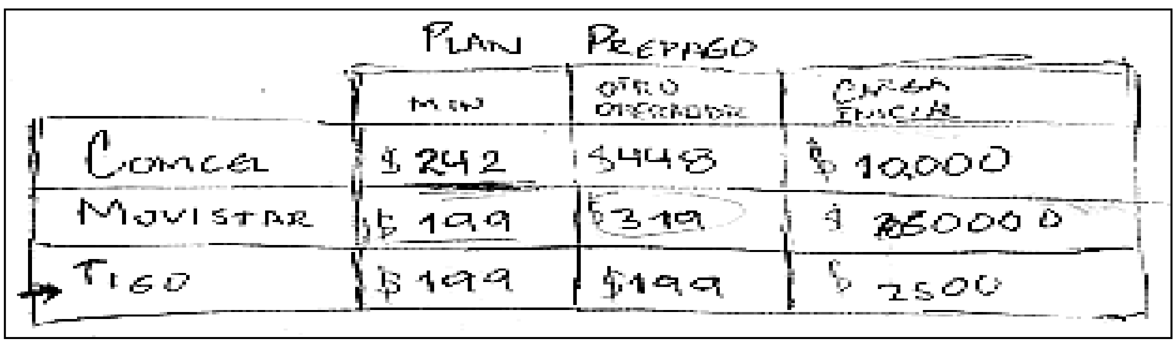
En los anteriores esquemas de procedimiento establecemos características esenciales como la traducción y el empleo de variables implícitas o explícitas como recurso en las elaboraciones matemáticas que responden a ciertos fenómenos o situaciones que se pretenden solucionar desde lo cuantitativo. En la ecuación $y = k(x)$, Jackobson establece parámetros claros desde su tabla *(k_1= 1500 y k_2= 1550)*, y asume la "x" como un número variable, donde esta *letra* no asume un valor especifico, sino la totalidad de un conjunto (dominio de la variable). En este sentido la *letra* es tomada como número generalizado. (Rojas et al. 2002)

En consecuencia, la modelación de situaciones cotidianas debe conducir a la elaboración de modelos ya elaborados a nivel matemático, pero que son particulares y que posiblemente re-significados bajo el contexto estudiado, al respecto Blum et al. (2007) puntualiza que los métodos matemáticos se utilizan para averiguar los resultados matemáticos, relevantes a las preguntas que se presentan de la traducción del problema del mundo real. Tales métodos incluyen la deducción lógica de asunciones matemáticas, utilización de resultados teóricos dentro de asuntos matemáticos, solucionando ecuaciones, realizando la manipulación simbólica o cómputos numéricos, estimando los parámetros, realizando la prueba, la simulación estadísticas etc.

5.1.2.2 Relaciones entre variables: un acercamiento funcional

Esta segunda subcategoría se centra en la concepción de las relaciones entre variables miradas desde lo funcional e inmersas en un contexto[26] diferente al Metro, pero cercano y significativo para los estudiantes. Desde esta situación pudimos establecer argumentos más elaborados a nivel de relación entre variables. A continuación se especifican algunos los procedimientos en los que Jackobson describe, mediante funciones, la representación de su respuesta frente a la selección de un operador determinado.

Jackobson plantea en primer lugar la tabla de los planes, indicando el valor del minuto al mismo y otros operadores, además del valor de la carga inicial.



PLAN PREPAGO

	MIN	OTRO OPERADOR	CARGA INICIAL
Comcel	$ 242	$ 448	$ 10000
Movistar	$ 199	$ 319	$ 25000
Tigo	$ 199	$ 199	$ 2500

Ilustración 25. **Jackobson representa los datos mediante una tabla (organización de datos)**

Luego plantea un gráfico de comparación de los comportamientos de los tres planes con relación entre el número de minutos y el valor por minuto, según el operador. La representación gráfica muestra cómo la variabilidad de los operadores de Comcel y Movistar no son las opciones que ejemplifican economía con respecto al tiempo (minutos) y el costo del minuto. De esta manera, es importante resaltar que el modelo que se presenta a continuación, es sustentado bajo la idea gráfica. En términos de Blázquez (2006):

[26] Ver anexo 3. Protocolo de entrevista tres. Contexto especificado en la entrevista final sobre los operadores de celular

> Las gráficas de las funciones, que se trabajan desde niveles muy básicos en la enseñanza, sobre todo en lo que se refiere a su lectura e interpretación, nos permiten seguir la evolución de estos fenómenos de forma global y muy intuitiva. (p. 69)

Desde estas palabras, la idea de las gráficas en la explicación del modelo que propone Jackobson para sustentar cuál de las opciones de operadores celulares es más económico, nos muestra el nivel de abstracción y correlación entre la idea de función como relación algebraica y la función en términos de Sierpinska (citada en García y Montiel, 2007) como "visión sintética" identificada como representación en el plano, pensadas como objetos geométricos y clasificadas de acuerdo con la forma de éstos.

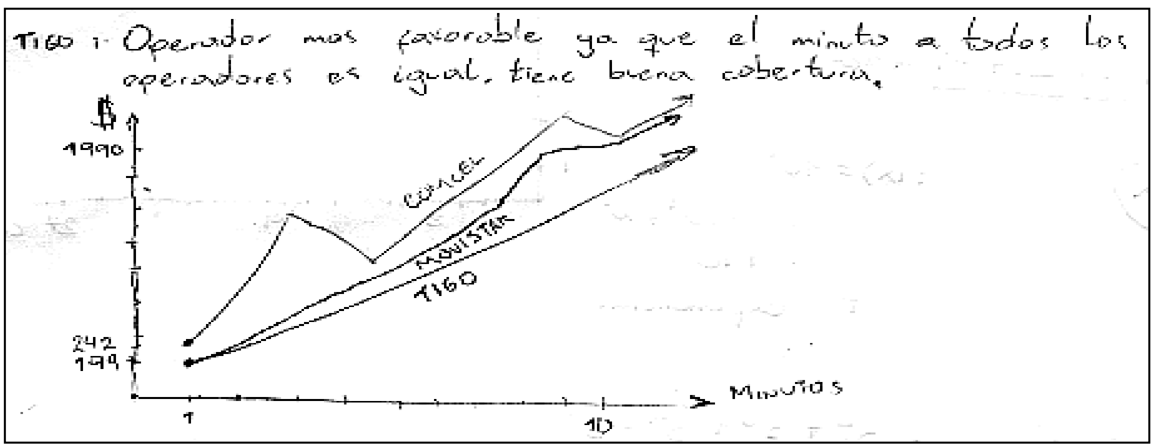


***Ilustración 26*. Las gráficas muestran las variaciones de los planes.**

En el propósito de establecer las relaciones entre variables propone las siguientes restricciones y expresa las relaciones de modo funcional.

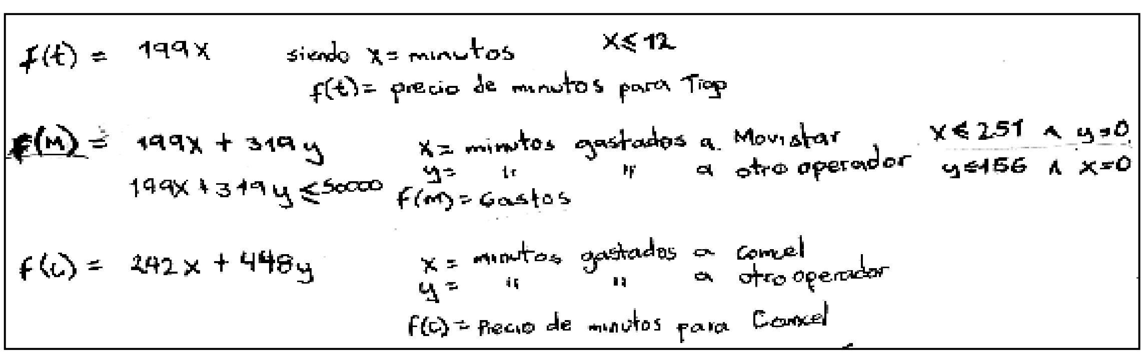


***Ilustración 27.* Esquema funcional que representa los gastos en los operadores.**

Para justificar las restricciones que realizó, mostramos algunos apartes de las discusiones.

Jackobson: Para Movistar, f(M) es igual a 199 por x, donde x son los minutos que se gasten para Movistar, ¿cierto? Mas 319 por y, y es minutos gastados a otro operador. Y la restricción, si es para el mismo Movistar, tiene que ser hasta 251 minutos, siempre y cuando no llame a otro operador. Y si llama a otro operador, 156 minutos máximos, mientras no llame a Movistar.

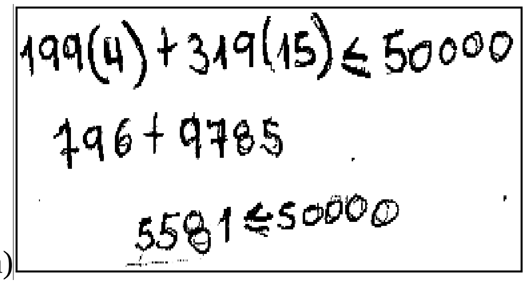
En esta explicación traduce la carga inicial en términos de minutos que se puede gastar con esa carga, especificando cuando se llama a otro operador. Pero se le solicita que exprese estas restricciones no como cantidad de minutos, sino como representación de dinero, en este sentido, se construye los siguientes argumentos:

01.	Investigadora:	*Si quisiera colocarlo como gasto o dinero que me va influir o no para establecer que uno es más barato que otro, ¿cómo lo incluyo en la expresión matemática?*
02.	Jackobson:	*Para gastos, entonces queda…*
03.	Investigadora:	*Sabemos que esto* [muestra en el papel la ecuación que escribió] *es para gastos, o sea, es lo que me va a costar. ¿Qué faltaría ahí? Él le pone una restricción pero a la(x) y a la (y), que son los minutos, la pregunta es ¿Cómo hacemos para incluir la carga inicial, no como minutos sino como valor o como dinero que yo debo poner en cada uno de esos planes, si voy a acceder a ellos? Porque los minutos ya serían con el tiempo que yo diga a no hasta 50, pero ahí cómo incluyo el dinero de los 2500 que gasté o los 10.000 o los 50.000.*

En el siguiente aparte, Jackobson presenta una expresión que presenta algunos errores y por tal razón mediante preguntas, llegamos a la propuesta de una expresión que se ajusta a la inclusión de las cargas iniciales como dinero. Al respecto se discute:

01.	Jackobson:	*Si es Movistar, esto es 50.000 que es igual a 119(x)+ 329(y)*
02.	Investigadora:	*Están de acuerdo con eso. Gasté a otro operador 15 minutos. ¿Cómo me comprueba cuánto gasté?*

En el planteamiento de lo anterior, Jackobson desarrolla un reemplazo de los valores que le dimos (4 y 15 minutos respectivamente), en consecuencia y como resultado de la confusión para la explicación, planteó la otra expresión que sustenta bajo los gastos:

a) 

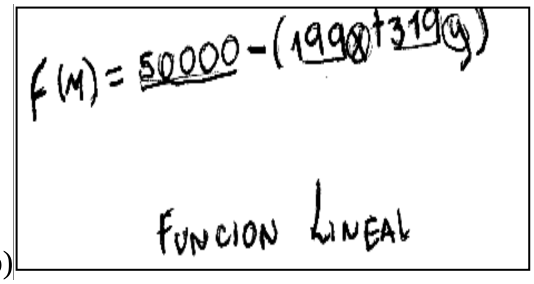
b) 

Ilustración 28. **a) Reemplazo de valores para una posible validación b) Planteamiento de una nueva expresión**

Jackobson, dice que la expresión o función que propone no le produce los gastos, sino el dinero que queda, para apoyar esta afirmación, presentamos el siguiente diálogo:

01.	Jackobson:	*Entonces ya no le darían los gastos, sino lo que le queda y así era como la tenía. 50.000 menos 119(x) + 319 (y)*
02.	Investigadora:	*Podría ser. Esas ya serían las restricciones. Pero si yo tengo una expresión que me diga, esto me gasté y esto me falta, es diferente a decir que este es menor o igual que esto, no tiene que ser este valor exacto sino todos los valores menores que 50.000, por ejemplo.*
03.	Jackobson:	*Entonces tiene que ser f(M) igual… entonces estaríamos calculando lo que le queda… le daría ese cálculo*
04.	Investigadora:	*Podría ser, uno podría calcular esas dos cosas ¿Cuánto gastó y cuánto le queda de recargo?*
05.	Jackobson:	*50.000 menos 199(x) más 319(y)*

Desde esta categoría de las relaciones funcionales, podemos reconocer elementos más sofisticados en el planteamiento de expresiones que calculan aspectos como lo son costos o gastos y los saldos, identificándolos como fundamentos de la economía personal y familiar, bajo los contextos reales de cercanía y significado auténtico para los estudiantes. Visualizado de esta manera, Jackobson presenta un mayor manejo de la simbolización y de modelos de representación, con respecto a la utilización de un lenguaje algebraico más formal, manifestando una noción más definida sobre la *letra* asumida como variable en el contexto de lo variacional o funcional, presenta un proceso de construcción algebraica, identificado elementos descriptivos de la noción de “rango” dentro de un conjunto de valores que determinada variable puede tomar, resaltando la coherencia de los intervalos con el análisis de la situación real. Bajo esta significación, Küchemann (1978 citado en Rojas et al. 2002) define: "Letra como variable. La letra representa un rango de valores y el muchacho es capaz de describir el grado con el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro". (p. 26)

La construcción del pensamiento variacional requiere de los estudiantes una preparación de los procesos aritméticos y algebraicos desde los primeros años de escolaridad, preparación que debe ser apropiada según la madurez tanto cronológica como mental de los estudiantes y que, si se orienta desde sus experiencias cotidianas como ejemplo de variabilidad, puede adquirir un significado en correspondencia entre lo real y lo matemático. Desde esta idea de pensamiento variacional, el MEN (2004) afirma:

> Se plantea que en la vida práctica y el mundo científico, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía. […] se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigieran reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas. (p.14)

5.1.3 El surgimiento de las relaciones entre variables en la delimitación del contexto

Al abordar las relaciones entre *"variables"* y *"constantes"*, como nociones primordiales para asumir la tarea de dar respuesta a la pregunta inicial sobre la conveniencia o no de la utilización del Sistema de Transporte Metro de Medellín, y por ser uno de los momentos esenciales en el proceso de modelación, cuando se pasa de la simplificación a la matematización, presentamos a continuación la manera cómo se condujo el proceso para la elaboración de los argumentos matemáticos que se complementa con los argumentos intuitivos y los análisis circunstanciales.

En la propuesta de qué tan conveniente o no es el sistema de transporte Metro para ellos y para la ciudad, los estudiantes nombraron diferentes elementos (cuantitativos) que intervienen en esta respuesta, tales como: el lugar con relación a la distancia, el precio del pasaje, el tiempo, la capacidad, el gasto de combustible, economía, número de paradas, frecuencia de abordar el Metro y velocidad. Además sustentaron que para analizar ésta conveniencia era necesario comparar el sistema de transporte Metro con otros, entre los más usuales están: el bus urbano, el transporte particular y el taxi. En la misma línea, dialogan sobre otros aspectos que intervienen en la decisión, discuten el número de rutas que se debe abordar en el bus urbano y en el Metro, la frecuencia con que se debe abordar y el precio o gastos que se producen, observando la frecuencia y el número de rutas. Al respecto los participantes dicen:

01.	Wilhelm:	*[…] bueno en Metro con un solo pasaje llegaría, pero en bus…tocaría pagar dos*
02.	Jackobson:	*Por ejemplo yo necesito dos rutas para llegar a la UPB, a las capacitaciones, y en Metro solo una.*
03.	Investigadora:	*Entonces eso sería un aspecto para analizar, cierto… si tomo varios transportes para llegar y el Metro que posibilidad me da, sería uno de los aspectos…*
04.	Jackobson:	*Para llegar por ejemplo a Juan XXIII, rutas tiene que coger como tres y en el Metro solo un pasaje y ya.*
05.	Investigadora:	*Entonces hablamos de rutas y pasajes y los pasajes nos generan ¿qué?*
06.	Jackobson:	*Gastos*
07.	Investigadora:	*Y depende del número de pasajes…cómo lo podríamos analizar…*
08.	Wilhelm:	*Los pasajes serían como una variable, otra cosa que podría ser la frecuencia con la cual usted va a utilizar los medios de transporte, ya sea el Metro o el bus*
09.	Investigadora:	*O sea que eso también influye, la frecuencia con la que usted toma el transporte y…*
10.	Wilhelm:	*Entonces, el valor del pasaje semanal depende de la frecuencia con la que usted lo use…*

11.	Jackobson:	*Por ejemplo si yo tengo la cívica y tengo el pasaje estudiantil de la alcaldía, que es como $700, y ese me lleva hasta la UPB y necesito ir y no tuviera la cívica, serían dos pasajes, no me iría en Metro, tendría que coger dos rutas de bus, serian $2800 a comparación de ida y de venida, $5600, en cambio si me voy en Metro.*
12.	Wilhelm:	*¿Usted cada cuánto va?*
13.	Jackobson:	*Tres veces a la semana*
14.	Wilhelm:	*O sea que lo que usted se va a gastar en pasajes depende del número de veces que valla…*

En el anterior episodio, los estudiantes retoman aspectos muy importantes al momento de analizar por qué una persona que debe transportarse o va a decidir en qué medio de transporte es más conveniente. Surge la necesidad de hacer correlaciones de dependencia y de proporcionalidad sustentadas inicialmente con cifras calculadas desde su experiencia, como base de las justificaciones a las respuestas o propuestas que surjan en la discusión. En palabras de Camarena (2009), desde el proceso de modelación, uno de los primeros pasos, es establecer variables y constantes, además de las relaciones que surgen entre ellas mediante los conceptos explícitos o implícitos a nivel matemático o de otra área, evidenciados en el contexto que se aborda. Como se analizó en apartados anteriores, los estudiantes comienzan estableciendo las variables y las relaciones que se observan entre ellas desde el contexto particular.

Al encontrarse con todas estas variables o elementos que influenciaban en la elección de conveniencia o no, los participantes realizaron preguntas como: Lo conveniente, tiene que ver con lo ¿económico? ¿Con el tiempo que me demoro? ¿Con la comodidad? Atendiendo a estas preguntas y a otras, llegamos a un consenso y propusieron elegir las de más relevancia en términos numéricos o matemáticos, respondiendo a la pregunta: *¿Qué aspectos podrían sustentar matemáticamente qué tan conveniente es el sistema de transporte Metro para tí y para la ciudad?* Citamos algunas de las respuestas:


→ Comparar pasajes de bus y metro, bajo tres puntos fijos y promediar, para 5 usuarios.

Ilustración 29. **Respuesta de Jackobson**


pasajes - bus
- metro
- particular
- taxi
distancias-
paradas
condiciones → tiempo

Ilustración 30. **Respuesta de Galvis**

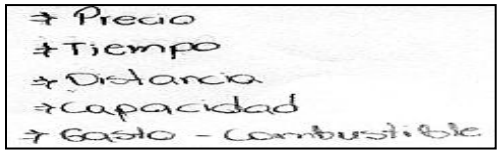

→ Precio
→ Tiempo
→ Distancia
→ Capacidad
→ Gasto - combustible

Ilustración 31. **Respuesta de Alex**

Podemos resaltar la importancia que los participantes le dan a las variables de distancia, tiempo y el precio, como variables que a lo largo de la historia también han intervenido en los fenómenos que dieron pie al establecimiento de modelos matemáticos y estadísticos que son base de diversas teorías. Además, de las anteriores condiciones, los estudiantes analizan aspectos de la cotidianidad (cualitativos), como: trancones, horas "pico", si se tiene que llegar al trabajo en un tiempo reducido, el número de paquetes o maletas que no son permitidos en el Metro y en otro transporte no son restringida, la conveniencia de analizar a tres, a cuatro o a cinco usuarios con diversas condiciones (integrado, sencillo, por ejemplo). Además reevalúan el por qué se tomarían tres distancias, según la propuesta de Jackobson, ante ésta propuesta él sustenta que: "*se debe promediar para ser más objetivos"* entendiendo que al tomar una sola distancia, se parcializaría la respuesta y no se podría generalizar. Bajo estos puntos de vista, para decidir las distancias que se tomarán como referencia, surge un análisis con relación a los precios, Wilheln dice: *"Si vamos a comparar precios, tiene que escoger puntos diferentes, ¿cómo vamos a comparar precios escogiendo un sólo punto?"* Idea que todos comparten y apoyan en la discusión. En consecuencia para la selección de variables en el proceso de modelación, los estudiantes deben contemplar muchas de las influencias que se dan en un suceso cotidiano, en palabras de Blum et al. (2007) los datos verdaderos se recogen para proporcionar más información en la situación del interés. Estos datos sugieren con frecuencia el tipo de modelo matemático que sea apropiado abordar el problema del mundo real especificado.

Después de los diálogos, deciden tomar los siguientes aspectos o variables fundamentales para analizar la conveniencia del Metro:

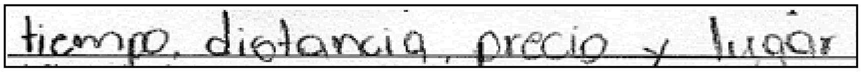


***Ilustración 32.* Consenso sobre las variables para tomar los datos**

Para continuar con el planteamiento de la estrategia a seguir para dar respuesta a la pregunta inicial, con relación a los gastos, como punto de análisis de la conveniencia o no del Metro en comparación con cada medio de transporte, procedemos a organizarnos para tomar los datos y establecer las condiciones o patrones generales que tomaremos en cuenta.

Con relación a las distancias, estaba claro que se debían tomar tres puntos de referencia diferentes. En este sentido, Jackobson plantea una hipótesis a priori:

Yo creo que la deducción lógica es que desde que sea mayor distancia va a ser más favorable el Metro, va a ser más conveniente, pero pongamos un ejemplo, si es antes de la estación hospital va a ser más conveniente el bus, entonces la distancia es la que va a influir ahí.(Jackobson)

Es importante especificar que uno de los factores que influenciaron en la elección de las distancias, fue la posibilidad de que en los próximos días algunos de ellos debían que ir a esos sitios por motivos personales y que la estación de referencia (Acevedo) es la de mayor cercanía para todos, por estar ubicada en los alrededores de sus viviendas. Además, se distribuyeron para la recolección de los datos, en el Metro y en el bus de manera directa, y los datos del taxi, se preguntaría a un taxista conocido por una de las participantes, ya que económicamente no era viable hacer el recorrido de las tres distancias.

Otros de los acuerdos a los que llegamos para tomar los datos, fueron: que el tiempo se tomaría desde que las puertas del Metro se cierren en la estación Acevedo y se termina cuando se abran las puertas de las estaciones seleccionadas, si es el caso de tomar una ruta integrada, se tomaría el tiempo desde que se aborda el bus hasta que se baja de él, luego se suman los tiempos que se empleó en el Metro y en el transporte integrado. Y que se retomaría la capacidad de cada vehículo como elemento de comparación, definiendo la capacidad como el número de personas sentadas en cada una de las modalidades, y la distancia como el recorrido entre el punto de referencia y las estaciones de comparación.

Identificaron por letras las estaciones, la "A" corresponde a la estación Acevedo, la "E" es la representación de la estación Estadio, la "U" identifica la estación Universidad y la "I" es la estación de Itagüí. Las distancias fueron consultadas en informaciones proporcionadas por Metro, la del bus y el taxi se tomaron por conductores que las calcularon según su experiencia.

Al estudiar los precios, definieron tres tarifas con respecto al Metro tiquete sencillo para un caso ($1.550), el precio del pasaje como estudiante, empleando la cívica ($1.150) y el precio del integrado (1.900 y 1950 para la estación Itagüí) y propusieron la tabla que se presenta en la Ilustración 14. Organización de datos. Alex., citada en el capítulo anterior.

En la toma de los datos, los estudiantes identificaron los elementos que podríamos considerar *"variables"* y *"constantes"*, teniendo mayor claridad en su asignación al momento de seleccionarlas, por haber abordado tareas similares anteriormente[27]. Escriben lo siguiente:


Ctes = capacidad distancia M. bus, Precio M.b
Vbles = Tiempo distancia tx, Precio Tx

***Ilustración 33.* Constantes y variables para Lindsay (producción escrita)**

[27] La forma de construcción de las nociones de constante y variable se mostró y desarrolló en análisis anteriores. En este aparte, sólo se nombra las variables y constantes que seleccionan de la situación planteada.

Ilustración 34. **Constantes y variables para Andrey (producción escrita)**

Coinciden en la selección de las variables, es importante cómo el taxi representa, de los tres vehículos el que más variabilidad puede tener, con relación a las distancias, es decir que el Metro presenta más constancia en cuanto a distancias y a los precios con relación al taxi.

El álgebra desde sus diferentes niveles, permite los procesos de enseñanza y de aprendizaje, la utilización de la retórica, la simbolización y la abstracción como algunos de los puentes entre los problemas o fenómenos cotidianos y los aprendizajes matemáticos. En este proceso de correlación, el estudiante asume la tarea de mirar la autenticidad de las situaciones que estudia desde sus conocimientos previos y los que puede descubrir en el camino a la solución de diferentes situaciones, permitiendo de esta forma establecer relaciones entre los hechos auténticos y los argumentos matemáticos. En este sentido, Pollak (2007) dice que los estudiantes tienen que tomar las situaciones para sí mismos y comenzar a crear los modelos de esas situaciones, toman decisiones de lo que creen tiene que tomar y de lo que puede omitir, y cómo van a probar si lo que se propusieron tuvo éxito realmente.

En los episodios analizados en el capítulo cuatro, las relaciones entre “variables” y “constantes” no se presentaron de forma algebraica, sus asociaciones fueron contextuales, por tal motivo, se plantearon otras actividades que dieran cuenta de algunas propuestas que se evidenciaran en lo algebraico, a continuación presentamos algunas propuestas (modelos) que surgen como conclusión al analizar el siguiente enunciado: *“El Tiquete representa un ahorro para la familia de $186.000 por año en el valor total de la tarifa que el estudiante debe pagar para sus desplazamientos en bus,* *buseta o microbús públicos. Así, las familias de los estudiantes beneficiados ahorran de 45% a 52% del costo del transporte escolar, lo cual les permite mejorar su calidad de vida".* ¿Cómo podrías interpretar los datos que allí aparecen?, ¿qué estrategia utilizarías para calcular el ahorro?, ¿cómo realizaron esos cálculos?[28]

5.2 Surgimiento del modelo

Al abordar la problemática desde los diferentes transportes y al dar respuesta a la pregunta sobre la conveniencia o no del Metro para ellos como ciudadanos activos de la Ciudad de Medellín, quisimos solicitar a los estudiantes, teniendo en cuenta las preguntas anteriores, una justificación matemática o mediante un modelo, sobre qué tan válidos resultaba para ellos como usuarios del tiquete estudiantil.

Para establecer las razones que apoyarían su respuesta (modelo matemático), el trabajo previo desarrollado a lo largo de la investigación fue clave para la selección de variables y aspectos que influenciaban la situación. En consecuencia, para que los estudiantes construyan un modelo matemático que apoye los argumentos intuitivos y de carácter social, fue necesario el trabajo de exploración y conocimiento del contexto ya realizado, además de la reelaboración de algunas nociones que desde teórico se vuelven complejas. En palabras de Villa-Ochoa (2007):

> La construcción de un modelo no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las "cantidades", de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático. (p. 67)

Bajo esta mirada, los estudiantes a través del estudio pudieron establecer relaciones directas con el contexto, y mediante las diversas discusiones se enfrentaron a la identificación de variables, dentro de unas relaciones que si bien surgían de la

---

[28] La actividad propone una tabla de datos proporcionada por la página Web del Metro de Medellín. Ver anexo 8. Guía Cuatro

situación auténtica, fueron la base de sus interpretaciones y argumentos a nivel matemático.

Antes de establecer los episodios claves para dar respuesta a este nuevo reto, es preciso presentar algunas construcciones intuitivas de modelos verbales y no tan formales, es decir, formulaciones desde lo retórico sin una estructura algebraica definida, que se evidenciaron a lo largo del trabajo con los estudiantes.

En la entrevista final se discutió sobre otro contexto: "La cuenta de servicios públicos" y se le preguntó a los estudiantes sobre la forma de calcular los cobros que nos llegan en la factura, en el siguiente episodio, podemos detectar la propuesta de un modelo estructurado a nivel verbal:

01.	Investigadora:	*Entonces repito la pregunta, de todos esos datos ¿cuáles seleccionarían para calcular lo que nos van a cobrar?*
02.	Alex:	*Categoría, subcategoría que es el estrato, plan normal residencial y el consumo y aquí dice el total de días*
03.	Investigadora:	*Entonces como lo haría.*
04.	Alex:	*El valor de cada kilowat sería el estrato, el plan que tiene y la categoría, entonces ese valor se daría como por kilowat pues entonces ya multiplicaría eso por la cantidad de días y me daría el consumo*
05.	Investigadora:	*Y ¿ahí te daría lo que te facturan y ustedes?*
06.	Marulanda:	*El consumo por el precio*
07.	Andrey:	*Multiplicado por el estrato*
08.	Alex:	*La cantidad de días de consumo y el consumo. Primero el consumo por el costo y lo que me de…*
09.	Investigadora:	*Y eso se podría hacer igual con la cuenta de ellos, y con la cuenta de ellos*
10.	Alex:	*Si porque aquí cambia la categoría y especifican acá a quien. El estrato que es dos, si es tres.*
11.	Investigadora:	*Pero sería lo mismo número de días por…*
12.	Alex:	*Si consumo por el valor de cada kilowat por días.*

13.	Investigadora:	*Ustedes están de acuerdo con lo que él dice que para calcular la facturación que hace se multiplica el consumo por el precio.*
14.	Alex:	*El valor del consumo por cada unidad y se multiplica por el consumo. Y esas dos cosas va a dar un total y ese total se multiplica por los días…*
15.	Jorge:	*Y esto ¿qué tiene que ver?*
16.	Alex:	*El estrato y el plan no sé que eso tiene que ver, influye en el consumo por unidad. Por ejemplo a usted le dice vale 1000 el watt entonces esos 1000 van a estar influenciados por el wat. sí sería estrato 5 sería que 1900*

En las exposiciones, los estudiantes intentan estructurar una manera de traducir un valor facturado, como el producto de *"variables"* y *"constantes"*, bajo las condiciones que se establecen en la situación particular (agua, gas, energía, internet, comunicaciones, entre otros). Esta traducción que realizaron en la última entrevista, se desarrolló de una manera fluida, apoyados en la situación que plantearon sobre el Metro, en espacios de trabajo realizados con anterioridad.

En continuidad con el análisis sobre la construcción de un modelo matemático en términos del ahorro de los estudiantes al emplear el tiquete estudiantil, destacamos algunos procedimientos que se describieron por medio de palabras y que más adelante lo redujeron a dos modelos. En las siguientes muestras de las producciones escritas, identificamos algunas formas expresar con palabras los procedimientos empleados para completar la tabla con respecto a los ahorros y los demás valores. En la imagen se especifica la actividad:

"Durante el 2009, el Programa del Tiquete Estudiantil significó un ahorro mensual de 25 mil 164 pesos a cada estudiante que se movilizó en bus o buseta, ya que el tiquete cubrió el 50% del valor de la tarifa. En total durante el año, el Tiquete le ahorró 3 mil 919 millones de pesos a los usuarios de este tipo de transporte.

Estas personas se suman a las 9 mil 813 que se beneficiaron con el transporte del Metro. El ahorro para éstas fue de 35 mil 400 pesos mensuales, considerando una tarifa preferencial de $710 frente a $1.300 de un usuario con perfil frecuente".

Beneficiarios	BUS	METRO
# días escolares año	186	186
Valor pasaje (2)	2,800	2,800
Valor pasajes año	520,800	520,800
Valor pasaje con tiquete Trans. Estu. (2)	$ 1.400	$ 1.470
Valor pasajes año con tiquete	260,400	273,420
Ahorro	260,400	247,380
Ahorro %	50%	47,5%

$\frac{247380 \times}{520,800}$

¿Qué estrategia utilizarías para calcular el ahorro?, Describe una forma que permita calcular los valores de la tabla.

Ilustración 35. **Tabla sobre los datos que les permitió hallar los porcentajes de ahorro.**

En el intento de describir los procedimientos, los estudiantes emplearon en sus discursos las operaciones básicas y otras nociones como regla de tres, porcentajes, entre otros, que demuestran que la solución de una determinada situación, ellos necesariamente deben hacer uso de otros conceptos ya incorporados a nivel matemático y que son evidencia de una aplicación con sentido y con significado dentro del contexto real. Doorman y Gravemeijer (2009) sustentan que el estudiante debe desarrollar en el proceso de modelación el conocimiento y la comprensión matemática, ambas en relación, permitiendo que el modelo tenga sentido tanto en la situación real como en el cambio de significado (de lo matemático a lo real).

A continuación se evidencian algunas formas de describir los procesos que desarrollaron en la actividad:

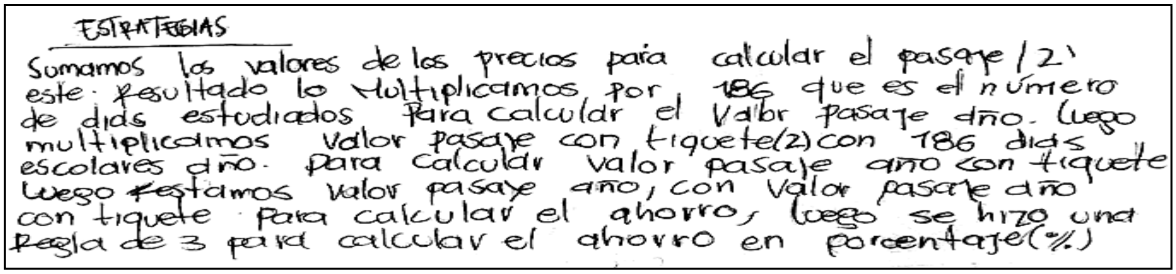

ESTRATEGIAS
Sumamos los valores de los precios para calcular el pasaje /2'
este resultado lo multiplicamos por 186 que es el número
de dias estudiados para calcular el valor pasaje año. Luego
multiplicamos valor pasaje con tiquete(2) con 186 dias
escolares año. para calcular valor pasaje año con tiquete
Luego restamos valor pasaje año, con valor pasaje año
con tiquete para calcular el ahorro, luego se hizo una
regla de 3 para calcular el ahorro en porcentaje(%)

Ilustración 36. **Producción escrita de Lindsay.**

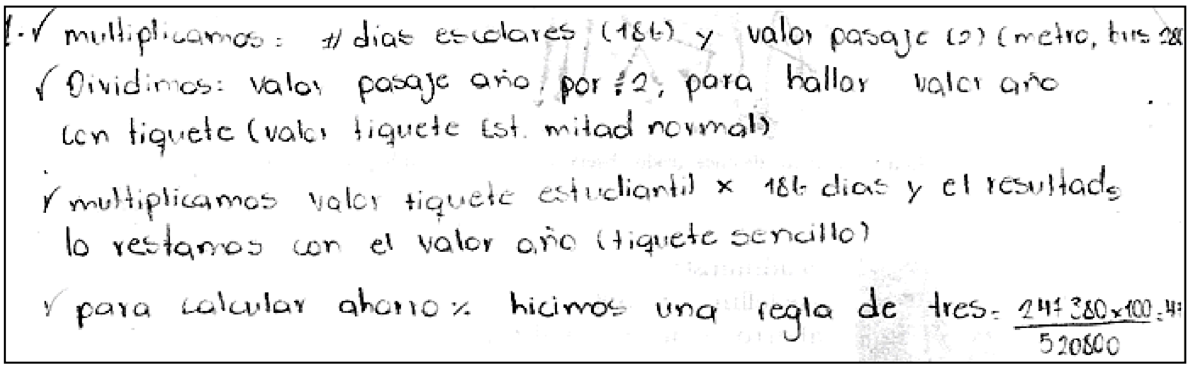

1.√ multiplicamos: # dias escolares (186) y valor pasaje (2) (metro, bus 2(8
√ Dividimos: valor pasaje año, por ÷2, para hallar valor año
con tiquete (valor tiquete est. mitad normal)
√ multiplicamos valor tiquete estudiantil × 186 dias y el resultado
lo restamos con el valor año (tiquete sencillo)
√ para calcular ahorro % hicimos una regla de tres: $\frac{247380 \times 100}{520800}$ = 4

Ilustración 37. **Producción escrita de Alex**

Doorman y Gravemeijer (2009), afirman que para el planteamiento de un modelo matemático se debe tener en cuenta en primer lugar, que los estudiantes implicados en el modelado de los problemas del contexto, propongan estrategias de la situación específica, posibles de modelar de una manera informal. Debemos destacar la relevancia de los procesos de solución autónomos, ya que son base para las propuestas y los aportes de forma grupal, es decir la reconstrucción y las estrategias que cada persona plantee de un determinado problema son esenciales a la hora de detectar diversos estilos o formas de pensamiento tanto individual como de grupal, dando a los modelos o razonamientos matemáticos, sentido a los procesos y nociones matemáticas que emergen en la solución.

En palabras de Blum (1993), en ocasiones diversos modelos se pueden construir de la misma situación. Bajo esta premisa, los estudiantes en su intento de dar respuestas a las preguntas de sustentar la propuesta del Municipio de Medellín, plantearon dos modelos surgidos de la misma situación.

1. Este modelo fue desarrollado por cinco de los estudiantes de forma conjunta, guiados por Sandro. Hacen relevancia a la identificación de variables y las relacionan por medio de operaciones básicas, que dan cuenta del ahorro que realizaría una persona empleando el tiquete estudiantil o el bus.

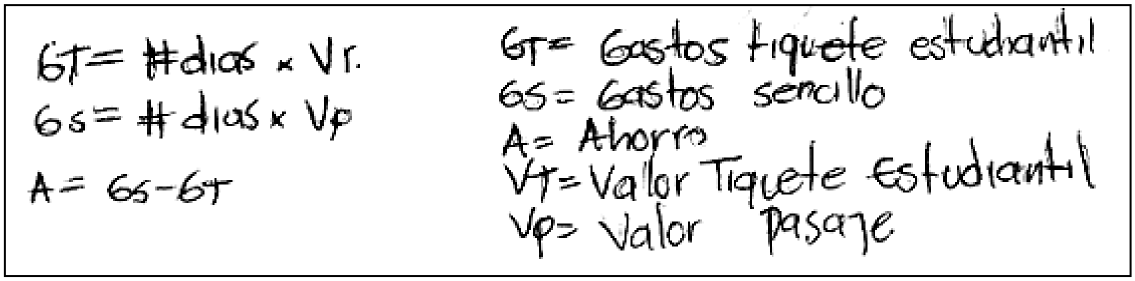


***Ilustración 38.* Producción escrita por Lindsay (Se escogió uno de ellos por su nitidez, pero los demás tienen el mismo modelo).**

Como podemos ver en el modelo que plantean (Sandro, Lindsay, Alex, Andrey y Jhony), los estudiantes aplican elementos básicos multiplicativos y los relacionan por medio de una diferencia, especificando que el ahorro está dado por la diferencia entre los gastos mirados desde las dos tarifas que se especifican en la actividad. Durante la socialización que se realizó de modelo que cada equipo propuso, se presentó una reevaluación del modelo inicial, aclarándose que un viaje equivale a dos tiquetes (ida y vuelta). Blum, Leiss, Schukajlow, Messner y Pekrun (2010) sustentan que cuando el modelo de la situación influencia el proceso de la solución, permite resaltar que las habilidades o capacidades matemáticas desempeñan un papel importante en el modelado, pero no lo hacen más que las habilidades de lectura matemáticas que demuestran los estudiantes.

Los estudiantes, al reevaluar la condición de la equivalencia de un viaje en la estructura que proponen, re-organizaron el modelo de la siguiente forma:

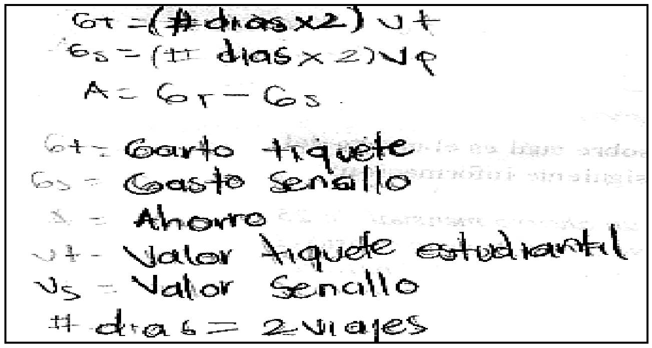

Gt =(#dias x2) vt
Gs = (# dias x 2) Vp
A = Gt − Gs .
Gt = Garto tiquete
Gs = Gasto Senallo
A = Ahorro
vt - Valor tiquete estudiantil
Vs = Valor Senallo
# dias = 2 viajes

Ilustración 39. **Modelo reevaluado del anterior**

Durante el proceso de construcción del modelo, los estudiantes reflexionaron sobre los elementos que interfieren en la propuesta realizada, teniendo la posibilidad de reajustar las relaciones a las circunstancias reales, en este caso la idea de que un viaje se debe considerar como dos, ya que la persona que lo toma de ida, debe devolverse en condiciones ideales, bajo la misma modalidad de transporte. El ocuparse de tales problemas requiere de los individuos construir, probar, y aplicar los modelos matemáticos diseñados para contestar a cuestiones de importancia en ajustes del mundo real (Blum et al. 2007). Desde estos cambios que ofrece el entorno, estamos posibilitando la re-significación del modelo desde la perspectiva del modelado realístico, como un proceso informal que da la opción de modificar relaciones matemáticas dependiendo de la situación particular. El modelado en esta visión es un proceso de reorganizar actividades y situaciones, esta situación viene ser estructurada en términos de conceptos y relaciones matemáticos Doorman y Gravemeijer (2009).

2. El siguiente modelo, fue planteado por Jackobson, quien propone una idea similar, emplendo otros letras para nombrar las variables que intervienen en el esquema matemático. Además de socializar el modelo que nos permite conocer el ahorro, desarrolla un modelo derivado, el cual permitirá representar la cantidad de dinero ahorrado como un porcentaje.

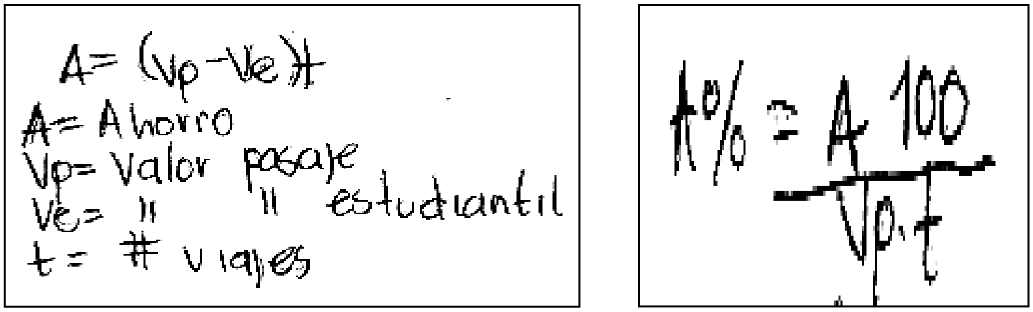


Ilustración 40. **Modelos propuestos por Jackobson.**

En el modelo que Jackobson, podemos detectar un análisis general en términos algebraicos de la situación, precisando que el el número de viajes, presenta la misma condición del modelo anterior (el número de viajes equivale a dos tiquetes o pasajes). Identifica con claridad los elementos que *tienden al cambio* o son constantes dentro de la relación matemática que formuló, de igual manera que las variables, aspectos que son evidenciados cuando expresa el ahorro (A$=$ $\left(V_p - V_e\right)t$) como una función.

Los estudiantes al tener dos formas de averiguar los datos de la tabla, deciden dar un valor cualquiera desde los dos esquemas, verificando de esta forma la validez de ambos o al contrario, una posible equivocación. En las siguientes producciones escritas muestran que le dan el valor al número de viajes (variable) de cinco viajes, es decir 10 (representando ida y vuelta) y proceden así:

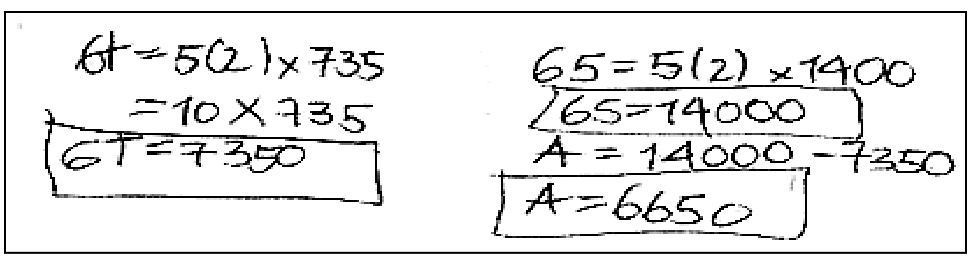


Ilustración 41. **Verificación desde el primer modelo.**

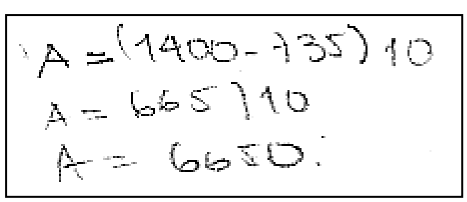


Ilustración 42. **Verificación desde el segundo modelo.**

Podemos constatar en los anteriores procesos, que pueden utilizar los dos modelos y se obtendrán los mismos resultados, en consecuencia deciden adoptar el modelo de Jackobson para encontrar los valores de la tabla. De esta forma consideramos el contexto y la apropiación que tienen los estudiantes de él, que facilita la comprensión del modelo matemático planteado desde ambas estructuras, los contextos conocidos por los estudiantes les ayuda a entender el problema a nivel intra-matemático resultante (Blum et al. 2010).

Desde este modelo proceden a establecer los valores, dándosen los siguientes resultados:

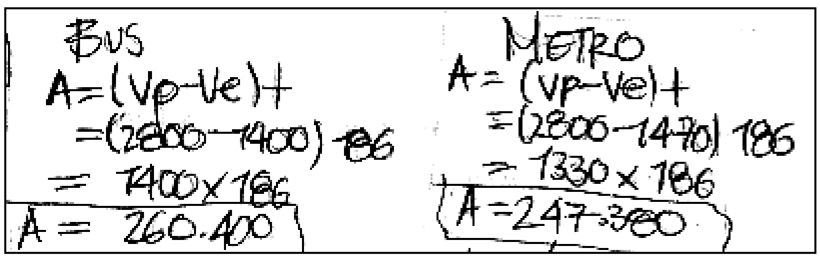


***Ilustración 43*. Procedimientos para calcular el ahorro.**

Desde estos procedimientos se sustentan los resultados mostrados en la Ilustración 35. Tabla sobre los datos que les permitió hallar los porcentajes de ahorro. En la interpretacion de los datos llegan a la conclusión de que el ahorro es mayor empleando el tiquete estudiantil al abordar el bus, el cual aquivale a un 50% y tiene una diferencia con el Metro de 2.5%. Sustentan esta conclusión, empleando los siguientes procedimientos:

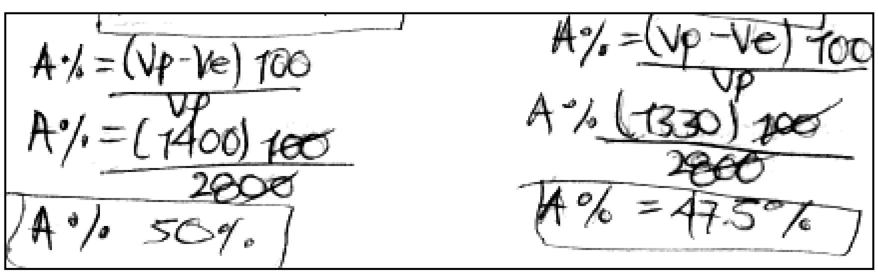


***Ilustración 44.* El ahorro expresado en porcentaje (Lindsay).**

Estos resultados, también fueron expresados por Jackobson de forma gráfica. Las diversas representaciones que los estudiantes hagan de una situación, suelen ser formas de comprender o argumentar los procesos formales y simbólicos de otros que se describen en términos narrativos o retóricos. Según Kaput (1989, citado en Swafford y Langrall, 2000), las representaciones son medios con los cuales los individuos organizan y dan sentido a las situaciones. Desde esta interpretación, podemos destacar los procesos simbólicos que se desarrollaron en esta última actividad, atravesaron por los momentos de verbalización hasta llegar a los procesos de algebrización o formalización de modelos particulares surgidos de contextos cotidianos. El carácter del proceso por el cual los modelos emergen dentro de la educación realista de las matemáticas, y al proceso por el cual estos modelos apoyan la aparición de maneras matemáticas formales de saber, es una característica de la modelación informal Doorman y Gravemeijer (2009). Desde esta mirada, las representaciones elaboradas por Jackobson, son muestra de las formas en que concibe la situación y justifica sus razonamientos retóricos a nivel matemático.

En la siguiente ilustración se muestran las gráficas respectivas:

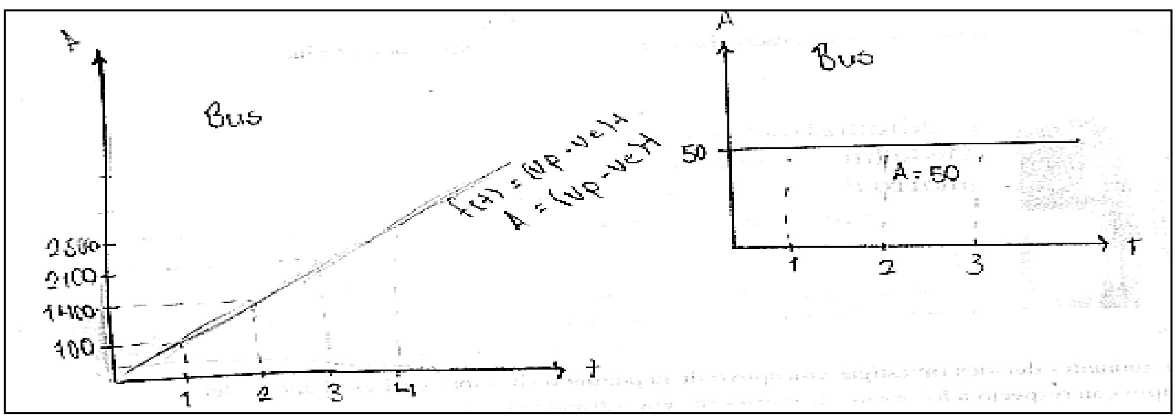


Ilustración 45. **Gráfica de ahorro con relación al número de viajes, empleando el tiquete y el bus (dinero y porcentaje).**

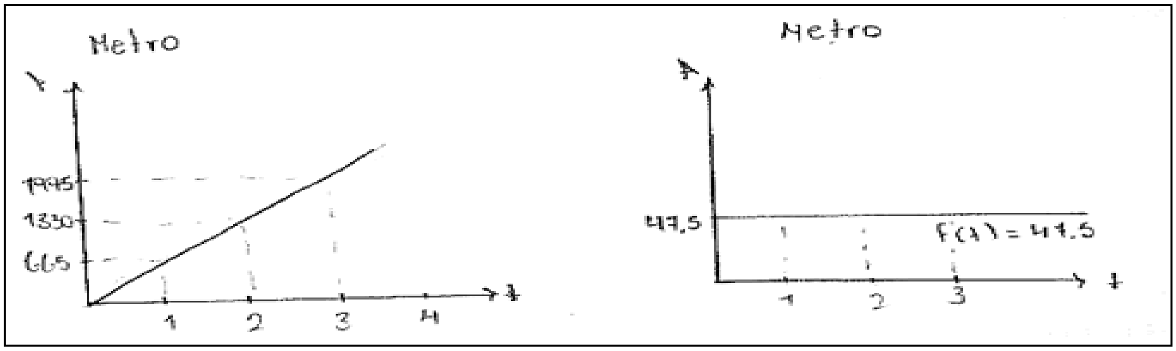


Ilustración 46. **Gráfica de ahorro con relación al número de viajes, empleando el tiquete y el Metro (dinero y porcentaje).**

En los análisis que realizan de las gráficas, plantean la función “A” del ahorro con relación al número de viajes, al respecto Jackobson expresa:

01.	*Investigadora:*	*¿Qué gráficas estás haciendo ahí?*
02.	*Jackobson:*	*Como podemos ver es la gráfica en cuanto al bus y es el ahorro de un pasajero, de acuerdo al número de veces que viaja*
03.	*Investigadora:*	*¿Están de acuerdo?*
04.	*Andrey:*	*Que viajan con el tiquete*
05.	*Investigadora:*	*¿Cuánto ahorran en cuatro viajes?*
06.	*Andrey:*	*2800 pesos*
07.	*Jackobson:*	*Entonces esta función está definida por f(t) igual al valor frecuente, que es una constante, 1400 pesos, menos el valor que le cuesta al estudiante, que también es una constante, por t que es la variable en este caso.*
08.	*Investigadora:*	*Y esta A ¿qué?*
09.	*Jackobson:*	*f(t) es A*

Al seguir socializando las gráficas realizadas, manifienta que el ahorro expresado en porcentaje es constante, dice: “Si hace un viaje ahora el 50%, si hace dos el 50%, y así sucesivamente, por eso es una función constante porque no involucra la variable” Jackobson presenta claridad en la identificación de las constantes y variables en el modelo funcional que propone. Además desarrolla un buen argumento desde diferentes representaciones (funcional, gráfica y descriptiva).

Resaltamos la importancia de la construcción que realizan del modelo, pasando por procesos de matematización y validación desde sus producciones individuales y grupales. En este sentido, podemos afirmar que el significado particular del modelo construido está estrechamente ligado con el contexto particular, dando autenticidad a la función que plantean, no sólo como la reproducción que se haría en un ejercicio tradicional, donde se propone a los estudiantes plantear la función teniendo como base la tabla de datos o la gráfica (puntos del plano cartesiano), sino que se motiva a los estudiantes a proponer estructuras matemáticas que son del orden de las formalizaciones, pero con el componenete de la comprensión y no de la reproducción. Blum (1993) destaca el cambio que se ha producido en la modelación, donde se presenta una tendencia a acentuar los procesos de traducción y construcción, no sólo el trabajo con los modeos ya confeccionados.

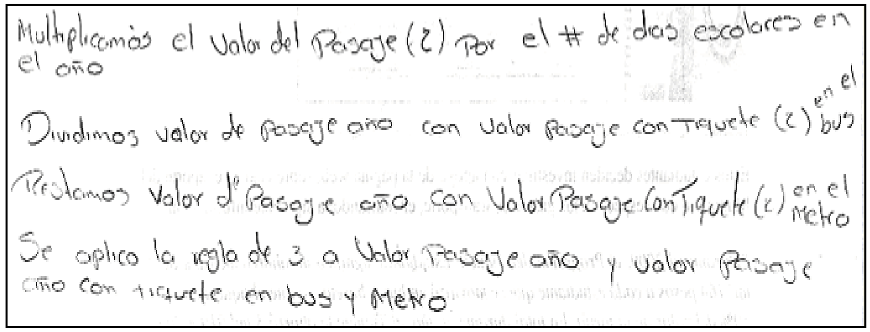
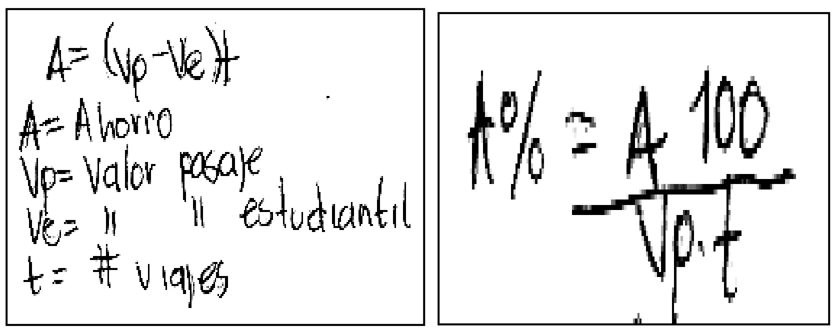
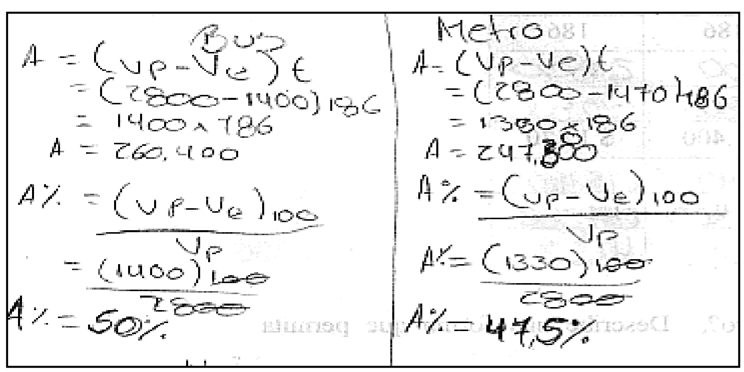
El surgimiento del modelo durante el proceso de modelación promueve la integración de saberes previos con nuevos saberes, que surgen como producto de la simplificación, matematización y validación realizada en el proceso. En este sentido, Blum et al. (2007) sustenta que la modelación es un vehículo para conectar los pedazos individuales del conocimiento matemático que emergen con un propósito y que se convierten en un conjunto que son más que la suma de piezas aisladas.

Desde esta perspectiva, resaltamos en Jackobson una capacidad de conectar los sucesos de la vida cotidiana, en particular los contextos estudiados en esta investigación, con los conceptos y nociones matemáticas elaboradas durante su proceso escolar. El modelado de situaciones auténticas que implican un cambio de estrategias constantes, por la variabilidad del entorno real, nos lleva a resaltar cómo la informalidad en la situación estudiada, se convierte en un aspecto que promueve la activación de conocimientos y cambios en los modelos que se plantean, en palabras de Doorman y Gravemeijer (2009), el modelado inesperado o emergente, en vez de intentar formar concretizar conocimiento matemático abstracto, intenta ayudar al estudiante a modelar su propia actividad matemática informal.

Quizás a nivel de modelos matemáticos, la función $f(x) = kx$ está definida desde los argumentos de la teoría funcional, pero en el proceso que desarrollamos desde contextos realísticos, esta expresión tomó un significado que se traduce en la función del ahorro ($f(A) = (V_p - V_e)t$) que cobra sentido desde el contexto que se está abornado. Es decir, la modelación en situaciones realísticas manifiesta características variacionales desde lo circunstancial y modos de asimilar la realidad. Tomando la modelación desde los procesos informales o realísticos, estamos aportanto a la re-significación de algunas nociones matemáticas que a través de los tiempos han sido problemáticas, Doorman y Gravemeijer (2009) sostienen que el modelado sirve no sólo como meta educacional sino también como medio para el apoyo de la reinvención de las matemáticas.

En general, podemos destacar en la construcción del modelo algunos elementos que se describen en el siguiente cuadro:

DESCRIPCION GENERAL	MANIFESTACION ESPECÍFICA
Presentación de la situación, desde el contexto del Metro. Análisis de un enunciado que posibilita en la vida cotidiana una decisión.	 Tomado de: http://www.medellin.gov.co/alcaldia/jsp/modulos/P_ciudad/tiqueteestudiantil.jsp?idPagina=861
Lectura y comprensión de la situación, identificando los	*Durante el 2009, el Programa de Tiquete Estudiantil significó un ahorro mensual de 25 mil 164 pesos a cada estudiante que se movilizó en bus o buseta, ya que el tiquete cubrió el 50% del valor de la tarifa. En total durante el año, el tiquete le ahorró 3 mil 919*

elementos que intervienen en el análisis. Revisión de la tabla.	*millones de pesos a los usuarios de este tipo de transporte.* *¿Qué estrategias utilizarías para calcular el ahorro? Describe una forma que permita calcular los valores de la tabla. (Ver anexo 8. Guía Cuatro)*
Simplificación y estructuración de los elementos matemáticos que pueden ajustarse al modelo que describe la situación real.	 ***Ilustración 47.*** **Estructuración realizada por Andrey.**
Manifestación de las diferentes nociones matemáticas implicadas en la construcción del modelo en forma relacionada. Matematización del modelo	 ***Ilustración 48.*** **Modelos adoptados en consenso.**
Utilización del modelo para la solución de la situación. Colocan en relación el contexto auténtico con el modelo.	 ***Ilustración 49.*** **Cálculo de los datos sobre el ahorro (Andrey).**
Confrontación de	Hay un ahorro correspondiente al 50% empleando el tiquete

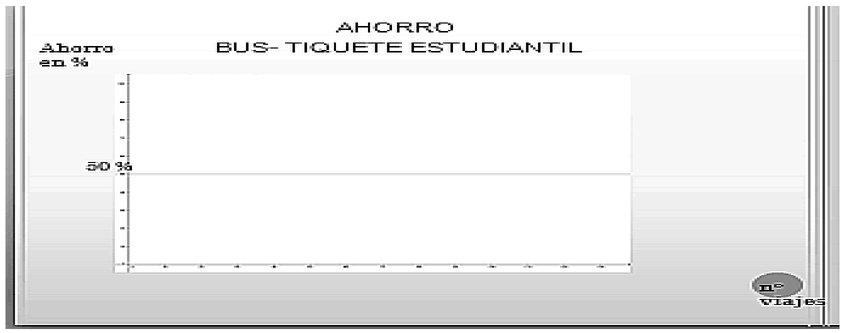
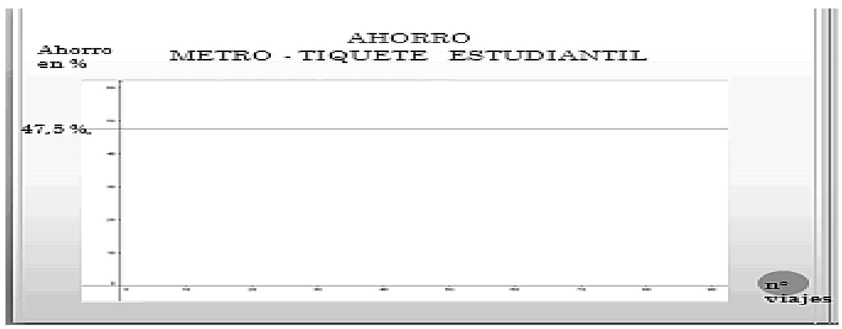
los procesos matemáticos y los proporcionados por el contexto del Metro.	estudiantil en el Bus y un 47.7% de ahorro al emplear el Metro con tiquete de estudiante. Lo comparan con el anuncio del Metro en la página web de que "*Así, las familias de los estudiantes beneficiados ahorran de 45% a 52% del costo del transporte escolar, lo cual les permite mejorar su calidad de vida".*
Terminación del proceso, mediante la exposició de sus argumentos a otras personas ajenas al proceso. Sustentación gráfica del ahorro expresando los porcentajes con relación al número de viajes (ida y vuelta) que puede tener una persona.	  ***Ilustración 50.*** **Diapositivas mostradas en la exposición, como producto final.**

Ilustración 51. **Descripción de la construcción del modelo.**

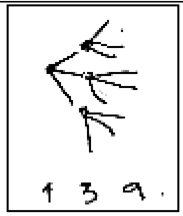
La anterior tabla nos resumen, los pasos que se evidenciaron en el proceso de modelación matemática desde contextos realísticos, identificando en él aspectos como las variables y constantes desde la formuación del modelo y su conexión con el contexto del Metro, en situaciones particulares.

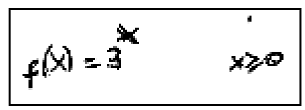
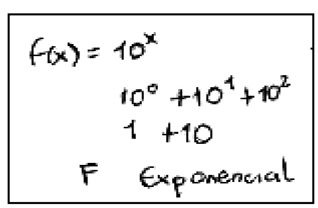
Aunque no es parte de nuestro estudio, queremos presentar algunos aspectos relevantes que surgieron en la realización de la última entrevista y que a lo largo del capítulo se retomaron para el análisis de las diferentes temáticas.

El acercamiento del estudiante a un escenario matemático, partiendo de una situación auténtica y cotidiana, permite que él construya un modelo que representa un sistema, desarrollando un trabajo sobre él, obteniendo así una solución que necesita ser confrontado con el sistema inicial. Una vez que se ha construido el modelo y se ha encontrado la solución, el sistema desaparece, el modelo se convierte en parte de la herencia matemática del estudiante y un comienza un nuevo proceso de modelado, que puede o no estar conectado con el anterior (García et al. 2006).

Desde esta perspectiva, expondremos a continuación el proceso que desarrolló Jackobson abordando el contexto de las cadenas de correos electrónicos en la última entrevista:

DESCRIPCION GENERAL	MANIFESTACIONESPECÍFICA
Presentación de la situación, sobre acciones sobre la cadena de correos, actividad a la que se enfrentan actualmente una mayoría de los estudiantes.	*Deseamos enviar un mensaje de alerta a todas las personas, a las que más podamos, y se decide enviar un correo en cadena, el cual establece que tú debes enviárselo a otras tres persona, o cuatro o cinco, según lo que usted quiera escribir en el correo ¿Cómo determinaría el número de personas a las que le ha llegado el mensaje?*
Comprensión de la situación, identificando los elementos que intervienen en el análisis.	*Jackobson: La primera persona se la pasa a tres, luego cada una de esas personas a otras tres y luego a otras tres…* *Wilhelm dice: A ver, porque la primera la envió a tres, esa es la condición y cada una de esas tres se la envía a otras tres y así sucesivamente. Eso no es como combinatoria…*

	 ***Ilustración 52.*** **Representación de la situación realizada por Jackobson.**
Identificación y asociación de la situación auténtica con la matemática	*Jackobson dice: Ahh eso es una progresión* *Jackobson dice: ¿Eso no sería una función exponencial?* *Jackobson dice: Ahí no sería una sumatoria de i cuando empiece en uno hasta… Entonces pongámosle por ejemplo a 50. Sumatoria de i=0 hasta 50 de 3i ¿cierto? Entonces la primera, tres a la cero, uno, que fue con la persona que empezamos, más tres a la uno, tres, que es a los que ha enviado eso, más tres a la dos, nueve, más tres a la tres, veintisiete, más tres a la cuatro, ochenta y uno, entonces sabemos que 2, 3, 4, 5, que al quinto, que cuando llegue a cinco, garantizamos de haber 120 personas…* $1+3+9+27+81 = 120$ ***Ilustración 53.*** **Sumatoria numérica propuesta por Jackobson.**
Simplificación y estructuración de los elementos matemáticos que pueden ajustarse al modelo que describe la situación real.	$\sum_{i=0}^{5} 3^i = 3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^5$ $1+3+9+27+81+243$ ***Ilustración 54.*** **Propuesta de un modelo**
Matematización y propuesta de un modelo que se ajuste al comportamiento de la situación	*Investigadora: ¿Qué expresión podría representarme esto?* *Jackobson dice: $f(x) = 3^x$ siendo x mayor o igual que cero. Esa sería la función. Que sería una función exponencial.*

auténtica.	*Investigadora: ¿por qué mayor o igual a cero? y ¿quién es x?* *Jackobson dice: x es el proceso como usted dijo, llamemos el proceso al primer proceso. No pero, entonces no daría.* *Investigadora: ¿El número de veces enviada? O ¿qué?* *Jackobson dice: Si, porque si empieza en cero, no hay veces enviadas tres a la cero, uno, lo tiene una persona, con una vez enviada tres a la uno, lo tienen, tres personas, pero no se van sumando…* *Investigadora: Pero, bueno… la expresión sería esa, ya el problema si me pide el total, ya sería la sumatoria…* *Jackobson dice: Si*  ***Ilustración 55.*** **Modelo propuesto por Jackobson.**
Utilización del modelo para la solución de la situación. Colocan en relación el contexto auténtico con el modelo.	*Investigadora: Pero la expresión sería esta. Si no fuera a 3 personas sino a 10, como son usualmente los correos.* *Jackobson dice:* $f(x) = 10^x$ *Investigadora: Siempre se podría expresar así…* *Jackobson dice: Si*  ***Ilustración 56.*** **Aplicación del modelo hecho por Jackobson.** *Jackobson dice: Uno, no lo ha enviado a nadie, entonces* 10^0 *es uno, porque nadie lo ha enviado. Solo lo tiene una persona y ella se la envió a 10, o sea a más* 10^1
Terminación del	*Investigadora: Si fuera por ejemplo cinco, mi condición es*

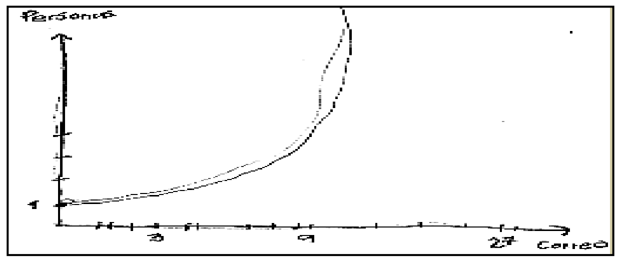
proceso, mediante la exposición del modelo propuesto. Esquematización por medio de una gráfica.	*envíesela a otras cinco.* *Jackobson: Entonces sería cinco a la x (5^x)* *Sandro: Así, ya le entendí. O sea que este 10 sería la condición que usted va a poner en el correo…* *Jackobson: O el número de personas fijas* *Sandro: Y x va a ser el número de veces que es enviada*  ***Ilustración 57.* Representación gráfica de la función exponencial propuesta por Jackobson**

***Ilustración 58.* Proceso desarrollado para obtener un modelo sobre las cadenas de correos electrónicos.**

A través del proceso de modelación matemática, los estudiantes y en particular Jackobson, desarrolló la idea de modelo bajo diferentes contextos auténticos. Planchart (2005) expresa que:

> Cuando se modelan situaciones reales u otras que se enmarcan en el proceso cognitivo de la adquisición del concepto de función, se provoca que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, analice y describa los siguientes elementos matemáticos: la significación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. En el proceso de simulación y de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre las variables, los cuales a su vez impulsa la construcción de otros registros de representación. (p. 2)

Desde la idea de construcción simbólica y partiendo de situaciones reales, Jackobson diferencia en las estructuras de los modelos, la forma en que se comporta matemáticamente (función lineal y exponencial). En este episodio, mostramos la identificación de diferencias entre una función lineal y otra exponencial.

01. Investigadora:	*¿Qué diferencia hay entre esta expresión y la que hicimos ahorita?*	
02. Jackobson:	*Que esta es exponencial y que la otra es lineal, aquí la variable está en el exponente y acá (lineal) está abajo.*	
03. Investigadora:	*En cuanto a los resultados, ¿qué diferencias hay?*	
04. Jackobson:	*Son más elevados, mucho más elevados, es más el crecimiento es mucho más rápido*	
05. Investigadora:	*De la exponencial… de la lineal…*	
06. Jackobson:	*No.*	
07. Investigadora:	*¿Cómo es el crecimiento de la lineal?*	
08. Jackobson:	*Según la pendiente, por decir para comparar* x^2 *o* 2^x *¿Cuál crece más?* 2^x	

Apoyando las conclusiones de otros estudios como: "La potencia del modelaje, mediante la regulación continua, deja en evidencia el progreso real de los estudiantes, generando un cambio significativo en las concepciones matemáticas en todos los aspectos" (Aravena y Caamaño, 2007, p. 23), podemos aportar entonces, que la relación que presentaron los estudiantes con las situaciones auténticas (Metro de Medellín, servicios público, planes de celulares y cadenas de correos por email), permitió hacer una aproximación espontánea (no de la forma tradicional, mediante la realización de ejercicios mecánicos, procedimientos memorísticos o problemas aislados de contextos reales) a las noción de variable y las relaciones que surgen entre ellas, evidenciadas por medio de las representaciones retórica o verbales, tabulares, gráficas y simbólica. En definitiva, la modelación matemática desde contextos realísticos permitió re-significar o interiorizar las relaciones entre variables, en unos casos de forma generalizada y en otros de forma funcional. Planchart (2005) dice:

> La utilidad de las funciones y el estudio con distintas representaciones llevan a reflexionar sobre el potencial didáctico que se tiene cuando se aborda la realidad con determinados esquemas mentales o modelos matemáticos o a través de una simulación del problema real. (p.2)

De esta manera contribuimos con este estudio, a la idea de fortalecer la modelación matemática como proceso desde el aula de matemática y como potencializador de formas de expresión, argumentos y construcciones re-significadas desde los contextos auténticos.

Capítulo 6

6 CONCLUSIONES

Nuestro estudio planteó como objetivo: "*Caracterizar un proceso de construcción de relaciones entre variables mediante situaciones de modelación matemática con estudiantes del grado once", s*iguiendo como objeto de análisis los procesos modelación desarrollados en la construcción de relaciones entre variables desde los contextos realísticos a lo largo del trabajo con los estudiantes. En el presente capítulo exponemos las conclusiones que surgen en el desarrollo del proceso de investigación.

6.1 Del reconocimiento de las cantidades de magnitud a la noción de variable y sus relaciones

En las actividades propuestas en esta investigación, los estudiantes establecieron relaciones lineales de forma retórica o verbal evidenciando la dependencia o no entre ellas, desde estas relaciones, las condiciones que el contexto les proporcionaba en el análisis de la situación cobraban importancia e influenciaban en forma significativa en las asociaciones realizadas. De esta manera, se contextualizaron las nociones de "variables" y "constantes" en términos de ingresos para el Metro de Medellín, número de pasajeros y el precio de un tiquete. De esta contextualización surgió en los estudiantes la idea de postular el término "constante" como una *tendencia al equilibrio*[29], por estar influenciada por los cambios en términos del tiempo debido al carácter probabilístico en las circunstancias cotidianas y de los cambios económicos que sufre el país año tras año. Esta interpretación de la noción de "constante" atiende a una forma matemática de entenderla como un parámetro o una familia de expresiones algebraicas. Sin embargo, en algunos libros de texto (libros proporcionados por la editoriales) con frecuencia se omite un tratamiento en la construcción de las nociones de constantes y parámetros en los términos presentados por los estudiantes de esta investigación. Esta caracterización les implicó a los participantes emprender actividades

[29] Ver página 128.

de búsqueda, tratamiento y análisis de datos lideradas por ellos mismos, lo cual es característico de los procesos de investigación.

En el análisis de saberes previos, también los estudiantes establecieron un primer modelo, que surge de las relaciones hechas entre las diferentes variables, las cuales se construyeron con base en los datos numéricos de los ingresos en términos del precio del tiquete y del número de pasajeros. Es por esto que, la pregunta: *¿Por qué el sistema de transporte Metro es conveniente o no para tí como individuo que formas parte activa de la ciudad de Medellín?* problematiza el trabajo de campo y nos permite generar un proceso más natural, donde la meta de identificar y relacionar variables surgió por consensos y no de forma predeterminada, lo cual fue evidenciado en la primera actividad. Desde esta perspectiva, la construcción de las relaciones entre dos variables, se evidenció en los procesos de identificación, selección y estructuración empleadas por los estudiantes al abordar las estrategias de solución a las preguntas planteadas, además de la interacción que surgió entre los participantes, y de ellos con el contexto.

En la tarea de dar respuesta a la pregunta anterior, los estudiantes asumieron una posición de investigadores, en cuanto se apropiaron de la situación y del problema que tenían que solucionar, pregunta que no se encontraba resuelta en un libro, ni sería proporcionada por las profesoras. La tarea de elegir los parámetros que les permitieran comparar el transporte del bus, del taxi y del Metro, desde la recolección de los datos tomados de forma directa, las discusiones acerca de la distribución del dinero en los integrados, del cómo calcular los ingresos del Metro o el ahorro de un estudiante cuando utiliza el tiquete estudiantil, la simbolización de relaciones lineales, los significados de *"constante"* y *"variable"* desde el contexto del Metro, se constituyeron en actividades matemáticas y en una manera de modelar magnitudes de cantidad como una alternativa particular de relación lineal entre dos variables..

Los estudiantes presentaron dos maneras específicas de abordar las relaciones entre dos variables: a saber: la primera que se orienta en la argumentación y asociación retórica o verbal y la otra a la identificación de modelos matemáticos (noción de función) que representan relaciones a nivel simbólico o funcional. Estas formas de establecer relaciones en el contexto particular surgen del análisis de los factores implícitos o explícitos que condicionan e influencian el entorno estudiado, no como elementos aislados, ni abstraídos de las reglas y análisis propios de la matemática, sino como formas inmersas en una lógica de las circunstancias cotidianas, sociales y culturales.

La relación entre dos variables como subproceso de la simplificación, implica la toma de decisiones en cuanto a las condiciones sobre las cuales se organizan los datos o las magnitudes de cantidades y se asumen las asociaciones posibles desde el contexto, observando y reflexionando sobre cuáles cantidades resultan “variables” y “constantes” en una relación establecida desde lo eventual, para luego llevarla a una relación simbólica de dependencia. El proceso de recolección de datos contribuye a la apropiación de la situación por parte del estudiante, además permite desarrollar estrategias de experimentación y de organización en el modo de relacionarse con el contexto.

El estudio de las variables en la temática de las funciones, el cual corresponde a una unidad del currículo colombiano, está ligado a las definiciones y a los ejercicios propuestos por un texto escolar. En el desarrollo de esta investigación, pudimos constatar que la selección de “variables” y “constantes” enlazadas por medio de una relación numérica o algebraica cobra sentido y comprensión bajo el análisis de un contexto particular, es decir el establecimiento de la relación $y = kx$ dentro del contexto del Metro, representa una interpretación asociada a la idea de variable y constante, en tanto se relacionan y surgen de las asociaciones de los ingresos, precio del tiquete y número de personas que ingresan al sistema de transporte en condiciones específicas y no a la sección de ejercicios que plantea un texto escolar.

6.2 Surgimiento del modelo

La modelación matemática puede verse a partir de diferentes perspectivas y propósitos, nuestro estudio desde una perspectiva realística contribuye a la idea de ocuparse inicialmente de la significación de las nociones matemáticas partiendo de situaciones y problemas en contextos auténticos, propiciando la construcción de modelos con sentido para el estudiante. Luego de esta significación, estas nociones podrían ser trabajadas de manera formal.

El proceso de modelación que se desarrolló en esta investigación evidenció cierto grado de libertad con respecto a las nociones y procesos matemáticos que los estudiantes requieren para describir el fenómeno en cuestión. En este sentido, los procedimientos matemáticos para la creación de modelos son usados en función de la situación y no la situación es usada en función de los conceptos matemáticos. Es decir, los conceptos matemáticos que puedan ayudar a producir el modelo matemático no podrán ser forzados a su uso en forma a priori, éstos van resurgiendo y son requeridos durante el proceso. Así que, es posible que estos procedimientos implementados para la construcción de conocimientos escolares pueden aportan a la articulación en red de diferentes nociones numéricas, estadísticas, variacionales, algebraicas, las cuales comúnmente suelen ser separadas y segmentadas.

El modelo matemático se constituye inicialmente de manera retórica, por ser la descripción del contexto su fuente de producción, sin embargo la necesidad de legitimar los argumentos que solucionan el problema conllevan a establecer relaciones matemáticas de naturaleza simbólica, gráfica y tabular. La idea de modelo matemático entonces integra, no sólo la simbolización de una relación entre dos variables, sino también las diferentes representaciones, que en conjunto aportan a una forma de describir una situación particular.

Las expresiones algebraicas por sí solas, aisladas de todo contexto no tienen sentido para el estudiante, pero observadas como modelos que se construyen en el proceso experimental, conlleva a los estudiantes a realizar una correspondencia con sentido entre el mundo cotidiano y las matemáticas, es decir, las nociones matemáticas son producto de las deducciones, análisis y decisiones que parten de un contexto auténtico y comprensible para el estudiante. Desde esta perspectiva los procesos de modelación rompen con una enseñanza y aprendizaje tradicional, mecanicista y reproductivo por cuanto:

- El punto de partida no se corresponde con las definiciones, teorías y procedimientos estandarizados sino con situaciones inmersas en contextos reales.
- Las actividades dentro del proceso de modelación obedecen a tareas de investigación y no a procedimientos estandarizados.
- La producción de modelos implica una búsqueda continua y cualificada de relaciones matemáticas y no a la imitación de ejemplos propiciados por el profesor.

Aunque los estudiantes cursaban el último grado de escolaridad, algunos mostraron debilidad en cuanto a los procesos de abstracción o simbolización que se suponía debería tener en dicho nivel de escolaridad. Esto evidencia que, a pesar de que los estudiantes había sido implicados en tratamientos algebraicos y en manejo de sistemas simbólicos y algebraicos, no hay una transferencia automática de dichas habilidades de tipo procedimental hacia en campo de la modelación matemática en contextos "auténticos" confirmando una vez más los planteamientos de Blum et al. (2007) en cuanto ésta dota de significado y proporciona una variedad de interpretaciones a las nociones y procedimientos matemáticos.

El proceso de construcción de los modelos abordados en el trabajo de campo, inició con la identificación de las relaciones entre las variables y su representación a través del uso del lenguaje natural de los estudiantes, así mismo estas verbalizaciones fueron complementadas con datos numéricos como una primera manera de usar representaciones matemáticas. Sin embargo, el caso de Jackobson, evidencia que existen estudiantes que no siempre siguen este proceso, y contrario a ello, producen inicialmente un modelo simbólico (relaciones funcionales y de generalización).

Desde las ideas presentadas anteriormente, los modelos que emergen de los contextos explorados directamente por los estudiantes, deben converger en una abstracción y representación simbólica que surge de las diversas formas de matematización individual y grupal.

6.3 La influencia de los contextos en la construcción de la relación entre dos variables

Las situaciones enmarcadas en contextos que le son familiares a los estudiantes desencadenan múltiples ideas, propuestas y análisis sobre esa porción de realidad que se busca modelar mediante relaciones matemáticas, tales situaciones e ideas, otorgan un papel al estudiante de empoderamiento sobre ellas, pues su conocimiento de uso y funcionamiento se transforman en una necesidad digna de pensarse desde construcciones matemáticas. En este sentido, este tipo de situaciones generan una conexión con las experiencias, la vida cotidiana y los conocimientos empíricos o interiorizados por los estudiantes sobre el fenómeno estudiado. En nuestro caso, el contexto del Metro de Medellín puede considerarse como un instrumento que, al interior de las matemáticas escolares, posibilita el estudio de nociones inmersas en el álgebra escolar. Pues, integra diversos problemas y temáticas como ecuación, relación de variables, función lineal, entre otras que podrían ser pensadas para otros niveles de enseñanza.

Un aspecto relevante para el establecimiento de la relación entre dos variables son las discusiones propiciadas por los estudiantes a nivel cultural, tomando parte activa en el análisis sobre cómo éstas circunstancias generadas por el contexto y por lo cultural, son cruciales al tomar decisiones a nivel matemático. En este sentido, resaltamos desde nuestro estudio la influencia que tuvo el contexto (Metro de Medellín) en la selección, asociación de variables y construcción de relaciones matemáticas en términos de generalización y funcionalidad, donde cada relación establecida es única y consistente desde los parámetros específicos del contexto, gracias al establecimiento de condiciones y factores únicos en ese contexto y no en otro.

Los elementos presentados en esta investigación aportan mayores evidencias a los planteamientos de Villa-Ochoa y Jaramillo (2011) cuando puntualizan que el contacto con situaciones de modelación matemática pertenecientes a los contextos socioculturales parece propiciar cierto grado de familiarización y una nueva mirada a la realidad de la escuela. Así mismo, los resultados apoyan, los aportes de D'Ambrosio (2005, citado en Villa-Ochoa y Jaramillo, 2011) cuando afirma que el desarrollo del conocimiento matemático en la escuela, debe ser construido a partir del reconocimiento que el individuo hace del medio que lo rodea y sus diversas formas expresadas en manifestaciones individuales, sociales, planetarias y cósmicas de la realidad.

El contenido matemático, como es referido en diferentes investigaciones, es permeado por diversas metodologías que apuntan a la memorización y repetición de ejercicios simulados que poco o nada tiene que ver con los significados que han construido los estudiantes. Es por esto que, desde la modelación en contextos auténticos o cercanos a los estudiantes, resaltamos el grado de motivación mostrado por el grupo de estudiantes evidenciado en la apropiación del contexto (reflexiones del contexto, toma de datos directos, participación constante en los encuentros, exposición final, entre otros). En este sentido, la motivación y apropiación posibilitaron una mejor comprensión de las relaciones entre dos variables, aspecto que se demostró en las últimas entrevistas, las cuales se sustentaban en contextos diferentes al del Metro de Medellín (Cuenta de servicios públicos, planes de operadores celulares y cadenas de correos electrónicos).

Los contextos auténticos que forman parte de la vida, de la cotidianidad, de la sociedad y de la cultura posibilitaron el comienzo de los procesos de modelación, bajo una dinámica grupal de discusión y legitimación referente a las ideas que interrelacionan el contexto y la noción matemática usada. Así que, la variedad de contextos en la clase de matemáticas genera en los estudiantes la idea de un aprendizaje desde sus conexiones subjetivas con las experiencias, prácticas sociales y conocimientos. Respondiendo de este modo, a la intención de concebir la enseñanza de las matemáticas como una opción para ayudar a los estudiantes a comprender y enfrentar diferentes situaciones y problemas de la cotidianidad.

Experimentar un proceso de modelación en forma grupal contribuye a procesos de aprendizaje entre pares y a fortalecer las capacidades de exposición, argumentación, de convencimiento del otro, de establecimiento de acuerdos y consensos. Por tanto, el papel de cada integrante del grupo asume su propia función; algunos se centran en aportar desde su experiencia, otros aportan desde sus competencias matemáticas y otros median desde la posición del otro. De este modo, la solución a un problema de modelación depende de las decisiones y conclusiones tomadas en el grupo y aunque estas no son absolutas, ni aplicables de manera automática a otros contextos, continúan siendo dependientes de las condiciones analizadas por los estudiantes.

En general, para responder a la pregunta planteada en esta investigación: *¿De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes del grado once, construir relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contexto reales?* Sintetizamos la respuesta en cuanto a la influencia del contexto realístico en el proceso de modelación matemática y la construcción de relaciones entre dos variables en las siguientes caracterizaciones:

- Articulación de diversos escenarios auténticos con las nociones matemáticas.
- Empoderamiento del estudiante sobre el contexto desde sus experiencias cotidianas.
- Desencadenamiento de estrategias de discusión, críticas y reflexiones en la búsqueda de consensos.
- El contexto como agente motivador en la exploración e implementación de procesos alternativos en la enseñanza y aprendizaje de las nociones matemáticas.
- (Re) significación del uso de la letra en las expresiones algebraicas en contextos particulares.
- Participación directa sobre el fenómeno e interpretaciones a través de diferentes representaciones.
- Producción de modelos retóricos y simbólicos en el desarrollo del proceso de modelación.
- Identificación de variables y sus relaciones mediante los análisis de los fenómenos auténticos de cambio en el proceso de simplificación grupal e individual.
- Descripción de las relaciones entre el contexto mediante cantidades de magnitud.
- Refinamiento del problema en contexto en correspondencia con la evolución de las nociones matemáticas en la construcción del modelo.

Abordar situaciones contextualizadas, como punto de partida en la enseñanza, posibilitaría el desarrollo de capacidades de interpretación y matematización en los estudiantes de forma natural, en cuanto que el carácter cotidiano y la naturaleza práctica de las situaciones hacen parte del modo de vida y de las actividades habituales de las sociedades. Por otra parte, cuando se crean necesidades en los estudiantes relacionadas con la vida fuera de la escuela, los conceptos algebraicos y las herramientas matemáticas entran a jugar un papel de producción diferente si no existiese el interés o la necesidad de resolver un problema.

6.4 Algunas implicaciones

Presentaremos algunos aspectos para tener en cuenta sobre el proceso de modelación en el aula de clase y en próximas pesquisas.

6.4.1 Para el aula de clase

Bajo la intención de propiciar en el aula de clase procesos de reconocimiento sobre las nociones de "variable" y "constante", es preciso desarrollar antes de los tratamientos formales del álgebra, actividades basadas en entornos de interés para los estudiantes. De modo que, no limiten la actividad de problematización, les viabilice el estudio sobre las relaciones subyacentes a estos entornos y les admita buscar diversas formas de expresar y organizar las matemáticas.

Las actividades concernientes a los subprocesos de modelación (comprensión, simplificación/estructuración, matematización, interpretación, validación y representación) corresponden a actividades que requieren pensarse de forma particular a las condiciones de los estudiantes involucrados y al objetivo epistémico a nivel matemático. Por tanto, el docente podrá realizar tareas de planeación y reflexión en estos aspectos antes de poder implementar actividades de modelación en el aula de clase.

La construcción de algunos conceptos matemáticos, incorporan desde sus concepciones epistemológicas, la idea de variación, entre estas tenemos la función, que entendida como una relación de dependencia entre variables, debe ser objeto de observación y cuestionamientos constantes desde la cotidianidad, promoviendo en los estudiantes modelos matemáticos que cobran significado y aplicabilidad desde las constituciones propias de sus entornos cercanos. Invitamos a la reformulación de nuestras actividades de clase, en cuanto a la temática algebraica, tomado las actividades y problemas generados desde el aula como relaciones propias de los contextos y las diferentes nociones matemáticas.

En definitiva, la modelación matemática como alternativa para construir nociones y definiciones con sentido, requiere de un conjunto de condiciones a nivel personal, social y curricular para su desarrollo o implementación en el aula de clase. Nuestra tarea como educadores matemáticos, debe asumirse con una actitud emprendedora frente al fortalecimiento de los procesos de enseñanza, con miras a obtener así una respuesta positiva en cuanto a los procesos de aprendizaje.

6.4.2 Para futuras investigaciones

Con este estudio contribuimos a la línea de investigación de Modelación Matemática en Colombia, específicamente le damos continuidad a los aportes del grupo EDUMATH y a la Recomem presentando algunos aportes y reflexiones para que este proceso se institucionalice en las prácticas de nuestras aulas de clase. En un futuro se podrían realizar investigaciones concernientes a:

- La relación de variables en la línea histórico-epistemológica.
- El papel de los contextos en la producción de modelos desde un enfoque socio-crítico.
- Las caracterizaciones de las rutas seguidas por los estudiantes en el proceso de modelación.
- El subproceso de estructuración, matematización y validación desde los contextos realísticos.

6.4.3 Divulgación del trabajo de investigación

Ponencias[30]:

- The Sixth International Congress of Qualitative Inquiry. Construcción de significados de la ecuación lineal a través de la modelación matemática. Universidad de Illinois (Urbana-Champaign, Chicago). Mayo 26 al 29.

- II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. El concepto de la ecuación de primer grado desde la perspectiva realística de la modelación matemática. Universidad de Medellín. Mayo 5 al 7.

- 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa-ASOCOLME, 2010. Un acercamiento al proceso de modelación en situaciones de ecuación de primer grado. Bogotá, 9 de octubre.

[30] Ver anexo 10. Certificados de participación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alan J. Bishop. (1999). *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Paidós Iberica .

Aleksadrov, Kolmogorov, Laurentiev, & otros. (1976). *La matemática: su cotenido, métodos y significado I.* (M. López Rodríguez, Trad.) Madrid, España: Alianza Editorial.

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación* (43), 85-101.

Araújo, J. L. (2007). Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. En J. Barbosa, A. Caldeira, & J. Araújo (Edits.), *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e prácticas educacionais* (págs. 17-32). Recife: SBEM.

Araújo, J. L. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia , 2* (2), 55-68.

Aravena, D., & Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios Pedagógicos XXXIII* (2), 7-25.

Avarena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana en investigación en Matemática Educativa , 11* (1), 49-92.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R., & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *NÚMEROS. Revista de diáctica de las matemáticas* (32), 13-25.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática , 16* (002), 105 - 125.

Blázquez, S. (2006). Las tendencias funcionales. *SIGMA* (28), 69-79.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling- a theory for practic. In B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, et al. (Eds.), *International perspective on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). Swedan.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En E. Horwood, *Teaching and learning mathematics in context* (págs. 3-14).

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application , 1* (1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Edits.). (2007). *Modelling and aplications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Blum, W., Leiss, D., Schukajlow, S., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling—Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *J Math Didakt , 31*, 119–141.

Bosch, M., Garcia, F., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006a). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoria antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática , 18* (2), 37-74.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM , 38* (2).

Camarena, P. (2009). Mathematical Modeling and Knowledge Transference. *Journal of Mathematical Modelling and Application , 1* (1), 18-36.

Castro, N., Pia, S., Botta, R., Prieto, F., Dal Bianco, N., Martínez, S., y otros. (2010). Concepciones de docentes sobre enseñanza-aprendizaje del tema funciones. *VI Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC). ,* 1-10.

Catalán, A., & Dolores, C. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal. Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato. *CLEME* , 36- 41.

Chazana, D., Yerushalmyb, M., & Leikinb, R. (2008). An analytic conception of equation and teachers’ views of school algebra . *Journal of Mathematical Behavior* , 87–100.

Crouch, R., & Haines, C. (2004). Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology , 35* (2), 197-206.

Doorman, L., & Gravemeijer, K. P. ((2009)). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education , 41*, 199–211.

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de la Ciencias , 26* (3).

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities. En M. Hoines, & A. Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education., 2*, págs. 391–398. Mexico.

Florencia, A., & Ibarra, L. (2008). El uso de las letras en álgebra: Análisis de una evaluación de estudiantes de primer año de ingeniería. *Revista de Educación Matemática (REM)* , 1-8.

Galagovsky, L. R., & Cittadini, P. (2008). Enseñanza de las ecuaciones en contexto. *Enseñanza de las Ciencias , 26* (3).

García, F. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articuación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación en Educación Matemática XI* , 71-90.

García, F., Gascón, J., Ruiz, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM , 38)* (3), 226-246.

García, M., & Montiel, G. (2007). Resignificando el concepto de función en una experiencia de educación a distancia. *I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*, (págs. 155-167). Argentina.

Gialdino, I. V. (2006). La investigación cualitativa. En *Estrategias de investigación cualitativa* (págs. 23-64). Barcelona: Gedisa.

Giménez, J., Díez-Palomar, J., & Civil, M. (2007). Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área. En U. D'Ambrosio, P. López, G.

Giordano, F., Weir, M., & Fox, W. (1997). *A First Course In Mathematical Modelling.* Brooks Cole Publishing Company .

Hays, P. (2004). Case study research. . En *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social sciences* (págs. 217-234). Mahwah, NJ: LEA.

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista-Lucio, P. . (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Hoyles, C., Skovsmose, O., Kilpatrick, J., & en colaboración con Valero, P. (2005). Meaning in Mathematics Education. En C. Hoyles, O. Skovsmose, J. Kilpatrick, & P. Valero (Edits.), *Meaning in Mathematics Education* (Vol. 37, págs. 1-16). New York: Springer.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik , 31* (1), 51-76.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and univesity. *ZDM , 38* (2), 196-207.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für der Didaktik , 38* (3), 302-310.

Kieran, C. (1995). The Learning and Teaching of School Algebra. Universidad de los Andes. (M. Mesa, Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning ,* 1-24.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias , 7* (3), 229-240.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de competencias.* Bogotá: Ministerio de Educación.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación.

Morales, L., & Díaz, J. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos No. 11 ,* 109-114.

Novembre, A. (2005). Las letras, las ecuaciones y las funciones. Reflexiones sobre su enseñanza y análisis del trabajo de los estudiantes en las evaluaciones nacionales. *DINIECE. Dirección Nacional de Información y evaluación de la Calidad Educativa ,* 1-50.

Obando Zapta, G., & Botero Hernández, O. (2006). La proporcionalidad directa e inversa a partir de la modelación de situaciones de variación . En F. Posada Balvin, *Módulo 2 Pensamiento variacional y razonamiento algebraico.* Medellín, Colombia: Artes y Letras Ltda.

Olazabal, A., & Camarena, P. (2004). Cuarto Congreso Nacional y Tercero Internacional: "Retos y Expectativas de la Universidad". *Categorías en la Traducción del Lenguaje Natural al Lenguaje Algebraico de la Matemática en contexto.* México.

Olfos, R. (2004). Aportes de la investigación a la enseñanza del álgebra elemental. *XII Jornadas Nacionales de Educación Matemática.* SOCHIEM Valparaíso.

Palarea, M. d. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas , 40*, 3-28.

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). Ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de la ciencia , 17* (3), 453 – 461.

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (Septiembre de 1996). Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. Informe sobre una investigación en marcha. *Reunión de Educación Matemática de la Unión Matemática* .

Pirie, S., & Lyndon, M. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics , 34*, 159-181.

Planchart, O. (2005). La Modelación Matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza de precálculo. *360° , 1*, 1- 18.

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling - a conversation with Henry Pollak. En W. Blum, P. Galbrith, W. Hans, & M. Niss (Edits.), *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study* (págs. 110-120). Springer.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Educación-Universidad de Antioquia, Medellín.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006b). Razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F. Posada, & G. Obando (Edits.), *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (Vol. 2, págs. 127 - 163). Medellín: Gobernación de Antioquia.

Reséndiz, E. (2005). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. (CLAME, Ed.) *Acta latinoamericana de matemática educativa, 19,* 618-623.

Rivero, F. (2000). Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos. *Notas Matemáticas* (201), 1-9.

Rojas, P., Rodríquez, J., Romero, J. H., Castillo, E., & Mora, L. (2002). *La transición Aritmética - Álgebra.* Santa Fe de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Gaia.

Ruano, R., Socas, M., & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelación en álgebra. *PNA , 2* (2), 61-74.

Rutherford, A. (1978). *Mathematical Modelling Techniques* . New York , Estados Unidos : Dover Publications .

Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C., & Solaz-Portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por Transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias , 6* (3), 538-561.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. En E. Dubinsky, & G. Hareld (Edits.), *The concep of function: Some Aspects of Epistemology and*

Pedagogy (C. Delgado G., Trad., Vol. 25, págs. 25-58). Washington, DC: MAA Notes. Mathematical Association of America .

Swafford, J., & Langrall, C. (2000). Uso preinstruccional de ecuaciones para describir y representar situaciones problemas en un grupo de sexto grado. *EMA , 5* (3), 203-235.

Ursini, S., & Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. (F. Hitt, Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* .

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos.* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas , 19*, 51-81.

Villa-Ochoa, J. A. (2010). *Modelación Matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación.* Conferencia presentada en el primer seminario de Educación Matemática, Historia y Entomatemáticas, Universidad de Medellín, Medellin.

Villa-Ochoa, J. A., & Jaramillo, C. M. (2011). Sense of Reality through mathematical modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling – Proceedings of ICTMA14.* New York: Springer.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. *Revista Virtual-Universidad Católica del Norte* (27), 1-21.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 23*, págs. 1087-1096. México D.F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2009b). El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del docente. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 22*, págs. 1443-1451. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, J., & Ocampo, D. (2009a). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia , 2* (2), 159-180.

Anexos

Anexo 1: Protocolo de entrevista uno

ENTREVISTA INICIAL

El propósito de esta entrevista es obtener información sobre las ideas y saberes de los estudiantes sobre la ecuación de primer grado. Con esta información se podrán obtener temas para elaborar guías enfocadas al proceso de la modelación de la ecuación de primer grado. En este sentido, pretendemos:

- Establecer una relación de confianza entre el entrevistador y el entrevistado para explorar las ideas sobre las ecuaciones.
- Identificar las experiencias, procesos de argumentación, las nociones previas asociadas al concepto de ecuación lineal.

Con estos objetivos, diseñamos una entrevista semiestructurada con las siguientes preguntas:

1. Cuéntame de una clase de matemáticas que te haya gustado.
2. ¿Qué fue lo que más te gustó de la clase?
3. ¿Por qué crees que en matemáticas utilizamos las letras?
4. ¿Qué diferencia encuentras entre la expresión *(2 + 8)* y *(x + 8)*?
5. De lo que has venido estudiando en las clases de matemáticas, ¿qué recuerdas sobre ecuaciones?, ¿qué elementos tiene una ecuación?
6. ¿Cómo interpretas esta expresión $5x + 2 = 22$?
7. ¿Cuáles de las siguientes situaciones puedes asociar a la expresión $5x + 2 = 22$?
    a) Dentro de dos años, cinco veces la edad de Ana es igual a 22 años.
    b) La quinta parte de cualquier número aumentado en 2 equivale a 22.
    c) Cinco veces el valor del puntaje en un juego de bolos, más dos puntos que siempre te regalan suman 22.
    d) Un automóvil se demora cierto tiempo en recorrer 22 km a una velocidad de 5km/h, sabiendo que ya ha recorrido 2 km.
    e) Cinco monedas de $100 más dos monedas de 100 es igual a 22 monedas.
8. ¿Qué situación podría representar la expresión $3y – 200 = 1000$?
9. Si un compañero te pregunta sobre la solución de la expresión $x+2=4+2x$. ¿Cómo le explicarías?
10. ¿Qué relaciones encuentras en las siguientes expresiones?

X	5	$x + 1 = 6 + 3x$	$3x$	$6y$	8	x^2
$6 = 5+x$	$9z$	$y = 6x + 4$	7	$4+7$	$x + 2 = 6$	$y + 3$

Anexo 2: Protocolo de entrevista dos

ENTREVISTA FINAL

Lugar:
Fecha:
Entrevistado (a):
Entrevistadoras:

Esta entrevista pretende:

Reconocer el punto de vista del estudiante respecto al proceso de modelación.
Evidenciar las ideas asociadas a la noción de variable y constante.
Reconocer la forma de relacionar dos variables mediante una situación en contexto.

<u>Momento uno:</u> contexto realístico

1. Luego de tu experiencia en el grupo, ¿cómo evalúas el proceso que viviste?

2. ¿Qué aprendiste de tus compañeros?, ¿Qué te pareció más importante?

3. ¿Qué podrías decir sobre la matemática y la vida diaria (¿Tiene la matemática relación con la sociedad, la vida diaria?, ¿por qué?)

4. ¿Le has encontrado alguna utilidad a las matemáticas para tu vida? (Antes de esta experiencia de modelación, qué utilidad encontrabas a las matemáticas? Ha cambiado en algo tu forma de ver las matemáticas?

5. ¿Qué visión tienes ahora sobre el Metro?

<u>Momento dos:</u> desarrollo de estrategias y proceso de experimentación e identificación de variables y constantes

6. Si quisieras analizar un contexto diferente al del Metro, por ejemplo el de los servicios públicos (llevar físicamente), ¿qué harías?

Cada mes EPM nos cobra el servicio de agua potable. ¿Qué debe tener en cuenta EPM cada mes para cobrar este servicio?, ¿cuáles de los aspectos que mencionaste varían mes a mes, cuáles no? Justifica. Como usuario de EPM necesitan encontrar una forma rápida de calcular por ti mismo el servicio de agua potable para compararlo con la factura. ¿Cómo lo harías?

Anexo 3: Protocolo de entrevista tres

ENTREVISTA FINAL

Lugar:
Fecha:
Entrevistado (a):
Entrevistadoras:

De la descripción del contexto a los modelos matemáticos y relación de variables

1. Si necesitaras adquirir un plan prepago para tu celular en alguna empresa de telefonía. ¿Qué aspectos tendrías en cuenta para tomar una decisión?

   Teniendo en cuenta los siguientes datos, ¿qué harías para elegir un plan más económico?

Planes	Vr. Min tigo y fijos.	Vr. Otros operadores	Carga inicial (IVA incluido) **
Plan Prepago Simple 2	$199	$199	$2.500

Planes	Vr. Min movistar y fijos.	Vr. Otros operadores	Carga inicial (IVA incluido) **
Plan Prepago ahorro fijo movistar	$199	$319	50.000

Planes	Vr. Min Comcel.	Vr. Otros operadores	Carga inicial (IVA incluido) **
Plan Prepago 9 elegidos	$242	$448	$10.000

2. En cada uno de los planes, ¿cuáles datos puedes considerar constantes y variables?

3. ¿Qué dato (s) te proporcionan los elementos suficientes para sustentar y demostrar que tomaste la mejor decisión?
4. ¿Qué expresión matemática te indica el ahorro o la conveniencia del plan que elegiste?
5. Si el plan de celular un día decide que propone que el minuto cuesta $235 en comcel, pero debes recargar 10.000 y gastarlos en dos días. Emplea la expresión de ahorro para mostrar por qué escogerías o no la promoción
6. ¿Puedes dar otros ejemplos de la vida cotidiana que describan la misma expresión matemática para estimar el ahorro o los gastos? ¿Cuáles?

Anexo 4: Consentimiento de Participación

Yo ____ estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "la modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables" que es conducida por las profesoras Lina María Muñoz Mesa y Sandra Milena Londoño Orrego, estudiantes de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesoras de la Institución Educativa Finca La Mesa. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es Caracterizar un proceso de construcción de relaciones entre variables mediante situaciones de modelación en contextos reales con estudiantes del grado once.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase y algunas veces video grabado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de los correos electrónicos: limamu07@gmail.com ; samyjdam@gmail.com

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación (horario de las sesiones martes y jueves de 1:00 a 3:00 de la tarde).

Nombre del investigador 1	Firma	Fecha
Nombre del investigador 2	Firma	Fecha
Nombre del participante	Firma	Fecha
Nombre del padre de familia	Firma	Fecha

Anexo 5: Guía Uno

La siguiente situación es propia de la economía y el uso del transporte masivo de la zona Metropolitana de Medellín, la cual puede convertirse en un escenario para abordar parte del estudio de la *ecuación lineal* en el aula de clase.

SITUACIÓN: METRO DE MEDELLÍN

La situación se desarrollará en dos momentos:

Momento Uno: contextualizar a los estudiantes sobre algunos datos relacionados con la creación, el funcionamiento y aspectos económicos del Metro.

Para responder las siguientes preguntas, es necesario observar el video tomado de: *http://www.youtube.com/watch?v=D2DRPZPq2-E* y leer la siguiente información que encontrarás en la página web del Metro de Medellín: *http://es.wikipedia.org/wiki/Metro_de_Medell%C3%ADn*

El proyecto *Metro de Medellín* fue planteado a cinco años y finalmente se terminó en 12 años. El 14 de diciembre de 1982 el Consejo Nacional de Política Económica y Social -CONPES- había aprobado el cupo de endeudamiento del Metro hasta por USD 656.3 millones, sobre un costo estimado de USD 1.009 millones.

Al finalizar la construcción de las tres primeras líneas (dos comerciales y una de enlace) del sistema de transporte masivo, en 1997 el costo final fue de 2.174 millones de dólares, que incluyen el contrato de obra, los gastos financieros, los costos de intereses de mora y la inversión social.

El total de la deuda adquirida por la región, para la construcción del Metro, se está pagando bajo la figura de la Ley de Metros, donde el 60% son aportes del Departamento de Antioquia y el Municipio de Medellín y el restante 40% de la Nación.

En 2004 el ministro de Hacienda Alberto Carrasquilla, el alcalde de Medellín Sergio Fajardo Valderrama, el gobernador de Antioquia Aníbal Gaviria Correa y el gerente del Metro Ramiro Márquez Ramírez, firmaron un acuerdo definitivo para la cancelación de dicha deuda. Este arreglo le permite a los propios antioqueños pagar el Metro, cuya construcción se inició en 1985.

Los socios de la empresa Metro (Medellín y Antioquia) asumen el 60% de la deuda total, conforme a la Ley de Metros, que estaba tasada en 1.256 millones de dólares de dineros ya cancelados por el Estado a los acreedores, y 335 millones de dólares más que faltan por pagar, para un total de 1.591 millones de dólares que se pasan a pesos colombianos, conforme con la tasa representativa del mercado del 21 de mayo de 2004 (2.759 pesos por un dólar).

De esta manera, el Metro de Medellín reconoce como obligación a su cargo y a favor de la Nación el pago de 1.256 millones de dólares, que corresponden a la deuda pagada, y 335 millones de dólares que corresponden a la deuda por pagar.

Una parte de la deuda del Metro se mantiene en moneda extranjera, y suma cerca de 360 millones de dólares (capital más intereses); para el pago de esta partida todavía se cuenta con un plazo de 15 años. Antioquia, Medellín y la empresa *Metro de Medellín Ltda.* vienen honrando cumplidamente su deuda con la Nación y la banca externa.

En el acuerdo de pago también quedó definido que la deuda que la región tiene con la Nación estará respaldada por las rentas pignoradas tanto por el Departamento de Antioquia (correspondientes al 40% de sus rentas de tabaco) como por otras rentas de todos los municipios del área de influencia del sistema (correspondientes al 10% de la sobretasa a la gasolina).

Las rentas pactadas, la de la sobretasa a la gasolina (municipal) y la del impuesto al cigarrillo (departamental), desde mayo de 2004 a noviembre de 2008 son equivalentes a COP (PESOS COLOMBIANOS) $293.214 millones en valores corrientes, frente a un recaudo real en el mismo período correspondiente a COP 435.524 millones, *lo que representó un mayor pago (prepago) por COP$139.684 millones.* En total, el Metro de Medellín y sus socios (Medellín y Antioquia), por concepto de la construcción del Metro, le han girado a la Nación desde 1990 y hasta noviembre del 2008, 714 millones de dólares. Así, el cumplimiento del acuerdo de pago de la Empresa Metro y sus socios (Medellín y Antioquia), ha sido desde su inicio hasta noviembre de 2008 del 149%. Es decir un 49% más de lo pactado.

El acuerdo se logró además gracias a que las Empresas Públicas de Medellín (EPM) y el Municipio de Medellín desistieron de una demanda que tenían contra ISA - Isagen, por valor de COP $650.000 millones, por el uso de las aguas del embalse El Peñol - Guatapé (Oriente Antioqueño), en la cadena de aguas y embalses de Nare - Guatapé. [3]

La cancelación de la deuda con la Nación (deuda interna en pesos colombianos) está asegurada con el mencionado Acuerdo de Pago. Se terminará de pagar en 2083, ya que mundialmente la financiación de estos sistemas masivos de transporte se difiere aproximadamente hasta la vida útil del mismo. Las capitalizaciones de los socios (Municipio de Medellín y Departamento de Antioquia) se han cumplido en un 100% desde la firma del Acuerdo de Pago. La deuda por pagar a la banca externa (deuda externa en dólares) se terminará de cancelar en 2024.

De esta manera se resuelven, al parecer de manera definitiva, un problema que comprometía las finanzas regionales y un problema que no habían podido dirimir los últimos cuatro gobiernos nacional y local.

El Metro (líneas A y B, además de una vía adicional de servicio y mantenimiento llamada línea C) costó US 2.174 millones, de los cuales US 1.009 millones corresponden al valor real de la obra y el resto a sobrecostos financieros causados, principalmente, por el retraso de siete años que tuvo su construcción (incluye la parálisis de la obra entre 1989 y 1992), por la falta de créditos blandos y por la actitud hostil del gobierno del presidente Virgilio Barco (1986 - 1990).

a. En la construcción y el funcionamiento del Metro han intervenido diferentes entidades (EPM, la gobernación, el municipio, la nación), describe cómo estas entidades han intervenido en el pago de la deuda del Metro.
b. Si tú fueras uno de los encargados en dirigir el proyecto del Metro, ¿qué elementos tendrías en cuenta para su planeación y ejecución?
c. Teniendo en cuenta los grandes costos del Metro y si tú fueras el encargado de establecer las condiciones y la formas de pago ¿qué estrategias utilizarías para obtener ingresos?
d. ¿Cuál crees que han sido los cambios que contribuyen al desarrollo de la ciudad de Medellín, con el sistema Metro?
e. Sabiendo que el tiquete individual tiene un costo de $1500 y el integrado a Santa Rita tiene un valor de $1800, de los cuales un porcentaje de éste valor es para el Metro y el resto es para el transporte vinculado al Metro. ¿Cuáles son las razones

por las cuales crees que el Metro ofrece a los usuarios los tiquetes integrados, teniendo en cuenta que con los tiquetes individuales obtiene más ganancia?

f. Suponiendo que en la estación Acevedo ingresan 11:00 a.m. a 2:00 p.m. un total de 1000 personas, de las cuales 234 compran un tiquete individual y el resto con un tiquete integrado. ¿Cuánto dinero recauda el Metro desde cada una de las tarifas? ¿Qué conclusión puedes obtener a partir de éstos resultados?
g. ¿Desde qué número de tiquetes integrados se tendrían que vender para que el Metro obtuviera una ganancia igual o mayor a la recaudada con los tiquetes individuales?
h. ¿Qué estrategias podrías emplear para calcular el dinero recaudado por el Metro para cada una de las tarifas?
i. Actualmente, el Metro dejó de ofrecer el tiquete doble. ¿Por qué crees que esto sucedió?
j. Si el Metro te contratara para crear una propuesta alternativa con respecto a las que ofrece actualmente (tarjeta cívica, tiquete integrado, tiquete estudiantil, entre otras) ¿Cuál plantearías, de modo que el Metro obtenga un mejor beneficio?

<u>Momento Dos:</u> Desarrollar la noción y relaciones matemáticas, con respecto a lo constante y a lo variable, involucrándolos en situaciones de análisis.

a. ¿Cuáles son las condiciones y factores que afectan los ingresos en una determinada estación (por ejemplo estación Acevedo)?
b. Enumera lo que se puede contar en el sistema Metro, teniendo en cuenta su uso y funcionamiento.
c. Teniendo en cuenta la lista anterior, clasifícalos en cantidades que cambian y las que no cambian.
d. Teniendo en cuenta la información de la tabla, elija dos tarifas del Metro y una tarifa del bus público del lugar donde vives. Escriba el tipo de tarifa, el valor y complete la tabla.

Grupo Tarifario	**Valor por viaje 2009**
Tarifas tiquetes	$1.500
Sencillo Integrado (porción Metro)	$900
Tarifas tarjeta Cívica	
Personal (Frecuente)	$1.350
Al portador	$1.400
Eventual (será introducida en el 2009)	$1.500
Estudiantil Metro	$1.110
Estudiantil Municipios	$710
Adulto mayor	$1.300
Persona con Movilidad Reducida (PMR)	$1.050

Número de viajeros	Tarifa:__________ $	Tarifa:___________ $	Tarifa:__________ $
	Ingreso I	Ingreso II	Ingreso III
1			
2			
3			

e. De las tres tarifas que elegiste, ¿cuál consideras que proporciona mayores ingresos al Metro?
f. Teniendo en cuenta los datos de la tabla, ¿cuáles consideras variables y constantes?
g. Según la tabla, ¿qué relación estableces entre las variables? ¿Qué relación se da entre las variables y las constantes?
h. ¿Qué variable(s) dependen de otra(s)?
i. ¿Cómo representarías éstas variables?
j. ¿Qué igualdades podrías establecer entre los datos que consideraste variables y cuáles entre constantes?
k. ¿Consideras que hay otros elementos diferentes a los establecidos en la tabla, que influencian en los ingresos del Metro? ¿Cuáles?
l. Si en una hora, ingresan 612 viajeros en la estación Acevedo, ¿cuáles serían los ingresos recaudados por el Metro, teniendo en cuenta las dos tarifas de la tabla? Escribe los procedimientos.
m. Supongamos que se obtienen unos ingresos de $237.800, de los cuales $72.800 fueron recolectados por el transporte del bus (tarifa $1.400). Considerando que el resto del dinero lo generó el Metro con el ingreso de tiquete estudiantil. ¿Cuántas personas utilizaron el bus y cuántas el Metro?
n. Propone un problema acerca del Metro, que implique la relación de los diferentes datos de la tabla, a través de una igualdad.

Anexo 6: Guía Dos

SITUACIÓN: METRO DE MEDELLÍN

El sistema de transporte Metro hace parte de la vida diaria de los habitantes de Medellín, cómo también hace parte de los gastos de un estudiante, una familia, un trabajador, entre otros usuarios. Sin embargo, el deseo de progreso de la ciudad le ha implicado una planeación y ejecución de diversos proyectos para el funcionamiento de este sistema de transporte. Bajo este contexto real planteamos el siguiente problema:

¿Por qué el sistema de transporte Metro es conveniente o no para ti como individuo que forma parte activa de la ciudad de Medellín?

Es importante propiciar por un papel activo y critico de sus usuarios en este servicio de transporte. Por esto, desarrollemos las siguientes preguntas y actividades:

1. ¿Qué aspectos podrían sustentar matemáticamente qué tan conveniente es el sistema de transporte Metro para ti y para la ciudad?

2. Como estudiante tienes algunas opciones para transportarte; el Metro, el bus urbano, entre otros. Teniendo en cuenta algunos intereses como usuario de estos servicios, tales como: el ahorro, el desplazamiento, el progreso de la ciudad, el cuidado del medio ambiente, el empleo, entre otros.

¿Qué datos podrías recolectar del Metro y del bus?, ¿Cómo podrías organizarlos?

4. ¿Para qué puedes utilizar la siguiente tabla?

Línea		Largo	Tramo	Tipo
A	Niquía - Bello	1,21 km	1	Nivel Elevado
A	Bello- Madera	1,42 km	2	Nivel Suelo
A	Madera - Acevedo	1,66 km	3	Nivel Suelo
A	Acevedo - Tricentenario	1,05 km	4	Nivel Suelo
A	Tricentenario - Caribe	1,25 km	5	Nivel Suelo
A	Caribe - Universidad	1,13 km	6	Nivel Elevado
A	Universidad - Hospital	0,68 km	7	Nivel Elevado
A	Hospital - Prado	0,68 km	8	Nivel Elevado
A	Prado - Parque Berrío	0,59 km	9	Nivel Elevado
A	Parque Berrío - San Antonio	0.1 km	10	Nivel Elevado
A	San Antonio - Alpujarra	0,35 km	11	Nivel Elevado
A	Alpujarra - Exposiciones	0,38 km	12	Nivel Elevado
A	Exposiciones - Industriales	0.81 km	13	Nivel Elevado
A	Industriales- Poblado	1,81 km	14	Nivel Suelo
A	Poblado - Aguacatala	1,88 km	15	Nivel Suelo
A	Aguacatala - Ayurá	0,85 km	16	Nivel Suelo
A	Ayurá - Envigado	1,88 km	16	Nivel Suelo
A	Envigado - Itagüí	1,55 km	18	Nivel Suelo
A	Itagüí - Sabaneta	Construcción	31	Nivel Suelo
A	Sabaneta - La Estrella	Construcción	32	Nivel Suelo
B	San Antonio- Cisneros	0,50 km	19	Nivel Elevado
B	Cisneros- Suramericana	0,87 km	20	Nivel Elevado
B	Suramericana- Estadio	0,50 km	21	Nivel Elevado
B	Estadio- Floresta	1,22 km	22	Nivel Elevado
B	Floresta- Santa Lucía	0,62 km	23	Nivel Elevado
B	Santa Lucía- San Javier	1,07 km	24	Nivel Elevado
K	Acevedo - Andalucía	4 km	25	Metro Cable
K	Andalucía - Popular	4 km	26	Metro Cable
K	Popular - Santo Domingo Savio	4 km	27	Metro Cable
J	San Javier - Juan XXIII	4 km	28	Metro Cable
J	Juan XXIII - Vallejuelos	4 km	29	Metro Cable
J	Vallejuelos - La Aurora	4 km	30	Metro Cable

5. Si el usuario es un matemático, ¿cómo le demostrarías la opción que elegiste como más conveniente? Escribe los procedimientos y argumentos que le darías.

6. Si la página del Metro te solicita dar un informe gráfico que demuestre la conveniencia de elegir una de las opciones, ¿cómo lo harías? Escríbelo. (Puedes emplear un programa para realizar las gráficas)

7. ¿Qué aspectos tomaste como primordiales para establecer la conveniencia o no de tomar el sistema Metro como una opción para los usuarios que elegiste en el análisis (Tiempo, capacidad, distancia o precio)?

Anexo 7: Guía Tres

SITUACIONES EN EL CONTEXTO METRO

1. ACTIVIDAD A MANERA DE CARTA:

Medellín, septiembre de 2010

Estimado(a)

Estudiante

Al colegio *Finca La Mesa* llegaron tres estudiantes de Bogotá, el Cauca y Urabá. Sus familias les han solicitado un informe sobre sus gastos para poderles girar dinero. Uno de ellos, Cristian vive cerca de la estación Estadio del Metro; Marcela vive cerca al Parque Explora y Miguel vive a cinco minutos de la estación Itagüí. Ellos necesitan una forma rápida y práctica de calcular sus gastos con respecto al transporte. ¿Qué le sugerirías? Además, ellos necesitan calcular los tiempos que requieren para salir de sus casas y llegar a tiempo a las 6:20 a.m. ¿Qué deben tener en cuenta para calcular los tiempos? Escríbeles tus sugerencias…
Cristian uno de estos estudiantes que viene del Cauca, dice que puede calcular sus gastos así: g= p+nv (g son los gastos, p es el precio del viaje, nv son los números de viaje). ¿Qué le dirías al respecto?
La institución escoge a Cristian como beneficiario de un subsidio de transporte para asistir a las olimpiadas del conocimiento desde Acevedo hacia la Universidad de Antioquia. Él debe elegir entre un tiquete Metro o un tiquete de bus urbano. ¿Cuál le recomendarías y por qué?
Esperamos tu respuesta.

Con toda atención,

Lina Muñoz y Milena Londoño
Profes de Finca La Mesa

Anexo 8: Guía Cuatro

ACTIVIDAD A MANERA DE VALLA PUBLICITARIA

Nueve estudiantes inquietos de once grado observan la siguiente valla publicitaria.

Tomado de: http://www.medellin.gov.co/alcaldia/jsp/modulos/P_ciudad/tiqueteestudiantil.jsp?idPagina=861

Estos estudiantes deciden investigar con apoyo de la página web, sobre cuál es el aporte del Municipio con respecto a los gastos de transporte, encontrando la siguiente información:

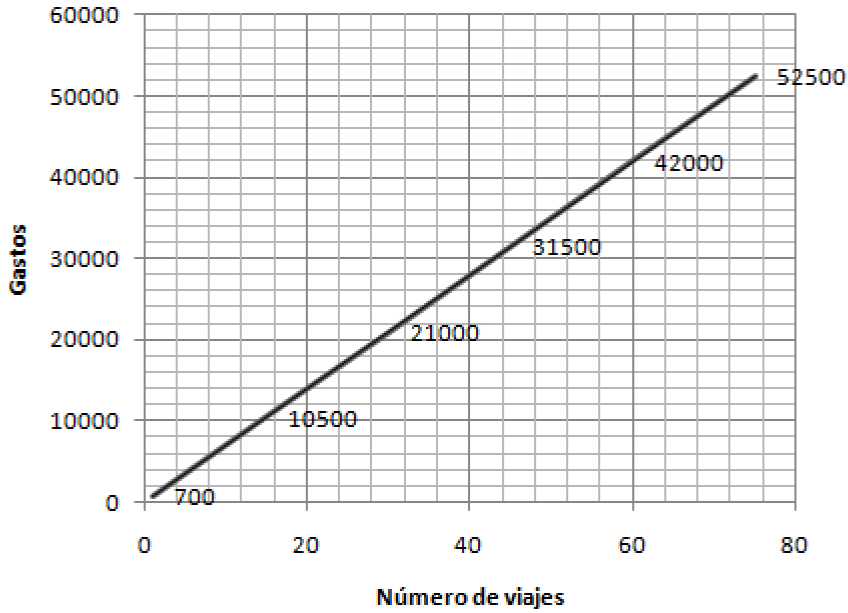
"Durante el 2009, el Programa del Tiquete Estudiantil significó un ahorro mensual de 25 mil 164 pesos a cada estudiante que se movilizó en bus o buseta, ya que el tiquete cubrió el 50% del valor de la tarifa. En total durante el año, el Tiquete le ahorró 3 mil 919 millones de pesos a los usuarios de este tipo de transporte.

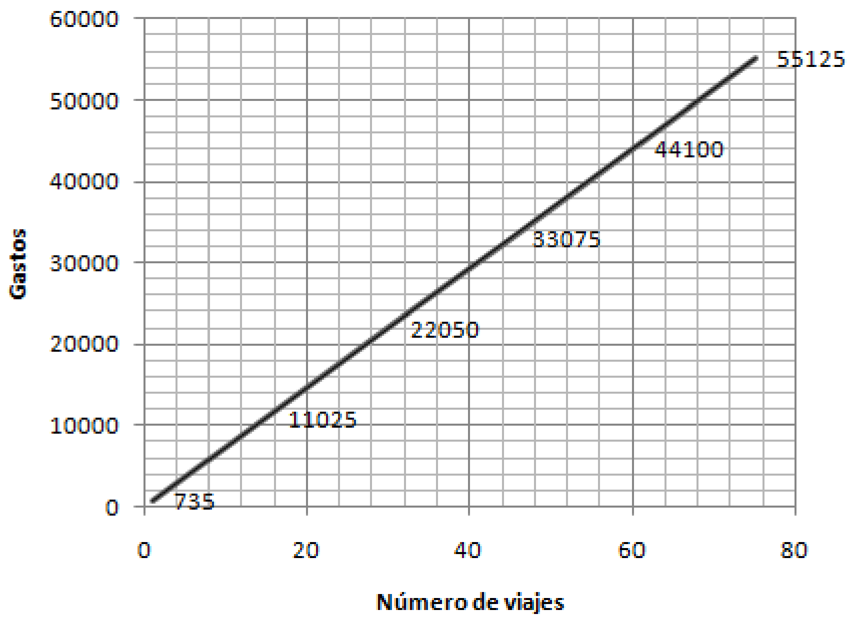
Estas personas se suman a las 9 mil 813 que se beneficiaron con el transporte del Metro. El ahorro para éstas fue de 35 mil 400 pesos mensuales, considerando una tarifa preferencial de $710 frente a $1.300 de un usuario con perfil frecuente".

Beneficiarios	BUS	METRO
# días escolares año	186	186
Valor pasaje (2)		
Valor pasajes año		
Valor pasaje con tiquete Trans. Estu. (2)	$ 1.400	$ 1.470
Valor pasajes año con tiquete		
Ahorro		
Ahorro %		

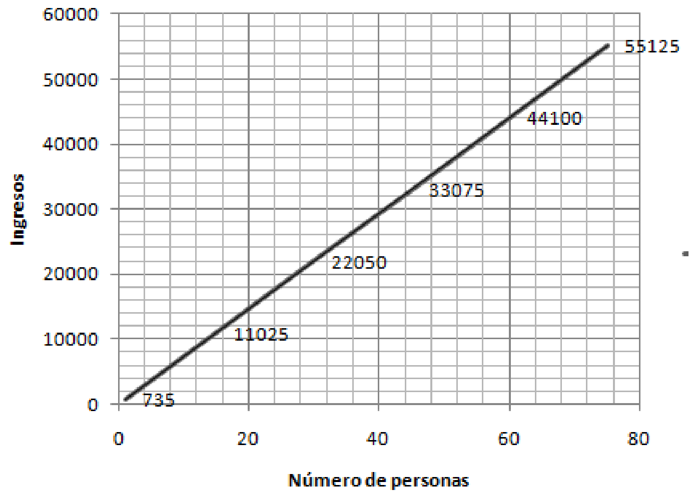
¿Qué estrategia utilizarías para calcular el ahorro?, Describe una forma que permita calcular los valores de la tabla.

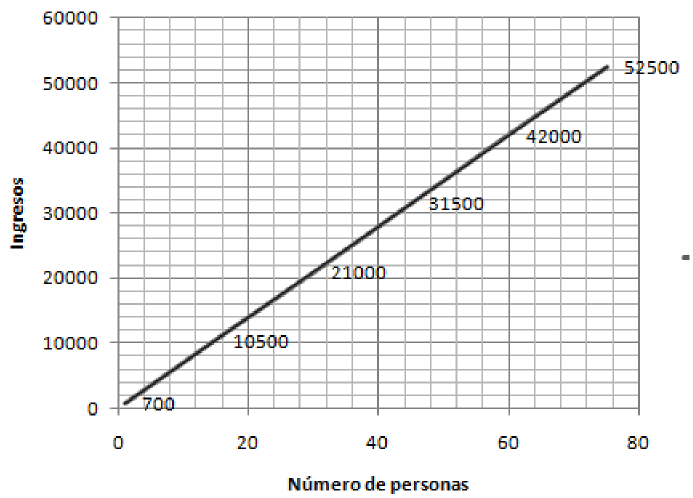
Estos estudiantes averiguan que el tiquete estudiantil les permite a los jóvenes del Sisben y de estratos 1, 2 y 3 movilizarse hacia sus instituciones educativas y que con el tiquete estudiantil el valor del pasaje en bus es de $700 y en Metro es de $735. Y realizan las siguientes gráficas:





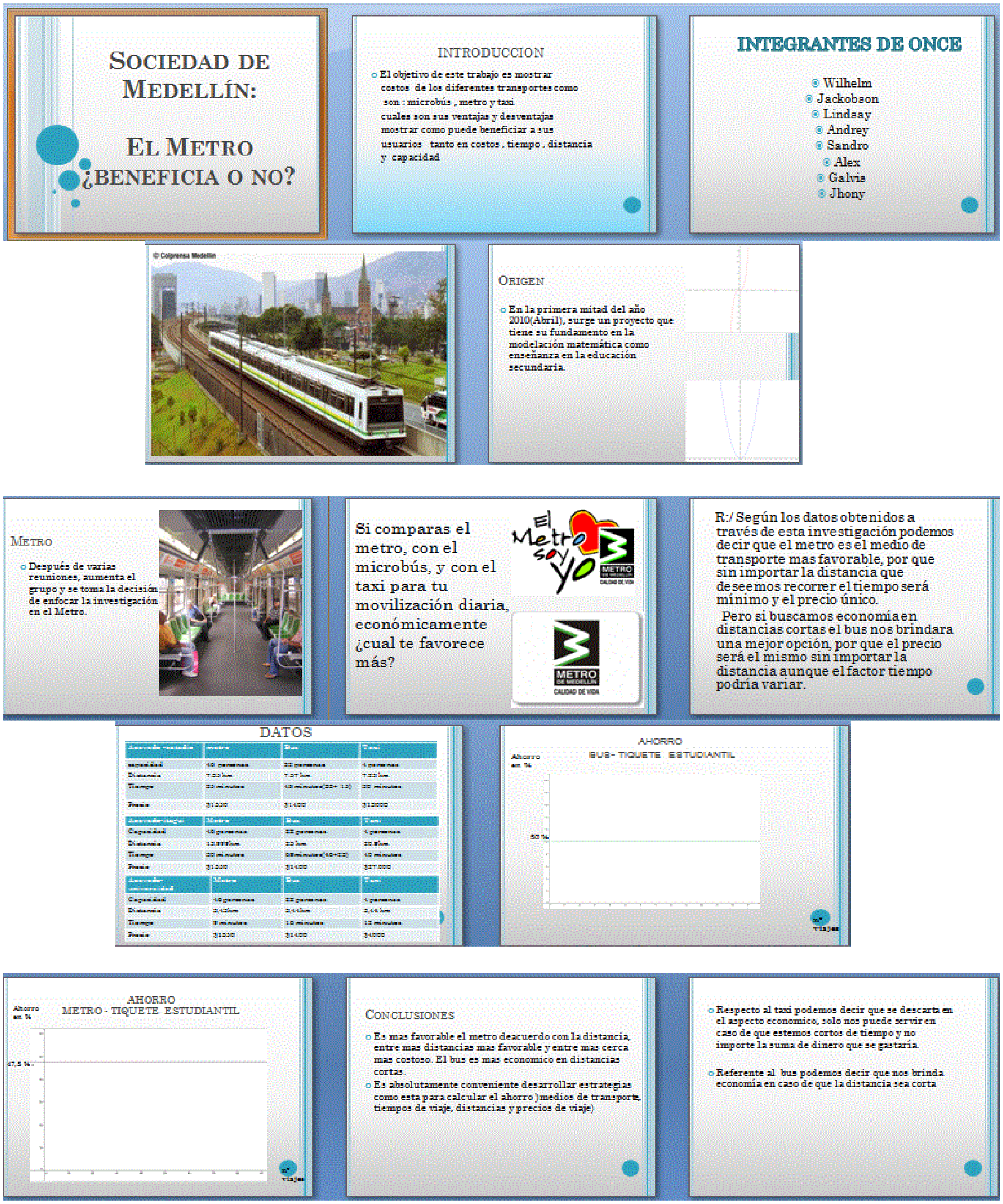
¿En cuál de las tres modalidades estos estudiantes podrían ahorrar más dinero? Justifica





¿En cuál de las tres modalidades estos estudiantes podrían ahorrar más dinero? Justifica

Anexo 9: Diapositivas de la exposición final



Anexo 10: Certificados

Norman K. Denzin
Institute of Communications Research
University of Illinois
228 Gregory Hall
810 South Wright Street
Urbana, IL 61801
Tel: (217) 333-1549
Email: n-denzin@illinois.edu

May 26-29, 2010
Sixth International
Congress of
Qualitative Inquiry
University of Illinois at Urbana-Champaign

26 May 2010

To Whom It May Concern:

This letter confirms the attendance and participation of person named below to our conference "The 6th International Congress of Qualitative Inquiry" (QI2010) from May 26th to May 29th at the University of Illinois at Urbana-Champaign, U.S.A. The title of the presentation is listed below. It was delivered on 26 May 2009 at ADISP (A Day in Spanish and Portuguese).

Nombre: Sandra Londono- Orrego

Ponencia: Construcción de significados de la ecuación lineal a través de la modelación matemática.

Yours most sincerely,

Norman K. Denzin
Congress Director

Norman K. Denzin
Institute of Communications Research
University of Illinois
228 Gregory Hall
810 South Wright Street
Urbana, IL 61801
Tel: (217) 333-1549
Email: n-denzin@illinois.edu

May 26-29, 2010
Sixth International
Congress of Qualitative Inquiry
University of Illinois at Urbana-Champaign

26 May 2010

To Whom It May Concern:

This letter confirms the attendance and participation of person named below to our conference "The 6th International Congress of Qualitative Inquiry" (QI2010) from May 26th to May 29th at the University of Illinois at Urbana-Champaign, U.S.A. The title of the presentation is listed below. It was delivered on 26 May 2009 at ADISP (A Day in Spanish and Portuguese).

Nombre: Lina María Muñoz Mesa

Ponencia: Construcción de significados de la ecuación lineal a través de la modelación matemática.

Yours most sincerely,

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA
ASOCOLME

Colegio Champagnat

CERTIFICAN QUE:

LINA MARÍA MUÑOZ MESA

PARTICIPÓ COMO ASISTENTE

EN EL 11º ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, REALIZADO EN BOGOTÁ, D.C., LOS DÍAS 7, 8 Y 9 DE OCTUBRE DE 2010.

Gloria García O.

GLORIA GARCÍA OLIVEROS
PRESIDENTA ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA ASOCOLME

FRANCISCO MURILLO
RECTOR COLEGIO CHAMPAGNAT BOGOTÁ

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA
ASOCOLME

Colegio Champagnat

CERTIFICAN QUE:

LINA MARÍA MUÑOZ MESA

PARTICIPÓ COMO PONENTE

EN EL 11º ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, REALIZADO EN BOGOTÁ, D.C., LOS DÍAS 7, 8 Y 9 DE OCTUBRE DE 2010.

Gloria García O.

GLORIA GARCÍA OLIVEROS
PRESIDENTA ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA ASOCOLME

FRANCISCO MURILLO
RECTOR COLEGIO CHAMPAGNAT

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA
ASOCOLME

Colegio Champagnat

CERTIFICAN QUE:

SANDRA MILENA LONDOÑO

PARTICIPÓ COMO ASISTENTE

EN EL 11º ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, REALIZADO EN BOGOTÁ, D.C., LOS DÍAS 7, 8 Y 9 DE OCTUBRE DE 2010.

Gloria García O.

GLORIA GARCÍA OLIVEROS
PRESIDENTA ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA ASOCOLME

FRANCISCO MURILLO
RECTOR COLEGIO CHAMPAGNAT BOGOTÁ

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA
ASOCOLME

Colegio Champagnat

CERTIFICAN QUE:

Sandra Milena Londoño.

PARTICIPÓ COMO PONENTE

EN EL 11º ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, REALIZADO EN BOGOTÁ, D.C., LOS DÍAS 7, 8 Y 9 DE OCTUBRE DE 2010.

Gloria García O.

GLORIA GARCÍA OLIVEROS
PRESIDENTA ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA ASOCOLME

FRANCISCO MURILLO
RECTOR COLEGIO CHAMPAGNAT

CIENCIA Y LIBERTAD

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Medellín, 7 de mayo de 2010

Doctora
LINA MARIA MUÑOZ MESA
Ponente

El éxito de este II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, se debe en gran parte al compromiso y profesionalismo ejercido por cada uno de los conferencistas durante sus intervenciones, que lograron la atención y cautivaron al público asistente.

Usted, fue fundamental en este proceso y los organizadores estamos seguros que no nos equivocamos en elegirlo como uno de los expositores del Congreso. Su experiencia, reconocimiento y sabiduría, fueron vitales para éste.

En nombre de la Universidad de Medellín y el Departamento de Ciencias Básicas, le doy las más infinitas gracias por su aporte. Este Congreso, siempre lo recibirá con los brazos abiertos, máxime cuando usted aporta a la solución de los problemas de la sociedad y a la formación de los futuros profesionales que tendrán en sus manos el futuro del mundo.

De nuevo mil gracias por todo y cuente con nosotros.

Cordialmente,

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Certifica que:

LINA MARIA MUÑOZ MESA

PONENTE

Asistió al **II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas**, realizado los días 5, 6 y 7 de mayo de 2010 en la Universidad de Medellín, con una intensidad de 24 horas.

José Alberto Rúa Vásquez
JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento de Ciencias Básicas

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Certifica que:

SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO

PONENTE

Asistió al **II Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas**, realizado los días 5, 6 y 7 de mayo de 2010 en la Universidad de Medellín, con una intensidad de 24 horas.

José Alberto Rúa Vásquez
JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento de Ciencias Básicas

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica